Teil 1: endliche Wörter

Automatentheorie und ihre Anwendungen
Teil 1: endliche Automaten auf endlichen Wörtern

Wintersemester 2018/19 Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ws1819-autom

8:55

8:55

Hier nochmal die 4 Kapitel (kurz!)

- Wiederholung der Definitionen & Resultate zu endlichen Automaten aus „Theoretische Informatik 1“
- Kennenlernen zweier Anwendungen endlicher Automaten

8:55

Das wird ein kurzer, leichter Teil. Ca. 2 Sitzungen.

(1) Wdhlg. mache ich knapp; wenn Euch auffällt, was Ihr nicht mehr parat habt, dann schlagt es im Skript nach.

(2) Die Anwendungen sind (hoffentlich) neu für Euch.

8:56

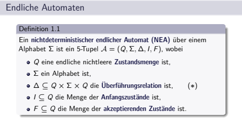
2018-10-20

└─Und nun . . .

Und nun . . .

- **Symbole** $a, b, \ldots$
- **Alphabet** Σ: endliche nichtleere Menge von Symbolen
- **(endliches) Wort** w über Σ:
  endliche Folge $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ von Symbolen $a_i \in \Sigma$
- **leeres Wort** ε
- **Wortlänge** $|a_1 a_2 \ldots a_n| = n, \quad |\varepsilon| = 0$
- **Menge aller Wörter** über Σ: Σ^*
- **Sprache** L über Σ: Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ von Wörtern
- **Sprachklasse** $\mathcal{L}$: Menge von Sprachen

8:56


Endliche Automaten

Definition 1.1

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)** über einem Alphabet Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ ein Alphabet ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die **Überführungsrelation** ist, $(*)$
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.

8:57

Einziger Unterschied zur Def. aus Theorie 1: mehrere Anfangszustände (lassen sich aber immer auf 1 reduzieren)

Außerdem steht Δ vor I – das ist aber nur Festlegungssache.

Akz. Zustände werden oft Endzustände genannt (en: final states $\rightsquigarrow F$). Das kann aber für Verwirrung sorgen, denn die Berechnung muss beim Erreichen eines solchen Zustandes noch nicht enden.

Deshalb benutze ich „akz. Zustände“.

Endliche Automaten

Definition 1.1

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)** über einem Alphabet Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ ein Alphabet ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die **Überführungsrelation** ist, $(*)$
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.

- $(*)$ bedeutet:
  Δ besteht aus Tripeln (q, a, q') mit $q, q' \in Q$ und $a \in \Sigma$
- $(q, a, q') \in \Delta$ bedeutet intuitiv:
  ist $\mathcal{A}$ in Zustand q und liest ein a, geht er in Zustand q' über.

8:57

Einziger Unterschied zur Def. aus Theorie 1: mehrere Anfangszustände (lassen sich aber immer auf 1 reduzieren)

Außerdem steht Δ vor I – das ist aber nur Festlegungssache.

Akz. Zustände werden oft Endzustände genannt (en: final states $\rightsquigarrow F$).
Das kann aber für Verwirrung sorgen, denn die Berechnung muss beim Erreichen eines solchen Zustandes noch nicht enden.
Deshalb benutze ich „akz. Zustände“.

Beispiel und graphische Repräsentation von NEAs

Betrachte $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1\},\ \{a, b\},\ \{(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_1), (q_1, b, q_1)\},\ \{q_0\}, \{q_1\})$

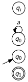
- Zustände: q_0, q_1
- Alphabet $\{a, b\}$
- Übergänge: von q_0 mittels a zu q_0, ...
- Anfangszustand q_0
- einziger akzeptierender Zustand q_1

9:00

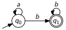
Beispiel und graphische Repräsentation von NEAs

Betrachte $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1\},\ \{a, b\},\ \{(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_1), (q_1, b, q_1)\},\ \{q_0\}, \{q_1\})$

- Zustände: q_0, q_1
- Alphabet $\{a, b\}$
- Übergänge: von q_0 mittels a zu q_0, ...
- Anfangszustand q_0
- einziger akzeptierender Zustand q_1



$\mathcal{A}$:



9:00

Definition 1.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge

$$r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n,$$

so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$.
Man sagt/schreibt: w **überführt** q_0 in q_n, $q_0 \vdash_{\mathcal{A}}^{w} q_n$

9:02

$\vdash_A^w$ war in Theorie 1 $\overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}}$

Berechnungen und Akzeptanz

Definition 1.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge

$$r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n,$$

  so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$.
  Man sagt/schreibt: w **überführt** q_0 in q_n, $q_0 \vdash_{\mathcal{A}}^{w} q_n$
- Ein Run $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ von $\mathcal{A}$ auf w ist **erfolgreich**, wenn $q_0 \in I$ und $q_n \in F$.

9:02

$\vdash_A^w$ war in Theorie 1 $\overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}}$

Berechnungen und Akzeptanz

Definition 1.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge

  $$r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n,$$

  so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$.
  Man sagt/schreibt: w **überführt** q_0 in q_n, $q_0 \vdash_{\mathcal{A}}^{w} q_n$
- Ein Run $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ von $\mathcal{A}$ auf w ist **erfolgreich**, wenn $q_0 \in I$ und $q_n \in F$.
- $\mathcal{A}$ **akzeptiert** w, wenn es einen erfolgreichen Run von $\mathcal{A}$ auf w gibt.

9:02

$\vdash_A^w$ war in Theorie 1 $\xRightarrow{w}_{\mathcal{A}}$

Definition 1.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge

$$r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n,$$

so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$.
Man sagt/schreibt: w **überführt** q_0 in q_n, $q_0 \vdash_{\mathcal{A}}^{w} q_n$

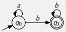
- Ein Run $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ von $\mathcal{A}$ auf w ist **erfolgreich**, wenn $q_0 \in I$ und $q_n \in F$.
- $\mathcal{A}$ **akzeptiert** w, wenn es einen erfolgreichen Run von $\mathcal{A}$ auf w gibt.
- Die von $\mathcal{A}$ **erkannte Sprache** ist $L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}$.

9:02

$\vdash_A^w$ war in Theorie 1 $\xRightarrow{w}_{\mathcal{A}}$

Beispiele

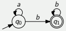
$\mathcal{A}_1$:



$L(\mathcal{A}_1) =$

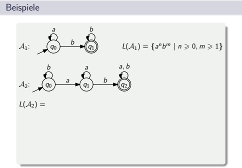
9:04

Beispiele

$\mathcal{A}_1$: 

$L(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^m \mid n \geqslant 0, m \geqslant 1\}$

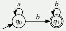
9:04


Beispiele
$\mathcal{A}_1$:
a
b
q_0
b
q_1
$L(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^m \mid n \geqslant 0, m \geqslant 1\}$
$\mathcal{A}_2$:
b
a
a, b
q_0
a
q_1
b
q_2
$L(\mathcal{A}_2) =$

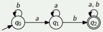
9:04

9:04

Beispiele

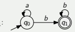
$\mathcal{A}_1$: 

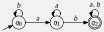
$L(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^m \mid n \geqslant 0, m \geqslant 1\}$

$\mathcal{A}_2$: 

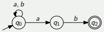
$L(\mathcal{A}_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält Teilwort } ab\}$

Beispiele

$\mathcal{A}_1$:  $L(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^m \mid n \geqslant 0, m \geqslant 1\}$

$\mathcal{A}_2$: 

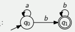
$L(\mathcal{A}_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ enthält Teilwort $ab\}$

$\mathcal{A}_3$: 

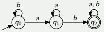
$L(\mathcal{A}_3) =$

9:04

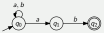
Beispiele

$\mathcal{A}_1$: 

$L(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^m \mid n \geqslant 0, m \geqslant 1\}$

$\mathcal{A}_2$: 

$L(\mathcal{A}_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ enthält Teilwort $ab\}$

$\mathcal{A}_3$: 

$L(\mathcal{A}_3) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ endet auf $ab\}$

9:04

2018-10-20

9:08

Definition 1.3

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **(NEA-)erkennbar**,
wenn es einen NEA $\mathcal{A}$ gibt mit $L = L(\mathcal{A})$.

