Automatentheorie und ihre Anwendungen
Teil 1: endliche Automaten auf endlichen Wörtern

Wintersemester 2018/19 Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ws1819-autom

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter

Automatentheorie und ihre Anwendungen
Teil 1: endliche Automaten auf endlichen Wörtern

Wintersemester 2018/19 Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ws1819-autom

8:55

Vorlesungsübersicht

Kapitel 1: endliche Automaten auf endlichen Wörtern

Kapitel 2: endliche Automaten auf endlichen Bäumen

Kapitel 3: endliche Automaten auf unendlichen Wörtern

Kapitel 4: endliche Automaten auf unendlichen Bäumen

Vorlesungsübersicht
Kapitel 1: endliche Automaten auf endlichen Wörtern
Kapitel 2: endliche Automaten auf endlichen Bäumen
Kapitel 3: endliche Automaten auf unendlichen Wörtern
Kapitel 4: endliche Automaten auf unendlichen Bäumen

8:55

Hier nochmal die 4 Kapitel (kurz!)

Ziel dieses Kapitels

- Wiederholung der Definitionen & Resultate zu endlichen Automaten aus „Theoretische Informatik 1“
- Kennenlernen zweier Anwendungen endlicher Automaten

Ziel dieses Kapitels
- Wiederholung der Definitionen & Resultate zu endlichen Automaten aus „Theoretische Informatik 1“
- Kennenlernen zweier Anwendungen endlicher Automaten

8:55

Das wird ein kurzer, leichter Teil. Ca. 2 Sitzungen.

(1) Wdhlg. mache ich knapp; wenn Euch auffällt, was Ihr nicht mehr parat habt, dann schlagt es im Skript nach.

(2) Die Anwendungen sind (hoffentlich) neu für Euch.

Überblick

Überblick
1. Grundbegriffe
2. *Anwendung: Textsuche*
3. Abschlusseigenschaften
4. Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
5. Charakterisierungen
6. Entscheidungsprobleme

8:56

Und nun . . .

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└─Grundbegriffe

└─Und nun . . .

Und nun . . .

1. Grundbegriffe
2. *Anwendung: Textsuche*
3. Abschlusseigenschaften
4. Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
5. Charakterisierungen
6. Entscheidungsprobleme

Wörter, Sprachen, ...

- **Symbole** $a, b, \ldots$
- **Alphabet** Σ: endliche nichtleere Menge von Symbolen
- **(endliches) Wort** w über Σ:
  endliche Folge $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ von Symbolen $a_i \in \Sigma$
- **leeres Wort** ε
- **Wortlänge** $|a_1 a_2 \ldots a_n| = n, \quad |\varepsilon| = 0$
- **Menge aller Wörter** über Σ: Σ^*
- **Sprache** L über Σ: Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ von Wörtern
- **Sprachklasse** $\mathcal{L}$: Menge von Sprachen

Wörter, Sprachen, ...
- Symbole $a, b, \ldots$
- Alphabet Σ: endliche nichtleere Menge von Symbolen
- (endliches) Wort w über Σ: endliche Folge $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ von Symbolen $a_i \in \Sigma$
- leeres Wort ε
- Wortlänge $|a_1 a_2 \ldots a_n| = n, \quad |\varepsilon| = 0$
- Menge aller Wörter über Σ: Σ^*
- Sprache L über Σ: Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ von Wörtern
- Sprachklasse $\mathcal{L}$: Menge von Sprachen

8:56

Endliche Automaten

Definition 1.1

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)** über einem Alphabet Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ ein Alphabet ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die **Überführungsrelation** ist, $(*)$
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.

Endliche Automaten

Definition 1.1
Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA) über einem Alphabet Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei
- Q eine endliche nichtleere Zustandsmenge ist,
- Σ ein Alphabet ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die Überführungsrelation ist, $(*)$
- $I \subseteq Q$ die Menge der Anfangszustände ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der akzeptierenden Zustände ist.

8:57

Einziger Unterschied zur Def. aus Theorie 1: mehrere Anfangszustände (lassen sich aber immer auf 1 reduzieren)

Außerdem steht Δ vor I – das ist aber nur Festlegungssache.

Akz. Zustände werden oft Endzustände genannt (en: final states $\rightsquigarrow F$). Das kann aber für Verwirrung sorgen, denn die Berechnung muss beim Erreichen eines solchen Zustandes noch nicht enden.

Deshalb benutze ich „akz. Zustände".

Endliche Automaten

Definition 1.1

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)** über einem Alphabet Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ ein Alphabet ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die **Überführungsrelation** ist, $(*)$
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.

- $(*)$ bedeutet:
  Δ besteht aus Tripeln (q, a, q') mit $q, q' \in Q$ und $a \in \Sigma$
- $(q, a, q') \in \Delta$ bedeutet intuitiv:
  ist $\mathcal{A}$ in Zustand q und liest ein a, geht er in Zustand q' über.

Endliche Automaten
Definition 1.1
Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA) über einem Alphabet Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei
- Q eine endliche nichtleere Zustandsmenge ist,
- Σ ein Alphabet ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die Überführungsrelation ist, $(*)$
- $I \subseteq Q$ die Menge der Anfangszustände ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der akzeptierenden Zustände ist.
- $(*)$ bedeutet: Δ besteht aus Tripeln (q, a, q') mit $q, q' \in Q$ und $a \in \Sigma$
- $(q, a, q') \in \Delta$ bedeutet intuitiv: ist $\mathcal{A}$ in Zustand q und liest ein a, geht er in Zustand q' über.

8:57

Einziger Unterschied zur Def. aus Theorie 1: mehrere Anfangszustände (lassen sich aber immer auf 1 reduzieren)

Außerdem steht Δ vor I – das ist aber nur Festlegungssache.

Akz. Zustände werden oft Endzustände genannt (en: final states $\rightsquigarrow F$). Das kann aber für Verwirrung sorgen, denn die Berechnung muss beim Erreichen eines solchen Zustandes noch nicht enden.
Deshalb benutze ich „akz. Zustände“.

Beispiel und graphische Repräsentation von NEAs

Betrachte $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1\},\ \{a, b\},\ \{(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_1), (q_1, b, q_1)\},\ \{q_0\}, \{q_1\})$

- Zustände: q_0, q_1
- Alphabet $\{a, b\}$
- Übergänge: von q_0 mittels a zu q_0, ...
- Anfangszustand q_0
- einziger akzeptierender Zustand q_1

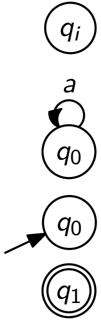
Beispiel und graphische Repräsentation von NEAs
Betrachte $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1\},\ \{a, b\},\ \{(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_1), (q_1, b, q_1)\},\ \{q_0\}, \{q_1\})$
- Zustände: q_0, q_1
- Alphabet $\{a, b\}$
- Übergänge: von q_0 mittels a zu q_0, ...
- Anfangszustand q_0
- einziger akzeptierender Zustand q_1

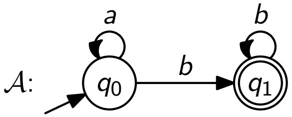
9:00

Beispiel und graphische Repräsentation von NEAs

Betrachte $\mathcal{A} =$
$(\{q_0, q_1\},\ \{a, b\},\ \{(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_1), (q_1, b, q_1)\},\ \{q_0\}, \{q_1\})$

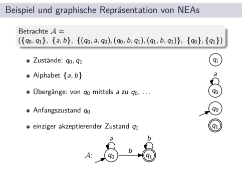
- Zustände: q_0, q_1
- Alphabet $\{a, b\}$
- Übergänge: von q_0 mittels a zu q_0, . . .
- Anfangszustand q_0
- einziger akzeptierender Zustand q_1





2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└Grundbegriffe
└Beispiel und graphische Repräsentation von NEAs



9:00

Berechnungen und Akzeptanz

Definition 1.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge

$$r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n,$$

so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$.
Man sagt/schreibt: w **überführt** q_0 in q_n, $q_0 \vdash^w_{\mathcal{A}} q_n$

Berechnungen und Akzeptanz
Definition 1.2
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Ein Run von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge
$r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n,$
so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$.
Man sagt/schreibt: w überführt q_0 in q_n, $q_0 \vdash^w_{\mathcal{A}} q_n$

9:02

$\vdash^w_A$ war in Theorie 1 $\xRightarrow{w}_{\mathcal{A}}$

Berechnungen und Akzeptanz

Definition 1.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge

  $$r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n,$$

  so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$.
  Man sagt/schreibt: w **überführt** q_0 in q_n, $q_0 \vdash^w_{\mathcal{A}} q_n$

- Ein Run $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ von $\mathcal{A}$ auf w ist **erfolgreich,** wenn $q_0 \in I$ und $q_n \in F$.

Berechnungen und Akzeptanz
Definition 1.2
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n,$ so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$. Man sagt/schreibt: w **überführt** q_0 in q_n, $q_0 \vdash^w_{\mathcal{A}} q_n$
Ein Run $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ von $\mathcal{A}$ auf w ist **erfolgreich,** wenn $q_0 \in I$ und $q_n \in F$.

9:02

$\vdash^w_A$ war in Theorie 1 $\xRightarrow{w}_{\mathcal{A}}$

Berechnungen und Akzeptanz

Definition 1.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge

  $$r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n,$$

  so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$.
  Man sagt/schreibt: w **überführt** q_0 in q_n, $q_0 \vdash_{\mathcal{A}}^{w} q_n$

- Ein Run $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ von $\mathcal{A}$ auf w ist **erfolgreich,** wenn $q_0 \in I$ und $q_n \in F$.

- $\mathcal{A}$ **akzeptiert** w, wenn es einen erfolgreichen Run von $\mathcal{A}$ auf w gibt.

Berechnungen und Akzeptanz
Definition 1.2
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Ein Run von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$, so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$. Man sagt/schreibt: w überführt q_0 in q_n, $q_0 \vdash_{\mathcal{A}}^{w} q_n$
Ein Run $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ von $\mathcal{A}$ auf w ist erfolgreich, wenn $q_0 \in I$ und $q_n \in F$.
$\mathcal{A}$ akzeptiert w, wenn es einen erfolgreichen Run von $\mathcal{A}$ auf w gibt.

9:02

$\vdash_A^w$ war in Theorie 1 $\overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}}$

Berechnungen und Akzeptanz

Definition 1.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge

$$r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n,$$

  so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$.
  Man sagt/schreibt: w **überführt** q_0 in q_n, $q_0 \vdash_{\mathcal{A}}^{w} q_n$

- Ein Run $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ von $\mathcal{A}$ auf w ist **erfolgreich,** wenn $q_0 \in I$ und $q_n \in F$.

- $\mathcal{A}$ **akzeptiert** w, wenn es einen erfolgreichen Run von $\mathcal{A}$ auf w gibt.

