Gravier Thomas

MVA
2024-2025

HW n°1 Convex Optimisation

Exercice n°1

1) On remarque que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i=1,\dots,n\}$ est une intersection de demi espace.

En effet $\alpha_i \leq x_i$ peut se réécrire $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t_{\leftarrow i} x \geq \alpha_i$, $x \in \mathbb{R}^n$

et $x_i \leq \beta_i$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t_{\leftarrow i} x \leq \beta_i$

On a donc $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i=1,\dots,n\}$

$$= \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t_{\leftarrow i} x \leq \beta_i \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t_{\leftarrow i} x \geq \alpha_i \right\} \right)$$

L'intersection des demi-espace étant convexe par intersection de convexes
On a un intersection sur $i \in [\![1,n]\!]$ de convexe qui elle aussi est convexe
Donc le rectangle est bien un ensemble convexe.

2) On applique la définition de la convexité

$S = \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 x_2 \geq 1\}$

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in S$, $\theta \in [0;1[$

Montrons que $\theta x + (1-\theta) y \in S$

$$\theta x + (1-\theta) y = \begin{pmatrix} \theta x_1 + (1-\theta) y_1 \\ \theta x_2 + (1-\theta) y_2 \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Maintenant on calcul $X_1 X_2$ pour vérifier la condition.

$$X_1 X_2 = (\theta x_1 + (1-\theta) y_1)(\theta x_2 + (1-\theta) y_2)$$
$$= \theta^2 x_1 x_2 + (1-\theta)^2 y_1 y_2 + \theta(1-\theta)(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$
$$\geq \theta^2 + (1-\theta)^2 + \theta(1-\theta)(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$ car $x_1 x_2 \geq 1$, $y_1 y_2 \geq 1$

et $x_1 y_2 + y_1 x_2 \geq 2\sqrt{\underbrace{x_1 y_2 y_1 x_2}_{1}}$

donc $X_1 X_2 \geq \theta^2 + (1-\theta)^2 + 2\theta(1-\theta)$ inégalité de la moyenne
$\geq (\theta + 1 - \theta)^2 = 1$

donc $X \in S$ la propriété est vérifié.

3) Soit $C_y = \{x \mid \|x - x_0\|_2 \leq \|x - y\|_2\}$ avec $y \in \mathbb{R}^n$

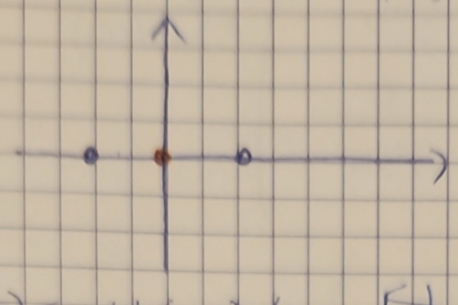
$x \in C_y \iff \|x - x_0\|_2 \leq \|x - y\|_2$
$\iff \|x - x_0\|^2 \leq \|x - y\|^2$
$\iff \|x\|^2 + \|x_0\|^2 - 2\langle x, x_0 \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$
$\iff \cancel{\|x\|^2} + \|x_0\|^2 - 2\langle x, x_0 - y \rangle \leq \cancel{\|x\|^2} + \|y\|^2$
$\iff \dfrac{\|x_0\|^2 - \|y\|^2}{2} \leq \langle x, x_0 - y \rangle$

C_y est un demi espace donc un ensemble convexe

Et l'ensemble dont on veut prouver la convexité est $\bigcap_{y \in S} C_y$ avec $S \subset \mathbb{R}^n$

c'est une intersection de convexe donc $\bigcap_{y \in S} C_y$ est un convexe.

4) Cet ensemble n'est pas convexe, si on prend la droite réelle $\mathbb{R}^1$ avec $A = \{-1, 1\}$ $B = \{0\}$



$\{x \mid dist(x,S) \leq dist(x,T)\} = \cancel{[\ ]}$ $]-\infty ; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2} ; +\infty[$
qui n'est pas convexe, avec $x = \frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{1}{2}$

$z = \theta x + (1-\theta) y = \frac{1}{2}\theta - \frac{(1-\theta)}{2} = 0 \notin$

donc $z = 0 \notin]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

5) On veut montrer que $\{x \mid x + S_2 \subseteq S_1\}$ est convexe
Prenons $y \in S_2$ $\{x \mid x + y \subseteq S_1\}$

Notre ensemble est $\bigcap_{y \in S_2} \{x \mid x + y \subseteq S_1\} = \bigcap_{y \in S_2} S_1 - y$

or S_1 est convexe d'après l'énoncé, un convexe translaté par un vecteur reste convexe, de même par intersection.
Donc $\{x \mid x + S_2 \subseteq S_1\}$ est convexe.