Determinismus

Definition 1.4
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ **genau 1** Tripel (q, a, q') und enthält I **genau 1** Zustand,
dann ist $\mathcal{A}$ ein **deterministischer endlicher Automat (DEA)**.

9:08

Tafelanschrieb: nur Bsp. **ganz kurz**

Determinismus

Definition 1.4
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ **genau 1** Tripel (q, a, q')
und enthält I **genau 1** Zustand,
dann ist $\mathcal{A}$ ein **deterministischer endlicher Automat (DEA)**.

$\rightsquigarrow$ Nachfolgezustand für jedes Paar (q, a) eindeutig bestimmt

9:08

Tafelanschrieb: nur Bsp. **ganz kurz**

2018-10-20

Determinismus

Definition 1.4

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ **genau 1** Tripel (q, a, q')
und enthält I **genau 1** Zustand,
dann ist $\mathcal{A}$ ein **deterministischer endlicher Automat (DEA)**.

$\leadsto$ Nachfolgezustand für jedes Paar (q, a) eindeutig bestimmt

- Jeder DEA ist ein NEA,
  aber nicht umgekehrt (z. B. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$ auf Folie 10).

9:08

Tafelanschrieb: nur Bsp. **ganz kurz**

Determinismus

Definition 1.4
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ **genau 1** Tripel (q, a, q')
und enthält I **genau 1** Zustand,
dann ist $\mathcal{A}$ ein **deterministischer endlicher Automat (DEA)**.

$\rightsquigarrow$ Nachfolgezustand für jedes Paar (q, a) eindeutig bestimmt

- Jeder DEA ist ein NEA,
  aber nicht umgekehrt (z. B. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$ auf Folie 10).
- Auf Folie 10 ist nur $\mathcal{A}_2$ ein DEA;
  $\mathcal{A}_1$ kann mittels *Papierkorbzustand* zum DEA werden; **T 1.1**
  bei $\mathcal{A}_3$ genügt auch das nicht.

9:08

Tafelanschrieb: nur Bsp. **ganz kurz**

Potenzmengenkonstruktion

Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?

9:11

Klären: was heißt „gleichmächtig"?
(L DEA-erkennbar gdw. L NEA-erkennbar. Hinrichtung trivial.)

Hier nur **kurz** die Konstruktion und ein Beispiel.
Vollständiger Beweis siehe Theorie 1.
(Wir werden fast dieselbe Konstruktion später an Baumautomaten genauer ausführen.)

Potenzmengenkonstruktion

Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?
Antwort: Ja!

9:11

Klären: was heißt „gleichmächtig“?
(L DEA-erkennbar gdw. L NEA-erkennbar. Hinrichtung trivial.)

Hier nur **kurz** die Konstruktion und ein Beispiel.
Vollständiger Beweis siehe Theorie 1.
(Wir werden fast dieselbe Konstruktion später an Baumautomaten genauer ausführen.)

Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?
Antwort: Ja!

Satz 1.5 (Rabin, Scott 1959)
Für jeden NEA $\mathcal{A}$ gibt es einen DEA $\mathcal{A}^d$ mit $L(\mathcal{A}^d) = L(\mathcal{A})$.

9:11

Klären: was heißt „gleichmächtig"?
(L DEA-erkennbar gdw. L NEA-erkennbar. Hinrichtung trivial.)

Hier nur **kurz** die Konstruktion und ein Beispiel.
Vollständiger Beweis siehe Theorie 1.
(Wir werden fast dieselbe Konstruktion später an Baumautomaten genauer ausführen.)

Potenzmengenkonstruktion

Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?
Antwort: Ja!

Satz 1.5 (Rabin, Scott 1959)
Für jeden NEA $\mathcal{A}$ gibt es einen DEA $\mathcal{A}^d$ mit $L(\mathcal{A}^d) = L(\mathcal{A})$.

Beweisskizze: Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$.
Wir konstruieren $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, F^d)$ wie folgt.

- $Q^d = 2^Q$ (Potenzmenge der Zustandsmenge)
- $I^d = \{I\}$
- $(S, a, S') \in \Delta^d$ gdw. $S' = \{q' \mid \exists q \in S : (q, a, q') \in \Delta\}$
- $F^d = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$ **T 1.2**

9:11

Klären: was heißt „gleichmächtig“?
(L DEA-erkennbar gdw. L NEA-erkennbar. Hinrichtung trivial.)

Hier nur **kurz** die Konstruktion und ein Beispiel.
Vollständiger Beweis siehe Theorie 1.
(Wir werden fast dieselbe Konstruktion später an Baumautomaten genauer ausführen.)

Potenzmengenkonstruktion

Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?

Antwort: Ja!

Satz 1.5 (Rabin, Scott 1959)
Für jeden NEA $\mathcal{A}$ gibt es einen DEA $\mathcal{A}^d$ mit $L(\mathcal{A}^d) = L(\mathcal{A})$.

Beweisskizze: Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$.
Wir konstruieren $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, F^d)$ wie folgt.

- $Q^d = 2^Q$ (Potenzmenge der Zustandsmenge)
- $I^d = \{I\}$
- $(S, a, S') \in \Delta^d$ gdw. $S' = \{q' \mid \exists q \in S : (q, a, q') \in \Delta\}$
- $F^d = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$ **T 1.2**

Im schlimmsten Fall kann $\mathcal{A}^d$ im Vergleich zu $\mathcal{A}$ exponentiell viele Zustände haben (s. Hopcroft et al. 2001, S. 65).

9:11

Klären: was heißt „gleichmächtig“?
(L DEA-erkennbar gdw. L NEA-erkennbar. Hinrichtung trivial.)

Hier nur **kurz** die Konstruktion und ein Beispiel.
Vollständiger Beweis siehe Theorie 1.
(Wir werden fast dieselbe Konstruktion später an Baumautomaten genauer ausführen.)

Und nun . . .

Stichwortsuche

Typisches Problem aus dem Internetzeitalter

Gegeben sind **Stichwörter** $\boldsymbol{w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*}$
und **Dokumente** $D_1, \ldots, D_M \in \Sigma^*$.

Finde alle j, so dass D_j mindestens ein (alle) w_i als Teilwort hat.

- relevant z.B. für **Suchmaschinen**
- übliche Technologie: **invertierter Index**
  speichert für jedes im Internet auftretende w_i
  eine Liste aller Dokumente D_j, die w_i enthalten
- invertierte Indizes sind zeitaufwändig zu erstellen
  und setzen voraus, dass die D_j sich nur langsam ändern

9:15

9:17

Stichwortsuche ohne invertierte Indizes?

Invertierte Indizes versagen, wenn

- die (relevanten) Dokumente sich schnell ändern:
  - Suche in tagesaktuellen Nachrichtenartikeln
  - Einkaufshelfer sucht nach bestimmten Artikeln in aktuellen Seiten von Online-Shops
- die Dokumente nicht katalogisiert werden können:
  - Online-Shops wie Amazon generieren oft Seiten für ihre Artikel nur auf Anfragen hin.

$\leadsto$ Wie kann man dennoch Stichwortsuche implementieren?

9:18

Gegeben sind **Stichwörter** $\boldsymbol{w_1, \dots, w_n \in \Sigma^*}$
und **Dokumente** $D_1, \dots, D_M \in \Sigma^*$.
Finde alle j, so dass D_j mindestens ein w_i als Teilwort hat.

Ziel: konstruiere NEA $\mathcal{A}$, der

- ein D_j zeichenweise liest und
- in einen Endzustand geht gdw. er eins der w_i findet

Der Einfachheit halber legen wir fest, dass $\mathcal{A}$ ein Wort w akzeptiert, wenn $\mathcal{A}$ bereits nach Lesen eines *Teilworts* einen akz. Zustand erreicht.

