chapter 5 性能解析

2021/6/16

リグレット解析

- プレイヤーはt期ごとに実行可能なアクション集合に含まれる1つのアクション$\theta^{(t)} \in K$を選択
- コスト関数$f^{(t)}$によりアクション$\theta^{(t)}$に対するコスト$f^{(t)}(\theta^{(t)})$が定まる
- プレイヤーは戦略に基づいてアクションを決定する

リグレット解析

- プレイヤーはどのように戦略を選んで合計コスト $\Sigma f^{(t)}(\theta^{(t)})$ を最小化するか
- そもそもコスト関数 $f^{(t)}$ がわからない場合でも最小化できるか
- ここで戦略のリグレットを導入する

定義 (戦略のリグレット)

ある戦略 A に基づくアクションの合計コストと最適戦略 θ^* による合計コストの差を戦略 A のリグレット $Regret(A)$ と定義する。

$$Regret(A) = \Sigma_{t=1}^{T} f^{(t)}(\theta^{(t)}) - \Sigma_{t=1}^{T} f^{(t)}(\theta^*)$$

リグレット解析

リグレット解析の意味付け

- $Regret(A)$がTについての線形な関数ならばコスト差は縮まらない
- $Regret(A)$がTについての線形な関数より小さければ、コストの差は0に近づいていく
- このとき、その戦略Aが達成するコストは最適戦略のコストに限りなく近づいていく

リグレット解析

オンライン学習におけるリグレット解析

- 学習データ$(\boldsymbol{x}^{(t)}, y^{(t)})$が与えられたときの
  オンライン学習器のパラメータ $\boldsymbol{\theta}^{(t)} \in \mathbb{R}^m$をアクションとする
- 損失関数$f^{(t)} = (\boldsymbol{x}^{(t)}, y^{(t)}, \boldsymbol{\theta})$ をコスト関数とする
- この場合、最適戦略はすべての学習データに対するコスト関数を最小にするアクションを選ぶ戦略となる

Follow the Leader

- 単純な戦略として、これまでの合計コストを最小にするようなアクションを選ぶものを考える

$$\boldsymbol{\theta}^{(1)} = \underset{\boldsymbol{\theta} \in K}{\text{arg min}} \sum_{i=1}^{t-1} f^{(t)}(\boldsymbol{\theta})$$

- この戦略のことをFollow the Leader(FTL)という

Follow the Reader

- FTLではうまくいかないケースがある
- アクション$\theta \in [-1, 1]$、コスト関数$f^{(t)}(\theta) = (1/2)(-1)^t\theta$を考える
- このとき、アクションは$\theta^{(1)} = 0, \theta^{(2)} = -1, \theta^{(2)} = 1, \ldots$と最初を除き$-1$と$1$を行き来する
- コスト関数は$f^{(1)}(\theta^{(1)}) = 0, f^{(2)}(\theta^{(2)}) = 1/2, f^{(3)}(\theta^{(3)}) = 1/2, \ldots$と最初を除き$1/2$となる

Follow the Leader

- 一方、最適戦略は$\theta = 0$であり、合計コストは0
- よって、この場合のFTLのリグレットはTに対して線形な関数で最適戦略に近づくことはない
- FTLの拡張を考える必要がある

Regularized Follow the Reader

- Regularized Follow the Reader(RFTL)

$$\boldsymbol{\theta}^{(1)} = \underset{\boldsymbol{\theta} \in K}{\text{arg min}}\, \eta \Sigma_{i=1}^{t-1} f^{(t)}(\boldsymbol{\theta}) + R(\boldsymbol{\theta})$$

- $R(\boldsymbol{\theta})$は凸な正則化関数、$\eta \geq 0$は正則化の程度を定めるパラメータ
- 最初のアクションを定めるとき、コスト関数が提示されていないので
正則化項のみで定める

$$\boldsymbol{\theta}^{(1)} = \underset{\boldsymbol{\theta} \in K}{\text{arg min}}\, R(\boldsymbol{\theta})$$

Regularized Follow the Reader

- RFTLのリグレットを導入するために補題と定義を導入する

補題

任意のベクトル$\boldsymbol{u} \in K$について、次が成り立つ。

$$\Sigma_{t=1}^{T} \boldsymbol{f}^{(t)T}(\boldsymbol{\theta}^{(t)} - \boldsymbol{u}) \leq \Sigma_{t=1}^{T} \boldsymbol{f}^{(t)T}(\boldsymbol{\theta}^{(t)} - \boldsymbol{\theta}^{t+1}) + \frac{1}{\eta}(R(\boldsymbol{u}) - R(\boldsymbol{\theta}^{(1)})) \tag{1}$$

Regularized Follow the Reader

Proof.

$\boldsymbol{f}^{(0)} = \frac{1}{\eta}R(\boldsymbol{\theta})$とし、
アルゴリズムは$t = 0$から始まるものとすると、

$$\Sigma_{t=0}^{T}\boldsymbol{f}^{(t)}(\boldsymbol{\theta}) = \Sigma_{t=1}^{T}\boldsymbol{f}^{(t)}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\eta}R(\boldsymbol{\theta})$$

このとき、補題は

$$\Sigma_{t=0}^{T}\boldsymbol{f}^{(t)T}(\boldsymbol{\theta}^{(t)} - \boldsymbol{u}) \leq \Sigma_{t=0}^{T}\boldsymbol{f}^{(t)T}(\boldsymbol{\theta}^{(t)} - \boldsymbol{\theta}^{t+1})$$

と表現できる。

Regularized Follow the Reader

Proof.

$t = 0$のとき
定義より$\boldsymbol{\theta}^{(1)} = \operatorname*{arg\,min}_{\boldsymbol{\theta}} R(\boldsymbol{\theta})$であり、
$\boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{\theta}^{(1)}) \leq \boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{u})$が成り立つ。
よって、

$$\boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) - \boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \leq \boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) - \boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{\theta}^{(1)})$$

$\square$

Regularized Follow the Reader

Proof.

$t > 0$のとき
$t = T$で補題が成り立っていると仮定する。
このとき、

$$\boldsymbol{\theta}^{(T+2)} = \operatorname*{arg\,min}_{\boldsymbol{\theta}} \Sigma_{t=0}^{T+1} \boldsymbol{f}^{(t)}(\boldsymbol{\theta}) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{(T+1)} = \operatorname*{arg\,min}_{\boldsymbol{\theta}} \Sigma_{t=0}^{T} \boldsymbol{f}^{(t)}(\boldsymbol{\theta}) \tag{3}$$

□

Regularized Follow the Reader

Proof.

$(2), (3)$式を利用すると、

$$\Sigma_{t=0}^{T+1} \boldsymbol{f}^{(t)T}(\boldsymbol{\theta}^{(t)} - \boldsymbol{u}) \tag{4}$$

$$\leq \Sigma_{t=0}^{T+1} \boldsymbol{f}^{(t)}(\boldsymbol{\theta}^{(t)}) - \Sigma_{t=0}^{T+1} \boldsymbol{f}^{(t)}(\boldsymbol{\theta}^{(T+2)}) \tag{5}$$

□