MIELECKI OBÓZ MATEMATYCZNY

19-20.09.2025r.

Mecz Matematyczny grupy starszej

---

1. Punkty X oraz Y leżą odpowiednio na bokach RZ i IZ trójkąta RIZ, przy czym $RX = ZX + ZY$ i $IY = 2ZY$. Wykaż, że jeśli proste XY oraz RI są równoległe, to trójkąt RIZ jest równoramienny.
2. W trójkącie IDK punkt M jest środkiem boku DK. Prosta l jest prostopadła do IM. Proste przechodzące przez M prostopadłe do ID, IK przecinają l odpowiednio w punktach P, Q. Punkt N jest środkiem odcinka PQ. Wykaż, że $MN \perp DK$.
3. Dany jest czworokąt $SLAY$ wpisany w okrąg. Przekątna AS jest średnicą tego okręgu. Punkt E leży na odcinku LA, przy czym $\sphericalangle YSA = \sphericalangle ESL$. Punkt M jest środkiem odcinka AE. Udowodnić, że $|LM| = |YM|$.
4. Rozważmy dwie dodatnie liczby naturalne $x,\ d$. Udowodnij, że jedną spośród liczb$x,\ d,\ x + d$ można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych.
5. Rozstrzygnąć czy dla każdego x należącego do liczb całkowitych dodatnich istnieje takie y, z należące do liczb całkowitych dodatnich spełniające równanie
$$1 + 4y^2x = z^2 .$$
6. Znajdź liczby całkowite o, m oraz pierwsze q, że
$$\frac{1}{o} + \frac{1}{m} = \frac{1}{q}.$$

7. Rozstrzygnąć, czy istnieją 4 parami różne liczby rzeczywiste, że sześcian każdej z nich jest równy sumie kwadratów trzech pozostałych.

8. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b i c. Wykazać, że zachodzi nierówność $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$.

9. Znaleźć wszystkie wielomiany $P(x)$, takie że $P(x^2 + 2 + 1)|P(x^3 - 1)$

10. Rozważmy siatkę 5×5. W każdym polu jest strzałka skierowana w górę, w dół, w lewo lub w prawo. Wykazać, iż uczeń może usunąć z tej siatki dokładnie dwadzieścia strzałek, tak aby żadne dwie z pozostałych pięciu strzałek nie wskazywały na to samo pole. Zakładamy, iż strzałka wskazuje na <u>wszystkie</u> pola znajdujące się w tym kierunku, w jakim została skierowana, zaś nie wskazuje na to, w jakim się znajduje.

11. Dane jest 37 punktów kratowych, z których żadne 3 nie są współliniowe. Czy wśród nich musi istnieć trójkąt o środku ciężkości w punkcie kratowym?

12. Każdą ścianę pewnego wielościanu wypukłego pomalowano na biało lub czarno tak, że dwie ściany mające tę samą krawędź mają różny kolor. Udowodnij, że jeżeli w ten wielościan można wpisać sferę, to suma pól białych i czarnych ścian jest równa.