Introdução à Probabilidade

A probabilidade está diariamente presente em nossas vidas: "Será que vai chover?" e "Quem vai ganhar as eleições?" são algumas das várias perguntas que nos fazemos que envolve o cálculo de probabilidades.

O conceito de probabilidade é fundamental para o estudo de situações onde os resultados são variáveis, isto é, situações em que os resultados possíveis são conhecidos, mas não se pode saber *a priori* qual deles ocorrerá.

Os gestores freqüentemente fundamentam suas decisões em uma análise de incertezas, como:

- Quais são as chances de queda das vendas se aumentarmos os preços?
- Qual é a chance de um novo investimento ser lucrativo?
- Qual é a probabilidade do projeto ser concluído no prazo?

O que é a probabilidade?

A probabilidade é uma medida numérica da possibilidade de um evento ocorrer.

Valores probabilísticos são sempre atribuídos em uma escala de 0 a 1. Uma probabilidade próxima de 0 indica que é pouco provável que um evento ocorra; uma probabilidade próxima de 1 revela que a ocorrência de um evento é quase certa.

Experimento aleatório

São aqueles experimentos cujos resultados podem não ser os mesmos, ainda que sejam repetidos sob condições essencialmente idênticas. Além disso, não se conhece um particular valor do experimento "a priori", porém podem-se descrever todos os possíveis resultados, as possibilidades. Quando o experimento for repetido um grande número de vezes surgirá uma regularidade.

Exemplos:

E_1: Lançamento de um dado e observar a face superior.

E_2:Lançamento de uma moeda quatro vezes e observar o número de caras.

E_3: Acompanhar os 30 alunos matriculados na disciplina e observar o número de aprovados.

E_4: Ligar uma lâmpada nova e observar o seu tempo de duração (em minutos).

Espaço amostral.

Chama-se espaço amostral o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório ou, em outras palavras, é o conjunto universo relativo aos resultados de um experimento.

Geralmente esse conjunto é representado pela letra Ω. Assim, pode-se dizer que, a cada experimento aleatório, sempre estará associado um conjunto de resultados possíveis ou espaço amostral.

Aos experimentos aleatórios exemplificados anteriormente estão associados os seguintes espaços amostrais, respectivamente:

$\Omega_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.
$\Omega_2 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$.
$\Omega_3 = \{ 0, 1, 2, \ldots 28, 29, 30 \}$.
$\Omega_4 = \{ t \in R \mid t \geq 0 \}$.

Evento

É um subconjunto de elementos do espaço amostral.

Aos espaços amostrais exemplificados anteriormente estão associados os seguintes eventos, respectivamente:

$A_1 = \{ 2, 4, 6 \}$, ou seja, obter uma face par.
$B_2 = \{ 2 \}$, ou seja, obter duas caras.
$C_3 = \{ 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 \}$, ou seja, pelo menos 80% de alunos aprovados na disciplina.
$D_4 = \{ t \geq 10000 \}$, ou seja, a lâmpada durar pelo menos 10000 minutos.

Axiomas da Probabilidade

Dado um espaço amostral, Ω, suponha que estamos estudando um evento A. A probabilidade do evento A ocorrer é denotada por P(A). A função P(A) só será uma probabilidade se ela satisfaz três condições básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots$, se os eventos A_1, A_2,... forem disjuntos (isto é, mutuamente exclusivos).

Como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

Existem várias maneiras de se atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral, dentre elas, vamos citar:

Por meio das características teóricas do experimento (Visão clássica): Seja E um experimento e Ω um espaço amostral, a ele associado, composto de n pontos amostrais. Define-se a probabilidade da ocorrência de um evento A, indicada por P(A), como sendo a relação entre o número de pontos favoráveis (f) à realização do evento A e o número total de pontos (n), ou seja:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número total de casos possíveis}}$$

Por exemplo, ao lançarmos uma moeda equilibrada sabemos que, teoricamente, cada face tem a mesma probabilidade de ocorrência, isto é, P(C) = P($\overline{C}$) = ½.

