Variáveis aleatórias

O resultado de um experimento probabilístico pode ser, frequentemente, uma contagem ou uma medida. Quando isso ocorre, o resultado é chamado de variável aleatória.

A variável aleatória x representa um valor numérico associado a cada um dos resultados de um experimento probabilístico. Alguns exemplos de variáveis aleatórias seriam:

- Número de coroas numa jogada de uma moeda, ou seja, $x = 0$ ou 1.
- Número de fregueses que entram numa grande loja no espaço de 20 minutos, ou seja, $x = 0, 1, 2, ...$
- Altura (em metros) dos estudantes numa sala de aula, ou seja, $1{,}40 < x < 2{,}20$.

Existem dois tipos de variáveis aleatórias: as discretas e as contínuas.

- Uma variável aleatória é discreta se assume valores que podem ser contados, ou seja, se houver um número finito ou contável de resultados possíveis que possam ser enumerados;
- Uma variável é considerada contínua quando pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo, ou seja, se houver um número incontável de resultados possíveis, representados por um intervalo sobre o eixo real.

Exercício 1

Determine se a variável aleatória X é discreta ou contínua:
a) Número de acidentes numa semana
b) Número de defeitos em uma peça
c) Duração de uma conversa telefônica
d) Número de falhas numa safra
e) Tempo necessário para produzir uma peça
f) Peso de contêineres contendo minério de ferro

Resposta: a) Discreta b) Discreta c) Contínua d) Discreta e) Contínua f) Contínua

Variáveis aleatórias discretas

Distribuição discreta de probabilidade

A cada valor de uma variável aleatória discreta pode ser atribuída uma probabilidade. Ao enumerar cada valor da variável aleatória com a sua probabilidade correspondente, forma-se uma *distribuição de probabilidade*.

Definição: Uma distribuição discreta de probabilidade enumera cada valor que a variável aleatória pode assumir, ao lado de sua probabilidade. Uma distribuição de probabilidade deve satisfazer às seguintes condições:

- ✓ A probabilidade de cada valor da variável discreta deve estar no intervalo de 0 a 1, ou seja, $0 \leq P(X=x) \leq 1$;
- ✓ A soma de todas as probabilidades deve ser 1, ou seja, $\Sigma P(X=x_i) = 1$.

Uma vez que as probabilidades representam frequências relativas, uma distribuição discreta de probabilidade pode ser representada da seguinte maneira:

X	x_1	x_2	…	x_n
P(X=x)	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	…	$P(X=x_n)$

Uma observação sobre notação: variáveis aleatórias sempre devem ser denotadas com letra maiúscula e os valores assumidos pelas variáveis serão denotados pelas letras minúsculas correspondentes. Portanto, a variável X pode assumir o valor x_i, e $i = 1, 2, 3, ...$

Exemplo 1

Uma companhia analisa diariamente o número de vendas de seus novos funcionários durante um período de testes de cem dias. Os resultados para um novo funcionário são apresentados abaixo por meio de uma tabela de frequências:

Vendas por dia (x)	Número de dias (Frequência)
0	16
1	19
2	15
3	21
4	9
5	10
6	8
7	2

Para organizar a distribuição de probabilidades para a variável aleatória X: *Número de vendas por dia*, onde *x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7*, precisamos calcular as probabilidades de ocorrência de cada um desses valores utilizando a frequência com que eles ocorrem, ou seja:

