



# Zawody indywidualne grupy starszej dzień 3

---

1. Wykazać, że jeśli

$$\sqrt{xy - z^2} + \sqrt{yz - x^2} + \sqrt{zx - y^2} = x^2 + y^2 + z^2, \text{ to} \\ x = y = z = 0.$$

2. W trójkącie  $ABC$  spodki wysokości to odpowiednio  $D$ ,  $E$ ,  $F$ .  
Wykaż, że prosta  $AD$  jest dwusieczną kąta  $FDE$ .

3. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , że  
zachodzi:

$$(3x + 4y)(4x + 5y) = 7^z.$$

4. Rozstrzygnij, czy można pokolorować płaszczyznę  
czterema kolorami w ten sposób aby zachodziły warunki:

- każde koło o promieniu mniejszym niż 1 zawiera we wnętrzu punkty pokolorowane co najwyżej dwoma różnymi kolorami
- każde koło o promieniu większym od 2 zawiera we wnętrzu punkty pokolorowane wszystkimi kolorami.