최적제어_유도 미사일

2021년 7월 2주차 LIG 넥스원 하계 현장실습 내용을 정리함

Optimal Control (최적 제어)

제어 이론

- 고전 제어 이론 (Conventional Control Theory) : 선형 시불변, 단일 입출력 시스템에 적용할 수 있는 이론
- 현대 제어 이론 (Modern Control Theory) : 선형과 비선형, 시불변과 시변인 다중입출력 시스템에 적용할 수 있는 이론

현대에는 **여러개의 입출력**을 가지는 시스템을 개발하고 시간에 따라 시스템의 변수가 변하는 **시변시스템**을 고려하기 시작했으므로 **현대 제어이론을 많이 활용**

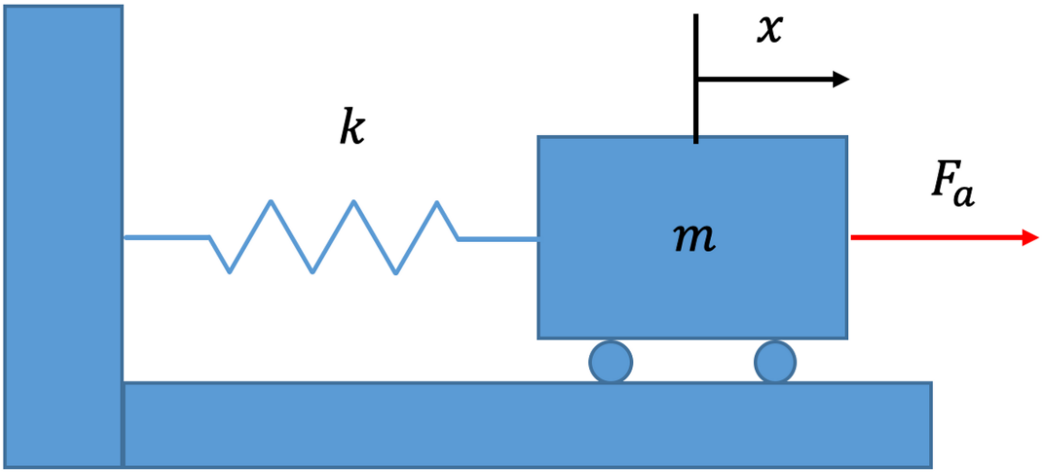
상태방정식(State Space Equation)

- 현대 제어이론에서 시스템을 표현하기 위해 상태방정식을 사용
- 상태 방정식

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

  - 상태(State) : 어떤 시점(t=t0)에서의 변수를 알고, 시간이 지난 어느 시점(t >= t0)에서의 입력을 알면, 입력이 주어진 시점(t >= t0)에서 시스템의 거동을 완전히 결정할 수 있을 때, 이러한 변수(상태변수)들의 최소집합을 말한다.
  - 상태 변수(State Variable) : 동적 시스템의 상태변수는 동적시스템의 상태를 결정할 수 있는 최소개수의 변수들
  - 상태벡터(State Vector) : 주어진 시스템의 거동을 표현하기 위해 n개의 상태변수가 필요하다면, 이 n개의 변수를 벡터x의 n개의 성분으로 생각할 수 있다. 이러한 벡터를 상태벡터라고 한다. 즉 상태를 벡터형태로 나타낸 것이다.
    - Computer는 고차 미분 방정식을 풀수 없으므로 일차 미분 방정식을 푸는 형태로 나타낸다.
  - 상태 공간(State space) : 좌표축이 x1, x2, ... xn 축으로 구성된 n차원의 공간을 상태공간(State Space)이라고 한다. 하나의 상태는 상태공간에서 한 점을 의미한다.

- State space representation of mass-spring system



- mass-spring system의 dynamics(동역학식)

$$\sum F = ma \quad where\ a = \ddot{x}$$
$$\sum F = F_a - kx = m\ddot{x}$$
$$\therefore m\ddot{x} + kx = F_a$$

- dynamics -> state space

$$x_1 = x$$
$$\dot{x_1} = \dot{x} = x_2$$
$$x_2 = \dot{x_1} = \dot{x}$$
$$\dot{x_2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{1}{m}F_a$$

- 외부힘 F_a 를 제어입력 u로 생각한다.

$$F_a = u$$

- State equations

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$
$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

  - 제어입력 u를 잘 선택하면 위의 mass-spring system에서의 수레의 속도 및 가속도를 결정하여 수레를 원하는 위치로 이동시킬 수 있다는 것이다.

제어 방법

시스템이 빠르고 정확하게 원하는 위치하도록 하는 제어 방법은 크게 Output feedback control과 State feedback control 이 있다.

