

Probabilità e statistica



Riccardo Rasori

A.A. 2024/2025

Indice

0.1	Calcolo combinatorio	2
-----	--------------------------------	---

0.1 Calcolo combinatorio

- Dati n oggetti distinti

Si dicono **distinzioni semplici** tutti i gruppi che si formano con k elementi in modo che i gruppi differiscano

- O per l'ordine
- O per almeno un elemento

$$\Delta_{n,k} = n * (n-1) * \dots * (n-k+1) * \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Es. $n=4, k=2$ $A=\{1,5,3,8\}$

$$\Delta_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$$

- Si dicono **disposizioni con ripetizioni** di classe k tutti i gruppi che si possono formare con k elementi on la possibilità che gli elementi si ripetano in un gruppo in modo che due gruppi differiscano

- Per ordine
- Per almeno un elemento $\Delta_{n,k}^* = n^k$
- Per ripetizione

Es. $k=2, n=4$ $A=\{1,5,3,8\}$

$$\Delta_{n,k}^* = n^k = 4^2 = 16$$

- Dati n oggetti distinti si dicono **permutazioni semplici** di n elementi i gruppi che si riescono a formare con n elementi in modo che due gruppi differiscano

- Per l'ordine di elementi

$$P_n = \Delta_{n,n} = n!$$

Es. 3 persone su 3 posti $\Rightarrow 3!$

- Si dicono **combinazioni semplici** di n oggetti di classe k tutti i gruppi formati con k degli n elementi in modo che due gruppi differiscano

– Per almeno un elemento

$$C_{n,k} = \frac{\Delta_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Es. Ho 4 liquori, quanti biberoni ottengo mescolandone 3 alla volta?

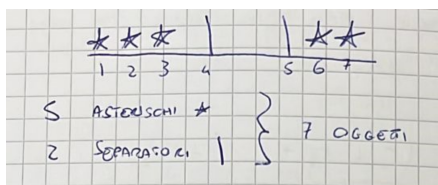
$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

Es. Ho 5 oggetti da mettere in 3 scatole

$k=5, n=3$

In quanti modi posso fare?

Disegniamo una possibile configurazione



$$\frac{7!}{5!2!} = 21$$

$$\text{Quindi ho } \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1,k}$$

Sono **combinazioni di n oggetti con ripetizione** di classe k tutti i gruppi formati con l degli n elementi con la possibilità di ripetizioni in modo che differiscano per:

- ...
- ...
- ...

Es. Sia $A = \{\Delta, \otimes\}$ quante sequenze di 3 simboli posso fare?

$$C_{2,3}^* = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

- Dati n oggetti con r_1 oggetti uguali tra loro e r_2 oggetti uguali con $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$

Sono **permutazioni con ripetizione** i gruppi formati con alcuni elementi indistinguibili tra loro in modo che i gruppi differiscano per:

- l'ordine

$$P_{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_k}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

Es. Anagrammi di “AFA”

$$r_1 = 2, r_2 = 1$$

$$P_{2,1}^* = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Es. Urna con 40 numeri distinti e 6 estrazioni, quante combinazioni posso fare?

- Estrazione senza reinserimento e conta la sequenza

$$\Delta_{40,6} = \frac{40!}{6!(40-6)!} = 3.838.380$$

- Senza reinserimento e non conta la sequenza

$$C_{40,6} = \binom{40}{6}$$

- Con reinserimento e conta la sequenza

$$\Delta_{40,6}^* = 40^6$$

- Con reinserimento e non conta la sequenza

$$C_{40,6}^* = \binom{40+6-1}{6} = \binom{45}{6}$$

Es. 4 persone, 5 posti numerati

n=5, k=4

$$\Delta_{5,4} = \frac{(5-4)!}{1!} = 5! = 120$$

Es. A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

- Quanti numeri di 3 cifre distinte?

$$k=3 \quad 9 * 8 * 7$$

- Quanti numeri sono dispari?

$$5 * 8 * 7$$

- Quanti terminano con 9?

$$\Delta_{8,2} = 8 * 7 * 1$$

- Quanti numeri sono maggiori di 700?

$$8 * 7 * 3$$

Es. A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

- Quanti numeri di 3 cifre anche ripetute?

$$\Delta_{9,3}^* = 9^3$$

- Quanti numeri sono dispari?

$$\Delta_{9,2}^* = 9^2 * 5$$

- Quanti maggiori di 700?

$$\Delta_{9,2}^* = 9^2 * 3$$

Es. Tema esame

Urnca con 9 palline, 3 hanno “1”, 3 “2”, 3 “3”

Estraggo senza reimmissione

Quanti numeri di 9 cifre diversi posso fare?

$$P_{3,3,3}^* = \frac{9!}{3!3!3!}$$

Es. 5 particelle con spin $s = \frac{1}{2}$ orientato in posizione up \uparrow o down \downarrow

Le particelle non interagiscono tra loro

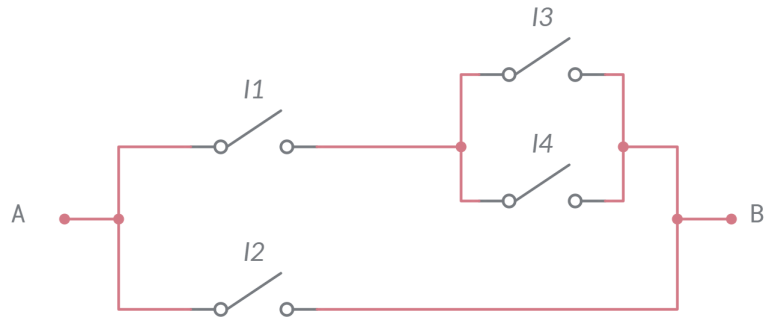
- Quante configurazioni posso fare con 3 spin up?

n=5, k=3

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

– E con 2 spin up
 $k=2$
 $C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$

Es. Nel circuito in figura gli interruttori ($I_i, i = 1, 2, 3, 4$) sono aperti o chiusi, quante configurazioni fanno passare la corrente da A a B



1 *

$2^3 + 1 * 1 * [4 - 1] = 11$
 $\Delta_{1,1}^* * \Delta_{2,3}^* + \Delta_{1,1}^* * \Delta_{1,1}^* [\Delta_{2,2}^* - \Delta_{1,2}^*]$
 Es. 10 abiti, 5 paia di scarpe, 2 cappelli
 $C_{10,1} * C_{5,1} * C_{2,1} = 10 * 5 * 2 = 100$