19-20.09.2025r.

Mecz Matematyczny Elity

1. Dany jest trójkąt DIK oraz jego wysokości $DO,\ IZ,\ KC$. Wykazać, że rzuty punktu O na proste $DI,\ DK,\ IZ,\ KC$ są współliniowe.
2. W trójkącie ABC punkty Q i P leżą odpowiednio na AC i AB tak, że $\sphericalangle BQC = \sphericalangle BCQ$ i $\sphericalangle CPB = \sphericalangle PBC$. Punkt S to przecięcie PC z BQ, a punkt T to środek okręgu opisanego na PQA. Udowodnij, że punkt H, będący ortocentrum trójkąta ABC, leży na prostej TS.
3. Niechaj I - środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. AI przecina prostą BC w punkcie D, zaś okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie S (różnym od A). Punkt K to środek okręgu wpisanego w trójkąt DSB, natomiast punkt L — w trójkąt DSC. Punkt P jest symetrycznym odbiciem punktu I względem prostej KL. Wykazać, iż $\sphericalangle BPC = 90°$.
4. Dowieść, że równanie

   $$a^{11} + m^{11} + o^{11} + g^{11} + u^{11} + s^{11} = 6969696969692137420$$

   nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.
5. Wykazać, iż istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych λ, takich że $\lambda! - 1$ jest liczbą złożoną.
6. Liczba całkowita dodatnia N jest $n - edgująca$, jeśli posiada co najmniej n różnych dzielników pierwszych oraz istnieją dzielniki $1, x_1, x_2, \dots, x_n$ liczby N, których suma jest równa N.

   Pokazać, że istnieją liczby $n - edgujące$ dla dowolnego n.

7. Dany jest ciąg

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}.$$

Rozstrzygnąć, czy $a_{5000} > 100$.

8. Rozwiąż następujące równanie w liczbach rzeczywistych:
$\sqrt[7]{63x + 1} + \sqrt[7]{64x - 1} = \sqrt[7]{x}$

9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon R^2 \to R$, które są ciągłe w zerze, dla których $f(3x, 2y) - f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ dla dowolnej pary liczb rzeczywistych (x, y).

10. Ania i Radek grają w grę. W parku jest 2025 kaczek. W jednej turze Ania zabiera z parku pewną liczbę kaczek, a później robi to Radek, według zasady, że w ruchu $n \geq 1$ gracz którego jest kolej (to jest, Ania dla nieparzystych n, zaś Radek dla parzystych), może wziąć od 1 do n kaczek. Osobą która zabierze ostatnią kaczkę przegrywa grę. Rozstrzygnij kto ma strategię wygrywającą.

11. Na stołówce znajduje się 2137 parówek i pewna liczba dzieci ustawiona w kolejkę. Dzieci podchodzą po kolei do stolika, zabierają pewną liczbę parówek i wychodzą ze stołówki. Załóżmy, że w danej chwili na stoliku znajduje się x parówek, a na sali y dzieci. Jeżeli do stolika podejdzie chłopiec to zabierze sobie $\lceil \frac{x}{y} \rceil$ parówek, a jeśli dziewczynka to $\left[\frac{x}{y}\right]$. Udowodnij, że łączna liczba zjedzonych przez chłopaków parówek nie zależy od kolejności dzieci w kolejce.

12. Na płaszczyźnie w niekoniecznie różnych punktach leżą szyszunie. W jednym ruchu Michał Teofil może wybrać parę szyszeczek A i B przełożyć je oba na środek odcinka AB. Układ nazwiemy *smakowitym* gdy istnieje sekwencja ruchów, po której wszystkie szyszeczki znajdą się w jednym punkcie. Znajdź wszystkie liczby $n \geq 1$, dla których każdy układ n szyszuni jest *smakowity*.