- Die von $\mathcal{A}$ **erkannte Sprache** ist $L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}$.

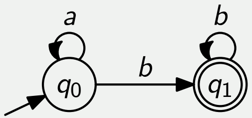
Berechnungen und Akzeptanz
Definition 1.2
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Ein Run von $\mathcal{A}$ auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$, so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$. Man sagt/schreibt: w überführt q_0 in q_n, $q_0 \vdash_{\mathcal{A}}^{w} q_n$
Ein Run $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ von $\mathcal{A}$ auf w ist erfolgreich, wenn $q_0 \in I$ und $q_n \in F$.
$\mathcal{A}$ akzeptiert w, wenn es einen erfolgreichen Run von $\mathcal{A}$ auf w gibt.
Die von $\mathcal{A}$ erkannte Sprache ist $L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}$.

9:02

$\vdash_A^w$ war in Theorie 1 $\xRightarrow{w}_{\mathcal{A}}$

Beispiele

$\mathcal{A}_1$:

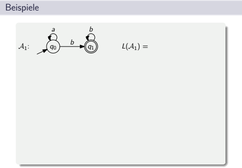


$L(\mathcal{A}_1) =$

2018-10-22

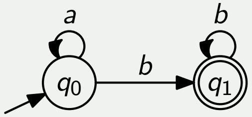
Teil 1: endliche Wörter
└Grundbegriffe
└Beispiele

9:04



Beispiele

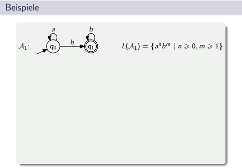
$\mathcal{A}_1$:



$L(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^m \mid n \geqslant 0, m \geqslant 1\}$

2018-10-22

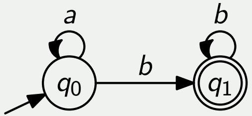
Teil 1: endliche Wörter
└Grundbegriffe
└Beispiele



9:04

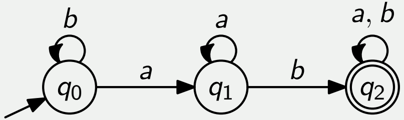
Beispiele

$\mathcal{A}_1$:

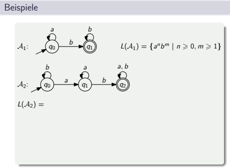


$L(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^m \mid n \geqslant 0, m \geqslant 1\}$

$\mathcal{A}_2$:



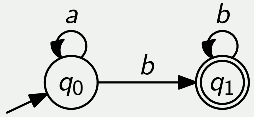
$L(\mathcal{A}_2) =$



9:04

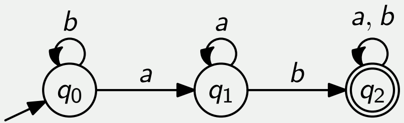
Beispiele

$\mathcal{A}_1$:



$L(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^m \mid n \geqslant 0, m \geqslant 1\}$

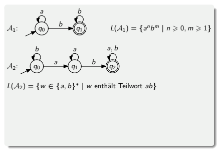
$\mathcal{A}_2$:



$L(\mathcal{A}_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält Teilwort } ab\}$

2018-10-22

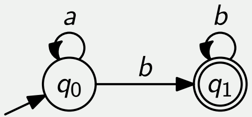
Teil 1: endliche Wörter
└Grundbegriffe
└Beispiele



9:04

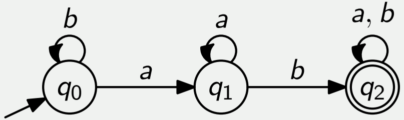
Beispiele

$\mathcal{A}_1$:



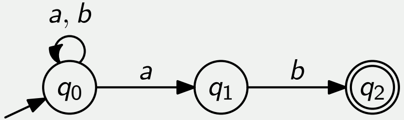
$L(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^m \mid n \geqslant 0, m \geqslant 1\}$

$\mathcal{A}_2$:

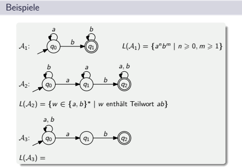


$L(\mathcal{A}_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält Teilwort } ab\}$

$\mathcal{A}_3$:



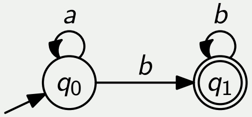
$L(\mathcal{A}_3) =$



9:04

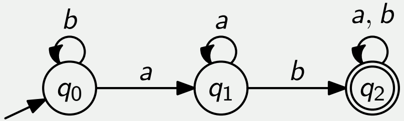
Beispiele

$\mathcal{A}_1$:



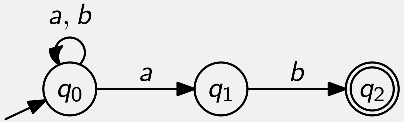
$L(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^m \mid n \geqslant 0, m \geqslant 1\}$

$\mathcal{A}_2$:



$L(\mathcal{A}_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält Teilwort } ab\}$

$\mathcal{A}_3$:

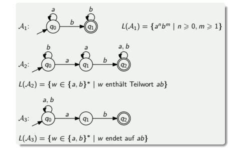


$L(\mathcal{A}_3) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet auf } ab\}$

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└─Grundbegriffe

└─Beispiele



9:04

Erkennbare Sprache

Definition 1.3

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **(NEA-)erkennbar**,
wenn es einen NEA $\mathcal{A}$ gibt mit $L = L(\mathcal{A})$.

Erkennbare Sprache
Definition 1.3
Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **(NEA-)erkennbar**,
wenn es einen NEA $\mathcal{A}$ gibt mit $L = L(\mathcal{A})$.

9:08

Determinismus

Definition 1.4

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ **genau 1** Tripel (q, a, q') und enthält I **genau 1** Zustand,

dann ist $\mathcal{A}$ ein **deterministischer endlicher Automat (DEA)**.

Determinismus
Definition 1.4
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ genau 1 Tripel (q, a, q') und enthält I genau 1 Zustand,
dann ist $\mathcal{A}$ ein deterministischer endlicher Automat (DEA).

9:08

Tafelanschrieb: nur Bsp. **ganz kurz**

Determinismus

Definition 1.4

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ **genau 1** Tripel (q, a, q') und enthält I **genau 1** Zustand,

dann ist $\mathcal{A}$ ein **deterministischer endlicher Automat (DEA)**.

$\rightsquigarrow$ Nachfolgezustand für jedes Paar (q, a) eindeutig bestimmt

Determinismus

Definition 1.4
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ genau 1 Tripel (q, a, q') und enthält I genau 1 Zustand,
dann ist $\mathcal{A}$ ein deterministischer endlicher Automat (DEA).

$\rightsquigarrow$ Nachfolgezustand für jedes Paar (q, a) eindeutig bestimmt

9:08

Tafelanschrieb: nur Bsp. **ganz kurz**

Determinismus

Definition 1.4

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ **genau 1** Tripel (q, a, q') und enthält I **genau 1** Zustand,

dann ist $\mathcal{A}$ ein **deterministischer endlicher Automat (DEA)**.

$\rightsquigarrow$ Nachfolgezustand für jedes Paar (q, a) eindeutig bestimmt

- Jeder DEA ist ein NEA,
  aber nicht umgekehrt (z. B. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$ auf Folie 10).

Determinismus

Definition 1.4
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ **genau 1** Tripel (q, a, q') und enthält I **genau 1** Zustand,
dann ist $\mathcal{A}$ ein **deterministischer endlicher Automat (DEA)**.

$\rightsquigarrow$ Nachfolgezustand für jedes Paar (q, a) eindeutig bestimmt

- Jeder DEA ist ein NEA,
  aber nicht umgekehrt (z. B. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$ auf Folie 10).

9:08

Tafelanschrieb: nur Bsp. **ganz kurz**

Determinismus

Definition 1.4

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ **genau 1** Tripel (q, a, q') und enthält I **genau 1** Zustand,

dann ist $\mathcal{A}$ ein **deterministischer endlicher Automat (DEA)**.

$\rightsquigarrow$ Nachfolgezustand für jedes Paar (q, a) eindeutig bestimmt

- Jeder DEA ist ein NEA,
  aber nicht umgekehrt (z. B. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$ auf Folie 10).
- Auf Folie 10 ist nur $\mathcal{A}_2$ ein DEA;
  $\mathcal{A}_1$ kann mittels *Papierkorbzustand* zum DEA werden; **T 1.1**
  bei $\mathcal{A}_3$ genügt auch das nicht.

Determinismus

Definition 1.4
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.
Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ genau 1 Tripel (q, a, q') und enthält I genau 1 Zustand,
dann ist $\mathcal{A}$ ein deterministischer endlicher Automat (DEA).

$\rightsquigarrow$ Nachfolgezustand für jedes Paar (q, a) eindeutig bestimmt

- Jeder DEA ist ein NEA, aber nicht umgekehrt (z. B. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$ auf Folie 10).
- Auf Folie 10 ist nur $\mathcal{A}_2$ ein DEA; $\mathcal{A}_1$ kann mittels *Papierkorbzustand* zum DEA werden; T 1.1 bei $\mathcal{A}_3$ genügt auch das nicht.

9:08

Tafelanschrieb: nur Bsp. **ganz kurz**

Potenzmengenkonstruktion

Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?

Potenzmengenkonstruktion
Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?

9:11

Klären: was heißt „gleichmächtig“?
(L DEA-erkennbar gdw. L NEA-erkennbar. Hinrichtung trivial.)

Hier nur **kurz** die Konstruktion und ein Beispiel.
Vollständiger Beweis siehe Theorie 1.
(Wir werden fast dieselbe Konstruktion später an Baumautomaten genauer ausführen.)

Potenzmengenkonstruktion

Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?

Antwort: Ja!

Potenzmengenkonstruktion
Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?
Antwort: Ja!

9:11

Klären: was heißt „gleichmächtig"?
(L DEA-erkennbar gdw. L NEA-erkennbar. Hinrichtung trivial.)

Hier nur **kurz** die Konstruktion und ein Beispiel.
Vollständiger Beweis siehe Theorie 1.
(Wir werden fast dieselbe Konstruktion später an Baumautomaten genauer ausführen.)

Potenzmengenkonstruktion

Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?

Antwort: Ja!

Satz 1.5 (Rabin, Scott 1959)

Für jeden NEA $\mathcal{A}$ gibt es einen DEA $\mathcal{A}^d$ mit $L(\mathcal{A}^d) = L(\mathcal{A})$.

Potenzmengenkonstruktion
Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?
Antwort: Ja!
Satz 1.5 (Rabin, Scott 1959)
Für jeden NEA $\mathcal{A}$ gibt es einen DEA $\mathcal{A}^d$ mit $L(\mathcal{A}^d) = L(\mathcal{A})$.

9:11

Klären: was heißt „gleichmächtig“?
(L DEA-erkennbar gdw. L NEA-erkennbar. Hinrichtung trivial.)

