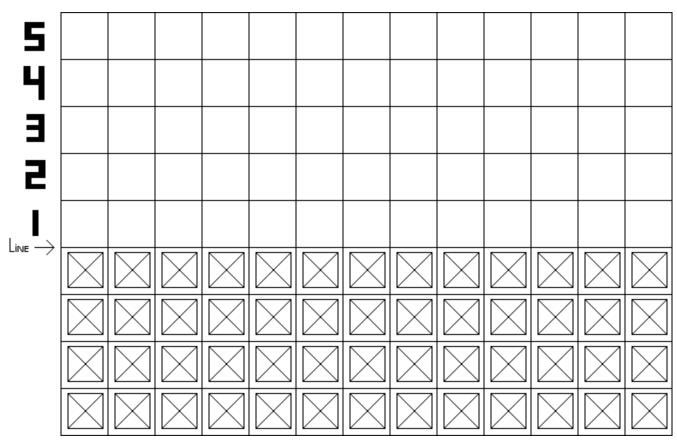
## CHIẾN DỊCH JOHN CONWAY

Author: th3\_5had0w

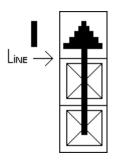
Vấn đề: Vào năm 2027, sau khi không giải quyết được một loạt diễn biến chính trị căng thẳng trên toàn cầu, đệ tam thế chiến đã bùng nổ với hai cường quốc chính là Trung Quốc và Hoa Kì. Vì chiến tranh bùng nổ nên trung tâm tình báo Hoa Kì thành lập một chiến dịch mang tên nhà Toán học vĩ đại đã mất vào năm 2020 do dịch COVID19 – John Conway để tưởng nhớ ông, chiến dịch này nhằm đưa các điệp viện của Hoa Kì vào sâu trong hàng ngũ của chính phủ Trung Quốc. Để mô phỏng lại chiến dịch này trung tình báo đã biến nó thành một trò chơi trên bàn cờ.

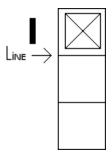


Các điệp viên đã tối ưu hóa các phương án để đưa các điệp viên của mình vào những cấp bậc cao nhất có thể (điệp viên là các con cờ có dấu **X** trên bàn cờ), sau nhiều tháng nghiên cứu họ vẫn chưa đưa các điệp viên của mình đến cấp bậc 5 trong hàng ngũ của chính phủ Trung Quốc, bạn có thể giúp Hoa Kì chiến thắng trong cuộc chiến này không?

Quy luật: 1 điệp viên phải hi sinh 1 điệp viên khác để thăng cấp trong hàng ngũ của đối phương (để chứng tỏ sự trung thành), 1 điệp viên có thể chọn cách thăng cấp hoặc giữ nguyên cấp bậc của mình để làm bàn đạp cho các điệp viên sau thăng cấp. Nghĩa là 1 con cờ muốn tiến lên phía trước thì phải nhảy qua con cờ trước mặt mình và xóa sổ nó, điều này áp dụng với cả hàng dọc lẫn hàng ngang. Khi bắt đầu trò chơi tất cả các quân cờ đều nằm dưới lần ranh.

## Luật chơi:





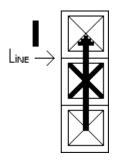
Vậy là ta đã hi sinh 1 điệp viên để đưa 1 điệp viên vào cấp 1 của hàng ngũ địch. Điều này cũng có thể xảy ra trên một hàng ngang. Ví dụ:

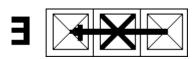




Chiến thuật chuyển quân trên hàng ngang này thường sử dụng để làm bàn đạp cho các điệp viên sau tiến lên cấp bậc cao hơn.

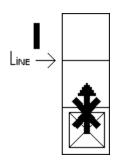
Lưu ý: chỉ được di chuyển theo hàng ngang và hàng dọc, các điệp viên trên bàn cơ không được di chuyển theo bất cứ hình thức nào khác, và nếu ở một vị trí cấp bậc đã có điệp viên cài ở đó thì điệp viên sau không được tiến lên cấp bậc đó lần nữa.

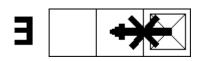




Không được di chuyển theo đường chéo.

Không được di chuyển tự do.



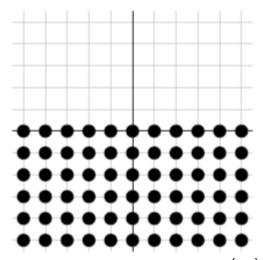


Cục tình báo Hoa Kì đã cho bạn biết cách thức hoạt động, hãy giúp họ đưa các điệp viên đến cấp bậc thứ 5 trong hàng ngũ của kẻ thù.

Plot twist:

Đưa điệp viên đến cấp bậc thứ 5 là điều không thể, cách chứng minh:

Đầu tiên chúng ta sẽ gán cho mỗi ô trên bàn cờ một giá trị và chúng ta sẽ gọi giá trị của một quân cờ sẽ là giá trị của ô mà nó đứng. Tổng số giá trị của các quân cờ sẽ là tổng của tất cả giá trị của các quân cờ riêng lẻ dưới lằn ranh.