- Output feedback control

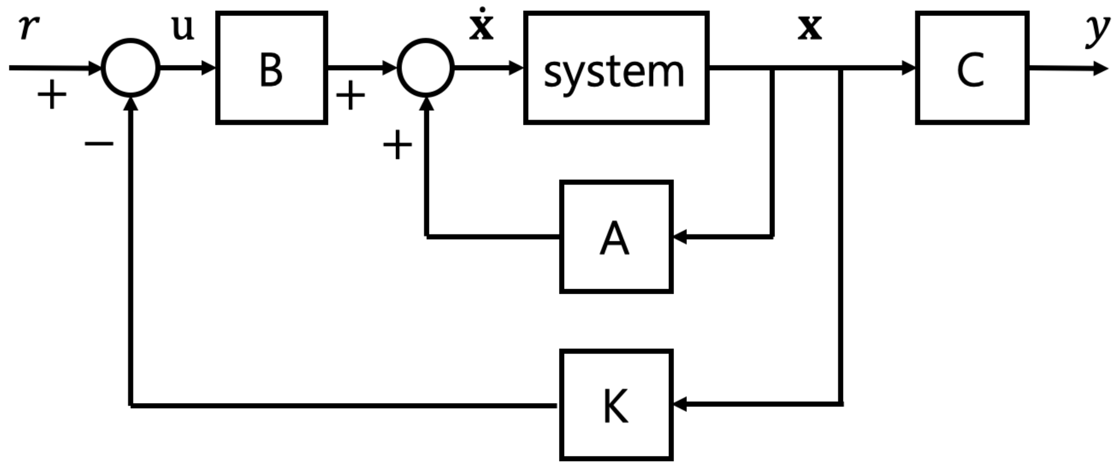
  Output feedback control은 현재의 상태를 센서로 측정하고, 이를 되먹임(feedback)하여 제어하는 방법이다. 우리가 가장 많이 사용하는 PID controller가 Output feedback controller에 해당한다.

$$u(t) = K_p e + K_I \int e\,dt + K_D \dot{e}$$
$$e(t) = r(t) - y(t)$$

  센서에서 측정한 현재의 상태 y(t)와 원하는 위치 r(t)와의 차이 e(t)와 e(t)를 적분 및 미분한 값에 각각 Kp, Ki, 그리고 Kd의 PID 게인을 곱하여 제어 입력으로 사용하는 방법

- State feedback control

State feedback control은 말 그대로 시스템의 상태를 되먹임(feedback)하여 제어하는 방법이다



시스템 모델(A, B)는 변하지 않는 값이기 때문에, 우리는 K를 적절히 결정해서 시스템이 어떤 속도와 가속도로 움직여야 할지 조절할 수 있다.

Output feedback control : trial and error 방법 으로 K 구함

State feedback control : 시스템 모델(A,B) 을 이용해서 K를 결정할 수 있음.

즉 ,모델만 정확하다면 optimal 한 K를 계산할 수 있어서 게인 값을 찾는데 드는 시간을 줄일 수 있다

Hamiltonian System

The Least Action Principle - 최소 작용 원리

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)dt$$

- 시간 t1 에서 t2 에서의 시스템의 동역학 상태가 각각 , A B 라고 하면 상태 A에서 B로의 진화는 다음 적분의 값이 최소가 되도록 진화
- 이 적분을 시스템의 작용 혹은 Action 이라고 정의하며 적분안의 라그랑지안은 경로에 따라 그 값이 달라지는 경로의 함수 이를 최소 작용 원리 , 혹은 해밀턴의 원리

Hamiltonian 과 제어이론

- 상태방정식

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

- Performance Measure (cost function)

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt$$

- Hamiltoian

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda, t) = g(x(t), u(t), t) \ + \lambda f(x(t), u(t), t)$$

- 상태방정식 조건

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}(x(t), u(t), \lambda, t)$$

- 공상태 방정식 조건

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t), u(t), \lambda, t)$$

- 최적 제어조건

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x(t), u(t), \lambda, t)$$

  해당 이론은 최종적으로 Pontryagins's minimum(maximum) Principle 를 통해 완성된다.