Hier nur **kurz** die Konstruktion und ein Beispiel.
Vollständiger Beweis siehe Theorie 1.

(Wir werden fast dieselbe Konstruktion später an Baumautomaten genauer ausführen.)

Potenzmengenkonstruktion

Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?

Antwort: Ja!

Satz 1.5 (Rabin, Scott 1959)

Für jeden NEA $\mathcal{A}$ gibt es einen DEA $\mathcal{A}^d$ mit $L(\mathcal{A}^d) = L(\mathcal{A})$.

Beweisskizze: Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$.
Wir konstruieren $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, F^d)$ wie folgt.

- $Q^d = 2^Q$ (Potenzmenge der Zustandsmenge)
- $I^d = \{I\}$
- $(S, a, S') \in \Delta^d$ gdw. $S' = \{q' \mid \exists q \in S : (q, a, q') \in \Delta\}$
- $F^d = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$ **T 1.2**

Potenzmengenkonstruktion
Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?
Antwort: Ja!
Satz 1.5 (Rabin, Scott 1959)
Für jeden NEA $\mathcal{A}$ gibt es einen DEA $\mathcal{A}^d$ mit $L(\mathcal{A}^d) = L(\mathcal{A})$.
Beweisskizze: Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$.
Wir konstruieren $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, F^d)$ wie folgt.
- $Q^d = 2^Q$ (Potenzmenge der Zustandsmenge)
- $I^d = \{I\}$
- $(S, a, S') \in \Delta^d$ gdw. $S' = \{q' \mid \exists q \in S : (q, a, q') \in \Delta\}$
- $F^d = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$ T 1.2

9:11

Klären: was heißt „gleichmächtig“?
(L DEA-erkennbar gdw. L NEA-erkennbar. Hinrichtung trivial.)

Hier nur **kurz** die Konstruktion und ein Beispiel.
Vollständiger Beweis siehe Theorie 1.
(Wir werden fast dieselbe Konstruktion später an Baumautomaten genauer ausführen.)

Potenzmengenkonstruktion

Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?

Antwort: Ja!

Satz 1.5 (Rabin, Scott 1959)

Für jeden NEA $\mathcal{A}$ gibt es einen DEA $\mathcal{A}^d$ mit $L(\mathcal{A}^d) = L(\mathcal{A})$.

Beweisskizze: Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$.
Wir konstruieren $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, F^d)$ wie folgt.

- $Q^d = 2^Q$ (Potenzmenge der Zustandsmenge)
- $I^d = \{I\}$
- $(S, a, S') \in \Delta^d$ gdw. $S' = \{q' \mid \exists q \in S : (q, a, q') \in \Delta\}$
- $F^d = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$ **T 1.2**

Im schlimmsten Fall kann $\mathcal{A}^d$ im Vergleich zu $\mathcal{A}$ exponentiell viele Zustände haben (s. Hopcroft et al. 2001, S. 65).

Potenzmengenkonstruktion
Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?
Antwort: Ja!
Satz 1.5 (Rabin, Scott 1959)
Für jeden NEA $\mathcal{A}$ gibt es einen DEA $\mathcal{A}^d$ mit $L(\mathcal{A}^d) = L(\mathcal{A})$.
Beweisskizze: Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$.
Wir konstruieren $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, F^d)$ wie folgt.
$Q^d = 2^Q$ (Potenzmenge der Zustandsmenge)
$I^d = \{I\}$
$(S, a, S') \in \Delta^d$ gdw. $S' = \{q' \mid \exists q \in S : (q, a, q') \in \Delta\}$
$F^d = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$ T 1.2
Im schlimmsten Fall kann $\mathcal{A}^d$ im Vergleich zu $\mathcal{A}$ exponentiell viele Zustände haben (s. Hopcroft et al. 2001, S. 65).

9:11

Klären: was heißt „gleichmächtig"?
(L DEA-erkennbar gdw. L NEA-erkennbar. Hinrichtung trivial.)

Hier nur **kurz** die Konstruktion und ein Beispiel.
Vollständiger Beweis siehe Theorie 1.
(Wir werden fast dieselbe Konstruktion später an Baumautomaten genauer ausführen.)

Und nun . . .

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└*Anwendung: Textsuche*

└Und nun . . .

Und nun . . .

Grundbegriffe
Anwendung: Textsuche
Abschlusseigenschaften
Reguläre Ausdrücke und Anwendungen
Charakterisierungen
Entscheidungsprobleme

Stichwortsuche

Typisches Problem aus dem Internetzeitalter

Gegeben sind **Stichwörter** $\boldsymbol{w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*}$
und **Dokumente** $D_1, \ldots, D_M \in \Sigma^*$.

Finde alle j, so dass D_j mindestens ein (alle) w_i als Teilwort hat.

- relevant z.B. für **Suchmaschinen**
- übliche Technologie: **invertierter Index**
  speichert für jedes im Internet auftretende w_i
  eine Liste aller Dokumente D_j, die w_i enthalten
- invertierte Indizes sind zeitaufwändig zu erstellen
  und setzen voraus, dass die D_j sich nur langsam ändern

9:15

Stichwortsuche
Typisches Problem aus dem Internetzeitalter
Gegeben sind Stichwörter $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*$
und Dokumente $D_1, \ldots, D_M \in \Sigma^*$.
Finde alle j, so dass D_j mindestens ein (alle) w_i als Teilwort hat.
relevant z.B. für Suchmaschinen
übliche Technologie: invertierter Index
speichert für jedes im Internet auftretende w_i
eine Liste aller Dokumente D_j, die w_i enthalten
invertierte Indizes sind zeitaufwändig zu erstellen
und setzen voraus, dass die D_j sich nur langsam ändern

Stichwortsuche ohne invertierte Indizes?

Invertierte Indizes versagen, wenn

- die (relevanten) Dokumente sich schnell ändern:
  - Suche in tagesaktuellen Nachrichtenartikeln
  - Einkaufshelfer sucht nach bestimmten Artikeln in aktuellen Seiten von Online-Shops
- die Dokumente nicht katalogisiert werden können:
  - Online-Shops wie Amazon generieren oft Seiten für ihre Artikel nur auf Anfragen hin.

$\rightsquigarrow$ Wie kann man dennoch Stichwortsuche implementieren?

Stichwortsuche ohne invertierte Indizes?

Invertierte Indizes versagen, wenn

- die (relevanten) Dokumente sich schnell ändern:
  - Suche in tagesaktuellen Nachrichtenartikeln
  - Einkaufshelfer sucht nach bestimmten Artikeln in aktuellen Seiten von Online-Shops
- die Dokumente nicht katalogisiert werden können:
  - Online-Shops wie Amazon generieren oft Seiten für ihre Artikel nur auf Anfragen hin.

$\rightsquigarrow$ Wie kann man dennoch Stichwortsuche implementieren?

9:17

Ein Fall für endliche Automaten!

Gegeben sind **Stichwörter** $\boldsymbol{w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*}$
und **Dokumente** $D_1, \ldots, D_M \in \Sigma^*$.
Finde alle j, so dass D_j mindestens ein w_i als Teilwort hat.

Ziel: konstruiere NEA $\mathcal{A}$, der

- ein D_j zeichenweise liest und
- in einen Endzustand geht gdw. er eins der w_i findet

Der Einfachheit halber legen wir fest, dass $\mathcal{A}$ ein Wort w akzeptiert, wenn $\mathcal{A}$ bereits nach Lesen eines *Teilworts* einen akz. Zustand erreicht.

9:18

Ein Fall für endliche Automaten!
Gegeben sind **Stichwörter** $\boldsymbol{w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*}$
und **Dokumente** $D_1, \ldots, D_M \in \Sigma^*$.
Finde alle j, so dass D_j mindestens ein w_i als Teilwort hat.
Ziel: konstruiere NEA $\mathcal{A}$, der
- ein D_j zeichenweise liest und
- in einen Endzustand geht gdw. er eins der w_i findet
Der Einfachheit halber legen wir fest, dass $\mathcal{A}$ ein Wort w akzeptiert, wenn $\mathcal{A}$ bereits nach Lesen eines *Teilworts* einen akz. Zustand erreicht.

Ein Fall für endliche Automaten!

Gegeben sind **Stichwörter** $\boldsymbol{w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*}$
und **Dokumente** $D_1, \ldots, D_M \in \Sigma^*$.
Finde alle j, so dass D_j mindestens ein w_i als Teilwort hat.

Ziel: konstruiere NEA $\mathcal{A}$, der

- ein D_j zeichenweise liest und
- in einen Endzustand geht gdw. er eins der w_i findet

Der Einfachheit halber legen wir fest, dass $\mathcal{A}$ ein Wort w akzeptiert, wenn $\mathcal{A}$ bereits nach Lesen eines *Teilworts* einen akz. Zustand erreicht.

Beispiel 1.6

$w_1 = \texttt{web}$ und $w_2 = \texttt{ebay}$

T 1.3

9:18

Ein Fall für endliche Automaten!
Gegeben sind Stichwörter $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*$ und Dokumente $D_1, \ldots, D_M \in \Sigma^*$. Finde alle j, so dass D_j mindestens ein w_i als Teilwort hat.
Ziel: konstruiere NEA $\mathcal{A}$, der
ein D_j zeichenweise liest und
in einen Endzustand geht gdw. er eins der w_i findet
Der Einfachheit halber legen wir fest, dass $\mathcal{A}$ ein Wort w akzeptiert, wenn $\mathcal{A}$ bereits nach Lesen eines *Teilworts* einen akz. Zustand erreicht.
Beispiel 1.6
$w_1 = \texttt{web}$ und $w_2 = \texttt{ebay}$
T 1.3

Implementation des NEAs $\mathcal{A}$

Eine Möglichkeit:

1. Determinisierung (Potenzmengenkonstruktion)
2. Simulation des resultierenden DEA $\mathcal{A}^d$

Wird $\mathcal{A}^d$ nicht zu groß?
($2^{27} > 134$ Mio. Zustände bei Stichw. „Binomialkoeffizient", „Polynom")

Implementation des NEAs $\mathcal{A}$

Eine Möglichkeit:
1. Determinisierung (Potenzmengenkonstruktion)
2. Simulation des resultierenden DEA $\mathcal{A}^d$

Wird $\mathcal{A}^d$ nicht zu groß?
($2^{27} > 134$ Mio. Zustände bei Stichw. „Binomialkoeffizient", „Polynom")

9:22 bis 9:30

Implementation des NEAs $\mathcal{A}$

Eine Möglichkeit:

1. Determinisierung (Potenzmengenkonstruktion)
2. Simulation des resultierenden DEA $\mathcal{A}^d$

Wird $\mathcal{A}^d$ nicht zu groß?
($2^{27} > 134$ Mio. Zustände bei Stichw. „Binomialkoeffizient“, „Polynom“)

Nein,

- mit der leicht geänderten Definition von Akzeptanz
- und unserer Variante der Potenzmengenkonstruktion

wird $\mathcal{A}^d$ genauso viele Zustände haben wie $\mathcal{A}$!

