TABELA: Derivadas, Integrais e Identidades Trigonométricas

• *Derivadas*

Sejam u e v funções deriváveis de x e n constante.

1. $y = u^n \Rightarrow y' = n\,u^{n-1}u'$.
2. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$.
3. $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
4. $y = a^u \Rightarrow y' = a^u(\ln a)\,u',\ (a > 0,\ a \neq 1)$.
5. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$.
6. $y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}\log_a e$.
7. $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u}u'$.
8. $y = u^v \Rightarrow y' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v(\ln u)\,v'$.
9. $y = \text{sen}\,u \Rightarrow y' = u'\cos\,u$.
10. $y = \cos\,u \Rightarrow y' = -u'\text{sen}\,u$.
11. $y = \text{tg}\,u \Rightarrow y' = u'\sec^2 u$.
12. $y = \text{cotg}\,u \Rightarrow y' = -u'\text{cosec}^2 u$.
13. $y = \sec\,u \Rightarrow y' = u'\sec\,u\,\text{tg}\,u$.
14. $y = \text{cosec}\,u \Rightarrow y' = -u'\text{cosec}\,u\,\text{cotg}\,u$.
15. $y = arc\,\text{sen}\,u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $y = arc\,\cos\,u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $y = arc\,\text{tg}\,u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$.
18. $y = arc\,\cot g\,u \Rightarrow \frac{-u'}{1+u^2}$.
19. $y = arc\,\sec\,u,\ |u| \geqslant 1$
    $\Rightarrow y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.
20. $y = arc\,\text{cosec}\,u, |u| \geqslant 1$
    $\Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.

• *Identidades Trigonométricas*

1. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
2. $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$.
3. $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$.
4. $\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos\,2x}{2}$.
5. $\cos^2 x = \frac{1+\cos\,2x}{2}$.
6. $\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x\,\cos\,x$.
7. $2\,\text{sen}\,x\,\cos\,y = \text{sen}\,(x-y) + sen\,(x+y)$.
8. $2\,\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y = \cos\,(x-y) - \cos\,(x+y)$.
9. $2\,\cos\,x\,\cos\,y = \cos\,(x-y) + \cos\,(x+y)$.
10. $1 \pm \text{sen}\,x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

• *Integrais*

1. $\int du = u + c$.
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$.
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$.
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln\,a} + c,\ a > 0,\ a \neq 1$.
5. $\int e^u du = e^u + c$.
6. $\int \text{sen}\,u\,du = -\cos\,u + c$.
7. $\int \cos\,u\,du = \text{sen}\,u + c$.
8. $\int \text{tg}\,u\,du = \ln|\sec\,u| + c$.
9. $\int \text{cotg}\,u\,du = \ln|\text{sen}\,u| + c$.
10. $\int \sec\,u\,du = \ln|\sec\,u + \text{tg}\,u| + c$.
11. $\int \text{cosec}\,u\,du = \ln|\text{cosec}\,u - \text{cotg}\,u| + c$.
12. $\int \sec\,u\,\text{tg}\,u\,du = \sec\,u + c$.
13. $\int \text{cosec}\,u\,\text{cotg}\,u\,du = -\text{cosec}\,u + c$.
14. $\int \sec^2 u\,du = \text{tg}\,u + c$.
15. $\int \text{cosec}^2 u\,du = -\text{cotg}\,u + c$.
16. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arc\,\text{tg}\frac{u}{a} + c$.
17. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c,\ u^2 > a^2$.
18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + c$.
19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + c$.
20. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc\,\text{sen}\frac{u}{a} + c,\ u^2 < a^2$.
21. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc\,\sec\left|\frac{u}{a}\right| + c$.

• *Fórmulas de Recorrência*

1. $\int sen^n au\,du = -\frac{sen^{n-1}au\,\cos\,au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int sen^{n-2}au\,du$.
2. $\int \cos^n au\,du = \frac{sen\,au\,\cos^{n-1}au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int \cos^{n-2}au\,du$.
3. $\int tg^n au\,du = \frac{tg^{n-1}au}{a(n-1)} - \int tg^{n-2}au\,du$.
4. $\int cotg^n au\,du = -\frac{cotg^{n-1}au}{a(n-1)} - \int cotg^{n-2}au\,du$.
5. $\int \sec^n au\,du = \frac{\sec^{n-2}au\,tg\,au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int \sec^{n-2}au\,du$.
6. $\int cosec^n au\,du = -\frac{cosec^{n-2}au\,cotg\,au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int cosec^{n-2}au\,du$.