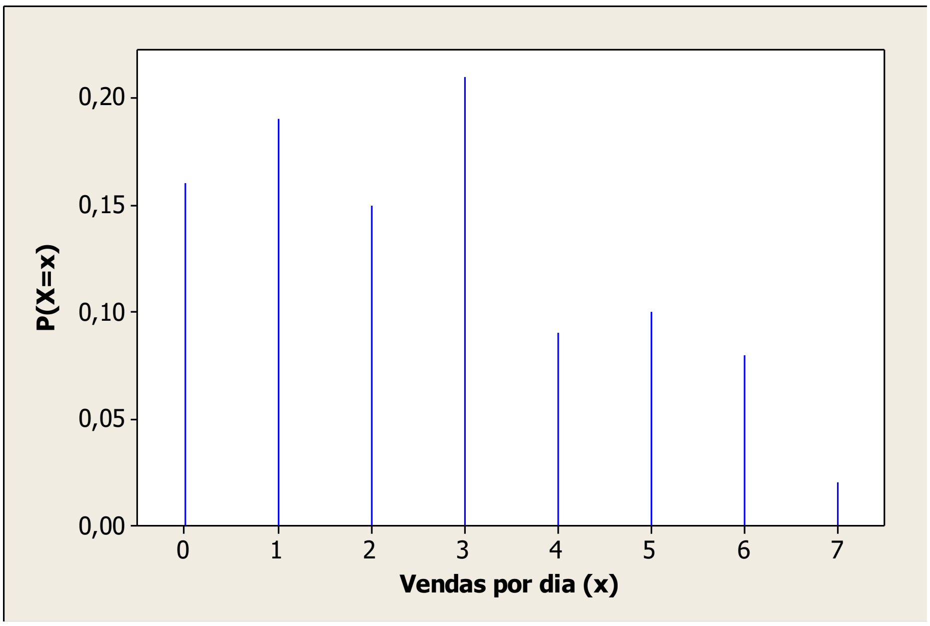
Vendas por dia (x)	Número de dias (Freqüência)	**Probabilidades P(X=x)**
0	16	**16/100=0,16**
1	19	**19/100=0,19**
2	15	**0,15**
3	21	**0,21**
4	9	**0,09**
5	10	**0,10**
6	8	**0,08**
7	2	**0,02**
Total	**100**	**1,00**

É interessante observar que cada probabilidade está no intervalo de 0 a 1 e que a soma de todas as probabilidades é 1.

A partir daí, construímos a distribuição de probabilidades enumerando cada valor que a variável *x* assume com a sua probabilidade correspondente:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X=x)	0,16	0,19	0,15	0,21	0,09	0,10	0,08	0,02

Podemos construir o gráfico da distribuição de probabilidades da seguinte maneira:



Função de Distribuição Acumulada

Definição: Dada a variável aleatória X, chamaremos de função de distribuição acumulada (f.d.a.), ou simplesmente função de distribuição (f.d.) a função:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Exemplo 1 - Continuação

A partir da distribuição de probabilidade obtida para o número de vendas por dia iremos calcular a função de distribuição acumulada:

$P(X\leq 0) = P(X=0) = 0,16$

$P(X\leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0,16+0,19 = 0,35$

$P(X\leq 2) = P(X\leq 1) + P(X=2) = 0,35+0,15 = 0,5$

$P(X\leq 3) = P(X\leq 2) + P(X=3) = 0,5+0,21 = 0,71$

$P(X\leq 4) = P(X\leq 3) + P(X=4) = 0,71+0,09 = 0,8$

$P(X\leq 5) = P(X\leq 4) + P(X=5) = 0,8+0,1 = 0,9$

$P(X\leq 6) = P(X\leq 5) + P(X=6) = 0,9+0,08 = 0,98$

$P(X\leq 7) = P(X\leq 6) + P(X=7) = 0,98+0,02 = 1$

A forma usual de se representar a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , se\ x < 0 \\ 0{,}16 & , se\ 0 \leq x < 1 \\ 0{,}35 & , se\ 1 \leq x < 2 \\ 0{,}5 & , se\ 2 \leq x < 3 \\ 0{,}71 & , se\ 3 \leq x < 4 \\ 0{,}8 & , se\ 4 \leq x < 5 \\ 0{,}9 & , se\ 5 \leq x < 6 \\ 0{,}98 & , se\ 6 \leq x < 7 \\ 1 & , se\ x \geq 7 \end{cases}$$