T 1.4

Implementation des NEAs $\mathcal{A}$
Eine Möglichkeit:
1. Determinisierung (Potenzmengenkonstruktion)
2. Simulation des resultierenden DEA $\mathcal{A}^d$
Wird $\mathcal{A}^d$ nicht zu groß?
($2^{27} > 134$ Mio. Zustände bei Stichw. „Binomialkoeffizient“, „Polynom“)
Nein,
- mit der leicht geänderten Definition von Akzeptanz
- und unserer Variante der Potenzmengenkonstruktion
wird $\mathcal{A}^d$ genauso viele Zustände haben wie $\mathcal{A}$!
T 1.4

9:22 bis 9:30

Und nun . . .

Und nun . . .

Grundbegriffe
Anwendung: Textsuche
Abschlusseigenschaften
Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
Charakterisierungen
Entscheidungsprobleme

Operationen auf Sprachen sind Operationen auf Mengen

Wie können (NEA-erkennbare) Sprachen kombiniert werden?

9:30

Operationen auf Sprachen sind Operationen auf Mengen
Wie können (NEA-erkennbare) Sprachen kombiniert werden?

Operationen auf Sprachen sind Operationen auf Mengen

Wie können (NEA-erkennbare) Sprachen kombiniert werden?

- Boolesche Operationen

Vereinigung	$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ oder } w \in L_2\}$
Schnitt	$L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ und } w \in L_2\}$
Komplement	$\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$

Operationen auf Sprachen sind Operationen auf Mengen
Wie können (NEA-erkennbare) Sprachen kombiniert werden?
Boolesche Operationen
Vereinigung $L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ oder } w \in L_2\}$
Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ und } w \in L_2\}$
Komplement $\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$

9:30

Operationen auf Sprachen sind Operationen auf Mengen

Wie können (NEA-erkennbare) Sprachen kombiniert werden?

- Boolesche Operationen

  Vereinigung $L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ oder } w \in L_2\}$

  Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ und } w \in L_2\}$

  Komplement $\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$

- Wortoperationen

  Konkatenation $L_1 \cdot L_2 = \{vw \mid v \in L_1 \text{ und } w \in L_2\}$

  Kleene-Hülle $L^* = \bigcup_{i \geqslant 0} L^i,$

  wobei $L^0 = \{\varepsilon\}$ und $L^{i+1} = L^i \cdot L$ für alle $i \geqslant 0$

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└Abschlusseigenschaften
└Operationen auf Sprachen sind Operationen auf Mengen

Operationen auf Sprachen sind Operationen auf Mengen

9:30

Abgeschlossenheit

Die Menge der erkennbaren Sprachen heißt **abgeschlossen unter** ...

- **Vereinigung**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
- **Komplement**, falls gilt:
  Falls L erkennbar, so auch $\overline{L}$.
- **Schnitt**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
- **Konkatenation**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cdot L_2$.
- **Kleene-Stern**, falls gilt:
  Falls L erkennbar, so auch L^*.

Abgeschlossenheit
Die Menge der erkennbaren Sprachen heißt abgeschlossen unter ...
Vereinigung, falls gilt: Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
Komplement, falls gilt: Falls L erkennbar, so auch $\overline{L}$.
Schnitt, falls gilt: Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
Konkatenation, falls gilt: Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cdot L_2$.
Kleene-Stern, falls gilt: Falls L erkennbar, so auch L^*.

9:32

Fragen: Wer weiß es noch?

Gemeinsam durchgehen & rekapitulieren:

- Vereinigungsautomat
- Produktautomat
- Det.+Vertauschen aZ/nicht-aZ
- Hintereinanderhängen
- Schleife aZ→AZ

Abgeschlossenheit

Die Menge der erkennbaren Sprachen heißt **abgeschlossen unter** ...

- **Vereinigung**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
- **Komplement**, falls gilt:
  Falls L erkennbar, so auch $\overline{L}$.
- **Schnitt**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
- **Konkatenation**, falls gilt:
  Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cdot L_2$.
- **Kleene-Stern**, falls gilt:
  Falls L erkennbar, so auch L^*.

Unter welchen Op. sind die NEA-erkennbaren Sprachen abgeschlossen?

Abgeschlossenheit
Die Menge der erkennbaren Sprachen heißt abgeschlossen unter ...
Vereinigung, falls gilt: Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
Komplement, falls gilt: Falls L erkennbar, so auch $\overline{L}$.
Schnitt, falls gilt: Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
Konkatenation, falls gilt: Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cdot L_2$.
Kleene-Stern, falls gilt: Falls L erkennbar, so auch L^*.
Unter welchen Op. sind die NEA-erkennbaren Sprachen abgeschlossen?

9:32

Fragen: Wer weiß es noch?

Gemeinsam durchgehen & rekapitulieren:

- Vereinigungsautomat
- Produktautomat
- Det.+Vertauschen aZ/nicht-aZ
- Hintereinanderhängen
- Schleife aZ⟶AZ

Abgeschlossenheit

Satz 1.7

Die Menge der NEA-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter den Operationen $\cup, \cap, \overline{}, \cdot, {}^*$.

Beweis: Siehe ThI 1.

9:36

Abgeschlossenheit
Satz 1.7
Die Menge der NEA-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter den Operationen $\cup, \cap, \overline{}, \cdot, {}^*$.
Beweis: Siehe ThI 1.

Und nun . . .

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└─Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*

└─Und nun . . .

Und nun . . .

Grundbegriffe
Anwendung: Textsuche
Abschlusseigenschaften
Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
Charakterisierungen
Entscheidungsprobleme

Reguläre Ausdrücke und Anwendungen

Reguläre Ausdrücke sind . . .

- bequeme Charakterisierung NEA-erkennbarer Sprachen
- besonders praktisch für Anwendungen

Reguläre Ausdrücke und Anwendungen
Reguläre Ausdrücke sind . . .
- bequeme Charakterisierung NEA-erkennbarer Sprachen
- besonders praktisch für Anwendungen

9:37

Reguläre Sprachen

Definition 1.8

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **regulär**, falls gilt:

- $L = \emptyset$ oder
- $L = \{\varepsilon\}$ oder
- $L = \{a\}$, $a \in \Sigma$, oder
- L lässt sich durch (endlichmaliges) Anwenden der Operatoren $\cup, \cdot, ^*$ aus den vorangehenden Fällen konstruieren.

Reguläre Sprachen
Definition 1.8
Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **regulär**, falls gilt:
- $L = \emptyset$ oder
- $L = \{\varepsilon\}$ oder
- $L = \{a\}$, $a \in \Sigma$, oder
- L lässt sich durch (endlichmaliges) Anwenden der Operatoren $\cup, \cdot, ^*$ aus den vorangehenden Fällen konstruieren.

9:37

Reguläre Sprachen

Definition 1.8

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **regulär**, falls gilt:

- $L = \emptyset$ oder
- $L = \{\varepsilon\}$ oder
- $L = \{a\}$, $a \in \Sigma$, oder
- L lässt sich durch (endlichmaliges) Anwenden der Operatoren $\cup, \cdot, ^*$ aus den vorangehenden Fällen konstruieren.

Beispiele:

$(\{a\} \cup \{b\})^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}$ (siehe $\mathcal{A}_3$ auf Folie 10)

$\{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot (\{a\} \cup \{b\})^*$ (s. $\mathcal{A}_2$ auf Folie 10)

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└─Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
└─Reguläre Sprachen

9:37

Reguläre Sprachen

Definition 1.8
Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist regulär, falls gilt:
- $L = \emptyset$ oder
- $L = \{\varepsilon\}$ oder
- $L = \{a\}$, $a \in \Sigma$, oder
- L lässt sich durch (endlichmaliges) Anwenden der Operatoren $\cup, \cdot, ^*$ aus den vorangehenden Fällen konstruieren.

Beispiele:
$(\{a\} \cup \{b\})^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}$ (siehe $\mathcal{A}_3$ auf Folie 10)
$\{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot (\{a\} \cup \{b\})^*$ (s. $\mathcal{A}_2$ auf Folie 10)

Reguläre Ausdrücke

Definition 1.9

Ein **regulärer Ausdruck (RA)** r über Σ und die **zugehörige Sprache** $\boldsymbol{L(r)} \subseteq \Sigma^*$ werden induktiv wie folgt definiert.

- $r = \emptyset$ ist ein RA mit $L(r) = \emptyset$
- $r = \varepsilon$ ist ein RA mit $L(r) = \{\varepsilon\}$
- $r = a$, für $a \in \Sigma$, ist ein RA mit $L(r) = \{a\}$
- $r = (r_1 + r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cup L(r_2)$
- $r = (r_1 r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cdot L(r_2)$
- $r = (r_1)^*$ ist ein RA mit $L(r^*) = (L(r))^*$

Reguläre Ausdrücke

Definition 1.9

Ein regulärer Ausdruck (RA) r über Σ und die zugehörige Sprache $L(r) \subseteq \Sigma^*$ werden induktiv wie folgt definiert.

- $r = \emptyset$ ist ein RA mit $L(r) = \emptyset$
- $r = \varepsilon$ ist ein RA mit $L(r) = \{\varepsilon\}$
- $r = a$, für $a \in \Sigma$, ist ein RA mit $L(r) = \{a\}$
- $r = (r_1 + r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cup L(r_2)$
- $r = (r_1 r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cdot L(r_2)$
- $r = (r_1)^*$ ist ein RA mit $L(r^*) = (L(r))^*$

9:39

Reguläre Ausdrücke

Definition 1.9

Ein **regulärer Ausdruck (RA)** r über Σ und die **zugehörige Sprache** $\boldsymbol{L(r)} \subseteq \Sigma^*$ werden induktiv wie folgt definiert.