Por meio das freqüências de ocorrências (Visão frequentista): Se o fenômeno sob análise puder ser repetido: indefinidamente, nas mesmas condições e de forma independente (sem que uma repetição afete a seguinte), então, se A é um evento de interesse, a probabilidade de ocorrência de A é dada por:

$$P(A) = \frac{\textit{Número de vezes que A ocorreu}}{\textit{Número total de repetições do experimento}}$$

Exemplo 1: De acordo com o IBGE (1988), a distribuição dos suicídios ocorridos no Brasil em 1986, segundo a causa atribuída foi a seguinte:

Causa do suicídio	Freqüência
Alcoolismo (A)	263
Dificuldade financeira (F)	198
Doença mental (M)	700
Outro tipo de doença (O)	189
Desilusão amorosa (D)	416
Outras causas (C)	217
Total	1983

Ao selecionarmos aleatoriamente uma das pessoas que tentaram suicídio, determine a probabilidade de que a causa atribuída tenha sido:

Desilusão amorosa:

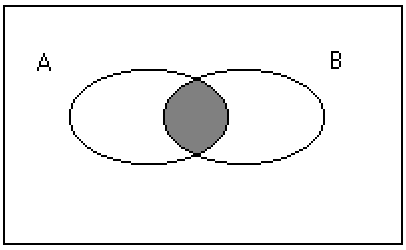
$$P(D) = \frac{416}{1983} = 0{,}2097$$

Doença mental:

$$P(M) = \frac{700}{1983} = 0{,}3530$$

Interseção de eventos

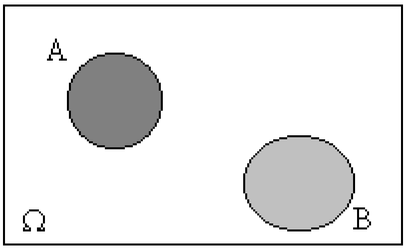
A interseção de dois eventos A e B corresponde à ocorrência simultânea dos eventos A e B. Contém todos os pontos do espaço amostral comuns a A e B. É denotada por $A \cap B$. A interseção é ilustrada pela área hachurada do diagrama de Venn abaixo.



Ω

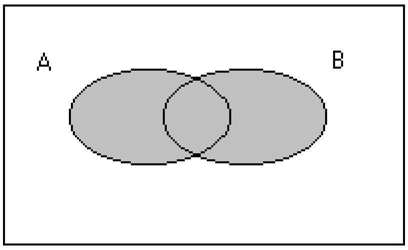
Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos

Dois eventos A e B são chamados disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não puderem ocorrer juntos, ou seja, quando não têm elementos em comum, isto é, $A \cap B = \varnothing$. O diagrama de Venn a seguir ilustra esta situação.



União de eventos

A união dos eventos A e B equivale à ocorrência de A, ou de B, ou de ambos, ou seja, a ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B. É denotada por $A \cup B$. A área hachurada na figura abaixo ilustra esta situação.



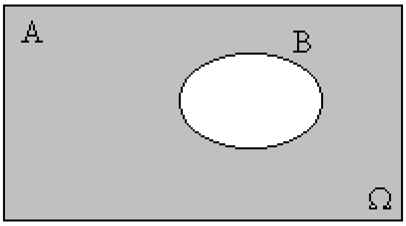
Ω

Para encontrar a união de dois eventos deve-se utilizar a seguinte fórmula:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Complementares

Dois eventos A e B são complementares se sua união corresponde ao espaço amostral e sua interseção é vazia. O diagrama a seguir ilustra tal situação.



- Para dois eventos A e B serem complementares: $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \varnothing$. Além disso, $A^C = B$ e $B^C = A$, ou seja, o complementar do evento A ocorre quando o evento A não ocorrer!
- Pode-se observar também que: P(A) = 1- P(B) e que $P(A^C) = P(B) = 1 - P(A)$.

<u>Exemplo:</u> Estudo da relação entre o hábito de fumar e a causa da morte, entre 1000 empresários.

Fumante	Causa da morte			Total
	Câncer (C)	Doença cardíaca (D)	Outros (O)	
Sim (F)	135	310	205	650
Não (F^C)	55	155	140	350
Total	190	465	345	1000

Um indivíduo é selecionado aleatoriamente entre os observados na amostra. Determine as seguintes probabilidades:

a.) Ser fumante.
b.) Ter morrido de câncer.
c.) Não ser fumante e ter morrido de doença cardíaca.
d.) Ser fumante ou ter morrido de outras causas.

Resolução:

a.) $P(F) = \frac{650}{1000} = 0,65$

b.) $P(C) = \frac{190}{1000} = 0,19$

c.) $P(F^C \cap D) = \frac{155}{1000} = 0,155$

d.) $P(F \cup O) = P(F) + P(O) - P(F \cap O) = \frac{650}{1000} + \frac{345}{1000} - \frac{205}{1000} = 0,790$

Probabilidade condicional

Em diversas situações práticas, a probabilidade de ocorrência de um evento A se modifica quando dispomos de informação sobre a ocorrência de um outro evento associado.