Média, Variância e Desvio Padrão para variáveis aleatórias discretas

É possível medir a tendência central de uma distribuição de probabilidade por meio de sua média e determinar a variabilidade por meio de sua variância e desvio padrão. A média de uma variável aleatória discreta é definida da seguinte maneira:

A média ou valor esperado ou ainda a esperança matemática de uma variável aleatória discreta é dada por: $\mu = \sum [x_i . P(X = x_i)]$. *Cada valor de x deve ser multiplicado por sua probabilidade correspondente e os produtos devem ser somados.*

Embora a média da variável aleatória de uma distribuição de probabilidade descreva um resultado típico, ela não fornece informações sobre a variabilidade dos resultados. Para estudar a variação dos resultados, podem-se usar a variância e o desvio padrão da variável aleatória de uma distribuição de probabilidade.

A variância de uma variável aleatória discreta pode ser obtida por: $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$*, onde* $E(X^2) = \sum [x_i^2 . P(X = x_i)]$*. O desvio padrão, como já foi visto, é obtido pela raiz quadrada da variância :* $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ *.*

Exemplo 1 (Continuação)

Com base na distribuição de probabilidade obtida anteriormente, calcule a média e o desvio padrão do número de vendas por dia.

A distribuição de probabilidades que havíamos encontrado para o número de vendas por dia é:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X=x)	0,16	0,19	0,15	0,21	0,09	0,10	0,08	0,02

- Média:

$\mu = \sum [x_i . P(X = x_i)]$ = (0 . 0,16)+(1 . 0,19)+(2 . 0,15)+(3 . 0,21)+(4 . 0,09)+

+(5 . 0,10)+(6 . 0,08)+ (7 . 0,02) = 2,6 vendas por dia.

- Variância:

Primeiramente vamos obter o $E(X^2)$:

$E(X^2) = \sum [x_i^2 . P(X = x_i)]$ = (0^2 . 0,16)+(1^2 . 0,19)+(2^2 . 0,15)+(3^2 . 0,21)+

+(4^2 . 0,09)+(5^2 . 0,10)+(6^2 . 0,08)+(7^2 . 0,02) = 10,48

A partir daí, calculamos a variância:

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$ = 10,48 – $(2,6)^2$ = 3,72 (vendas por dia)^2.

O desvio padrão será: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ = 1,9287 vendas por dia.

Propriedades da Esperança Matemática

i. **Propriedade 1:** Se X = c, onde c é uma constante, então E(X) = c.
ii. **Propriedade 2:** Suponha-se que c seja uma constante e X seja uma variável aleatória. Então E(cX) = cE(X).

iii. **Propriedade 3:** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer. Então, $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
a) Se $Y = aX + b$, onde a e b são constantes, então $E(Y) = aE(X) + b$. Em linguagem corrente: o valor esperado de uma *função linear de X*. Isto não será verdadeiro, a menos que se trate de função linear.
b) Sejam *n* variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$. Então, $E(X_1 + X_2 +...+ X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$.

Propriedades da Variância

i. **Propriedade 1:** Se c é uma constante, então $Var(X+c) = Var(X)$.
ii. **Propriedade 2:** Suponha-se que c seja uma constante e X seja uma variável aleatória. Então $Var(cX) = c^2Var(X)$.
iii. **Propriedade 3:** Se (X , Y) for uma variável aleatória bidimensional, e se X e Y forem independentes. Então, $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.
Comentário: É importante compreender que a variância *não é*, em geral, *aditiva*, como é o valor esperado. Com a hipótese complementar de independência a propriedade torna-se válida. A variância também não possui a propriedade de linearidade do valor médio, isto é, $Var(aX+b) \neq aVar(X)+b$. Em vez disso, teremos $Var(aX+b)=a^2Var(X)$.

As propriedades da média e da variância apresentadas são válidas tanto para variáveis aleatórias discretas quanto para variáveis aleatórias contínuas.

Variáveis aleatórias contínuas

As variáveis aleatórias contínuas são aquelas que assumem seus valores em uma escala real e que se ajustam de tal maneira às situações práticas que podem ser consideradas adequadas para fornecer respostas a hipóteses de interesse. Elas surgem da mensuração em uma escala, como peso, tempo, distância ou volume, por exemplo.