- $r = \emptyset$ ist ein RA mit $L(r) = \emptyset$
- $r = \varepsilon$ ist ein RA mit $L(r) = \{\varepsilon\}$
- $r = a$, für $a \in \Sigma$, ist ein RA mit $L(r) = \{a\}$
- $r = (r_1 + r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cup L(r_2)$
- $r = (r_1 r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cdot L(r_2)$
- $r = (r_1)^*$ ist ein RA mit $L(r^*) = (L(r))^*$

Beispiele: (wir lassen Klammern weg soweit eindeutig)

$(a + b)^* ab$ (siehe $\mathcal{A}_3$ auf Folie 10)

$b^* aa^* b(a + b)^*$ (siehe $\mathcal{A}_2$ auf Folie 10)

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└─Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
└─Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke
Definition 1.9
Ein regulärer Ausdruck (RA) r über Σ und die zugehörige Sprache $L(r) \subseteq \Sigma^*$ werden induktiv wie folgt definiert.
- $r = \emptyset$ ist ein RA mit $L(r) = \emptyset$
- $r = \varepsilon$ ist ein RA mit $L(r) = \{\varepsilon\}$
- $r = a$, für $a \in \Sigma$, ist ein RA mit $L(r) = \{a\}$
- $r = (r_1 + r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cup L(r_2)$
- $r = (r_1 r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cdot L(r_2)$
- $r = (r_1)^*$ ist ein RA mit $L(r^*) = (L(r))^*$
Beispiele: (wir lassen Klammern weg soweit eindeutig)
$(a + b)^* ab$ (siehe $\mathcal{A}_3$ auf Folie 10)
$b^* aa^* b(a + b)^*$ (siehe $\mathcal{A}_2$ auf Folie 10)

9:39

Reguläre und NEA-erkennbare Sprachen

Satz 1.10 (Kleene 1956)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.

1. L ist regulär gdw. es einen RA r gibt mit $L = L(r)$.
2. L ist regulär gdw. L NEA-erkennbar ist.

9:41

Reguläre und NEA-erkennbare Sprachen
Satz 1.10 (Kleene 1956)
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.
1. L ist regulär gdw. es einen RA r gibt mit $L = L(r)$.
2. L ist regulär gdw. L NEA-erkennbar ist.

Reguläre und NEA-erkennbare Sprachen

Satz 1.10 (Kleene 1956)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.

1. L ist regulär gdw. es einen RA r gibt mit $L = L(r)$.
2. L ist regulär gdw. L NEA-erkennbar ist.

Beweis.

1. Folgt offensichtlich aus Def. 1.8, 1.9.
2. Benutze Punkt 1.

„$\Rightarrow$“: Induktion über Aufbau von r.
IA: gib Automaten an, die $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{a\}$ erkennen.
IS: benutze Abschlusseigenschaften (Satz 1.7)

„$\Leftarrow$“: siehe Theoretische Informatik 1. □

Reguläre und NEA-erkennbare Sprachen
Satz 1.10 (Kleene 1956)
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.
1. L ist regulär gdw. es einen RA r gibt mit $L = L(r)$.
2. L ist regulär gdw. L NEA-erkennbar ist.
Beweis.
1. Folgt offensichtlich aus Def. 1.8, 1.9.
2. Benutze Punkt 1.
„$\Rightarrow$“: Induktion über Aufbau von r.
IA: gib Automaten an, die $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{a\}$ erkennen.
IS: benutze Abschlusseigenschaften (Satz 1.7)
„$\Leftarrow$“: siehe Theoretische Informatik 1. □

9:41

Anwendungen regulärer Ausdrücke

- RAs werden verwendet, um „Muster“ von zu suchendem Text zu beschreiben.

  z. B.: suche alle Vorkommen von „PLZ Ort“:
  $(0 + \cdots + 9)^5 \text{␣} (A + \cdots + Z)(a + \cdots + z)^*$

- Programme zum Suchen von Mustern im Text übersetzen RAs in NEAs/DEAs und simulieren diese.

- wichtige Klassen von Anwendungen:
  lexikalische Analyse, **Textsuche**

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└─Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
└─Anwendungen regulärer Ausdrücke

Anwendungen regulärer Ausdrücke

- RAs werden verwendet, um „Muster“ von zu suchendem Text zu beschreiben.
  z. B.: suche alle Vorkommen von „PLZ Ort“:
  $(0 + \cdots + 9)^5 \text{␣} (A + \cdots + Z)(a + \cdots + z)^*$
- Programme zum Suchen von Mustern im Text übersetzen RAs in NEAs/DEAs und simulieren diese.
- wichtige Klassen von Anwendungen:
  lexikalische Analyse, **Textsuche**

8:30 **9:43 bis 9:44, 1 min Reserve**
↑ Zeitplanung ist Quatsch; die Sitzung war von 12:15 bis 13:45.

Ankündigen: Terminfindung (Mo. 12–14 klappt bei 2 TN nicht). In Pause.

Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke

- UNIX und andere Anwendungen erweitern Syntax von RAs
- Hier: nur „syntaktischer Zucker" – die Erweiterungen, die nicht aus den regulären Sprachen herausführen

Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke
- UNIX und andere Anwendungen erweitern Syntax von RAs
- Hier: nur „syntaktischer Zucker" – die Erweiterungen, die nicht aus den regulären Sprachen herausführen

8:32

Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke

- UNIX und andere Anwendungen erweitern Syntax von RAs
- Hier: nur „syntaktischer Zucker" – die Erweiterungen, die nicht aus den regulären Sprachen herausführen

- Alphabet Σ: alle ASCII-Zeichen
- RA `.` mit $L(\texttt{.}) = \Sigma$
- RA $\texttt{[}a_1 a_2 \dots a_k\texttt{]}$, Abkürzung für $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$
- RAs für Bereiche: z. B. `[a-z0-9]`, Abkü. für `[ab...z01...9]`
- Operator `|` anstelle $+$
- Operator `?`: r? steht für $\varepsilon + r$
- Operator `+`: r+ steht für rr^*
- Operator $\{n\}$: $r\{5\}$ steht für $rrrrr$
- Klammern und $*$ wie gehabt

Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke
- UNIX und andere Anwendungen erweitern Syntax von RAs
- Hier: nur „syntaktischer Zucker" – die Erweiterungen, die nicht aus den regulären Sprachen herausführen
- Alphabet Σ: alle ASCII-Zeichen
- RA . mit L(.) = Σ
- RA [a1a2 ... ak], Abkürzung für a1 + a2 + ··· + ak
- RAs für Bereiche: z. B. [a-z0-9], Abkü. für [ab...z01...9]
- Operator | anstelle +
- Operator ?: r? steht für ε + r
- Operator +: r+ steht für rr*
- Operator {n}: r{5} steht für rrrrr
- Klammern und ∗ wie gehabt

8:32

Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke

- UNIX und andere Anwendungen erweitern Syntax von RAs
- Hier: nur „syntaktischer Zucker“ – die Erweiterungen, die nicht aus den regulären Sprachen herausführen

- Alphabet Σ: alle ASCII-Zeichen
- RA `.` mit $L(\texttt{.}) = \Sigma$
- RA $[a_1 a_2 \dots a_k]$, Abkürzung für $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$
- RAs für Bereiche: z. B. `[a-z0-9]`, Abkü. für `[ab...z01...9]`
- Operator `|` anstelle $+$
- Operator `?`: r? steht für $\varepsilon + r$
- Operator `+`: r+ steht für rr^*
- Operator $\{n\}$: $r\{5\}$ steht für $rrrrr$
- Klammern und $*$ wie gehabt

PLZ-Ort-Beispiel:
`[0-9]{5}␣[A-Z][a-z]*`

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└─Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
└─Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke

Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke
- UNIX und andere Anwendungen erweitern Syntax von RAs
- Hier: nur „syntaktischer Zucker“ – die Erweiterungen, die nicht aus den regulären Sprachen herausführen
- Alphabet Σ: alle ASCII-Zeichen
- RA . mit L(.) = Σ
- RA [a1a2 ... ak], Abkürzung für a1 + a2 + ··· + ak
- RAs für Bereiche: z. B. [a-z0-9], Abkü. für [ab...z01...9]
- Operator | anstelle +
- Operator ?: r? steht für ε + r
- Operator +: r+ steht für rr*
- Operator {n}: r{5} steht für rrrrr
- Klammern und ∗ wie gehabt
PLZ-Ort-Beispiel: [0-9]{5}␣[A-Z][a-z]*

8:32

Anwendung: lexikalische Analyse

- **Lexer** (auch: Tokenizer) durchsucht Quellcode nach **Token**: zusammengehörende Zeichenfolgen, z. B. Kennwörter, Bezeichner
- Ausgabe des Lexers: Token-Liste, wird an Parser weitergegeben
- Mit RAs: Lexer leicht programmier- und modifizierbar

Anwendung: lexikalische Analyse

- Lexer (auch: Tokenizer) durchsucht Quellcode nach Token: zusammengehörende Zeichenfolgen, z. B. Kennwörter, Bezeichner
- Ausgabe des Lexers: Token-Liste, wird an Parser weitergegeben
- Mit RAs: Lexer leicht programmier- und modifizierbar

8:35

Lexer: kurz für „lexikalischer Scanner“, auch Tokenizer

Lex: a computer program that generates lexical analyzers“ [Wikipedia]

Flex: “fast lexical analyzer generator”, “a free and open-source software alternative to lex” [Wikipedia]

Anwendung: lexikalische Analyse

- **Lexer** (auch: Tokenizer) durchsucht Quellcode nach **Token**:
  zusammengehörende Zeichenfolgen, z. B. Kennwörter, Bezeichner
- Ausgabe des Lexers: Token-Liste,
  wird an Parser weitergegeben
- Mit RAs: Lexer leicht programmier- und modifizierbar
- UNIX-Kommandos `lex` und `flex` generieren Lexer
  - Eingabe: Liste von Einträgen RA + Code
  - Code beschreibt Ausgabe des Lexers für das jeweilige Token
  - generierter Lexer wandelt alle RAs in **einen DEA** um,
    um Vorkommen der Tokens zu finden (siehe Folie 17)
  - anhand des Zustands des DEAs lässt sich bestimmen,
    welches Token gefunden wurde

Anwendung: lexikalische Analyse
- **Lexer** (auch: Tokenizer) durchsucht Quellcode nach **Token**: zusammengehörende Zeichenfolgen, z. B. Kennwörter, Bezeichner
- Ausgabe des Lexers: Token-Liste, wird an Parser weitergegeben
- Mit RAs: Lexer leicht programmier- und modifizierbar
- UNIX-Kommandos `lex` und `flex` generieren Lexer
  - Eingabe: Liste von Einträgen RA + Code
  - Code beschreibt Ausgabe des Lexers für das jeweilige Token
  - generierter Lexer wandelt alle RAs in **einen DEA** um, um Vorkommen der Tokens zu finden (siehe Folie 17)
  - anhand des Zustands des DEAs lässt sich bestimmen, *welches* Token gefunden wurde

8:35

Lexer: kurz für „lexikalischer Scanner“, auch Tokenizer

Lex: a computer program that generates lexical analyzers“ [Wikipedia]

Flex: “fast lexical analyzer generator”, “a free and open-source software alternative to lex” [Wikipedia]

Beispieleingabe für `lex`

```
else
  {return(ELSE);}

[A-Za-z][A-za-z0-9]*
  {<Trage gefundenen Bezeichner in Symboltabelle ein>;
  return(ID);}

>=
  {return(GE);}

=
  {return(EQ);}
```

(Lexer-Generator muss Prioritäten beachten:
`else` wird auch vom 2. RA erkannt, ist aber reserviert)

Beispieleingabe für lex

else
  {return(ELSE);}

[A-Za-z][A-za-z0-9]*
  {<Trage gefundenen Bezeichner in Symboltabelle ein>;
  return(ID);}

>=
  {return(GE);}

=
  {return(EQ);}

(Lexer-Generator muss Prioritäten beachten:
else wird auch vom 2. RA erkannt, ist aber reserviert)

8:37

ZF: Der Lexer-Generator dient dazu, Lexer zu erzeugen.
Diese Tabelle hier gibt an, wie das passiert.
Der Vorteil ist die leichte Änderbarkeit, wenn sich mal ein Token oder dessen Beschreibung (RA!) ändert.