A probabilidade condicional de A dado B é a probabilidade de ocorrência do evento A, sabido que o evento B já ocorreu. Pode ser determinada dividindo-se a probabilidade de ocorrência de ambos os eventos A e B pela probabilidade de ocorrência do evento B, como é mostrado a seguir:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ , \ P(B) > 0}$$

Da definição de probabilidade condicional, deduzimos a regra do produto de probabilidades que é uma relação bastante útil:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B).P(B) \ , \ P(B) > 0$$

Independência de eventos

Dois eventos A e B são independentes se a ocorrência de um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja, $P(A \mid B) = P(A)$ e $P(B \mid A) = P(B)$. Se dois eventos A e B são independentes então $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Exemplo: Estudo da relação entre o criminoso e a vítima

Criminoso	Vítima			Total
	Homicídio (H)	Furto (F)	Assalto (A)	
Estranho (E)	12	379	727	1118
Conhecido (C)	39	106	642	787
Ignorado (I)	18	20	57	95
Total	69	505	1426	2000

Se uma pessoa é escolhida ao acaso entre os estudados na amostra. Determine as probabilidades de:

a.) Ter sofrido um homicídio ou ter sido vítima de um estranho.
b.) Dado que a pessoa sofreu um assalto, ter sido vítima de um conhecido.
c.) A pessoa ter sofrido um furto, dado que ela foi vítima de um estranho.

Resolução:

a.) $P(H \cup E) = P(H) + P(E) - P(H \cap E) = \frac{69}{2000} + \frac{1118}{2000} - \frac{12}{2000} = 0{,}587$

b.) $P(C \mid A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{642/2000}{1426/2000} = 0{,}450$

c.) $P(F \mid E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{379}{1118} = 0{,}338$

Teorema da probabilidade total

Sejam $A_1, A_2, A_3... A_n$ eventos dois a dois disjuntos que formam uma partição do espaço amostral, isto é,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

e assuma que $P(A_i)>0$ para $i=1, 2, 3,...n$. Então, para qualquer evento B, temos que

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$

Aplicando a regra do produto temos

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + ... + P(A_n)P(B \mid A_n)$$

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B \mid A_i)$$

Teorema de Bayes e uso da árvore de probabilidades

Sejam $A_1, A_2, A_3... A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral, e assuma que $P(A_i)>0$ para todo i. Então, para qualquer evento B tal que $P(B)>0$, temos que

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i).P(A_i)}{P(B \mid A_1).P(A_1) + P(B \mid A_2).P(A_2) + ... + P(B \mid A_n).P(A_n)}$$

Para verificar o teorema de Bayes, basta notar que $P(A_i \cap B) = P(B \cap A_i)$ e que, por sua vez, $P(B \mid A_i).P(A_i) = P(A_i \mid B).P(B)$, o que garante o numerador. O denominador segue da aplicação do <u>teorema da probabilidade total</u> para B.

A *árvore de probabilidades* é um diagrama que consiste em representar os eventos e as probabilidades condicionais associadas às realizações. Cada um dos caminhos da árvore indica uma possível ocorrência ou interseção de eventos.

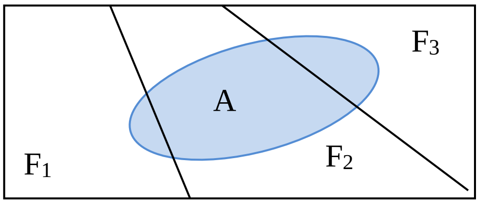
<u>Exemplo:</u> Suponha que você é o gerente de uma fábrica de sorvetes. Você sabe que 20% de todo o leite que utiliza na fabricação dos sorvetes provém da fazenda F_1, 30% são de uma outra fazenda F_2 e 50% de uma fazenda F_3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa, e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. Na indústria de sorvetes que você gerencia os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, calcule:

a) A probabilidade de que o galão contenha leite adulterado.

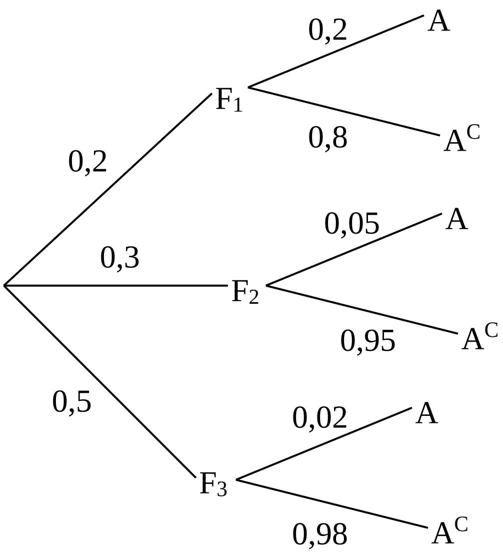
b) A probabilidade de que o galão tenha vindo da fazenda F_3, sabendo que contém leite não adulterado.

