GRAVIER Thomas
thomas.gravier@gadz.org

KERNEL ASSIGNMENT 01

01/28/25

1 Exercice 1

1) $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+, \quad K(x, x') = \min(x, x')$

On peut réécrire $\min(x, x')$ comme un produit scalaire $\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{[0,x]}\mathbb{1}_{[0,x']}\, dt$. On reconnaît le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. D'après le cours, c'est un noyau positif défini.

2) $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+, \quad K(x, x') = \max(x, x')$

On prend $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. La matrice du noyau est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est -1. Donc elle a deux valeurs propres de signes opposés. On peut conclure que le noyau n'est pas positif défini.

3) Soit $\mathcal{X}$ un ensemble et $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions non négatives:

$$\forall x, y \in \mathcal{X} \quad K(x, y) = \min\big(f(x)g(y), f(y)g(x)\big)$$

On transforme ça en produit scalaire en se ramenant au résultat du 1) .

On prouve facilement que $\min(ab, cd) = ac \min(\frac{b}{c}, \frac{d}{a})$

On obtient alors avec notre énoncé :

$$\min(f(x)g(y), f(y)g(x)) = f(x)g(y) \min\left(\frac{g(y)}{f(y)}, \frac{g(x)}{f(x)}\right) = K_1K_2 \tag{1}$$

On reconnait ci dessus :

- $K_1 = f(x)g(y)$ qui est le produit scalaire dans $\mathbb{R}$
- $K_2 = \min(\frac{g(y)}{f(y), \frac{g(x)}{f(x)}}$ qui est le produit scalaire du 1) de l'exercice 1.

K(x,y) se décomposant en produit de K_1 par K_2 on a d'après le cour que c'est un noyau positif définie.

2 Exercice 2

Soit un noyau gaussien $K(x, x') = e^{-\frac{\alpha}{2}\|x-x'\|^2}$

On développe l'inegalité suivante :

$0 \leq \|\phi(x) - \phi(x')\|^2 = K(x, x) + K(x', x') - 2K(x, x') = 2(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}\|x-x'\|^2})$ (*)

L'inégalité de convexité $e^x \geq 1 + t$ appliqué à (*) donne $\|\phi(x) - \phi(x')\|^2 \leq \alpha\|x - x'\|^2$

Par la croissance de la fonction racine carrée, on obtient le résultat demandé :

$$\|\phi(x) - \phi(x')\| \leq \sqrt{\alpha}\|x - x'\| \tag{2}$$

3 Exercice 3

Let K_1 and K_2 be two positive definite kernels on a set $\mathcal{X}$, and let α, β be two positive scalars. For $x_i \in \mathcal{X}$ and coefficients $a_i \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i,j} a_i a_j \big(\alpha K_1(x_i, x_j) + \beta K_2(x_i, x_j)\big) = \alpha \sum_{i,j} a_i a_j K_1(x_i, x_j) + \beta \sum_{i,j} a_i a_j K_2(x_i, x_j) \geq 0 \tag{8}$$

Thus, $\alpha K_1 + \beta K_2$ is also a positive definite kernel.

Using Aronszajn's theorem, there exists an RKHS $\mathcal{H}$ associated with the kernel $K = \alpha K_1 + \beta K_2$. Note that we can assume $\alpha = \beta = 1$, as we can always rescale the kernel. Let ϕ denote the feature map associated with K. Then, for all $x, x' \in \mathcal{X}$:

$$K(x, x') = \langle \phi(x), \phi(x') \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi_1(x), \phi_1(x') \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle \phi_2(x), \phi_2(x') \rangle_{\mathcal{H}_2}. \tag{9}$$

This suggests that one should consider the space $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ as the RKHS associated with K, with scalar product

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

The feature map ϕ is then defined as:

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x).$$

We need to show that this space is indeed a Hilbert space, particularly its completeness.

3.2 Second Question

Suppose that f belongs to the RKHS associated with K. Then, for all $(x_i) \in \mathcal{X}^n$ and $(a_i) \in \mathbb{R}^n$, we have:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} a_i a_j \big(K(x_i, x_j) - \lambda f(x_i) f(x_j)\big) &= \|\sum_i a_i K(x_i, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 - \lambda\big(\sum_i a_i f(x_i)\big)^2 && (10)\\
&= \|\sum_i a_i K(x_i, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 - \lambda\Big(\sum_i a_i \langle f, K_{x_i} \rangle\Big)^2 && (11)\\
&= \|\sum_i a_i K(x_i, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 - \lambda \langle f, \sum_i a_i K_{x_i} \rangle^2 && (12)\\
&= \|\sum_i a_i K(x_i, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 - \lambda \|f\|^2 (\|\sum_i a_i K_{x_i}\|_{\mathcal{H}})^2 && (13)\\
&\geq \|\sum_i a_i K(x_i, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 \big(1 - \lambda \|f\|\big). && (14)
\end{aligned}$$

Thus, for $\lambda < 1/\|f\|$, the kernel is positive definite.

Conversely, assume that the first question is true and that the RKHS of the sum of two kernels is the sum of their RKHSs. Then, if there exists λ such that $K(x, y) - \lambda f(x) f(y)$ is positive definite, we can write:

$$K(x, y) = K_1(x, y) - \lambda f(x) f(y) + \lambda f(x) f(y),$$

where $K(x, y)$ is the sum of the RKHSs of K_1 and $\lambda f(x) f(y)$. However, f belongs to the RKHS of $\lambda f(x) f(y)$ and 0 belongs to the RKHS of K_1. Hence, the sum of the previous elements is in the RKHS of K.