Anwendung: Finden von Mustern im Text

Beispiel: Suchen von Adressen (Str. + Hausnr.) in Webseiten

Solche Angaben sollen gefunden werden:

```
Parkstraße 5
Enrique-Schmidt-Straße 12a
Breitenweg 24A
Knochenhauergasse 30-32
```


Anwendung: Finden von Mustern im Text
Beispiel: Suchen von Adressen (Str. + Hausnr.) in Webseiten
Solche Angaben sollen gefunden werden:
Parkstraße 5
Enrique-Schmidt-Straße 12a
Breitenweg 24A
Knochenhauergasse 30-32

8:40

Anwendung: Finden von Mustern im Text

Beispiel: Suchen von Adressen (Str. + Hausnr.) in Webseiten

Solche Angaben sollen gefunden werden:

```
Parkstraße 5
Enrique-Schmidt-Straße 12a
Breitenweg 24A
Knochenhauergasse 30-32
```

aber auch solche:

```
Straße des 17. Juni 17
...boulevard, ...allee, ...platz, ...
Postfach 330 440
Am Wall 8
```


Anwendung: Finden von Mustern im Text

Beispiel: Suchen von Adressen (Str. + Hausnr.) in Webseiten
Solche Angaben sollen gefunden werden:
Parkstraße 5
Enrique-Schmidt-Straße 12a
Breitenweg 24A
Knochenhauergasse 30-32
aber auch solche:
Straße des 17. Juni 17
...boulevard, ...allee, ...platz, ...
Postfach 330 440
Am Wall 8

8:40

Anwendung: Finden von Mustern im Text

Beispiel: Suchen von Adressen (Str. + Hausnr.) in Webseiten

Solche Angaben sollen gefunden werden:

```
Parkstraße 5
Enrique-Schmidt-Straße 12a
Breitenweg 24A
Knochenhauergasse 30-32
```

aber auch solche:

```
Straße des 17. Juni 17
...boulevard, ...allee, ...platz, ...
Postfach 330 440
Am Wall 8
```

$\rightsquigarrow$ Ausmaß der Variationen erst während der Suche deutlich

$\rightsquigarrow$ Gesucht: einfach modifizierbare Beschreibung der Muster

Anwendung: Finden von Mustern im Text

Beispiel: Suchen von Adressen (Str. + Hausnr.) in Webseiten
Solche Angaben sollen gefunden werden:
Parkstraße 5
Enrique-Schmidt-Straße 12a
Breitenweg 24A
Knochenhauergasse 30-32
aber auch solche:
Straße des 17. Juni 17
...boulevard, ...allee, ...platz, ...
Postfach 330 440
Am Wall 8
$\rightsquigarrow$ Ausmaß der Variationen erst während der Suche deutlich
$\rightsquigarrow$ Gesucht: einfach modifizierbare Beschreibung der Muster

8:40

Mustersuche mit regulären Ausdrücken

Mögliches Vorgehen:

(1) Beschreibung des Musters mit einem einfachen RA
(2) Umwandlung des RA in einen NEA
(3) Implementation des DEA wie auf Folie 17+18
(4) Test
(5) Wenn nötig, RA erweitern/ändern und Sprung zu Schritt 2

Mustersuche mit regulären Ausdrücken

Mögliches Vorgehen:
(1) Beschreibung des Musters mit einem einfachen RA
(2) Umwandlung des RA in einen NEA
(3) Implementation des DEA wie auf Folie 17+18
(4) Test
(5) Wenn nötig, RA erweitern/ändern und Sprung zu Schritt 2

8:42

Dies ist ein ganz banales, heuristisches Vorgehen.
Keine tiefgründigen Techniken.
Dient nur zur Demonstration der einfachen Erweiterbarkeit, wenn man RAs benutzt.

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`

[1] Weil der UNIX-RA . für Σ reserviert ist, steht \. für {.}

Adresssuche mit regulären Ausdrücken
So kann sich der RA entwickeln:
- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  straße|str\.|weg|gasse
[1] Weil der UNIX-RA . für Σ reserviert ist, steht \. für {.}

8:43 bis 8:46

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße" etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer:

[1]Weil der UNIX-RA . für Σ reserviert ist, steht \. für $\{.\}$

Adresssuche mit regulären Ausdrücken
So kann sich der RA entwickeln:
- Vorkommen von „straße" etc.:[1] straße|str\.|weg|gasse
- Plus Name der Straße und Hausnummer:
[1]Weil der UNIX-RA . für Σ reserviert ist, steht \. für {.}

8:43 bis 8:46

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer:
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*`

[1] Weil der UNIX-RA `.` für Σ reserviert ist, steht `\.` für $\{.\}$

Adresssuche mit regulären Ausdrücken
So kann sich der RA entwickeln:
- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer:
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*`
[1] Weil der UNIX-RA `.` für Σ reserviert ist, steht `\.` für $\{.\}$

8:43 bis 8:46

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer:
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*`
- Hausnummern mit Buchstaben (12a), -bereiche (30–32):

[1]Weil der UNIX-RA `.` für Σ reserviert ist, steht `\.` für {.}

Adresssuche mit regulären Ausdrücken
So kann sich der RA entwickeln:
Vorkommen von „straße“ etc.:1 straße|str\.|weg|gasse
Plus Name der Straße und Hausnummer: [A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*
Hausnummern mit Buchstaben (12a), -bereiche (30–32):
1Weil der UNIX-RA . für Σ reserviert ist, steht \. für {.}

8:43 bis 8:46

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer:
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*`
- Hausnummern mit Buchstaben (12a), -bereiche (30–32):
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse)`
  `([0-9]*[A-Za-z]?-)?[0-9]*[A-Za-z]?`

[1] Weil der UNIX-RA . für Σ reserviert ist, steht \. für {.}

Adresssuche mit regulären Ausdrücken
So kann sich der RA entwickeln:
- Vorkommen von „straße“ etc.:[1] straße|str\.|weg|gasse
- Plus Name der Straße und Hausnummer: [A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*
- Hausnummern mit Buchstaben (12a), -bereiche (30–32): [A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) ([0-9]*[A-Za-z]?-)?[0-9]*[A-Za-z]?
[1] Weil der UNIX-RA . für Σ reserviert ist, steht \. für {.}

8:43 bis 8:46

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:[1]
  `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer:
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*`
- Hausnummern mit Buchstaben (12a), -bereiche (30–32):
  `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse)`
  `([0-9]*[A-Za-z]?-)?[0-9]*[A-Za-z]?`
- und mehr:
  - Straßennamen mit Bindestrichen
  - „Straße“ etc. am Anfang
  - Plätze, Boulevards, Alleen etc.
  - Postfächer
  - ...

[1] Weil der UNIX-RA . für Σ reserviert ist, steht \. für {.}

Adresssuche mit regulären Ausdrücken
So kann sich der RA entwickeln:
- Vorkommen von „straße“ etc.:[1] `straße|str\.|weg|gasse`
- Plus Name der Straße und Hausnummer: `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) [0-9]*`
- Hausnummern mit Buchstaben (12a), -bereiche (30–32): `[A-Z][a-z]*(straße|str\.|weg|gasse) ([0-9]*[A-Za-z]?-)?[0-9]*[A-Za-z]?`
- und mehr:
  - Straßennamen mit Bindestrichen
  - „Straße“ etc. am Anfang
  - Plätze, Boulevards, Alleen etc.
  - Postfächer
  - ...

[1] Weil der UNIX-RA . für Σ reserviert ist, steht \. für {.}

8:43 bis 8:46

Und nun ...

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└─Charakterisierungen
└─Und nun ...

Und nun ...

1. Grundbegriffe
2. *Anwendung: Textsuche*
3. Abschlusseigenschaften
4. Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
5. Charakterisierungen
6. Entscheidungsprobleme

Pumping-Lemma

Wie zeigt man, dass L **nicht** NEA-erkennbar (regulär) ist?

Pumping-Lemma
Wie zeigt man, dass L **nicht** NEA-erkennbar (regulär) ist?

8:46

Fragen: Wer kann sich an die 2 Werkzeuge aus ThI 1 erinnern?

Am Ende: **Fragebogen F. 2a**

Pumping-Lemma

Wie zeigt man, dass L **nicht** NEA-erkennbar (regulär) ist?

Satz 1.11 (Pumping-Lemma)

Sei L eine NEA-erkennbare Sprache.

Dann gibt es eine Konstante $p \geqslant 0$,
so dass für alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geqslant p$ gilt:

Es gibt eine Zerlegung $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant p$,
so dass $xy^iz \in L$ für alle $i \geqslant 0$.

Beweis: siehe ThI 1.

Pumping-Lemma
Wie zeigt man, dass L **nicht** NEA-erkennbar (regulär) ist?
Satz 1.11 (Pumping-Lemma)
Sei L eine NEA-erkennbare Sprache.
Dann gibt es eine Konstante $p \geqslant 0$,
so dass für alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geqslant p$ gilt:
Es gibt eine Zerlegung $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant p$,
so dass $xy^iz \in L$ für alle $i \geqslant 0$.
Beweis: siehe ThI 1.

8:46

Fragen: Wer kann sich an die 2 Werkzeuge aus ThI 1 erinnern?

Am Ende: **Fragebogen F. 2a**

Anwendung des Pumping-Lemmas

Benutzen Kontraposition:

Wenn es **für alle** Konstanten $p \geqslant 0$
ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geqslant p$ **gibt**, so dass es
für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant p$
ein $i \geqslant 0$ **gibt** mit $xy^iz \notin L$,
dann ist L **keine** NEA-erkennbare Sprache.

T 1.5

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└Charakterisierungen
└Anwendung des Pumping-Lemmas

Anwendung des Pumping-Lemmas

Benutzen Kontraposition:

Wenn es für alle Konstanten $p \geqslant 0$
ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geqslant p$ gibt, so dass es
für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leqslant p$
ein $i \geqslant 0$ gibt mit $xy^iz \notin L$,
dann ist L keine NEA-erkennbare Sprache.

T 1.5

8:48 bis 8:55

Bemerkungen zum Pumping-Lemma

Die Bedingung in Satz 1.11 ist ...

