



Mecz Matematyczny grupy młodszej

1. Dany jest trójkąt σ . Czy okrąg opisany na nim jest najmniejszym okręgiem (co do promienia), w jaki możemy go zmieścić?
2. W trójkącie KAC kąt przy wierzchołku C jest równy 60° . Niech O - środek okręgu opisanego na trójkącie KAC , zaś L - środek okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykaż, że punkty A, L, K, O leżą na jednym okręgu.
3. Czworokąt wypukły $UDKO$ jest wpisany w okrąg. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie I , przy czym kąt DIK jest rozwarty. Prosta przechodząca przez punkt K i prostopadła do prostej UK przecina prostą przechodzącą przez punkt D i prostopadłą do prostej DO w punkcie F . Wykazać, że proste IF i UO są prostopadłe.
4. Czy istnieją takie liczby całkowite c, z, u, d, a, r że liczby $c - z, z - u, u - d, d - a, a - r, r - c$, wypisane w pewnym porządku, są kolejnymi liczbami całkowitymi?
5. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$2x^2 - 2115y^2 = 1.$$

6. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba $S_n = 1! + 2! + \dots + n!$ jest kwadratem liczby całkowitej.



7. Rozwiązać równanie

$$\begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{b} = 5 \\ a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 20. \end{cases}$$

8. Rozwiązać równanie

$$\frac{19x+16}{10} = \left\lfloor \frac{4x+7}{3} \right\rfloor.$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich A, G i H , dla których $A + G + H = 1$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{2A + 1} + \sqrt{2G + 1} + \sqrt{2H + 1} \leq \sqrt{15}.$$

10. Czy istnieje taki 11-kąt, **niekoniecznie wypukły**, i taka prosta, która przecina wszystkie boki tego 11-kąta (nie w wierzchołkach)?

11. Bombardino Crocodilo ma 10 wojanków, Tung Tung Tung Sahur 15, a Chimpanzini Bananini 20. Każde z nich może dać w dowolnym momencie po wojanku pozostałej dwójce. Czy postępując w ten sposób, mogą oni doprowadzić do tego, że każde z nich będzie miało po 15 wojanków?

12. W prostokątnej sali o wymiarach 4×3 stoi Kadra słuchając opowieści pani Lilii o czudeckich katakumbach (sześć osób). Udowodnić, że kwadrat odległości między pewnymi dwoma osobami jest nie większy niż 5.