Równania diofantyczne

Teoria:

- **Równanie diofantyczne** to równanie, którego rozwiązania są liczbami całkowitymi. Przykładowo, $2x + 5y = 12,\ x, y \in Z$.
  Rozwiązaniem tego równania są np. pary $x = 1,\ y = 2$ oraz $x = -4,\ y = 4$.
- Przydatny bywa rozkład na dzielniki. Przykładowo, jeżeli wiemy, że $xy = 21$, to na podstawie dzielników 21 mamy tylko osiem przypadków: $x = 1,\ y = 21$; $x = 3,\ y = 7$; $x = 7,\ y = 3$; $x = 21,\ y = 1$ i ujemne odpowiedniki.
- Ważną techniką jest tzw. **schodzenie Fermata**, które opiera się na tym, że nie ma niezerowych liczb podzielnych dowolnie wiele razy przez np. 3. Nie ma niezerowych rozwiązań równania $x^2 = 3y^2$.

Jeżeli nie napisano inaczej, wszelkie niewiadome są całkowite.

Zadania:

1. Znaleźć rozwiązania równania $(x - 3)(y + 2) - 30 = 5$.
2. Rozwiązać równania:
   a) $xy - 5y + 3x = 2$
   b) $xy + 2x + 3y = 20$ (I MOM)
   c) $xy + 2y = 4x$
3. Wyznaczyć wszystkie pary spełniające równanie:
   a) $x^2 - y^2 = 23$
   b) $x^4 - y^4 = 65$
4. Znaleźć pary $(a, b) \in Z_+$ spełniające równanie:
   $$\left(a^2 + b\right)\left(a + b^2\right) = (a + b)^3$$
5. Znaleźć wszystkie dodatnie a i n takie, że $2^n - a^2 = 15$.

Schodzenie Fermata

6. Udowodnić, że liczbą niewymierną jest:
   a) $\sqrt{2}$
   b) $\sqrt{p}$, gdzie p jest liczbą pierwszą
   c) $\sqrt[q]{p}$, gdzie p oraz q są liczbami pierwszymi

7. a) Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0$
   b) Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$.
   c) Znaleźć x, y, z, t takie, że $x^4 + y^4 + z^4 = 5t^4$.
   d) Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $l^2 + a^2 + b^2 + u^2 = 2labu$.
   e) Wykazać, że jeśli $a^2 + b^2 = 7c^2$, to $a = b = c = 0$.

8. Udowodnić, że 7 nie da się przedstawić w postaci sumy kwadratów trzech liczb wymiernych dodatnich.