- **notwendig** dafür, dass L NEA-erkennbar ist
- **nicht hinreichend**
  Bsp.: $\{a^n b^k c^k \mid n, k \geqslant 1\} \cup \{b^n c^k \mid n, k \geqslant 0\}$

$\rightsquigarrow$ Pumping-L. nur zum **Widerlegen** von Erkennbarkeit verwendbar, nicht zum Beweisen, dass L regulär ist

(Notwendige und hinreichende Variante: Jaffes Pumping-Lemma)

8:55

Bemerkungen zum Pumping-Lemma

Die Bedingung in Satz 1.11 ist ...

- **notwendig** dafür, dass L NEA-erkennbar ist
- **nicht hinreichend**
  Bsp.: $\{a^n b^k c^k \mid n, k \geqslant 1\} \cup \{b^n c^k \mid n, k \geqslant 0\}$

$\rightsquigarrow$ Pumping-L. nur zum **Widerlegen** von Erkennbarkeit verwendbar, nicht zum Beweisen, dass L regulär ist

(Notwendige und hinreichende Variante: Jaffes Pumping-Lemma)

Der Satz von Myhill-Nerode

Ziel: notwendige **und** hinreichende Bedingung für Erkennbarkeit

Definition 1.12

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.

Zwei Wörter $u, v \in \Sigma^*$ sind ***L*-äquivalent** (Schreibweise: $u \sim_L v$), wenn für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$uw \in L \quad \text{genau dann, wenn} \quad vw \in L$$

Der Satz von Myhill-Nerode

Ziel: notwendige und hinreichende Bedingung für Erkennbarkeit

Definition 1.12
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.
Zwei Wörter $u, v \in \Sigma^*$ sind L-äquivalent (Schreibweise: $u \sim_L v$), wenn für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:
$uw \in L$ genau dann, wenn $vw \in L$

8:57

Satz von Myhill-Nerode liefert eine „echte“ Charakterisierung der erkennbaren Sprachen (und eine weitere nützliche Information)

Der Satz von Myhill-Nerode

Ziel: notwendige **und** hinreichende Bedingung für Erkennbarkeit

Definition 1.12

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.

Zwei Wörter $u, v \in \Sigma^*$ sind ***L*-äquivalent** (Schreibweise: $u \sim_L v$), wenn für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$uw \in L \quad \text{genau dann, wenn} \quad vw \in L$$

$\sim_L$ heißt **Nerode-Rechtskongruenz** und ist Äquivalenzrelation (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität sind offensichtlich)

Index von $\sim_L$: Anzahl der Äquivalenzklassen

Der Satz von Myhill-Nerode
Ziel: notwendige und hinreichende Bedingung für Erkennbarkeit
Definition 1.12
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.
Zwei Wörter $u, v \in \Sigma^*$ sind L-äquivalent (Schreibweise: $u \sim_L v$), wenn für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:
$uw \in L$ genau dann, wenn $vw \in L$
$\sim_L$ heißt Nerode-Rechtskongruenz und ist Äquivalenzrelation (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität sind offensichtlich)
Index von $\sim_L$: Anzahl der Äquivalenzklassen

8:57

Satz von Myhill-Nerode liefert eine „echte“ Charakterisierung der erkennbaren Sprachen (und eine weitere nützliche Information)

Der Satz von Myhill-Nerode

Satz 1.13 (Myhill-Nerode)

$L \subseteq \Sigma^*$ is NEA-erkennbar gdw. $\sim_L$ endlichen Index hat.

Beweis: siehe ThI 1. **T 1.6**

Der Satz von Myhill-Nerode
Satz 1.13 (Myhill-Nerode)
$L \subseteq \Sigma^*$ is NEA-erkennbar gdw. $\sim_L$ endlichen Index hat.
Beweis: siehe ThI 1. T 1.6

8:59

Fragebogen F. 2b

13 min Pause: Terminfindung $\rightsquigarrow$ 9:15
(Ist aber eigentlich zu zeitig für Pause)

Der Satz von Myhill-Nerode

Satz 1.13 (Myhill-Nerode)

$L \subseteq \Sigma^*$ is NEA-erkennbar gdw. $\sim_L$ endlichen Index hat.

Beweis: siehe ThI 1. **T 1.6**

Interessantes „**Nebenprodukt**“ des Beweises:

Endlicher Index n von $\sim_L$
$=$ minimale Anzahl von Zuständen in einem DEA, der L erkennt.

Der Satz von Myhill-Nerode
Satz 1.13 (Myhill-Nerode)
$L \subseteq \Sigma^*$ is NEA-erkennbar gdw. $\sim_L$ endlichen Index hat.
Beweis: siehe ThI 1. T 1.6
Interessantes „Nebenprodukt“ des Beweises:
Endlicher Index n von $\sim_L$
$=$ minimale Anzahl von Zuständen in einem DEA, der L erkennt.

8:59

Fragebogen F. 2b

13 min Pause: Terminfindung $\rightsquigarrow$ 9:15
(Ist aber eigentlich zu zeitig für Pause)

Und nun ...

2018-10-22

Teil 1: endliche Wörter
└Entscheidungsprobleme

└Und nun ...

Und nun ...

Grundbegriffe
Anwendung: Textsuche
Abschlusseigenschaften
Reguläre Ausdrücke und Anwendungen
Charakterisierungen
Entscheidungsprobleme

Entscheidbarkeit

(Entscheidungs-)Problem

- . . . ist eine Teilmenge $X \subseteq M$
  - Eingabe: $m \in M$; Frage: $m \in X$?
  - $m \in X$: **Ja-Instanzen**; $m \in M \setminus X$: **Nein-Instanzen**

Entscheidbarkeit
(Entscheidungs-)Problem
. . . ist eine Teilmenge $X \subseteq M$
Eingabe: $m \in M$; Frage: $m \in X$?
$m \in X$: Ja-Instanzen; $m \in M \setminus X$: Nein-Instanzen

9:15

Entscheidungsprobleme sind zentral für diese Vorlesung, denn wir werden sehen, dass algorithmische Probleme in Anwendungen auf Entscheidungsprobleme gewisser Automatenmodelle zurückzuführen sind.

Z. B.: Validierung eines XML-Dokuments entspricht dem Wortproblem für gewisse Baumautomaten.

Durch das Studium dieser Entscheidungsprobleme bekommen wir also einen prinzipiellen Ansatz zur Lösung der Anwendungsprobleme.

Zunächst ein kurzer Abriss von Entscheidbarkeit und Komplexität; mehr dazu im ThI2-Skript.

„Algorithmus“: Prog.sprache & Rechnermodell sind relativ unerheblich ((erweiterte) Church-Turing-These)

Entscheidbarkeit

(Entscheidungs-)Problem

- ... ist eine Teilmenge $X \subseteq M$
  - Eingabe: $m \in M$; Frage: $m \in X$?
  - $m \in X$: **Ja-Instanzen**; $m \in M \setminus X$: **Nein-Instanzen**
- Beispiele:
  - X = Menge aller Primzahlen, $M = \mathbb{N}$
  - X = Menge aller NEAs $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, M = Menge aller NEAs

Entscheidbarkeit
(Entscheidungs-)Problem
... ist eine Teilmenge $X \subseteq M$
Eingabe: $m \in M$; Frage: $m \in X$?
$m \in X$: Ja-Instanzen; $m \in M \setminus X$: Nein-Instanzen
Beispiele:
X = Menge aller Primzahlen, $M = \mathbb{N}$
X = Menge aller NEAs $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, M = Menge aller NEAs

9:15

Entscheidungsprobleme sind zentral für diese Vorlesung, denn wir werden sehen, dass algorithmische Probleme in Anwendungen auf Entscheidungsprobleme gewisser Automatenmodelle zurückzuführen sind.

Z. B.: Validierung eines XML-Dokuments entspricht dem Wortproblem für gewisse Baumautomaten.

Durch das Studium dieser Entscheidungsprobleme bekommen wir also einen prinzipiellen Ansatz zur Lösung der Anwendungsprobleme.

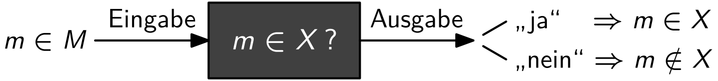
Zunächst ein kurzer Abriss von Entscheidbarkeit und Komplexität; mehr dazu im ThI2-Skript.

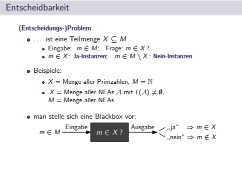
„Algorithmus“: Prog.sprache & Rechnermodell sind relativ unerheblich ((erweiterte) Church-Turing-These)

Entscheidbarkeit

(Entscheidungs-)Problem

- ... ist eine Teilmenge $X \subseteq M$
  - Eingabe: $m \in M$; Frage: $m \in X$?
  - $m \in X$: **Ja-Instanzen**; $m \in M \setminus X$: **Nein-Instanzen**
- Beispiele:
  - X = Menge aller Primzahlen, $M = \mathbb{N}$
  - X = Menge aller NEAs $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, M = Menge aller NEAs
- man stelle sich eine Blackbox vor:





9:15

Entscheidungsprobleme sind zentral für diese Vorlesung, denn wir werden sehen, dass algorithmische Probleme in Anwendungen auf Entscheidungsprobleme gewisser Automatenmodelle zurückzuführen sind.

Z. B.: Validierung eines XML-Dokuments entspricht dem Wortproblem für gewisse Baumautomaten.

Durch das Studium dieser Entscheidungsprobleme bekommen wir also einen prinzipiellen Ansatz zur Lösung der Anwendungsprobleme.

Zunächst ein kurzer Abriss von Entscheidbarkeit und Komplexität; mehr dazu im ThI2-Skript.

„Algorithmus": Prog.sprache & Rechnermodell sind relativ unerheblich ((erweiterte) Church-Turing-These)

Entscheidbarkeit

(Entscheidungs-)Problem

- . . . ist eine Teilmenge $X \subseteq M$
  - Eingabe: $m \in M$; Frage: $m \in X$?
  - $m \in X$: **Ja-Instanzen;** $m \in M \setminus X$: **Nein-Instanzen**
- Beispiele:
  - X = Menge aller Primzahlen, $M = \mathbb{N}$
  - X = Menge aller NEAs $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$,
    M = Menge aller NEAs
- man stelle sich eine Blackbox vor:

$$m \in M \xrightarrow{\text{Eingabe}} \boxed{m \in X\,?} \xrightarrow{\text{Ausgabe}} \begin{cases} \text{„ja“} & \Rightarrow m \in X \\ \text{„nein“} & \Rightarrow m \notin X \end{cases}$$

Entscheidbarkeit: X ist entscheidbar,
wenn es einen Algorithmus A gibt, der die Blackbox implementiert.