2018-10-20

Ein Fall für endliche Automaten!

Gegeben sind **Stichwörter** $\boldsymbol{w_1, \dots, w_n \in \Sigma^*}$
und **Dokumente** $D_1, \dots, D_M \in \Sigma^*$.
Finde alle j, so dass D_j mindestens ein w_i als Teilwort hat.

Ziel: konstruiere NEA $\mathcal{A}$, der

- ein D_j zeichenweise liest und
- in einen Endzustand geht gdw. er eins der w_i findet

Der Einfachheit halber legen wir fest, dass $\mathcal{A}$ ein Wort w akzeptiert, wenn $\mathcal{A}$ bereits nach Lesen eines *Teilworts* einen akz. Zustand erreicht.

Beispiel 1.6

$w_1 = \texttt{web}$ und $w_2 = \texttt{ebay}$

T 1.3

9:18

Implementation des NEAs $\mathcal{A}$

Eine Möglichkeit:

1. Determinisierung (Potenzmengenkonstruktion)
2. Simulation des resultierenden DEA $\mathcal{A}^d$

Wird $\mathcal{A}^d$ nicht zu groß?
($2^{27} > 134$ Mio. Zustände bei Stichw. „Binomialkoeffizient", „Polynom")

9:22 bis 9:30

Implementation des NEAs $\mathcal{A}$

Eine Möglichkeit:

1. Determinisierung (Potenzmengenkonstruktion)
2. Simulation des resultierenden DEA $\mathcal{A}^d$

Wird $\mathcal{A}^d$ nicht zu groß?
($2^{27} > 134$ Mio. Zustände bei Stichw. „Binomialkoeffizient", „Polynom")

Nein,

- mit der leicht geänderten Definition von Akzeptanz
- und unserer Variante der Potenzmengenkonstruktion

wird $\mathcal{A}^d$ genauso viele Zustände haben wie $\mathcal{A}$!

T 1.4

9:22 bis 9:30

2018-10-20

9:30

Wie können (NEA-erkennbare) Sprachen kombiniert werden?

9:30

Operationen auf Sprachen sind Operationen auf Mengen

Wie können (NEA-erkennbare) Sprachen kombiniert werden?

- Boolesche Operationen

Vereinigung	$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ oder } w \in L_2\}$
Schnitt	$L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ und } w \in L_2\}$
Komplement	$\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$

Operationen auf Sprachen sind Operationen auf Mengen

Wie können (NEA-erkennbare) Sprachen kombiniert werden?

- Boolesche Operationen
  - **Vereinigung** $L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ oder } w \in L_2\}$
  - **Schnitt** $L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ und } w \in L_2\}$
  - **Komplement** $\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$
- Wortoperationen
  - **Konkatenation** $L_1 \cdot L_2 = \{vw \mid v \in L_1 \text{ und } w \in L_2\}$
  - **Kleene-Hülle** $L^* = \bigcup_{i \geqslant 0} L^i$, wobei $L^0 = \{\varepsilon\}$ und $L^{i+1} = L^i \cdot L$ für alle $i \geqslant 0$

9:30

Abgeschlossenheit

Die Menge der erkennbaren Sprachen heißt **abgeschlossen unter** ...

- **Vereinigung**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
- **Komplement**, falls gilt:
  Falls L erkennbar, so auch $\overline{L}$.
- **Schnitt**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
- **Konkatenation**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cdot L_2$.
- **Kleene-Stern**, falls gilt:
  Falls L erkennbar, so auch L^*.

9:32

Fragen: Wer weiß es noch?

Gemeinsam durchgehen & rekapitulieren:

- Vereinigungsautomat
- Produktautomat
- Det.+Vertauschen aZ/nicht-aZ
- Hintereinanderhängen
- Schleife aZ$\rightarrow$AZ

Abgeschlossenheit

Die Menge der erkennbaren Sprachen heißt **abgeschlossen unter** ...

- **Vereinigung**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
- **Komplement**, falls gilt:
  Falls L erkennbar, so auch $\overline{L}$.
- **Schnitt**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
- **Konkatenation**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cdot L_2$.
- **Kleene-Stern**, falls gilt:
  Falls L erkennbar, so auch L^*.

Unter welchen Op. sind die NEA-erkennbaren Sprachen abgeschlossen?

9:32

Fragen: Wer weiß es noch?

Gemeinsam durchgehen & rekapitulieren:

- Vereinigungsautomat
- Produktautomat
- Det.+Vertauschen aZ/nicht-aZ
- Hintereinanderhängen
- Schleife aZ→AZ

Teil 1: endliche Wörter
└─Abschlusseigenschaften

2018-10-20

└─Abgeschlossenheit

Satz 1.7

Die Menge der NEA-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter den Operationen $\cup, \cap, \bar{\ }, \cdot, {}^*$.

Beweis: Siehe ThI 1.

9:36

Reguläre Ausdrücke und Anwendungen

Reguläre Ausdrücke sind . . .

- bequeme Charakterisierung NEA-erkennbarer Sprachen
- besonders praktisch für Anwendungen

9:37

Reguläre Sprachen

Definition 1.8

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **regulär**, falls gilt:

- $L = \emptyset$ oder
- $L = \{\varepsilon\}$ oder
- $L = \{a\}$, $a \in \Sigma$, oder
- L lässt sich durch (endlichmaliges) Anwenden der Operatoren $\cup, \cdot, ^*$ aus den vorangehenden Fällen konstruieren.

9:37

Definition 1.8

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **regulär**, falls gilt:

- $L = \emptyset$ oder
- $L = \{\varepsilon\}$ oder
- $L = \{a\}$, $a \in \Sigma$, oder
- L lässt sich durch (endlichmaliges) Anwenden der Operatoren $\cup, \cdot, ^*$ aus den vorangehenden Fällen konstruieren.

Beispiele:

$(\{a\} \cup \{b\})^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}$ (siehe $\mathcal{A}_3$ auf Folie 10)

$\{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot (\{a\} \cup \{b\})^*$ (s. $\mathcal{A}_2$ auf Folie 10)

9:37

Reguläre Ausdrücke

Definition 1.9

Ein **regulärer Ausdruck (RA)** r über Σ und die **zugehörige Sprache** $\boldsymbol{L(r)} \subseteq \Sigma^*$ werden induktiv wie folgt definiert.

- $r = \emptyset$ ist ein RA mit $L(r) = \emptyset$
- $r = \varepsilon$ ist ein RA mit $L(r) = \{\varepsilon\}$
- $r = a$, für $a \in \Sigma$, ist ein RA mit $L(r) = \{a\}$
- $r = (r_1 + r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cup L(r_2)$
- $r = (r_1 r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cdot L(r_2)$
- $r = (r_1)^*$ ist ein RA mit $L(r^*) = (L(r))^*$

9:39

Reguläre Ausdrücke

Definition 1.9

Ein **regulärer Ausdruck (RA)** r über Σ und die **zugehörige Sprache** $L(r) \subseteq \Sigma^*$ werden induktiv wie folgt definiert.

- $r = \emptyset$ ist ein RA mit $L(r) = \emptyset$
- $r = \varepsilon$ ist ein RA mit $L(r) = \{\varepsilon\}$
- $r = a$, für $a \in \Sigma$, ist ein RA mit $L(r) = \{a\}$
- $r = (r_1 + r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cup L(r_2)$
- $r = (r_1 r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cdot L(r_2)$
- $r = (r_1)^*$ ist ein RA mit $L(r^*) = (L(r))^*$

Beispiele: (wir lassen Klammern weg soweit eindeutig)

$(a + b)^*ab$ (siehe $\mathcal{A}_3$ auf Folie 10)

$b^*aa^*b(a + b)^*$ (siehe $\mathcal{A}_2$ auf Folie 10)

9:39

9:41

Satz 1.10 (Kleene 1956)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.

