17.09.2025r.

MIELECKI OBÓZ MATEMATYCZNY

Zawody indywidualne Elity

dzień 1

---

1. Znajdź wszystkie n całkowite dodatnie, że $n! + 5$ jest sześcianem liczby naturalnej.

2. Dana jest taka funkcja $f\colon R \to R$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości $f(x) = f(2x) = f(1 - x)$. Wykaż, że f - okresowa.

3. W $Czudcowie$ jest 2025 miast; każde dwa mają ze sobą dwukierunkowe połączenie lotnicze. Czy można tak ustalić ceny biletów na nie, aby koszt każdych dwóch podróży, nieprzebiegających tak samo, polegających na jednokrotnym odwiedzeniu każdego miasta i powrocie do wyjściowego miasta, był inny?
Cena połączenia z miasta A do miasta B **nie musi** być taka sama, co z miasta B do miasta A.

4. W trójkącie ABC, D, E, F to spodki wysokości z odpowiednio A, C, B. Okrąg ω_1 to okrąg opisany na A, B, D, a ω_2 jest opisany na A, D, C. Punkty K, G to przecięcia C, E z ω_1, przy czym $K \in GC$. Punkt H to przecięcie BF z ω_2, oraz $F \in BH$. Punkt P to drugie przecięcie GH z okręgiem ω_1. Udowodnij, że $|PH| = |PK|$.