Resumo Cálculo Integral de Múltiplas Variáveis

Integrais Duplas e Triplas

Definição de Integral Dupla e Teorema de Fubini:

$$C = [a, b] \times [c, d] = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d$$
$$f : C \to \mathbb{R} \text{ é contínua}$$
$$I = \iint_C f(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dydx \quad \text{(Teorema de Fubini)}$$

Mudança de Variáveis:

$$f : V \to \mathbb{R}$$
$$f \circ h : U \to \mathbb{R}$$
$$I = \iint_V f(x, y)dxdy = \iint_U f(h(u, v))\,|\det Dh(u, v)|dudv$$

Onde Dh é a matriz Jacobiana de h

Coordenadas Polares:

$$r \in [0, +\infty),\ \theta \in [0, 2\pi)$$
$$h(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$
$$\det Dh(r, \theta) = \det \begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r$$

Definição de Integral Tripla e Teorema de Fubini:

$$C = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le y \le d, \\ r \le z \le s \end{cases}$$
$$f : C \to \mathbb{R} \text{ é contínua}$$
$$I = \iiint_C f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)dxdydz$$

Obs.: O Teorema de Fubini ainda pode ser utilizado.

Coordenadas Esféricas:

$$\rho \in [0, +\infty),\ \theta \in [0, 2\pi),\ \phi \in [0, \pi)$$
$$r = \rho\sin\phi \to \begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\theta \\ y = \rho\sin\theta\cos\phi \end{cases} \qquad z = \rho\cos\phi \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\det Dh(\rho, \theta\phi) = \rho^2\sin\phi$$

Coordenadas Cilíndricas:

$$r \in [0, +\infty),\ \theta \in [0, 2\pi),\ z \in (-\infty, +\infty)$$
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\det Dh(r, \theta, z) = r$$

Curvas Parametrizadas(em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$)

Integrais de Linha de Funções Reais:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$
$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad \gamma'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$$
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t))$$
$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_n'(t))^2} = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \ldots + x_n'(t)}$$

Integrais de Linha de Campos Vetoriais

$$U \subseteq \mathbb{R}^3 \text{aberto}$$
$$X : U \to \mathbb{R}^3 \text{campo vetorial em } U$$
$$(x, y) \in U \mapsto X(x, y) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$\gamma : [a, b] \to U \text{curva parametrizada}$$
$$t \to (x(t), y(t), z(t))$$

$$\int_\gamma X d\vec{r} = \int_a^b \langle X(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b (P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) + R \cdot z'(t)) dt$$

Obs.: $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos\theta$

Campos gradientes(ou conservativos):

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \text{aberto}, \ f : U \to \mathbb{R}$$

Caso:

$$X(x_1, \ldots, x_n) = \nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \right)$$

X é conservativo.
Obs.:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} :$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

Assim, se:

$$X = \nabla f \ , \ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n / \begin{cases} \gamma(a) = A \\ \gamma(b) = B \end{cases}$$
$$\int_\gamma \nabla f d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Em resumo, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. X é um campo gradiente: $\exists f : U \to \mathbb{R} / X = \nabla f$;
2. A integral de X ao longo de caminhos fechados depende apenas do ponto inicial e final;
3. $\oint_\gamma X d\vec{r} = 0$ para qualquer curva fechada γ

Fórmula de Green:

$$U \subset \mathbb{R}^3 \text{ aberto limitado, com fronteira } \partial U$$
$$\partial U \text{ é uma curva fechada orientada positivamente}$$
$$X = (P, Q) \text{ campo de vetores de classe } C^1 \text{ em U e } \partial U$$
$$\oint_{\partial U} X d\vec{r} = -\iint_U \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}_{\text{rot } X} dA$$

Dois operadores diferenciais:

$$\text{Divergência:} \begin{cases} \operatorname{div} X : U \to \mathbb{R} \quad / \\ \operatorname{div} X(x, y) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

$$\text{Rotacional:} \begin{cases} \text{rot } X : U \to \mathbb{R} \quad / \\ \text{rot } X = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

Integrais de Linha de Campos Vetoriais em $\mathbb{R}^2$

$$U \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aberto}$$
$$X = (P, Q) \text{ campo vetorial em } U$$
$$(x, y) \in U \mapsto X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

Fórmula de Green:

$$U \subset \mathbb{R}^2 \text{ aberto limitado, com fronteira } \partial U$$
$$\partial U \text{ é uma união finita de curvas fechadas orientadas positivamentes}$$
$$X = (P, Q) \text{ campo de vetores de classe } C^1 \text{ em U e } \partial U$$
$$\oint_{\partial U} X d\vec{r} = -\iint_U \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}_{\text{rot } X} dA$$

Obs.: Se X é um campo gradiente, então $\oint_\gamma X d\vec{r} = 0$ para qualquer curva fechada γ

Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Tipos de superfícies:

1. Gráfico de funções reais de duas variáveis:

$$U \subseteq \mathbb{R}^2, f : U \to \mathbb{R}$$
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U; z \in f(x, y)\}$$

2. Superfícies de nível:

$$V \subseteq \mathbb{R}^3, f : V \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$
$$\{(x,y,z) \in V : f(x,y,z) = c\}$$

3. Superfícies de revolução

Superfícies parametrizadas: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^3 \text{ de classe } C^1\text{, injetora e tal que } D\Phi(u,v) \text{ que também é injetora}$$
$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$
$$\mathrm{Im}(\Phi) = S \text{ que é uma suérfície}$$
$$D\Phi(u,v) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ y_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

C plano tangente à superfície parametrizada por Φ é gerado pelos vetores $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$

Um vetor normal é dado então pelo produto vetorial de $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$:

Vetor unitário
e ortogonal
à superfície $\longrightarrow$ $\zeta(u,v) = \dfrac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|}$

A área da superfície é dada por:

$$A(s) = \iint_U \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \underbrace{dA}_{dudv}$$

Integrais em superfícies em $\mathbb{R}^3$

$$U \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$\Phi(u,v) : U \to \mathbb{R}^3$$
$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\iint_S f dS = \iint_U f(\Phi(u,v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \right\| \underbrace{dA}_{dudv}$$

Integrais de campos de vetores em $\underbrace{\text{superfícies orientáveis}}_{\text{(admite um campo normal unitário)}}$

Seja S superfície orientável com campo normal ζ e X um campo de vetores em $\mathbb{R}^3$

O fluxo de X através de S é dado por :

$$\iint_S \langle X, \zeta \rangle dS = \iint_U \langle X(\Phi(u,v), \pm \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \right\| \rangle \underbrace{dA}_{dudv}$$

Teorema de Gauss

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma superfície parametrizada orientável orientada com a normal exterior a Ω. Seja X um campo de vetores de classe C^1 em $\Omega \cup \partial\Omega$:

$$\oiint_{\partial\Omega} \langle X, \zeta \rangle dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} X dV$$

$$\text{Obs.:} \begin{cases} U \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ aberto} \\ X = (P, Q, R) \text{ campo em } U \\ f : U \to \mathbb{R} \\ \operatorname{div} X = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{cases}$$

Observações

1. Se X é um campo gradiente, então: rot $X \equiv 0$
2. Se X é um campo gradiente qualquer, então: div rot $X = 0$

Teorema de Stokes

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ superfície orientável, orientada pelo vetor normal ζ, cuja fronteira ∂S é uma curva de classe C^1 com a orientação induzida.
E X campo de vetores de classe C^1 em um aberto contendo $S \cup \partial S$.

$$\oint_{\partial S} X d\vec{r} = \iint_S \langle \text{rot } X, \zeta \rangle dS$$

Métodos de Resolução de EDOs

EDOs de primeira ordem

Variáveis separáveis	$y' = f(x)g(y)$	$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$
Fator Integrante	$y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x)y(x) = \int I(x)Q(x)dx$, onde $I = \exp\left(\int P(x)dx\right)$

EDOs exatas

Caso geral	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	caso $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ temos $\frac{\partial G}{\partial x} = M(x,y)$ e $\frac{\partial G}{\partial y} = N(x,y)$, e $G(x,y) = K$ é solução.
Das não exatas às exatas	$IM(x,y)dx + IN(x,y)dy = 0$	onde $I = I(x)$ ou $I = (y)$ e $\frac{\partial(IM)}{\partial y} = \frac{\partial(IN)}{\partial x}$

EDOs homogêneas

Mudança de variável	$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$	$y = u \cdot x$ $y' = u'x + u \to u'x = F(u) - u$
Como saber se é homogênea?	$\begin{cases} x \to kt \\ y \to kt \end{cases}$	$y' = f(x,y) = f(kx,ky)$

EDOs de ordem $n = 2$

Obs.:Soma de soluções também é solução, portanto y_1 e y_2 são soluções individuais.
$W(f, g)$ é o Wronskiano de f e g.