Pontryagins's minimum (maximum) Principle

최적 제어는 반드시, Hamiltonian을 최소(혹은 최대) 로 만드는 것

- Minimum Principle

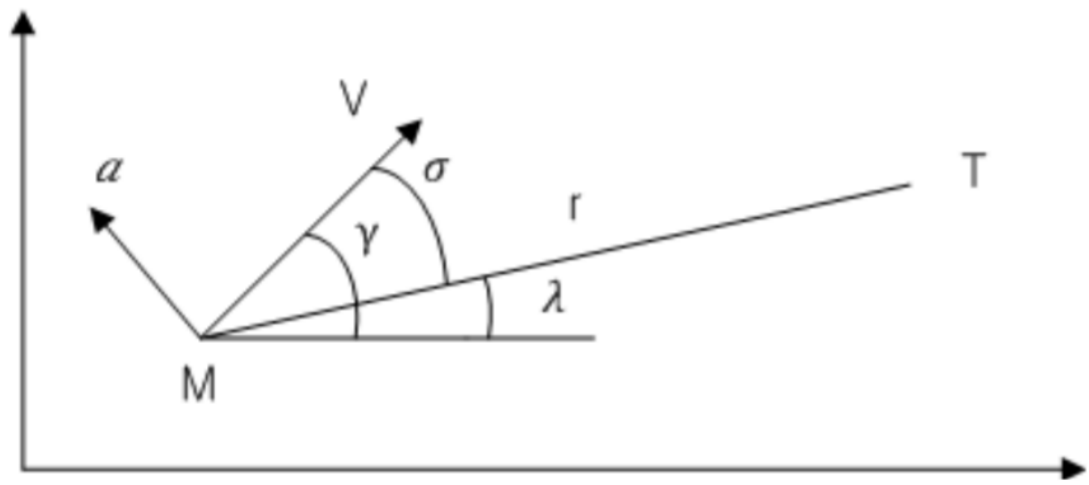
$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*, t) \leq \mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*, t)$$

  어떤 효용을 극대화 시키는 것으로 해석할 때 이렇게 된다.

