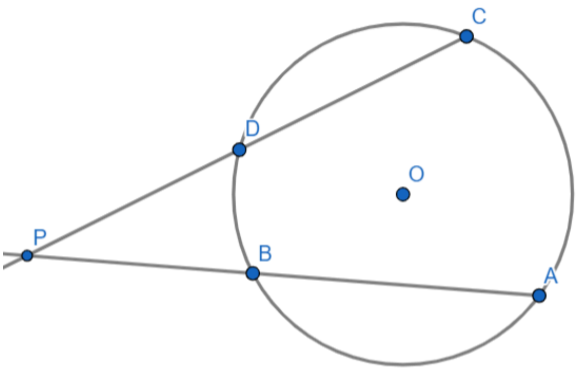
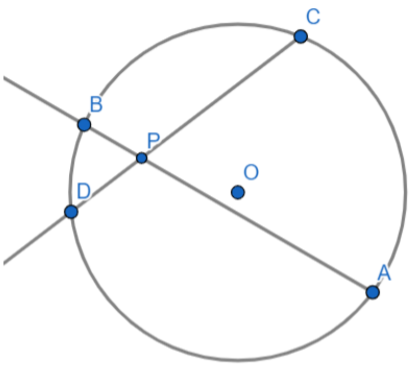
Potęga punktu

<u>Twierdzenie 1.</u>

Punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $PA \cdot PB = PC \cdot PD = |PO^2 - r^2|$**, gdzie P - przecięcie AB i CD.**

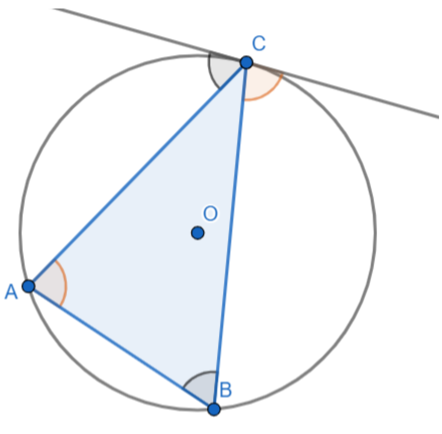




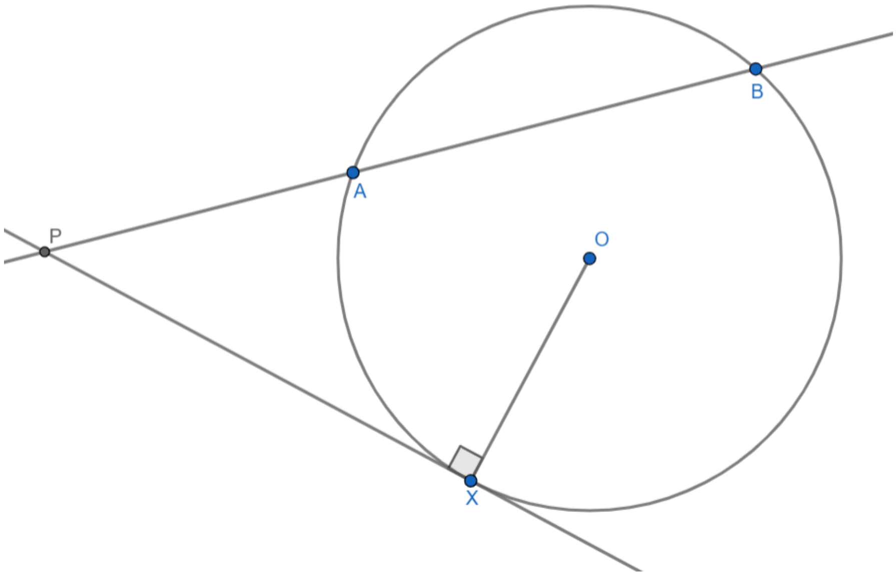
Definicja. Dla danego okręgu ω o środku O i promieniu r oraz punktu $S \neq O$ wyrażenie $P(S, \omega) := |SO^2 - r^2|$ nazywamy **potęgą punktu** S **względem okręgu** ω**.**

Twierdzenie 2. (o kącie dopisanym)

Styczna w punkcie C tworzy taki kąt z bokiem trójkąta, co kąt naprzeciw niego w trójkącie:



Twierdzenie 3. (o siecznej i stycznej - szczególny przypadek tw. 1.)
PX to styczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej prostej wychodzącej z P i przecinającej okrąg w A i B zachodzi $PA \cdot PB = PX^2$**.**



<u>Zadania:</u>

1. Udowodnić Twierdzenia.
2. Dany jest okrąg o promieniu 5 oraz cięciwa AB. Średnica przechodząca przez środek AB jest dzielona przez cięciwę w stosunku $4:1$. Jaka jest długość cięciwy AB?
3. W okręgu o promieniu 8 poprowadzono cięciwę o długości 6. Punkt P dzieli ją w stosunku 1:2. Oblicz odległość punktu P od środka okręgu.
4. Dany jest prostokąt ABCD, w którym $AB = 12$, $AC = 18$. Punkt E dzieli bok AB w stosunku 2:1, przekątne prostokąta przecinają się w punkcie X. Znaleźć długość EX.
5. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Punkt P leży na prostej AB i na zewnątrz obu okręgów. Przez punkt P poprowadzono styczne do o_1 (w punkcie C) i do o_2 (w punkcie D). Wykazać, że $PC = PD$.

6. Dane są dwa okręgi ω_1, ω_2. Jedna z ich wspólnych stycznych zewnętrznych jest styczna do ω_1 w A, a druga do ω_2 w D. Odcinek AD przecina okręgi ω_1, ω_2 ponownie w punktach B, C, odpowiednio. Udowodnij, że $AB = CD$.
7. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Prosta zawierająca wysokość opuszczoną z B przecina okrąg o średnicy AC w punktach K i L, a prosta zawierająca wysokość opuszczoną z A przecina okrąg o średnicy BC w punktach M i N. Wykazać, że K, L, M, N leżą na okręgu.

<u>Osie potęgowe</u>

8. Wykaż, że jeżeli dwa okręgi przecinają się w punktach A i B, to dla dowolnego punktu X leżącego na prostej AB (poza odcinkiem AB) odcinki styczne z X do obu okręgów są równej długości.
9. Jak wygląda zbiór punktów mających taką samą potęgę punktu względem dwóch danych okręgów?
10. Udowodnij, że dla danych trzech niewspółśrodkowych okręgów ich osie potęgowe przecinają się w jednym punkcie (lub są równoległe).
11. Udowodnij, że w trójkącie w jednym punkcie przecinają się:
    a) wysokości
    b) symetralne boków.
12. Prosta k jest styczna do okręgu o w punkcie A. Odcinek CD jest cięciwą okręgu o równoległą do prostej k. Styczna do okręgu o w punkcie D przecina prostą k w punkcie B. Odcinek BC przecina okrąg o w punkcie E. Dowieść, że prosta DE dzieli odcinek AB na dwie równe części.