1. L ist regulär gdw. es einen RA r gibt mit $L = L(r)$.
2. L ist regulär gdw. L NEA-erkennbar ist.

Satz 1.10 (Kleene 1956)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.

1. L ist regulär gdw. es einen RA r gibt mit $L = L(r)$.
2. L ist regulär gdw. L NEA-erkennbar ist.

Beweis.

1. Folgt offensichtlich aus Def. 1.8, 1.9.
2. Benutze Punkt 1.

„⇒": Induktion über Aufbau von r.
IA: gib Automaten an, die $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{a\}$ erkennen.
IS: benutze Abschlusseigenschaften (Satz 1.7)

„⇐": siehe Theoretische Informatik 1. □

9:41

Anwendungen regulärer Ausdrücke

- RAs werden verwendet, um „Muster“ von zu suchendem Text zu beschreiben.

  z. B.: suche alle Vorkommen von „PLZ Ort“:
  $(0 + \cdots + 9)^5 \textvisiblespace (A + \cdots + Z)(a + \cdots + z)^*$

- Programme zum Suchen von Mustern im Text übersetzen RAs in NEAs/DEAs und simulieren diese.

- wichtige Klassen von Anwendungen:
  lexikalische Analyse, **Textsuche**

8:30 **9:43 bis 9:44, 1 min Reserve**

Ankündigen: Terminfindung (Mo. 12–14 klappt bei 2 TN nicht). In Pause.

2018-10-20

Teil 1: endliche Wörter
└─Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
└─Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke

8:32

Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke

- UNIX und andere Anwendungen erweitern Syntax von RAs
- Hier: nur „syntaktischer Zucker" – die Erweiterungen, die nicht aus den regulären Sprachen herausführen

Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke

- UNIX und andere Anwendungen erweitern Syntax von RAs
- Hier: nur „syntaktischer Zucker“ – die Erweiterungen, die nicht aus den regulären Sprachen herausführen

- Alphabet Σ: alle ASCII-Zeichen
- RA `.` mit $L(.) = \Sigma$
- RA $[a_1 a_2 \dots a_k]$, Abkürzung für $a_1 + a_2 + \dots + a_k$
- RAs für Bereiche: z. B. `[a-z0-9]`, Abkü. für `[ab...z01...9]`
- Operator | anstelle $+$
- Operator ?: r? steht für $\varepsilon + r$
- Operator +: r+ steht für rr^*
- Operator $\{n\}$: $r\{5\}$ steht für $rrrrr$
- Klammern und $*$ wie gehabt

8:32

Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke

- UNIX und andere Anwendungen erweitern Syntax von RAs
- Hier: nur „syntaktischer Zucker“ – die Erweiterungen, die nicht aus den regulären Sprachen herausführen

- Alphabet Σ: alle ASCII-Zeichen
- RA `.` mit $L(.) = \Sigma$
- RA `[`$a_1 a_2 \dots a_k$`]`, Abkürzung für $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$
- RAs für Bereiche: z. B. `[a-z0-9]`, Abkü. für `[ab...z01...9]`
- Operator `|` anstelle $+$
- Operator `?`: $r?$ steht für $\varepsilon + r$
- Operator `+`: $r+$ steht für rr^*
- Operator `{n}`: $r\{5\}$ steht für $rrrrr$
- Klammern und $*$ wie gehabt

PLZ-Ort-Beispiel:
`[0-9]{5}␣[A-Z][a-z]*`

8:32

Anwendung: lexikalische Analyse

- **Lexer** (auch: Tokenizer) durchsucht Quellcode nach **Token**: zusammengehörende Zeichenfolgen, z. B. Kennwörter, Bezeichner
- Ausgabe des Lexers: Token-Liste, wird an Parser weitergegeben
- Mit RAs: Lexer leicht programmier- und modifizierbar

8:35

Lexer: kurz für „lexikalischer Scanner“, auch Tokenizer

Lex: a computer program that generates lexical analyzers“ [Wikipedia]

Flex: “fast lexical analyzer generator”, “a free and open-source software alternative to lex” [Wikipedia]

Anwendung: lexikalische Analyse

- **Lexer** (auch: Tokenizer) durchsucht Quellcode nach **Token**: zusammengehörende Zeichenfolgen, z. B. Kennwörter, Bezeichner
- Ausgabe des Lexers: Token-Liste, wird an Parser weitergegeben
- Mit RAs: Lexer leicht programmier- und modifizierbar
- UNIX-Kommandos `lex` und `flex` generieren Lexer
  - Eingabe: Liste von Einträgen RA + Code
  - Code beschreibt Ausgabe des Lexers für das jeweilige Token
  - generierter Lexer wandelt alle RAs in **einen DEA** um, um Vorkommen der Tokens zu finden (siehe Folie 17)
  - anhand des Zustands des DEAs lässt sich bestimmen, *welches* Token gefunden wurde

8:35

Lexer: kurz für „lexikalischer Scanner“, auch Tokenizer

Lex: a computer program that generates lexical analyzers“ [Wikipedia]

Flex: “fast lexical analyzer generator”, “a free and open-source software alternative to lex” [Wikipedia]

Beispieleingabe für `lex`

```
else
  {return(ELSE);}

[A-Za-z][A-za-z0-9]*
  {<Trage gefundenen Bezeichner in Symboltabelle ein>;
  return(ID);}

>=
  {return(GE);}

=
  {return(EQ);}
```

(Lexer-Generator muss Prioritäten beachten:
`else` wird auch vom 2. RA erkannt, ist aber reserviert)

8:37

ZF: Der Lexer-Generator dient dazu, Lexer zu erzeugen.
Diese Tabelle hier gibt an, wie das passiert.
Der Vorteil ist die leichte Änderbarkeit, wenn sich mal ein Token oder dessen Beschreibung (RA!) ändert.

Anwendung: Finden von Mustern im Text

Beispiel: Suchen von Adressen (Str. + Hausnr.) in Webseiten

Solche Angaben sollen gefunden werden:

```
Parkstraße 5
Enrique-Schmidt-Straße 12a
Breitenweg 24A
Knochenhauergasse 30-32
```

8:40

Anwendung: Finden von Mustern im Text

Beispiel: Suchen von Adressen (Str. + Hausnr.) in Webseiten

Solche Angaben sollen gefunden werden:

```
Parkstraße 5
Enrique-Schmidt-Straße 12a
Breitenweg 24A
Knochenhauergasse 30-32
```

aber auch solche:

```
Straße des 17. Juni 17
...boulevard, ...allee, ...platz, ...
Postfach 330 440
Am Wall 8
```

8:40

Anwendung: Finden von Mustern im Text

Beispiel: Suchen von Adressen (Str. + Hausnr.) in Webseiten

Solche Angaben sollen gefunden werden:

```
Parkstraße 5
Enrique-Schmidt-Straße 12a
Breitenweg 24A
Knochenhauergasse 30-32
```

aber auch solche:

```
Straße des 17. Juni 17
...boulevard, ...allee, ...platz, ...
Postfach 330 440
Am Wall 8
```

⇝ Ausmaß der Variationen erst während der Suche deutlich

⇝ Gesucht: einfach modifizierbare Beschreibung der Muster

8:40

Mögliches Vorgehen:

(1) Beschreibung des Musters mit einem einfachen RA
(2) Umwandlung des RA in einen NEA
(3) Implementation des DEA wie auf Folie 17+18
(4) Test
(5) Wenn nötig, RA erweitern/ändern und Sprung zu Schritt 2

8:42

Dies ist ein ganz banales, heuristisches Vorgehen.
Keine tiefgründigen Techniken.
Dient nur zur Demonstration der einfachen Erweiterbarkeit, wenn man RAs benutzt.

