18.09.2025r.

MIELECKI OBÓZ MATEMATYCZNY

Warsztaty - modulo

Rozgrzewka:

1. Pewna liczba przy dzieleniu przez 7 daje resztę 6. Jaką resztę otrzymamy, dzieląc przez 6 jej kwadrat, a jaką gdy weźmiemy czwartą potęgę?
2. Liczba daje resztę 2 z dzielenia przez 7. Udowodnij, że jej czwarta potęga również.

Teoria:

Definicja ($a,\ b,\ n$ - całkowite):

1) $a \equiv b\ (mod\ n) \ \Leftrightarrow\ n | a - b$

2) $a \equiv b\ (mod\ n) \ \Leftrightarrow\ a, b$ dają taką samą resztę z dzielenia przez n

Reszta z dzielenia to liczba $r \in \{0,\ 1,\ \dots\ n - 1\}$, taka że przy dzieleniu c przez n mamy $c = n \cdot d + r$, (np. 13 daje resztę 3 (mod 5), bo $13 = 5 \cdot 2 + 3$)

Własności:

- $a \equiv a\ (mod\ n)$ dla każdego $a,\ n$
- $a \equiv b\ (mod\ n)$ oznacza, że $b \equiv a\ (mod\ n)$
- $a \equiv b\ (mod\ n)$ i $b \equiv c\ (mod\ n)$ oznacza, że $b \equiv c\ (mod\ n)$
- kongruencje można dodawać i odejmować:

$a \equiv b\ (mod\ n),\ c \equiv d\ (mod\ n) \ \Rightarrow\ a + c \equiv b + d\ (mod\ n)$

- kongruencje można mnożyć:

$a \equiv b\ (mod\ n),\ c \equiv d\ (mod\ n) \ \Rightarrow\ ac \equiv bd\ (mod\ n)$

- szczególny przypadek mnożenia to potęgowanie

$a \equiv b\ (mod\ n) \ \Rightarrow a^k \equiv b^k (mod\ n)$

LISTA MŁODSZA

1. Zrobić zadania z *Rozgrzewki* za pomocą modulo.
2. Znaleźć ostatnią cyfrę liczby 2^{2025}.
3. Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby 51^{51}.
4.
   a) Znaleźć resztę z dzielenia liczby 5^{16} przez 4.
   b) Wykazać, że $53^{53} - 33^{33}$ jest podzielne przez 10.
   c) Wykazać, że $2^{55} + 1$ dzieli się przez 11.
   d) Wykazać, że $2^{70} + 3^{70}$ jest podzielne przez 13.
   e) Znaleźć resztę z dzielenia $6^{20} + 3^{100}$ przez 7.
   f) Znaleźć resztę z dzielenia 2025^{2025} przez 109.
5. $(AGH\ 2014/15,\ etap\ III)$ Znajdź wszystkie liczby naturalne mniejsze niż 7,

przez które podzielna jest liczba $L = 3^{2016} + 4$.

Tabelki:

6. $(AGH\ 2021/22,\ etap\ II)$ Dane są trzy kolejne liczby całkowite. Udowodnij, że kwadraty dokładnie dwóch z nich dają resztę 1 z dzielenia przez 3.
7. Rozwiąż równanie $x^2 - 2 = 3k$ w liczbach całkowitych.
8. Znajdź x takie, że $x^2 - 3$ jest podzielne przez 4.
9. Wykaż, że kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1 z dzielenia przez 8.
10. Wykaż, że 5 dzieli $m^5 - m$.

LISTA STARSZA

1. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych $(p,\ q)$, dla których liczby $7p + q$ oraz $pq + 11$ również są pierwsze.
2. $(AGH\ 2016/17,\ etap\ I)$ Udowodnij, że jedyną liczbą pierwszą p, taką że liczba $p^2 + 2$ też jest pierwsza, jest $p = 3$.
3. (II MOM) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\sqrt{8n + 3}$ nie jest wymierna.
4. Znajdź wszystkie takie liczby naturalne n, że liczby $n^2 + n + 1$ oraz $n^2 + n + 3$ są liczbami pierwszymi.
5. (II MOM) Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $1 + 2^n + 3^n + 4^n$ jest podzielna przez 5.
6. Rozwiąż $x^3 + y^3 + z^3 = 2005^2$.

<u>Małe Twierdzenie Fermata</u>

Dla dowolnej liczby pierwszej p i liczby całkowitej a zachodzi $p \mid a^p - a$.
Jest to równoważne zapisowi $a^p \equiv a\ (mod\, p)$.

Wniosek.
Jeżeli p nie dzieli a, to $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\, p)$.

7. Uzasadnić *Wniosek*.
8. Wykazać, że $2^{55} + 1$ dzieli się przez 11.
9. Znaleźć x, y takie, że $x^{16} = 17y^{2022} + 2$.
10. Czy istnieje liczba pierwsza p taka, że $p^6 + 6$ jest również liczbą pierwszą?
11. Znaleźć p pierwsze takie, że $p \mid 29^p + 1$.