Exercice n°2 :

1) On calcule la hessienne de $f(x_1, x_2)$ sur $\mathbb{R}^2_{++}$ qui est convexe, ouvert. De plus $f(x_1, x_2)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2_{++}$
dom f
orthant

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R})$$

Ses valeurs propre sont $-1 ; 1$ donc $\nabla^2 f(x_1, x_2) \not\succeq 0$
Elle n'est ni convexe ni concave (en considérant $-f$ de vp $-1, 1$ aussi)

2) On calcul la hessienne sur $\mathbb{R}^2_{++}$ ouvert convexe

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x_2 x_1^3} & \frac{1}{x_2^2 x_1^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2^2} & \frac{2}{x_2^3 x_1} \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R})$$

$$= \frac{1}{x_1 x_2} \begin{pmatrix} \frac{2}{x_1^2} & \frac{1}{x_2 x_1} \\ \frac{1}{x_1 x_2} & \frac{2}{x_2^2} \end{pmatrix}$$

$$tr(\nabla^2 f(x_1, x_2)) = \frac{1}{x_1 x_2} \left(\frac{2}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} \right) \geq 0$$

$$\det(\nabla^2 f(x_1, x_2)) = \frac{1}{x_1^2 x_2^2} \left(\frac{4}{x_1^2 x_2^2} - \frac{1}{x_1^2 x_2^2} \right) \geq 0$$

donc les valeurs propres sont de même signe et de somme positive
Donc les valeurs propre sont positive.

$f(x_1, x_2)$ est ~~concave~~ convexe. (non concave car si on prend $-f$ $\prod vp > 0$ $\sum vp \leq 0$)

3) De même on calcul la hessienne

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2^2} \\ -\frac{1}{x_2^2} & \frac{2x_1}{x_2^3} \end{pmatrix}$$

$$\det \nabla^2 f(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_2^4} \leq 0$$

$tr(\nabla^2 f(x_1, x_2)) = \frac{2x_1}{x_2^3} \geq 0$ donc les valeurs propre sont ~~positive~~ de signes opposé et de somme positive. $\nabla^2 f(x_1, x_2) \notin S_2^{+}$
Donc $f(x_1, x_2)$ n'est ni concave ni convexe.

4) On calcul la hessienne sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}^2_{++}$, $f(x_1,x_2)$ différentiable

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \alpha(1-\alpha)\, x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & \frac{1}{x_1 x_2} \\ \frac{1}{x_1 x_2} & -\frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}$$

$\alpha(1-\alpha)\, x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \geq 0$, donc la $tr(\nabla^2 f(x_1,x_2))$ est négative et le ~~produ~~ $\det(\nabla^2 f(x_1,x_2))$ est nulle

Le produit des valeur propre est nulle donc une des valeur propre est nulle, et avec la trace on a que l'autre valeur propre est négative. Donc ~~de~~ $\nabla^2 f(x_1,x_2) \preceq 0$

f est concave.

Exercice n° 3 :

1) On utilise la méthode du cour $f(X+tV)$ avec $\forall\ X \succ 0$ ~~et~~ $V \in S^n$

$$f(X+tV) = tr((X+tV)^{-1}) = tr(X^{-1}(I_n + X^{-1}tV)^{-1})$$

$$= tr(X^{-1}(I_n + X^{-\frac{1}{2}} tV X^{-\frac{1}{2}})^{-1})$$

$X^{-\frac{1}{2}} tV X^{-\frac{1}{2}} \in S^n$ si on calcul la transposé c'est immédiat, donc on diagonalise tel que $Z^{-\frac{1}{2}} V Z^{-\frac{1}{2}} = P \Delta P^T$

$$= tr(X^{-1}(I_n + tP\Delta P^T)^{-1})$$

$$= tr(P^T X^{-1} P (I_n + t\Delta)^{-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (P^T X^{-1} P)_{ii} \left(\frac{1}{1+\lambda_i t}\right)$$

avec λ_i la $i$ème valeur propre de $Z^{-\frac{1}{2}} V Z^{-\frac{1}{2}}$

On remarque une somme de fonction convexe $\frac{1}{1+t\lambda_i}$ donc $tr(X^{-1})$ est convexe.

2) $f(X,y) = y^T X^{-1} y$ qu'on peut réécrire sous la forme d'un sup

$y^T X^{-1} y = \sup_z (2z^T y - z^T X z)$ qui d'après le cour est convexe car ~~est une~~ f peut être assimilé à une forme conjugue.

3) ~~On peut exprimer les valeurs singulière comme $\sup_{\|u\|=1}(u^T X u)$~~
~~Donc on a une somme de fonction convexe~~

Comme X est une matrice symétrique on a $f(X) = \sum \sigma_i(X) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ avec λ_i la $i$ème valeur propre de X. Cette décomposition existe car X est symétrique réelle, De plus $|.|$ est une fonction convexe.
On a donc une somme de fonction convexe.