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`

[1] Weil der UNIX-RA `.` für Σ reserviert ist, steht `\.` für $\{.\}$

8:43 bis 8:46

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer:

[1] Weil der UNIX-RA `.` für Σ reserviert ist, steht `\.` für $\{.\}$

8:43 bis 8:46

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer:
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*`

[1] Weil der UNIX-RA `.` für Σ reserviert ist, steht `\.` für $\{.\}$

8:43 bis 8:46

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer:
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*`
- Hausnummern mit Buchstaben (12a), -bereiche (30–32):

[1] Weil der UNIX-RA `.` für Σ reserviert ist, steht `\.` für $\{.\}$

8:43 bis 8:46

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer:
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*`
- Hausnummern mit Buchstaben (12a), -bereiche (30–32):
  ```
  [A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse)
                ([0-9]*[A-Za-z]?-)?[0-9]*[A-Za-z]?
  ```

[1] Weil der UNIX-RA `.` für Σ reserviert ist, steht `\.` für $\{.\}$

8:43 bis 8:46

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer:
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*`
- Hausnummern mit Buchstaben (12a), -bereiche (30–32):
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse)`
  `([0-9]*[A-Za-z]?-)?[0-9]*[A-Za-z]?`
- und mehr:
  - Straßennamen mit Bindestrichen
  - „Straße“ etc. am Anfang
  - Plätze, Boulevards, Alleen etc.
  - Postfächer
  - ...

[1] Weil der UNIX-RA `.` für Σ reserviert ist, steht `\.` für $\{.\}$

8:43 bis 8:46

Wie zeigt man, dass L **nicht** NEA-erkennbar (regulär) ist?

8:46

Fragen: Wer kann sich an die 2 Werkzeuge aus ThI 1 erinnern?

Am Ende: **Fragebogen F. 2a**

8:46

Fragen: Wer kann sich an die 2 Werkzeuge aus ThI 1 erinnern?

Am Ende: **Fragebogen F. 2a**

Teil 1: endliche Wörter
└─Charakterisierungen

└─Anwendung des Pumping-Lemmas

Benutzen Kontraposition:

Wenn es **für alle** Konstanten $p \geqslant 0$
ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geqslant p$ **gibt**, so dass es
für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant p$
ein $i \geqslant 0$ **gibt** mit $xy^iz \notin L$,
dann ist L **keine** NEA-erkennbare Sprache.

T 1.5

8:48 bis 8:55

8:55

Bemerkungen zum Pumping-Lemma

Die Bedingung in Satz 1.11 ist ...

- **notwendig** dafür, dass L NEA-erkennbar ist
- **nicht hinreichend**
  Bsp.: $\{a^n b^k c^k \mid n, k \geqslant 1\} \cup \{b^n c^k \mid n, k \geqslant 0\}$

$\rightsquigarrow$ Pumping-L. nur zum **Widerlegen** von Erkennbarkeit verwendbar, nicht zum Beweisen, dass L regulär ist

(Notwendige und hinreichende Variante: Jaffes Pumping-Lemma)

Der Satz von Myhill-Nerode

Ziel: notwendige **und** hinreichende Bedingung für Erkennbarkeit

Definition 1.12
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.
Zwei Wörter $u, v \in \Sigma^*$ sind ***L*-äquivalent** (Schreibweise: $u \sim_L v$), wenn für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$uw \in L \quad \text{genau dann, wenn} \quad vw \in L$$

8:57

Satz von Myhill-Nerode liefert eine „echte“ Charakterisierung der erkennbaren Sprachen (und eine weitere nützliche Information)

Der Satz von Myhill-Nerode

Ziel: notwendige **und** hinreichende Bedingung für Erkennbarkeit

Definition 1.12
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.
Zwei Wörter $u, v \in \Sigma^*$ sind ***L*-äquivalent** (Schreibweise: $u \sim_L v$), wenn für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$uw \in L \quad \text{genau dann, wenn} \quad vw \in L$$

$\sim_L$ heißt **Nerode-Rechtskongruenz** und ist Äquivalenzrelation (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität sind offensichtlich)

Index von $\sim_L$: Anzahl der Äquivalenzklassen

8:57

Satz von Myhill-Nerode liefert eine „echte“ Charakterisierung der erkennbaren Sprachen (und eine weitere nützliche Information)

Satz 1.13 (Myhill-Nerode)
$L \subseteq \Sigma^*$ is NEA-erkennbar gdw. $\sim_L$ endlichen Index hat.

Beweis: siehe ThI 1. **T 1.6**

8:59

Fragebogen F. 2b

13 min Pause: Terminfindung $\rightsquigarrow$ 9:15

Satz 1.13 (Myhill-Nerode)
$L \subseteq \Sigma^*$ is NEA-erkennbar gdw. $\sim_L$ endlichen Index hat.

Beweis: siehe ThI 1. **T 1.6**

Interessantes **„Nebenprodukt"** des Beweises:
Endlicher Index n von $\sim_L$
$=$ minimale Anzahl von Zuständen in einem DEA, der L erkennt.

8:59

Fragebogen F. 2b

13 min Pause: Terminfindung $\rightsquigarrow$ 9:15

└─Und nun . . .

(Entscheidungs-)Problem

- . . . ist eine Teilmenge $X \subseteq M$
  - Eingabe: $m \in M$; Frage: $m \in X$?
  - $m \in X$: **Ja-Instanzen**; $m \in M \setminus X$: **Nein-Instanzen**

9:15

Entscheidungsprobleme sind zentral für diese Vorlesung, denn wir werden sehen, dass algorithmische Probleme in Anwendungen auf Entscheidungsprobleme gewisser Automatenmodelle zurückzuführen sind.

Z. B.: Validierung eines XML-Dokuments entspricht dem Wortproblem für gewisse Baumautomaten.

Durch das Studium dieser Entscheidungsprobleme bekommen wir also einen prinzipiellen Ansatz zur Lösung der Anwendungsprobleme.

Zunächst ein kurzer Abriss von Entscheidbarkeit und Komplexität; mehr dazu im ThI2-Skript.

„Algorithmus“: Prog.sprache & Rechnermodell sind relativ unerheblich ((erweiterte) Church-Turing-These)

Entscheidbarkeit

(Entscheidungs-)Problem

- … ist eine Teilmenge $X \subseteq M$
  - Eingabe: $m \in M$; Frage: $m \in X$?
  - $m \in X$: **Ja-Instanzen**; $m \in M \setminus X$: **Nein-Instanzen**
- Beispiele:
  - X = Menge aller Primzahlen, $M = \mathbb{N}$
  - X = Menge aller NEAs $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, M = Menge aller NEAs

9:15

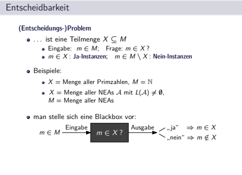
Entscheidungsprobleme sind zentral für diese Vorlesung, denn wir werden sehen, dass algorithmische Probleme in Anwendungen auf Entscheidungsprobleme gewisser Automatenmodelle zurückzuführen sind.

Z. B.: Validierung eines XML-Dokuments entspricht dem Wortproblem für gewisse Baumautomaten.

Durch das Studium dieser Entscheidungsprobleme bekommen wir also einen prinzipiellen Ansatz zur Lösung der Anwendungsprobleme.

Zunächst ein kurzer Abriss von Entscheidbarkeit und Komplexität; mehr dazu im ThI2-Skript.

„Algorithmus“: Prog.sprache & Rechnermodell sind relativ unerheblich ((erweiterte) Church-Turing-These)



9:15

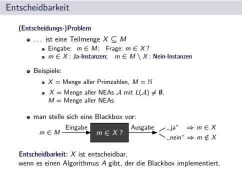
Entscheidungsprobleme sind zentral für diese Vorlesung, denn wir werden sehen, dass algorithmische Probleme in Anwendungen auf Entscheidungsprobleme gewisser Automatenmodelle zurückzuführen sind.

Z. B.: Validierung eines XML-Dokuments entspricht dem Wortproblem für gewisse Baumautomaten.

Durch das Studium dieser Entscheidungsprobleme bekommen wir also einen prinzipiellen Ansatz zur Lösung der Anwendungsprobleme.