Definição: Uma variável aleatória X, definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de número reais, é dita uma *variável aleatória contínua*.

Exemplos: Salário de indivíduos, tempo de espera em uma fila, precipitação pluviométrica, altura, temperatura, etc.

Função densidade de probabilidade

Definição: Diz-se que X é uma variável aleatória contínua, se existir uma função *f(x)*, denominada *função densidade de probabilidade* (f.d.p.) de X que satisfaça as seguintes condições:

a) $f(x) \geq 0$, para todo x;

b) A área definida por f(x) é igual a 1, ou seja, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

c) Para quaisquer *a* e *b*, com $-\infty < a < b < +\infty$, teremos $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Uma conseqüência de c) é que, para qualquer valor especificado de X, digamos x_0, teremos $P(X = x_0) = 0$, porque $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$.

Na prática, isso poderia parecer contraditório. Então a probabilidade de um indivíduo ter exatamente 1,75m de altura é zero? É impossível existir um indivíduo com essa estatura? Para resolver isso, devemos admitir que a precisão dos instrumentos de medida é limitada. Na prática, 1,75 não se distingue de qualquer outro valor no intervalo, digamos, [1,745 ; 1,755], ou [1,7495 ; 1,7505]. O que nos interessa é, na realidade, a probabilidade de a variável aleatória estar em um intervalo, por pequeno que seja, e a probabilidade correspondente então já não é zero.

Em consequência disso – e ao contrário do que ocorre com as v. a. discretas – é indiferente considerarmos, ou não, os extremos quando especificamos um intervalo de uma v. a. contínua, ou seja,

$$P(a < x < b) = P(a \leq X < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

Comentário: f(x) não representa probabilidade alguma! Anteriormente já salientamos que, por exemplo, P(X = 2) = 0 e, conseqüentemente, *f(2)* certamente não representa essa probabilidade. Somente quando a função for integrada entre dois limites, ela produzirá uma probabilidade.

Exemplo 2

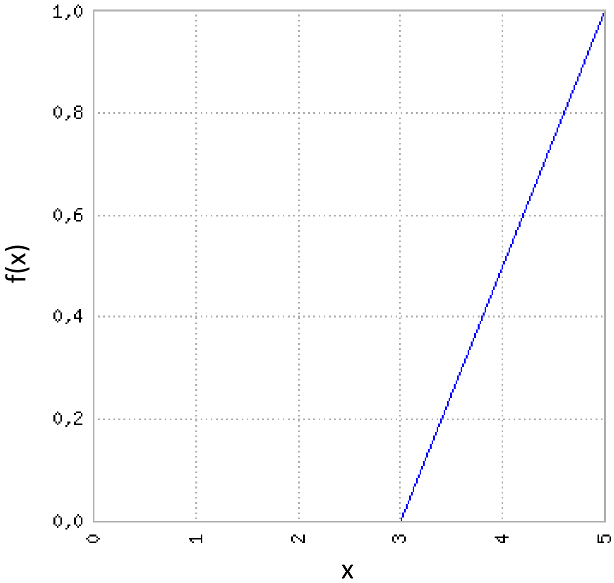
Considere a função descrita a seguir:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} & ,\text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Verifique se a função acima é uma função densidade de probabilidade (f.d.p.).

1º passo: Verificar se f(x) $\geq$ 0.

Construindo o gráfico da função f(x) verificamos que ela é positiva em todo o domínio:



2º passo: Verificar se a área sob a curva da função f(x), em seu domínio, é igual a 1.

Por meio do cálculo da área da função f(x) temos que:

$$\int_3^5 \frac{x-3}{2}dx = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2}\right)\Bigg|_3^5 = \left(\frac{5^2}{4} - \frac{3.5}{2}\right) - \left(\frac{3^2}{4} - \frac{3.3}{2}\right) = 1$$

Dessa maneira podemos dizer que a função f(x) descrita no problema é uma função densidade de probabilidade (f.d.p.).

b) Se a função for uma fdp, calcule P(3,3$\leq$X<4).

