MIELECKI OBÓZ MATEMATYCZNY

17.09.2025r.

Wzory skróconego mnożenia

Wzory skróconego mnożenia:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Twierdzenie. Kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Wniosek. Jeżeli $a^2 + b^2 = 0$, to $a = b = 0$.

Zadania:

1. Wykazać, że dla każdych $a, b \in R$ $(a+b)^2 \geq 4ab$.
2. Wykazać, że dla każdego $a \in Z_{\geq 2}$ $a^6 - 1$ jest liczbą złożoną.
3. Wykazać, że dla każdego $a \in R_{+}$ $a + \frac{1}{a} \geq 2$.
4. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$.
5. Dane są liczby rzeczywiste x, y takie, że $x + y = 11$ oraz $xy = 7$. Wyznaczyć wartość wyrażenia $x^2 + y^2$.

6. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające równanie
   a) $x^2 - y^2 = 23$
   b) $x^4 - y^4 = 65$
7. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 23 \\ x + 2y + 4z = 22 \end{cases}$$

8. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2yz = 100 \\ 2xy - z^2 = 100 \end{cases}$$

9. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych

$$\begin{cases} x^2 + 3y = z \\ y^2 + 3z + 1 = x - 1 \\ z^2 + 3x = y - 1 \end{cases}$$

10. Udowodnić, że jeżeli liczbę naturalną n można przedstawić jako sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych, to jako sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych można również przedstawić:
    a) $2n$
    b) $5n$
11. Udowodnij, że $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ jest liczbą naturalną.
12. (I MOM) Wyznacz sumę całkowitych rozwiązań równania

$$\sqrt{x - 3 - 2\sqrt{x - 4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} = 1.$$

Nierówności Cauchy'ego

13. Udowodnić nierówności między średnimi (***Nierówność Cauchy'ego*** dla $n = 2$):

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Kiedy zachodzą równości?

14. (I Konkurs im. prof. Marszała, poziom klas II, 1985/1986) Dowieść, że jeżeli $a + b + c = 1$ dla $a, b, c > 0$, to $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

15. Udowodnić, że jeżeli suma liczb dodatnich a i b wynosi 1, to $ab \leq \frac{1}{4}$.

16. Udowodnić, że dla $a, b, c > 0$ $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.