Zunächst ein kurzer Abriss von Entscheidbarkeit und Komplexität; mehr dazu im ThI2-Skript.

„Algorithmus“: Prog.sprache & Rechnermodell sind relativ unerheblich ((erweiterte) Church-Turing-These)



9:15

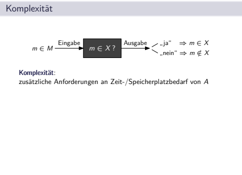
Entscheidungsprobleme sind zentral für diese Vorlesung, denn wir werden sehen, dass algorithmische Probleme in Anwendungen auf Entscheidungsprobleme gewisser Automatenmodelle zurückzuführen sind.

Z. B.: Validierung eines XML-Dokuments entspricht dem Wortproblem für gewisse Baumautomaten.

Durch das Studium dieser Entscheidungsprobleme bekommen wir also einen prinzipiellen Ansatz zur Lösung der Anwendungsprobleme.

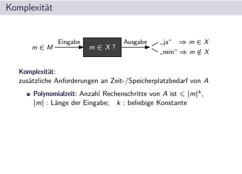
Zunächst ein kurzer Abriss von Entscheidbarkeit und Komplexität; mehr dazu im ThI2-Skript.

„Algorithmus“: Prog.sprache & Rechnermodell sind relativ unerheblich ((erweiterte) Church-Turing-These)



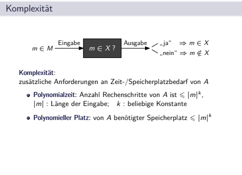
9:18

Wichtig: Es geht dabei immer um eine „Worst-Case-Analyse“,
also: wie viele Ressourcen braucht ein Algorithmus/ der beste Algorithmus **im schlechtesten Fall**?



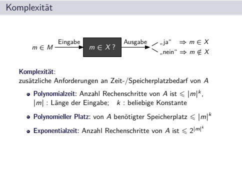
9:18

Wichtig: Es geht dabei immer um eine „Worst-Case-Analyse“,
also: wie viele Ressourcen braucht ein Algorithmus/ der beste Algorithmus **im schlechtesten Fall**?



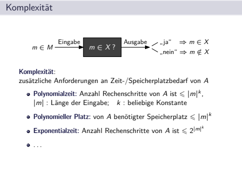
9:18

Wichtig: Es geht dabei immer um eine „Worst-Case-Analyse“,
also: wie viele Ressourcen braucht ein Algorithmus/ der beste Algorithmus **im schlechtesten Fall**?



9:18

Wichtig: Es geht dabei immer um eine „Worst-Case-Analyse“,
also: wie viele Ressourcen braucht ein Algorithmus/ der beste Algorithmus **im schlechtesten Fall**?



9:18

Wichtig: Es geht dabei immer um eine „Worst-Case-Analyse“,
also: wie viele Ressourcen braucht ein Algorithmus/ der beste Algorithmus **im schlechtesten Fall**?

Einige übliche Komplexitätsklassen

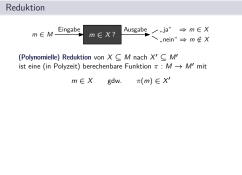
Name	Bedeutung	Beispiel-Problem
L	logarithm. Speicherplatz	Erreichbarkeit, ungerichtete Graphen
NL	nichtdetermin. log. Platz	Erreichbarkeit, gerichtete Graphen
P	Polynomialzeit	Primzahlen
NP	nichtdeterminist. Polyzeit	Erfüllbarkeit Aussagenlogik
PSpace	polynom. Speicherplatz	Erfüllbarkeit QBF
ExpTime	Exponentialzeit	Gewinnstrategie $n \times n$-Schach
NExpTime	nichtdet. Exponentialzeit	Clique f. schaltkreiscodierte Graphen
ExpSpace	exponentieller Platz	Äquiv. regulärer Ausdrücke mit „ $\cdot^2$ “
$\vdots$	$\vdots$	
	unentscheidbar	Erfüllbarkeit Prädikatenlogik

Komplementklassen: **coNL**, **coNP** etc.

9:21

Klassen so vorlesen: „. . . ist die Menge aller Probleme, die sich mit einer . . . TM in . . . Zeit/Platz lösen lassen“

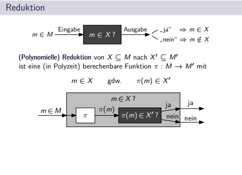
Beispiele nur am Rande erwähnen



9:26 bis 9:38

Reduktion: wichtiges Hilfsmittel zum genauen Bestimmen der Komplexität

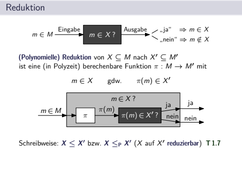
Intuition: Wenn $X \leq X'$, dann ist X *höchstens so schwer wie* X'.



9:26 bis 9:38

Reduktion: wichtiges Hilfsmittel zum genauen Bestimmen der Komplexität

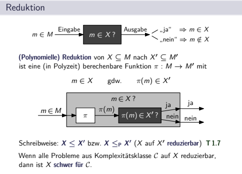
Intuition: Wenn $X \leq X'$, dann ist X *höchstens so schwer wie* X'.



9:26 bis 9:38

Reduktion: wichtiges Hilfsmittel zum genauen Bestimmen der Komplexität

Intuition: Wenn $X \leq X'$, dann ist X *höchstens so schwer wie* X'.



9:26 bis 9:38

Reduktion: wichtiges Hilfsmittel zum genauen Bestimmen der Komplexität

Intuition: Wenn $X \leq X'$, dann ist X *höchstens so schwer wie* X'.

Bestimmung der Komplexität

Normalerweise zeigt man, dass ein Problem $X \subseteq M$ ...

- **in** einer Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ liegt, indem man
  - einen Algorithmus A findet, der X löst
  - zeigt, dass A korrekt ist (*ja*/*nein*-Antworten) und terminiert
  - zeigt, dass A für jedes $m \in M$ **höchstens** die $\mathcal{C}$-Ressourcen braucht

  ... A kann z. B. eine Reduktion zu einem Problem aus $\mathcal{C}$ sein

9:38

Fragebogen F. 1 $\rightsquigarrow$ 9:02

Bestimmung der Komplexität

Normalerweise zeigt man, dass ein Problem $X \subseteq M$ ...

- **in** einer Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ liegt, indem man
  - einen Algorithmus A findet, der X löst
  - zeigt, dass A korrekt ist (*ja*/*nein*-Antworten) und terminiert
  - zeigt, dass A für jedes $m \in M$ **höchstens** die $\mathcal{C}$-Ressourcen braucht

    ... A kann z. B. eine Reduktion zu einem Problem aus $\mathcal{C}$ sein
- **schwer (hard) für** $\mathcal{C}$ ist, indem man
  - ein Problem $X' \subseteq M'$ findet, dass **schwer für** $\mathcal{C}$ ist
  - und eine Reduktion von X' nach X angibt

9:38

Fragebogen F. 1 $\rightsquigarrow$ 9:02

Bestimmung der Komplexität

Normalerweise zeigt man, dass ein Problem $X \subseteq M$ ...

- **in** einer Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ liegt, indem man
  - einen Algorithmus A findet, der X löst
  - zeigt, dass A korrekt ist (*ja*/*nein*-Antworten) und terminiert
  - zeigt, dass A für jedes $m \in M$ **höchstens** die $\mathcal{C}$-Ressourcen braucht

    ... A kann z. B. eine Reduktion zu einem Problem aus $\mathcal{C}$ sein
- **schwer (hard) für** $\mathcal{C}$ ist, indem man
  - ein Problem $X' \subseteq M'$ findet, dass **schwer für** $\mathcal{C}$ ist
  - und eine Reduktion von X' nach X angibt
- **vollständig für** $\mathcal{C}$ ist, indem man zeigt, dass es
  - **in** $\mathcal{C}$ liegt und
  - **schwer für** $\mathcal{C}$ ist

9:38

Fragebogen F. 1 $\rightsquigarrow$ 9:02

- Betrachten wesentliche Eigenschaften von Sprachen (Sprachen repräsentiert durch NEAs oder reguläre Ausdr.)
  - Ist eine gegebene Sprache leer?
  - Ist ein gegebenes Wort w in einer Sprache L?
  - Beschreiben zwei Repräsentationen einer Sprache tatsächlich dieselbe Sprache?