Já que a função dada realmente representa uma função densidade de probabilidade, podemos calcular a probabilidade P(3,3$\leq$X<4) integrando a função f(x) dentro do intervalo especificado:

$$P(3{,}3 \leq X < 4) = \int_{3,3}^{4} \frac{x-3}{2}dx = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2}\right)\Bigg|_{3,3}^{4}$$

$$= \left(\frac{4^2}{4} - \frac{3.4}{2}\right) - \left(\frac{3{,}3^2}{4} - \frac{3.3{,}3}{2}\right) = 0{,}2275$$

Média, Variância e Desvio Padrão para variáveis aleatórias contínuas

O valor esperado ou média da variável aleatória contínua X, com função densidade de probabilidade dada por *f(x)*, é obtida pela expressão:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Para uma variável aleatória X com densidade *f(x)*, a variância é dada por:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Como no caso discreto, a variância é a medida de dispersão mais utilizada na prática. Aqui podemos, também, utilizar a expressão alternativa:

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

onde E(X^2) é calculado por $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância e, como já sabemos, tem a mesma unidade de medida da variável original, o que facilita sua interpretação.

Exemplo 3

Num teste educacional com crianças, o tempo para a realização de uma bateria de questões de raciocínio verbal e lógico é medido e anotado para ser comparado com um modelo teórico. Este teste é utilizado para identificar o desenvolvimento da crianças e auxiliar a aplicação de medidas corretivas. O modelo teórico considera *T*, tempo de teste em minutos, como uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{40}(t-4), se\ 8 \le t < 10 \\ \frac{3}{20}, se\ 10 \le t \le 15 \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

a) Calcule o tempo médio do teste em minutos.

$$E(T) = \int_{8}^{10} t.\frac{1}{40}(t-4)dt + \int_{10}^{15} t.\frac{3}{20}dt =$$

$$= \frac{t^3}{120} - \frac{4t^2}{80}\Big|_{8}^{10} + \frac{3t^2}{40}\Big|_{10}^{15} = 2{,}2667 + 9{,}375 = 11{,}6417$$

b) Calcule o desvio padrão do tempo de teste em minutos.

Primeiramente vamos calcular o E(T^2):

$$E(T^2) = \int_{8}^{10} t^2.\frac{1}{40}(t-4)dt + \int_{10}^{15} t^2.\frac{3}{20}dt =$$

$$= \frac{t^4}{160} - \frac{4t^3}{120}\Big|_{8}^{10} + \frac{3t^3}{60}\Big|_{10}^{15} = 139{,}384$$

Agora calcularemos a variância de T:

$Var(T) = E(T^2) - \mu^2 = 139{,}384 - (11{,}6417)^2 = 3{,}8548$

Por fim, calculamos o desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3{,}8548} = 1{,}9634$

c) Calcule a probabilidade de uma criança gastar entre 9 e 12 minutos na realização do teste.

$$P(9 < T < 12) = \int_9^{10} \frac{1}{40}(t-4)dt + \int_{10}^{12} \frac{3}{20}dt = 0{,}4375$$

d) Sabendo-se que a criança demorou mais de 8 minutos na realização do teste, qual a probabilidade de que tenha gastado menos de 14 minutos.

Aqui iremos trabalhar com uma probabilidade condicional aplicada a uma variável aleatória contínua:

$$P(T < 14|T > 8) = \frac{P(T < 14 \cap T > 8)}{P(T > 8)} = \frac{P(8 < T < 14)}{P(T > 8)} =$$

$$= \frac{\int_8^{10} \frac{1}{40}(t-4)dt + \int_{10}^{14} \frac{3}{20}dt}{\int_8^{10} \frac{1}{40}(t-4)dt + \int_{10}^{15} \frac{3}{20}dt} = 0{,}85$$