Hình 1: Trạng thái khi trò chơi vừa bắt đầu.

Việc tính tổng giá trị của tất cả các ô ở dưới lần ranh sẽ rất thuận tiện nếu gán cho giá trị của các quân cờ thành dạng lũy thừa của một số **a** chưa biết. Ngoài ra, ta muốn giá trị của một con cờ tăng lên khi nó tiến đến gần ô đích ở hàng thứ 5. Vẫn giữ được tính tổng quát, ta sẽ chọn (0, 5) làm ô mục tiêu (sử dụng tọa độ Cartesian).

Vậy ta sẽ gán cho mỗi ô giá trị có dạng:

$$V(x,y) = a^d \text{ v\'oi } d = |x| + |5-y| \text{ v\'a } x, y \in N$$

Hình 2 biểu diễn trạng thái khi ta chọn (0, 5) làm ô mục tiêu và đặt giá trị cho các ô khác theo công thức trên.

Hình 2: các ô có màu đỏ là các ô có quân cờ ngay khi trò chơi bắt đầu.

Tiếp đến ta phải chọn giá trị cho ẩn số a để bước đi của bất kì quân cờ nào cũng không làm thay đổi tổng giá trị của các quân cờ. Các quân cờ có 3 kiểu di chuyển:

1. Di chuyển tiến đến ô mục tiêu, giá trị của quân cờ trước khi di chuyển là a<sup>d</sup>, vậy sự thay đổi giá trị của một quân cờ sau bước nhảy kiểu này là:

$$a^{d-2} - a^d - a^{d-1} \Leftrightarrow a^{d-2} (1 - a - a^2)$$

- 2. Di chuyển ra xa ô mục tiêu, sự thay đổi giá trị của một quân cờ sau bước nhảy kiểu này là:  $a^{d+2}$   $a^{d+1}$   $a^{d} \Leftrightarrow a^{d}(a^{2}$  a- 1)
- 3. Di chuyển nhưng vẫn giữ nguyên khoảng cách với ô mục tiêu, có nghĩa là nhảy qua ô mục tiêu (kiểu di chuyển này sẽ là không cần thiết và vô nghĩa), lúc này sự thay đổi giá trị của quân cờ sẽ là:
  -a<sup>d-1</sup>

## Cách chọn giá trị a:

Để đảm bảo cho tổng giá trị của tất cả các quân cờ không bao giờ tăng lên sau bất kì bước di chuyển của quân cờ nào thì ta cần đảm bảo 3 điều kiện sau phải đồng thời thỏa mãn:

$$1 - a - a^2 \le 0$$

$$-x \le 0$$

$$x^2 - x - 1 \le 0$$

Lấy nghiệm dương của 2 phương trình  $1 - a - a^2 = 0$  và  $a^2 + a - 1 = 0$  ta có:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Vì ta cần chứng minh rằng tổng số điểm của các quân cờ quá nhỏ để có thể đi đến ô mục tiêu nên ta chon:

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \varphi \approx 0.6183...$$

$$\varphi^2 + \varphi = 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi^2 = 1 - \varphi$$

Áp dụng công thức của geometric series ta có:

$$1+\varphi+\varphi^2+\varphi^3+...=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^k=\frac{1}{1-\varphi}$$

tương đương:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \varphi^{k} = \frac{1}{1-\varphi} - 1 - \varphi = 1$$

## Theo hình 2:

Ta cần tính tổng giá trị của tất cả quân cờ (bàn cờ là một mặt phẳng tọa độ trải đến vô cực)

Để tính tổng tất cả các quân cờ ở hàng đầu tiên ta có:

$$\varphi^5 + 2\varphi^6 + 2\varphi^7 + 2\varphi^8 + ...$$

Vậy để tính tổng tất cả các hàng ta có:

$$\left(\varphi^{5} + 2\,\varphi^{6} + 2\,\varphi^{7} + 2\,\varphi^{8} + ...\right)x(1 + \varphi + \varphi^{2} + \varphi^{3} + ...)$$

Mà ta có:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \varphi^k = 1$$

Vậy:

$$(\varphi^5 + 2\varphi^6 + 2\varphi^7 + 2\varphi^8 + ...) x(1 + \varphi + \varphi^2 + \varphi^3 + ...)$$

tương đương

$$\varphi^4(\varphi+2(\varphi^2+\varphi^3+...))(1+\varphi+1)$$

tương đương

$$\varphi^3(\varphi^2+2\varphi)(2+\varphi)$$

Cứ như thế ta sẽ có kết quả là 1

Mà giá trị ở ô mục tiêu là  $x^0 = 1$ , tổng tất cả các quân cờ cũng là 1, vậy theo lý thuyết sẽ cần vô hạn các quân cờ để đến được hàng thứ 5, trong thực tế là điều không thể, vậy ta nói không thể đưa quân cờ được đến hàng thứ 5.

Tham khảo thêm tại:



Chúc mừng bạn đã đọc hết chuyên đề nhàm chán của mình \(.\_.)/