9:42

Umwandlung ...

- DEA $\rightarrow$ NEA: konstante Zeit ☺
- NEA $\rightarrow$ DEA: Exponentialzeit ☹
- reg. Ausdr. $\rightarrow$ NEA: Polynomialzeit ☺
- NEA $\rightarrow$ reg. Ausdr.: Exponentialzeit ☹
- NEA $\leftrightarrow$ Typ-3-Gramm.: Polynomialzeit ☺

Entscheidungsprobleme für endliche Automaten

- Betrachten wesentliche Eigenschaften von Sprachen (Sprachen repräsentiert durch NEAs oder reguläre Ausdr.)
  - Ist eine gegebene Sprache leer?
  - Ist ein gegebenes Wort w in einer Sprache L?
  - Beschreiben zwei Repräsentationen einer Sprache tatsächlich dieselbe Sprache?
- Wichtig für Anwendungen (siehe Einführung)

9:42

Umwandlung …

- DEA → NEA: konstante Zeit ☺
- NEA → DEA: Exponentialzeit ☹
- reg. Ausdr. → NEA: Polynomialzeit ☺
- NEA → reg. Ausdr.: Exponentialzeit ☹
- NEA ↔ Typ-3-Gramm.: Polynomialzeit ☺

Entscheidungsprobleme für endliche Automaten

- Betrachten wesentliche Eigenschaften von Sprachen (Sprachen repräsentiert durch NEAs oder reguläre Ausdr.)
  - Ist eine gegebene Sprache leer?
  - Ist ein gegebenes Wort w in einer Sprache L?
  - Beschreiben zwei Repräsentationen einer Sprache tatsächlich dieselbe Sprache?
- Wichtig für Anwendungen (siehe Einführung)
- Art der Repräsentation spielt manchmal eine Rolle: NEA, DEA, regulärer Ausdruck, Typ-3-Grammatik etc.

  Wir betrachten im Folgenden **NEAs und DEAs**.

9:42

Umwandlung ...

- DEA $\longrightarrow$ NEA: konstante Zeit ☻
- NEA $\longrightarrow$ DEA: Exponentialzeit ☹
- reg. Ausdr. $\longrightarrow$ NEA: Polynomialzeit ☻
- NEA $\longrightarrow$ reg. Ausdr.: Exponentialzeit ☹
- NEA $\longleftrightarrow$ Typ-3-Gramm.: Polynomialzeit ☻

Das Leerheitsproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?
d. h. $\mathbf{LP_{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$,
$\mathbf{LP_{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$

9:44 Def. der Probleme: Eingabe ist üblicherweise ein Wort, also braucht man eine geeignete Kodierung von NEAs/DEAs (s. ThI 2).

Überprüfung, ob Eingabe wohlgeformt ist, ist üblicherweise billig, macht also keinen Unterschied, ob sie mit in Komplexität zählt oder nicht.

coNL, weil das Komplement (Nichtleerheit) NL-vollst. ist.

coNL-Härte: bei DEAs aufpassen – für jede ausgehende Kante e. Knotens braucht man ein neues Zeichen, also Alphabetgröße = max. Ausgangsgrad.

Außerdem Papierkorbzustände einbauen.

(Nicht-)Leerheit von NEAs/DEAs ist also nichts anderes als Wegsuche in gerichteten Graphen.

Fragebogen F. 2: Tabelle, während der nächsten Folien vervollständigen

Das Leerheitsproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?

d. h. $\mathbf{LP_{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$,
$\mathbf{LP_{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$

Satz 1.14
$\mathrm{LP_{NEA}}$ und $\mathrm{LP_{DEA}}$ sind entscheidbar und **co**NL-vollständig.

9:44 Def. der Probleme: Eingabe ist üblicherweise ein Wort, also braucht man eine geeignete Kodierung von NEAs/DEAs (s. ThI 2).

Überprüfung, ob Eingabe wohlgeformt ist, ist üblicherweise billig, macht also keinen Unterschied, ob sie mit in Komplexität zählt oder nicht.

coNL, weil das Komplement (Nichtleerheit) NL-vollst. ist.

coNL-Härte: bei DEAs aufpassen – für jede ausgehende Kante e. Knotens braucht man ein neues Zeichen, also Alphabetgröße = max. Ausgangsgrad.

Außerdem Papierkorbzustände einbauen.

(Nicht-)Leerheit von NEAs/DEAs ist also nichts anderes als Wegsuche in gerichteten Graphen.

Fragebogen F. 2: Tabelle, während der nächsten Folien vervollständigen

Das Leerheitsproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?

d. h. $\mathbf{LP_{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$,
$\mathbf{LP_{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$

Satz 1.14
$\mathrm{LP_{NEA}}$ und $\mathrm{LP_{DEA}}$ sind entscheidbar und **coNL**-vollständig.

Beweis.

- Entscheidbarkeit (in Polyzeit): siehe ThI 1
- **coNL**-Zugehörigkeit:
  Reduktion zu Erreichbarkeit in gerichteten Graphen, siehe T1.7
- **coNL**-Härte:
  Reduktion *von* Erreichbarkeit, analog □

9:44 Def. der Probleme: Eingabe ist üblicherweise ein Wort, also braucht man eine geeignete Kodierung von NEAs/DEAs (s. ThI 2).

Überprüfung, ob Eingabe wohlgeformt ist, ist üblicherweise billig, macht also keinen Unterschied, ob sie mit in Komplexität zählt oder nicht.

coNL, weil das Komplement (Nichtleerheit) NL-vollst. ist.

coNL-Härte: bei DEAs aufpassen – für jede ausgehende Kante e. Knotens braucht man ein neues Zeichen, also Alphabetgröße = max. Ausgangsgrad.

Außerdem Papierkorbzustände einbauen.

(Nicht-)Leerheit von NEAs/DEAs ist also nichts anderes als Wegsuche in gerichteten Graphen.

Fragebogen F. 2: Tabelle, während der nächsten Folien vervollständigen

Das Wortprobleme

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$, Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(\mathcal{A})$?

d. h. $\mathbf{WP}_{\mathbf{NEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$,
$\mathbf{WP}_{\mathbf{DEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$

9:48 Reduktion zum LP:

- $\mathcal{A}_w$ ist ein N/DEA, der nur w akzeptiert (einfach zu bauen)
- nutzt Abgeschlossenheit unter Schnitt (Konstr. Produktautomat)
- liefert nur „in P“

obere Schranke: Rate Weg der Länge $\leq |Q|$ ab q_0,
so dass im i-ten Schritt das i-te Zeichen von w gelesen wird.
Akzeptiere, wenn am Ende ein akz. Zustand erreicht ist.

Für DEAs muss nicht geraten werden.

NL-Härte: Wandle gegebenen $G = (V, E)$ in NEA, so dass alle Kanten mit a beschriftet sind. Anfangs-/akz. Zustand: s, t. Zusätzlich a-Schleife an t. Dann frage nach $w = a^{|V|}$.

L-Härte: Führt hier zu weit; braucht speziellen Reduktionsbegriff (weak red., siehe auch Holzer & Kutrib, Inf & Comp. 2011)

Das Wortproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$, Wort $w \in \Sigma^*$
Frage: Ist $w \in L(\mathcal{A})$?

d. h. $\mathbf{WP}_{\mathbf{NEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$,
$\mathbf{WP}_{\mathbf{DEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$

Satz 1.15
$\mathrm{WP}_{\mathrm{NEA}}$ und $\mathrm{WP}_{\mathrm{DEA}}$ sind entscheidbar.
$\mathrm{WP}_{\mathrm{NEA}}$ ist **NL**-vollständig; $\mathrm{WP}_{\mathrm{DEA}}$ ist **L**-vollständig.

