Podobieństwo Spiralne

Teoria:

Podobieństwo spiralne to przekształcenie o środku w P, kącie α (gdzie $0° < \alpha < 180°$) i skali k, które przekształca $A \to A'$ tak, że

- $|PA'| = |PA| * k$
- $\angle APA' = \alpha$

Własności:

- Podobieństwo spiralne przekształca figurę w figurę do niej podobną.
- Jeżeli A'B'C' to obraz ABC to ABC i A'B'C' są podobne i jednakowo zorientowane. Zachodzą więc stosunki odpowiednich boków.
- Obraz okręgu o promieniu r to okrąg o promieniu k*r.
- Obrazem prostej l jest prosta l' taka, że kąt pomiędzy nimi jest równy α.

Zadania:

1. Pokaż, że rzuty punktu X na boki trójkąta ABC leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy kiedy X leży na okręgu opisanym na ABC.
2. Udowodnij, że jeżeli podobieństwo spiralne o środku w punkcie P przekształca A w A' i B w B' to $\Delta PAB \sim \Delta PA'B'$ i jednakowo zorientowany.
3. *Konstrukcja podobieństwa spiralnego*

   Udowodnij, że jeżeli mamy cztery punkty A, B, A', B', gdzie żadne z nich nie są współliniowe, a AB przecina A'B' w P to istnieje dokładnie jedno podobieństwo spiralne przekształcające A w A' i B w B', którego środkiem jest drugie przecięcie okręgów opisanych na trójkątach AA'P i BB'P.

4. Dany jest czworokąt ABCD. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E, a proste BC i DS przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach ADE, ABF, BCE i CDF mają punkt wspólny.
5. Niech P będzie środkiem łuku BAC okręgu opisanego na ΔABC. Punkty X i Y leżą odpowiednio na AB i AC tworząc czworokąt cykliczny APXY. Udowodnij, że $BX=CY$.
6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB<AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina boki BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie M równym od A. Punkty X i Y wybrano tak, że $MX \perp AB$, $BX \perp MB$, $MY \perp AC$ oraz $CY \perp MC$. Dowiedz, że punkty X, D, Y leżą na jednej prostej.
7. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty P, Q na zewnątrz ABC i punkt R wewnątrz ABC, takie, że $\Delta BPA \sim \Delta AQC \sim \Delta BRC$ i $BP = PA$, $AQ = QC$, $BR = RC$. Udowodnij, że punkty A, P, R, Q są współliniowe lub tworzą kolejne wierzchołki równoległoboku.
8. Niech ABCDE będzie pięciokątem wypukłym, że $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ i $\angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$. niech BD oraz CE przecinają się w punkcie P. udowodnij, że prosta AP połowi CD
9. W czworokącie wypukłym ABCD punkty E i F leżą na AD i BC tak, że zachodzi $AE/ED = BF/FC$. Prosta EF przecina boki BA i CD w punktach odpowiednio S i T. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach SAE, SBF, TCF i TDE przecinają się w jednym punkcie.

10. Niech ABC będzie trójkątem oraz niech M będzie środkiem odcinka BC. Symetralna odcinka BC przecina okrąg opisany na ABC w punktach K i L, gdzie A i K leżą po przeciwnych stronach prostej BC. Okrąg przechodzący przez L i M przecina prostą AK w punktach P i Q, gdzie P leży na odcinku AQ. Prosta LQ przecina okrąg opisany na trójkącie KMQ po raz kolejny w R. Udowodnij, że BPCR jest cykliczny.

11. Dany jest czworokąt ABCD wpisany w okrąg ω o środku w punkcie O. Proste AB i CD przecinają się w punkcie Q, a proste AD i BC w punkcie To. Punkt M jest punktem Miguela czworokąta ABCD. Udowodnij, że:
    - M leży na odcinku QR
    - OM ⊥ QR
    - czwórki punktów (C, O, A, M) i (B, O, D, M) leżą na jednym okręgu
    - punkt przecięcia przekątnych czworokąta ABCD, który oznaczymy przez P, leży na prostej OM