결론적으로 아래의 식을 만족 시켜야한다.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$$

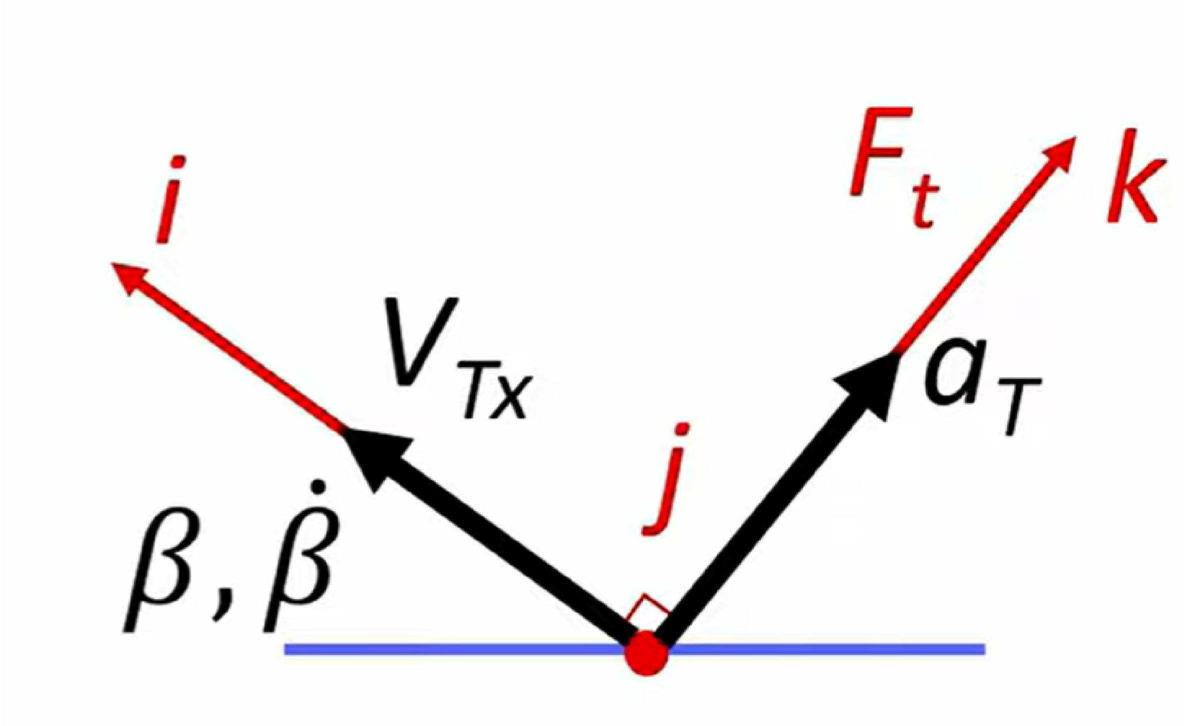
비례항법유도법칙 유도



미사일과 목표물의 dynamics

- (1) 식의 유도

$$\dot{r} = -V cos\sigma \quad \cdots (1)$$



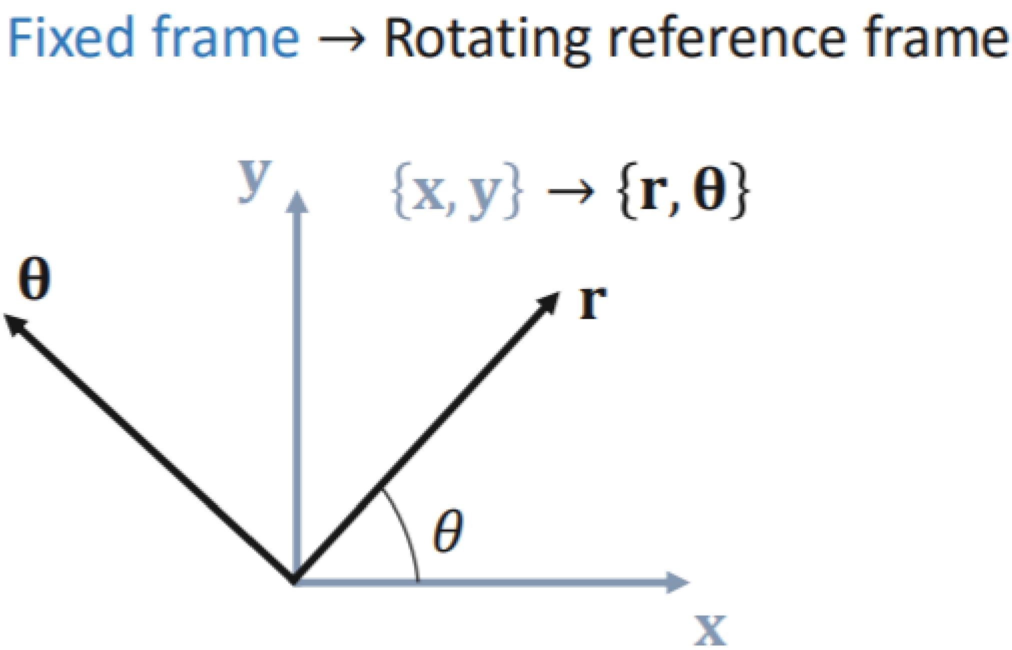
$$V_T^i = \begin{bmatrix} -cos(\beta) & sin(\beta) \\ sin(\beta) & cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{Tx}^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

inertial coordinate system (관성 좌표계) 에서 Target Frame 으로의 회전변환 행렬을 내적하여 나타낸다.

$$V_{Tx}^i = -Vcos(\beta)$$
$$\dot{R}_{Tx}^i = V_{Tx}^i$$

- (2)식의 유도

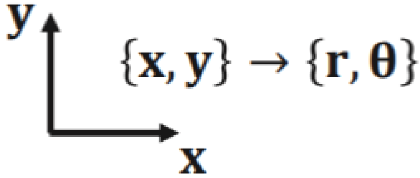
$$\dot{\sigma} = \dot{\gamma} - \dot{\lambda} = \frac{a}{V} - \frac{V}{r}sin\sigma \quad \cdots (2)$$



$$\mathbf{r} = \cos\theta\,\mathbf{x} + \sin\theta\,\mathbf{y}$$
$$\boldsymbol{\theta} = -\sin\theta\,\mathbf{x} + \cos\theta\,\mathbf{y}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\mathbf{x} + \dot{\theta}\cos\theta\,\mathbf{y}$$
$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\mathbf{x} - \dot{\theta}\sin\theta\,\mathbf{y}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\theta}\boldsymbol{\theta}$$
$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\dot{\theta}\mathbf{r}$$



- sigma 의 각을 작다고 가정하여 비선형 시스템을 선형시스템으로 바꾼다.

$$\dot{r} = -V$$
$$\dot{\sigma} = \frac{a}{V} - \frac{V}{r}$$

Cost Function & Hamiltonian 정의

- cost function

  입력 값 a 가 최소가 되는 것을 목표로 하기 때문에 cost Function은 아래의 식처럼 구성된다.

$$J = 0.5\int_0^{t_f} a^2\,dt$$

- Hamiltonian function

$$H = 0.5a^2 + p1 \times V - p2\left(\frac{a}{V} + \frac{V\sigma}{r}\right), (\sigma(t_f) = 0)$$

- 결과

$$a(t) = 3\left(\frac{V\sigma(t)}{t_f - t}\right) = 3\dot{\sigma}(t)$$