Resolução:

Observe que o diagrama de Venn a seguir ilustra os três eventos associados as fazendas (F_1, F_2 e F_3) e ao leite adulterado (A) ou não adulterado (A^c):



Se denotarmos por A o evento “o leite está adulterado”, temos que $P(A|F_1)=0,20$, $P(A|F_2)=0,05$ e $P(A|F_3)=0,02$. Além disso, a probabilidade do leite ser produzido por cada uma das fazendas (F_1, F_2 e F_3) é denotada por $P(F_1)=0,2$, $P(F_2)=0,3$ e $P(F_3)=0,5$. A partir daí, podemos construir a *árvore de probabilidades* da seguinte maneira:



a)

$$P(A)=P(F_1\cap A)+P(F_2\cap A)+P(F_3\cap A)=$$
$$=[P(A\mid F_1).P(F_1)]+[P(A\mid F_2).P(F_2)]+[P(A\mid F_3).P(F_3)]=$$
$$=(0{,}2.0{,}2)+(0{,}05.0{,}3)+(0{,}02.0{,}5)=0{,}065$$

b)

$$P(F_3\mid A^C)=\frac{P(F_3\cap A^C)}{P(A^C)}=\frac{P(A^C\mid F_3).P(F_3)}{1-P(A)}=\frac{0{,}98.0{,}5}{1-0{,}065}=0{,}5241$$

Exercícios de Fixação

1. Na Tabela 1, temos os dados referentes a alunos matriculados em quatro cursos de uma universidade em dado ano.

Tabela 1 – Distribuição de alunos segundo o sexo e a escolha do curso.

Curso	Sexo		Total
	Masculino	Feminino	
Computação	70	40	110
Matemática	15	15	30
Estatística	10	20	30
Ciências Atuariais	20	10	30
Total	115	85	200

Selecionado-se ao acaso um aluno do conjunto desses quatro cursos determine a probabilidade:

a) Que o aluno seja do sexo masculino.
b) Que o aluno esteja matriculado no curso de Estatística.
c) Que o aluno seja do sexo feminino e matriculado em Matemática.
d) Que o aluno seja do sexo masculino ou matriculado em Ciências Atuariais.

Respostas: a) 0,575 b) 0,15 c)0,075 d)0,625

2. Uma determinada peça é manufaturada por três fábricas A, B e C. Sabe-se que a fábrica A produz o dobro de peças que B, e B e C produziram o mesmo número de peças (durante um período de produção especificado). Sabe-se também que 2% das peças produzidas por A e 2% das peças produzidas por B são defeituosas, enquanto 4% daquelas produzidas por C são defeituosas. Todas as peças produzidas são colocadas em um depósito, e depois uma peça é extraída ao acaso.
a) Qual é a probabilidade de que essa peça seja defeituosa?
b) Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela fábrica B, sabendo-se que é perfeita?

Dica: Utilize a árvore de probabilidades.
Respostas: a) 0,025 b) 0,251

3. Uma escola do ensino médio do interior de São Paulo tem 40% de estudantes do sexo masculino. Entre estes, 20% nunca viram o mar, ao passo que, entre as meninas, essa porcentagem é de 50%. Qual a probabilidade de que um aluno selecionado ao acaso seja:
   a) Do sexo masculino e nunca tenha visto o mar?
   b) Do sexo feminino ou nunca tenha visto o mar?

   Dica: Utilize a árvore de probabilidades e na letra b aplique a fórmula da união de eventos.
   Respostas: a) 0,08 b) 0,68

4. Na tabela abaixo, os números que aparecem são probabilidades relacionadas com a ocorrência de A, B, $A \cap B$, etc. Assim, $P(A) = 0,10$, enquanto $P(A \cap B) = 0,04$.

	B	B^C	Total
A	0,04	0,06	0,10
A^C	0,08	0,82	0,90
Total	0,12	0,88	1,00

   Verifique se A e B são independentes.
   Resposta: Como $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$, A e B não são independentes.

5. Você entrega a seu amigo uma carta, destinada à sua namorada, para ser colocada no correio. Entretanto, ele pode se esquecer com probabilidade 0,1. Se não se esquecer, a probabilidade de que o correio extravie a carta é de 0,1. Finalmente, se foi enviada pelo correio a probabilidade de que a namorada não a receba é de 0,1.
   a) Sua namorada não recebeu a carta, qual a probabilidade de seu amigo ter esquecido?
   b) Avalie as possibilidades desse namoro continuar se a comunicação depender das cartas enviadas.

   Dica: Utilize a árvore de probabilidades. Ela 'cresce' mais para um lado do que para o outro. Não se preocupe!
   Respostas: a) 0,369 b) 0,729