MIELECKI OBÓZ MATEMATYCZNY

17.09.2025r.

Zasada minimum i maksimum

Zasada ekstremum (minimum i maksimum): w skończonym i niepustym zbiorze istnieje element najmniejszy i największy.

Obserwacja: W zbiorze złożonym z liczb naturalnych (skończonym lub nie) istnieje element najmniejszy.

Zadania:

1. W pewnym kraju jest skończona liczba miast. Każde dwa łączy droga jednokierunkowa. Udowodnić, że istnieje miasto, z którego można dojechać do każdego innego (niekoniecznie bezpośrednio).

2. (2. etap IX OMG) Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów ($n \geq 3$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów pokolorowano na jeden z trzech kolorów, przy czym każdy kolor został użyty przynajmniej raz. Wykazać, że istnieje trójkąt o wierzchołkach różnokolorowych taki, że w jego wnętrzu nie ma żadnego innego punktu.

3. Na płaszczyźnie danych jest $n \geq 3$ punktów, przy czym odległości między nimi są różne dla różnych par punktów. Każdy punkt łączymy odcinkiem z jego najbliższym sąsiadem. Czy można otrzymać w ten sposób łamaną zamkniętą?

4. W turnieju szachowym jest n zawodników. Każdy grał z każdym i nie było remisów. Gracza nazywamy Królem, jeżeli wygrał z każdym innym graczem bezpośrednio lub pośrednio (A wygrał bezpośrednio z B, a B wygrał bezpośrednio z C $\Rightarrow$ A wygrał pośrednio z C). Udowodnić, że zawsze istnieje Król.

5. Na płaszczyźnie jest $n \geq 3$ punktów; każde trzy są wierzchołkami trójkąta o polu ≤ 1. Udowodnić, że wszystkie n punktów leży w trójkącie o polu ≤ 4.

6. Na płaszczyźnie danych jest n punktów białych i n czarnych, żadne trzy nie są współliniowe. Wykaż, że można je tak połączyć n odcinkami, by każdy odcinek miał końce różnych kolorów i by żadne dwa odcinki nie miały punktów wspólnych.

7. W grupie znajomych każdy ma maksymalnie trzech wrogów. Udowodnić, że da się podzielić grupę na dwie, niekoniecznie równe podgrupy tak, że każda osoba wewnątrz swojej podgrupy będzie miała maksymalnie jednego wroga.
   Uwaga: jeżeli A jest wrogiem B, to B jest wrogiem A.

8. Niech σ to niepusty zbiór punktów na płaszczyźnie taki, że każdy punkt jest środkiem odcinka, którego końce należą do σ. Wykazać, że zbiór σ jest nieskończony.

9. Wykazać, że w każdym pięciokącie wypukłym pewne trzy przekątne spełniają nierówność trójkąta (można z nich zbudować trójkąt).

10. Wykazać, że $n\sqrt{2}$ nie jest liczbą całkowitą dla żadnego n naturalnego.

11. Na płaszczyźnie znajduje się $2n + 1$ osób w parami różnych odległościach (żadne dwie nie są takie same). W jednym momencie każdy strzela do najbliżej stojącej niej osoby. Wykazać, że:
    a) przynajmniej jedna osoba przeżyje
    b) tory lotu nabojów się nie przetną
    c) nikogo nie trafi więcej niż 5 nabojów

12. (Problem Sylvestra) Na płaszczyźnie leży n punktów, takich że dowolna prosta przechodząca przez dwa punkty przechodzi jeszcze przez trzeci. Wykazać, że wszystkie punkty leżą wobec tego na jednej prostej.

13. Na okręgu znajduje się n stacji paliw, w sumie zawierających dokładnie tyle paliwa, ile jest potrzebne do objechania całego okręgu i powrotu do punktu wyjścia. Wykazać, że możemy wyruszyć z którejś stacji i objechać cały okrąg, poruszając się ze wskazówkami zegara.

Na koniec dwa zadania, które pojawią się jeszcze jutro :))

14. Rozwiązać $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 3xyz$ w liczbach całkowitych dodatnich.

15. Rozwiązać $2x^4 + 4y^4 + 8z^4 = t^4$ w liczbach całkowitych dodatnich.