9:48 Reduktion zum LP:

- $\mathcal{A}_w$ ist ein N/DEA, der nur w akzeptiert (einfach zu bauen)
- nutzt Abgeschlossenheit unter Schnitt (Konstr. Produktautomat)
- liefert nur „in P“

obere Schranke: Rate Weg der Länge $\leq |Q|$ ab q_0,
so dass im i-ten Schritt das i-te Zeichen von w gelesen wird.
Akzeptiere, wenn am Ende ein akz. Zustand erreicht ist.

Für DEAs muss nicht geraten werden.

NL-Härte: Wandle gegebenen $G = (V, E)$ in NEA, so dass alle Kanten mit a beschriftet sind. Anfangs-/akz. Zustand: s, t. Zusätzlich a-Schleife an t. Dann frage nach $w = a^{|V|}$.

L-Härte: Führt hier zu weit; braucht speziellen Reduktionsbegriff (weak red., siehe auch Holzer & Kutrib, Inf & Comp. 2011)

Das Wortproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$, Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(\mathcal{A})$?

d. h. $\mathbf{WP}_{\mathbf{NEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$,
$\mathbf{WP}_{\mathbf{DEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$

Satz 1.15

WP_{NEA} und WP_{DEA} sind entscheidbar.
WP_{NEA} ist **NL**-vollständig; WP_{DEA} ist **L**-vollständig.

Beweis.

- Entscheidbarkeit (in Polyzeit): siehe ThI 1
  (Reduktion zum LP: $w \in L(\mathcal{A})$ gdw. $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}_w) \neq \emptyset$)
- **NL**-Vollst.: $\approx$ Erreichbarkeit in gerichteten Graphen □

9:48 Reduktion zum LP:

- $\mathcal{A}_w$ ist ein N/DEA, der nur w akzeptiert (einfach zu bauen)
- nutzt Abgeschlossenheit unter Schnitt (Konstr. Produktautomat)
- liefert nur „in P“

obere Schranke: Rate Weg der Länge $\leq |Q|$ ab q_0,
so dass im i-ten Schritt das i-te Zeichen von w gelesen wird.
Akzeptiere, wenn am Ende ein akz. Zustand erreicht ist.

Für DEAs muss nicht geraten werden.

NL-Härte: Wandle gegebenen $G = (V, E)$ in NEA, so dass alle Kanten mit a beschriftet sind. Anfangs-/akz. Zustand: s, t. Zusätzlich a-Schleife an t. Dann frage nach $w = a^{|V|}$.

L-Härte: Führt hier zu weit; braucht speziellen Reduktionsbegriff (weak red., siehe auch Holzer & Kutrib, Inf & Comp. 2011)

Das Äquivalenzproblem

Eingabe: NEAs (oder DEAs) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$?
d. h. $\mathbf{ÄP_{NEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ NEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$,
$\mathbf{ÄP_{DEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ DEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$

9:54

$\triangle$ = symmetrische Differenz zweier Mengen;
ausdrückbar mittels $\cup, \cap, \bar{\cdot}$ $\rightsquigarrow$ Abschlusseigenschaften!

Das Äquivalenzproblem

Eingabe: NEAs (oder DEAs) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$?
d. h. $\textbf{ÄP}_{\textbf{NEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ NEAs, } L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$,
$\textbf{ÄP}_{\textbf{DEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ DEAs, } L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$

Satz 1.16
ÄP_{NEA} und ÄP_{DEA} sind entscheidbar.
ÄP_{NEA} ist **PSpace**-vollständig; ÄP_{DEA} ist **NL**-vollständig.

9:54

$\triangle$ = symmetrische Differenz zweier Mengen;
ausdrückbar mittels $\cup, \cap, \bar{\cdot}$ $\rightsquigarrow$ Abschlusseigenschaften!

Das Äquivalenzproblem

Eingabe: NEAs (oder DEAs) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$?

d. h. $\textbf{ÄP}_{\textbf{NEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ NEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$,
$\textbf{ÄP}_{\textbf{DEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ DEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$

Satz 1.16

ÄP_{NEA} und ÄP_{DEA} sind entscheidbar.
ÄP_{NEA} ist **PSpace**-vollständig; ÄP_{DEA} ist **NL**-vollständig.

Beweis.

- Entscheidbarkeit: siehe ThI 1
  (Red. zum LP: $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$ gdw. $L(\mathcal{A}_1) \triangle L(\mathcal{A}_2) = \emptyset$)
- Komplexität: Automat für $L(\mathcal{A}_1) \triangle L(\mathcal{A}_2)$ ist exponentiell in der Größe der Eingabe-NEAs; polynomiell im Fall von DEAs
  Details: siehe [?] □

9:54

$\triangle$ = symmetrische Differenz zweier Mengen;
ausdrückbar mittels $\cup, \cap, \overline{\cdot}$ $\rightsquigarrow$ Abschlusseigenschaften!

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$?

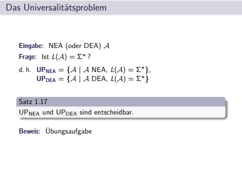
d. h. $\mathbf{UP}_{\mathbf{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$,
$\mathbf{UP}_{\mathbf{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$

9:57

Reduktion vom/zum Komplement LP:
$L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$ gdw. $\overline{L(\mathcal{A})} = \emptyset$

Für DEAs NL-v., analog zu Wegsuche:
ist ein nicht-akz. Zustand erreichbar?

Für NEAs PSPACE-v., Wegsuche im Potenz-DEA on-the-fly



9:57

Reduktion vom/zum Komplement LP:
$L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$ gdw. $\overline{L(\mathcal{A})} = \emptyset$

Für DEAs NL-v., analog zu Wegsuche:
ist ein nicht-akz. Zustand erreichbar?

Für NEAs PSPACE-v., Wegsuche im Potenz-DEA on-the-fly

2018-10-20

Teil 1: endliche Wörter
└─Entscheidungsprobleme

└─Überblick Entscheidungsprobleme für NEAs/DEAs

Problem	entscheidbar?	für DEAs effizient lösbar?	für NEAs effizient lösbar?
LP	✓	✓	✓
WP	✓	✓	✓
ÄP	✓	✓	✘*
UP	✓	✓	✘*

* unter den üblichen komplexitätstheoretischen Annahmen (z. B. PSpace $\neq$ P)

9:58 bis 10:00, Ende

Hier nochmal für Euch als Überblick

Zum **Literaturverzeichnis** blättern

Literatur für diesen Teil (Basis)

Literatur für diesen Teil (Basis)

John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman.
Introduction to Automata Theory, Languages and Computation.
2. Auflage, Addison-Wesley, 2001.
Kapitel 1,2.
Verfügbar in SUUB (verschiedene Auflagen, auch auf Deutsch)

Meghyn Bienvenu.
Automata on Infinite Words and Trees.
Vorlesungsskript, Uni Bremen, WS 2009/10.
http://www.informatik.uni-bremen.de/tdki/lehre/ws09/automata/automata-notes.pdf

„Basis“: um die Inhalte der Vorlesung nachzulesen

Literatur für diesen Teil (weiterführend)

Markus Holzer, Martin Kutrib.
Descriptional and computational complexity of finite automata – A survey.
Information and Computation 209:456–470, 2011.
Kapitel 3: sehr umfassender Überblick über Entscheidungsprobleme für endliche Automaten und deren Komplexität; viel Literatur
Verfügbar in SUUB (elektronisch)
https://doi.org/10.1016/j.ic.2010.11.013

„weiterführend“: um bestimmte Details zu vertiefen, die in der Vorlesung nur am Rande angesprochen werden

Teil 1: endliche Wörter