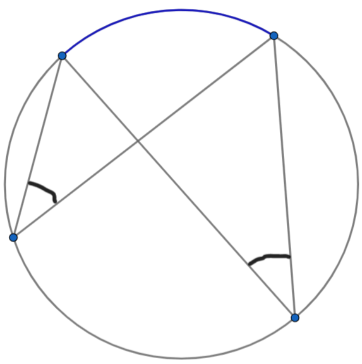
18.09.2025r.

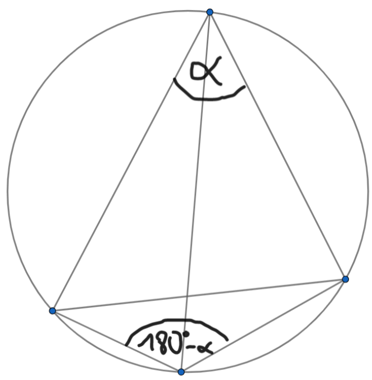
MIELECKI OBÓZ MATEMATYCZNY

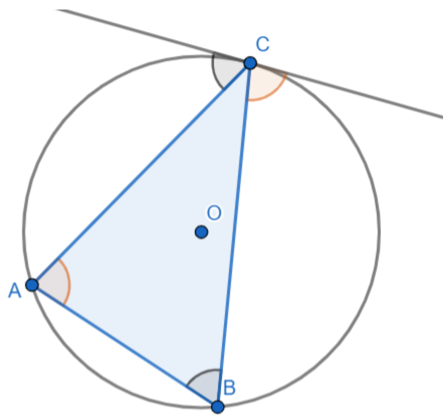
Okręgi wpisane i opisane

<u>Teoria</u>:

- Kąty oparte na tym samym łuku okręgu mają równą miarę;
- Kąty o tej samej mierze (między dwoma punktami) wyznaczają okrąg;
- Czworokąt jest **cykliczny** wtedy i tylko wtedy, gdy kąty naprzeciwko siebie sumują się do $180°$;
- Twierdzenie o kącie dopisanym:
  Miara kąta dopisanego do okręgu jest równa mierze kąta wpisanego opartym na tym samym łuku.

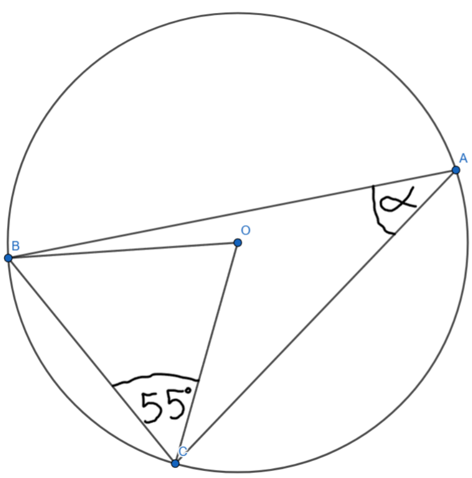


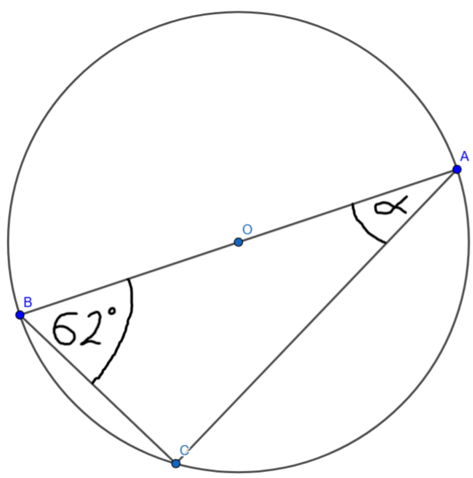




---

1. Uzasadnij *Teorię*.
2. Oblicz zaznaczone na rysunkach kąty:





3. (AGH-II-20/21) W kwadracie $ABCD$ punkt K jest środkiem boku AB. Przez punkt K poprowadzona jest prosta prostopadła do prostej KC, która przecina bok AD w punkcie R. Wykaż, że kąty $\sphericalangle KCB$ i $\sphericalangle KCR$ mają równe miary.

4. (Tw. o czapeczkach) Udowodnij, że dla dowolnego punktu P i okręgu ω odcinki styczne do ω poprowadzone z P mają równą długość.

5. Udowodnij, że dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Co to za punkt?

6. (Ćwiczenia z geometrii I, W. Pompe) Na przeciwprostokątnej BC trójkąta ABC zbudowano po zewnętrznej stronie kwadrat $BCDE$. Niech O będzie środkiem tego kwadratu. Wykazać, że $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO$.

7. (Twierdzenie o trójliściu) Niech I - środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC, M - przecięcie prostej AI z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Udowodnić, że zachodzi $|BM| = |IM| = |CM|$.

8. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku w I, styczny do AB w D i AC w E. Niech X - przecięcie BI i DE.
   a) Wykazać, że $\sphericalangle BXC = 90°$.
   b) Wykazać, że środek boku BC, środek boku AC i X są współliniowe.

9. (Lemat o ortocentrum I) Udowodnij, że odbicie ortocentrum trójkąta względem boku leży na okręgu opisanym na tym trójkącie.

10. (Lemat o ortocentrum II) Udowodnij, że odbicie ortocentrum trójkąta względem środka boku leży na okręgu opisanym na tym trójkącie.

11. (XVI OMJ) Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt E leży na przekątnej AC, przy czym $AE > EC$. Na boku AB wybrano punkt F, różny od B, dla którego $EF = DE$. Udowodnij, że $\sphericalangle DEF = 90°$.

12. (XIII OMJ) Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty P i Q leżą odpowiednio na przekątnych AC i BD, przy czym $\sphericalangle APD = \sphericalangle BQC$. Wykaż, że $\sphericalangle AQD = \sphericalangle BPC$.

13. (XI OMG) Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle BAC + \sphericalangle MCB = 90°$. Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny.

14. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Proste styczne do tych okręgów w punkcie A przecinają je w punktach C i D. Wykaż, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$.

15. (Ćwiczenia z geometrii I, W. Pompe) Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym $\sphericalangle BCP + \sphericalangle ADP = \sphericalangle APB$. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach BCP i ADP są styczne.