Wielomiany

Dominik Bysiewicz

Wielomianem zmiennej rzeczywistej x nazwiemy dowolną funkcję postaci:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Współczynnik a_0 nazywamy wyrazem wolnym, natomiast a_n współczynnikiem wiodącym wielomianu. Najwyższy z wykładników to stopień wielomianu, oznaczany $\deg P$. Jeśli $P(x) = a_0$, czyli $\deg P = 0$, to mówimy, że wielomian jest stały. Jeżeli $a_n = 1$, to P jest unormowany.

Piszemy odpowiednio $P \in \mathbb{R}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{Z}[X]$, jeśli P ma współczynniki rzeczywiste, wymierne, całkowite.

Mówimy, że wielomian Q dzieli wielomian P, jeśli istnieje taki wielomian S, że dla dowolnego x zachodzi $P(x) = Q(x)\cdot S(x)$. W ogólności, dla dowolnych wielomianów P i Q istnieją takie unikalne wielomiany R i S, że

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x), \qquad \deg R < \deg Q.$$

Jest to dzielenie wielomianów z resztą.

Ważne twierdzenia:

- (**Zasadnicze twierdzenie algebry**) Wielomian $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ stopnia n posiada maksymalnie n pierwiastków rzeczywistych (dokładnie n zespolonych) oraz może być jednoznacznie zapisany w formie:

  $$\begin{aligned} \text{w liczbach zespolonych } (z_i): \quad & P(x) = a(x-z_1)^{\alpha_1}\ldots(x-z_k)^{\alpha_k} \\ \text{w liczbach rzeczywistych } (x_i): \quad & P(x) = a(x-x_1)^{\beta_1}\ldots(x-x_l)^{\beta_l}\cdot Q(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \;\; Q(x) \neq 0 \end{aligned}$$

  gdzie zachodzi:

  $$\sum \alpha_i = n, \qquad \sum \beta_j = n - \deg Q \leqslant n.$$

- (**Tw. Bezout**) Wielomian $P(x)$ jest podzielny przez $(x-a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest jego pierwiastkiem, czyli

  $$x - a \mid P(x) \quad \iff \quad P(a) = 0.$$

- Wielomiany są funkcjami ciągłymi. Oznacza to, że dla dowolnych rzeczywistych $a < b$ i wielomianu P każda wartość z przedziału $[P(a), P(b)]$ jest osiągalna na przedziale $[a, b]$.
  W szczególności, jeśli $P(a)\cdot P(b) < 0$ (czyli wartości mają przeciwne znaki), to wielomian P posiada pierwiastek na przedziale (a, b).

- Jeżeli P jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, to dla dowolnych $a \neq b$ całkowitych zachodzi:

  $$a - b \mid P(a) - P(b).$$

Zadania

1. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające $ab = cd$ i $a + b = c + d$. Udowodnij, że $a = c$ lub $a = d$.
2. Dany jest niestały wielomian $P \in \mathbb{R}[x]$ spełniający równanie

   $$(x+1)P(x) = (x-2)P(x+1).$$

   Udowodnij, że każdy jego pierwiastek jest całkowity.
3. Wyznaczyć wszystkie takie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych, że pierwiastkami równania:

   $$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

   są dokładnie liczby a, b, c.
4. Zbadać, czy równanie

   $$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

   gdzie a, b, c ustalone liczby rzeczywiste, ma pierwiastki rzeczywiste.

5. Niech wielomian P spełnia $P(x-1)+P(x+1)=2P(x)$. Udowodnij, że P ma stopień co najwyżej 1.

6. Znajdź wszystkie wielomiany $P \in \mathbb{R}[X]$ spełniające: $P(x^2) = P(x)^2$.

7. Wielomian $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ taki, że równanie $|P(x)| = 1$ posiada trzy różne pierwiastki całkowite. Udowodnij, że nie może on posiadać miejsca zerowego w liczbach całkowitych.

8. Niech a, b, c różne liczby całkowite. Udowodnij, że nie istnieje wielomian $P \in \mathbb{Z}[X]$ spełniający

$$P(a) = b, \qquad P(b) = c, \qquad P(c) = a.$$

9. Niech $P(x) = x^2 + 2007x + 1$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n równanie

$$\underbrace{P \circ \ldots \circ P}_{n}(x) = 0$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste.

10. Niech P wielomian o współczynnikach całkowitych oraz x spełniający

$$\underbrace{P \circ \ldots \circ P}_{k}(x) = x$$

dla pewnego k. Udowodnij, że wtedy $P(P(x)) = x$.

11. Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia $P(k) = \frac{k}{k+1}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Znajdź $P(n+1)$.