Coeficientes constantes (Caso homogêneo)	$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' = 0$	Equação característica: $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 = 0$ $y = y_1 + y_2$ Se $\begin{cases} \Delta > 0 \to y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \\ \Delta = 0 \to y(x) = C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} \\ \Delta < 0 \to y(x) = C_1 e^{ax}\cos(bx) + C_2 e^{ax}\sin(bx) \end{cases}$ Onde λ é raiz real e $a \pm bi$ são raizes complexas
Caso não homogêneo	$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' = g(x)$	$y = y_h + y_p$ Onde y_h é a solução da homogênea e y_p é uma solução particular
Método de variação de parâmetros (Encontrar soluções particulares)	$y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2$	$C_1 = \int \frac{-y_2 \cdot g(x)}{a_2 \cdot W(y_1, y_2)} dx$ $C_2 = \int \frac{y_1 \cdot g(x)}{a_2 \cdot W(y_1, y_2)} dx$
EDO de Cauchy-Euler	$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$	Eq. inicial: $am(m-1) + bm + c = 0$ Se $\begin{cases} \Delta > 0 \to y(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2} \\ \Delta = 0 \to y(x) = C_1 x^m + C_2 \ln(x) \cdot x^m \\ \Delta < 0 \to y(x) = x^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)) \end{cases}$ Onde m é raiz real e $\alpha \pm \beta i$ é raiz complexa
EDO de Bessel	$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - p^2) = 0$ Com $p \in \mathbb{R}$ constante	Se $\begin{cases} p \in \mathbb{Z} \to y(x) = C_1 J_p(x) + Y_p(x) \\ p \notin \mathbb{Z} \to y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x) \end{cases}$ Onde J_p é a função de Bessel de 1ª espécie de ordem p e Y_p é a função de Bessel de 2ª espécie de ordem p Nota: $\lim_{x \to 0^+} Y_p(x) = -\infty$
EDO de Legendre	$p \in \mathbb{R}$ constante com $y(x) : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ $(1 - x^2)y'' + 2xy' + p(p+1)y = 0$	Se $p = n \in \mathbb{N}$ $y(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q(x)$ Onde P_n é a função de Legendre de 1ª espécie de ordem n e Q_p é a função de Legendre de 2ª espécie de ordem n Nota: $\lim_{x \to 1^-} Q_n(x) = +\infty$

Lembretes: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\sinh(i\theta)}{i} \quad \text{e} \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cosh(i\theta)$$

A redução de ordem é um algoritmo capaz de reduzir a ordem de EDOs, porém não será detalhado.

Outros métodos de resolução

Séries de potências	$\sum_{k=0}^{i} f_i(x)y^{(i)} = g(x)$	$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$
Transformada de Laplace	$\sum_{k=0}^{i} f_i(x)y^{(i)} = g(x)$ com PVI	Aplicar $\mathcal{L}$ $\rightarrow$ Resolver Eq. Algébrica $\rightarrow$ Aplicar $\mathcal{L}^{-1}$

Critérios de convergência para séries

Critério da Divergência
Seja $\sum_n a_n$ uma série. Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então $\sum_n a_n$ é divergente.

Critério da Integral
Seja $\sum_n a_n$ uma série e seja m um natural tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \geq m$. Suponha uma $f(x)$ que no intervalo $[m, +\infty)$ satisfaz as seguintes condições:

- É contínua;
- descrescente;
- não negativa;
- e tal que $f(n) = a_n$ para todo natural $n \geq m$.

Temos que a série $\sum_n a_n$ é convergente se e somente se a integral imprópria $\int_m^{+\infty} f(x)dx$ é convergente.

Critério da comparação direta
Sejam $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ duas séries e seja m um número natural tal $b_n \geq a_n \geq 0$ para todo $n \geq m$, temos:

1. Se $\sum_n b_n$ é convergente, então a série $\sum_n a_n$ é convergente.
2. Se $\sum_n a_n$ é divergente, então a série $\sum_n b_n$ é divergente.

Critério da comparação no limite
Sejam $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ duas séries e seja m um número natural tal $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ para todo $n \geq m$, suponha o seguinte limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

exista, então.

1. Se $L \neq 0$ então $\sum_n a_n$ converge se e somente se $\sum_n b_n$ converge.
2. Se $L = 0$ e $\sum_n b_n$ converge, então $\sum_n a_n$ converge.

Critério da série alternada
Seja $\sum_n a_n$ uma série alternada com $|a_n| = b_n$, a série é convergente se satisfaz os seguintes critérios:

1. $b_{n+1} \leq b_n$ para todo $n \geq m$;
2. e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

para algum $m \in \mathbb{N}$.

Convergência absoluta
Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.
Obs.: a volta não é garantida.

Critério da razão
Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série com todos os termos não nulos e seja $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Então:

1. Se $r < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.
2. Se $r > 1$ (incluindo $r \to +\infty$), a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Critério da raiz
Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série e $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Então:

1. Se $r < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.
2. Se $r > 1$ (incluindo $r \to +\infty$), a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Séries de referência

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Tabela de transformadas de Laplace

$f(t),\ t \geq 0$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\operatorname{sen}(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$\operatorname{senh}(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
$\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$U(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$f'(t)$	$-f(0) + sF(s)$
$f''(t)$	$-f'(0) - sf(0) + s^2F(s)$
$\int_0^t f(u)\ du$	$\frac{F(s)}{s}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)\ du$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$