Entscheidbarkeit
(Entscheidungs-)Problem
... ist eine Teilmenge $X \subseteq M$
Eingabe: $m \in M$; Frage: $m \in X$?
$m \in X$: Ja-Instanzen; $m \in M \setminus X$: Nein-Instanzen
Beispiele:
X = Menge aller Primzahlen, $M = \mathbb{N}$
X = Menge aller NEAs $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, M = Menge aller NEAs
man stelle sich eine Blackbox vor:
Entscheidbarkeit: X ist entscheidbar, wenn es einen Algorithmus A gibt, der die Blackbox implementiert.

9:15

Entscheidungsprobleme sind zentral für diese Vorlesung, denn wir werden sehen, dass algorithmische Probleme in Anwendungen auf Entscheidungsprobleme gewisser Automatenmodelle zurückzuführen sind.

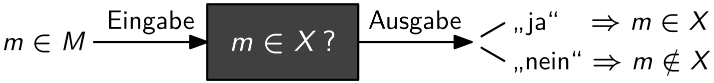
Z. B.: Validierung eines XML-Dokuments entspricht dem Wortproblem für gewisse Baumautomaten.

Durch das Studium dieser Entscheidungsprobleme bekommen wir also einen prinzipiellen Ansatz zur Lösung der Anwendungsprobleme.

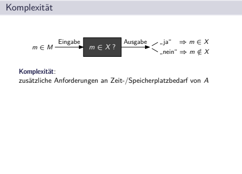
Zunächst ein kurzer Abriss von Entscheidbarkeit und Komplexität; mehr dazu im ThI2-Skript.

„Algorithmus“: Prog.sprache & Rechnermodell sind relativ unerheblich ((erweiterte) Church-Turing-These)

Komplexität



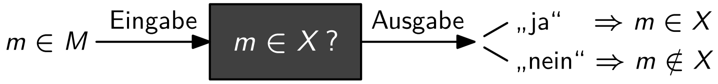
Komplexität:
zusätzliche Anforderungen an Zeit-/Speicherplatzbedarf von A



9:18

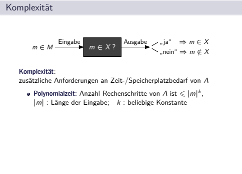
Wichtig: Es geht dabei immer um eine „Worst-Case-Analyse“,
also: wie viele Ressourcen braucht ein Algorithmus/ der beste Algorithmus **im schlechtesten Fall**?

Komplexität



Komplexität:
zusätzliche Anforderungen an Zeit-/Speicherplatzbedarf von A

- **Polynomialzeit:** Anzahl Rechenschritte von A ist $\leqslant |m|^k$,
  $|m|$: Länge der Eingabe; k : beliebige Konstante



9:18

Wichtig: Es geht dabei immer um eine „Worst-Case-Analyse“,
also: wie viele Ressourcen braucht ein Algorithmus/ der beste Algorithmus **im schlechtesten Fall** ?

Komplexität

$$m \in M \xrightarrow{\text{Eingabe}} \boxed{m \in X\,?} \xrightarrow{\text{Ausgabe}} \begin{cases} \text{„ja“} & \Rightarrow m \in X \\ \text{„nein“} & \Rightarrow m \notin X \end{cases}$$

Komplexität:
zusätzliche Anforderungen an Zeit-/Speicherplatzbedarf von A

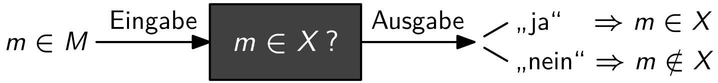
- **Polynomialzeit:** Anzahl Rechenschritte von A ist $\leqslant |m|^k$,
  $|m|$: Länge der Eingabe; k : beliebige Konstante
- **Polynomieller Platz:** von A benötigter Speicherplatz $\leqslant |m|^k$

Komplexität
$m \in M \xrightarrow{\text{Eingabe}} \boxed{m \in X\,?} \xrightarrow{\text{Ausgabe}}$ „ja“ $\Rightarrow m \in X$, „nein“ $\Rightarrow m \notin X$
Komplexität:
zusätzliche Anforderungen an Zeit-/Speicherplatzbedarf von A
Polynomialzeit: Anzahl Rechenschritte von A ist $\leqslant |m|^k$, $|m|$: Länge der Eingabe; k : beliebige Konstante
Polynomieller Platz: von A benötigter Speicherplatz $\leqslant |m|^k$

9:18

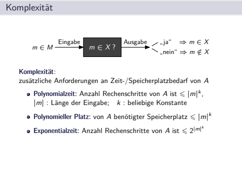
Wichtig: Es geht dabei immer um eine „Worst-Case-Analyse“,
also: wie viele Ressourcen braucht ein Algorithmus/ der beste Algorithmus **im schlechtesten Fall**?

Komplexität



Komplexität:
zusätzliche Anforderungen an Zeit-/Speicherplatzbedarf von A

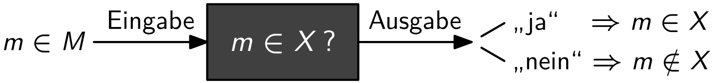
- **Polynomialzeit:** Anzahl Rechenschritte von A ist $\leqslant |m|^k$,
  $|m|$: Länge der Eingabe; k : beliebige Konstante
- **Polynomieller Platz:** von A benötigter Speicherplatz $\leqslant |m|^k$
- **Exponentialzeit:** Anzahl Rechenschritte von A ist $\leqslant 2^{|m|^k}$



9:18

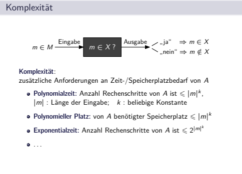
Wichtig: Es geht dabei immer um eine „Worst-Case-Analyse“,
also: wie viele Ressourcen braucht ein Algorithmus/ der beste Algorithmus **im schlechtesten Fall**?

Komplexität



Komplexität:
zusätzliche Anforderungen an Zeit-/Speicherplatzbedarf von A

- **Polynomialzeit**: Anzahl Rechenschritte von A ist $\leqslant |m|^k$,
  $|m|$: Länge der Eingabe; k : beliebige Konstante
- **Polynomieller Platz**: von A benötigter Speicherplatz $\leqslant |m|^k$
- **Exponentialzeit**: Anzahl Rechenschritte von A ist $\leqslant 2^{|m|^k}$
- ...



9:18

Wichtig: Es geht dabei immer um eine „Worst-Case-Analyse“,
also: wie viele Ressourcen braucht ein Algorithmus/ der beste Algorithmus **im schlechtesten Fall**?

Einige übliche Komplexitätsklassen

Name	Bedeutung	Beispiel-Problem
L	logarithm. Speicherplatz	Erreichbarkeit, ungerichtete Graphen
NL	nichtdetermin. log. Platz	Erreichbarkeit, gerichtete Graphen
P	Polynomialzeit	Primzahlen
NP	nichtdeterminist. Polyzeit	Erfüllbarkeit Aussagenlogik
PSpace	polynom. Speicherplatz	Erfüllbarkeit QBF
ExpTime	Exponentialzeit	Gewinnstrategie $n \times n$-Schach
NExpTime	nichtdet. Exponentialzeit	Clique f. schaltkreiscodierte Graphen
ExpSpace	exponentieller Platz	Äquiv. regulärer Ausdrücke mit „ $\cdot^2$ “
⋮	⋮	
	unentscheidbar	Erfüllbarkeit Prädikatenlogik

Komplementklassen: **coNL**, **coNP** etc.

Einige übliche Komplexitätsklassen

Name	Bedeutung	Beispiel-Problem
L	logarithm. Speicherplatz	Erreichbarkeit, ungerichtete Graphen
NL	nichtdetermin. log. Platz	Erreichbarkeit, gerichtete Graphen
P	Polynomialzeit	Primzahlen
NP	nichtdeterminist. Polyzeit	Erfüllbarkeit Aussagenlogik
PSpace	polynom. Speicherplatz	Erfüllbarkeit QBF
ExpTime	Exponentialzeit	Gewinnstrategie $n \times n$-Schach
NExpTime	nichtdet. Exponentialzeit	Clique f. schaltkreiscodierte Graphen
ExpSpace	exponentieller Platz	Äquiv. regulärer Ausdrücke mit „ $\cdot^2$ “
⋮	⋮	
	unentscheidbar	Erfüllbarkeit Prädikatenlogik

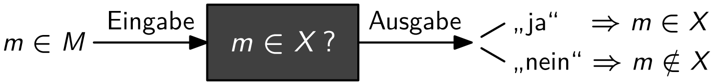
Komplementklassen: coNL, coNP etc.

9:21

Klassen so vorlesen: „. . . ist die Menge aller Probleme, die sich mit einer . . . TM in . . . Zeit/Platz lösen lassen“

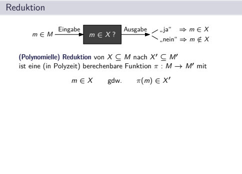
Beispiele nur am Rande erwähnen

Reduktion



(Polynomielle) Reduktion von $X \subseteq M$ nach $X' \subseteq M'$
ist eine (in Polyzeit) berechenbare Funktion $\pi : M \to M'$ mit

$$m \in X \qquad \text{gdw.} \qquad \pi(m) \in X'$$

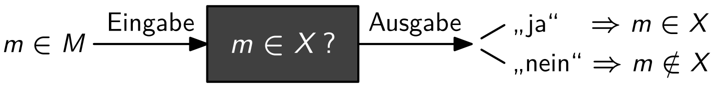


9:26 bis 9:38

Reduktion: wichtiges Hilfsmittel zum genauen Bestimmen der Komplexität

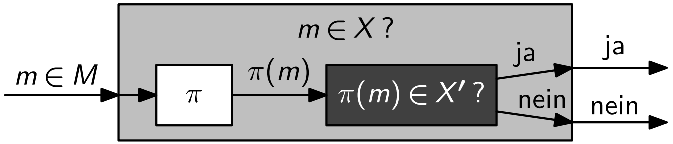
Intuition: Wenn $X \leq X'$, dann ist X *höchstens so schwer wie* X'.

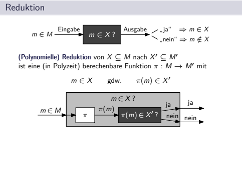
Reduktion



(Polynomielle) Reduktion von $X \subseteq M$ nach $X' \subseteq M'$ ist eine (in Polyzeit) berechenbare Funktion $\pi : M \to M'$ mit

$$m \in X \qquad \text{gdw.} \qquad \pi(m) \in X'$$



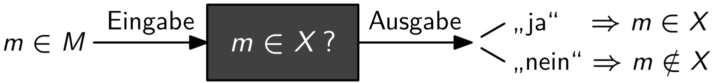


9:26 bis 9:38

Reduktion: wichtiges Hilfsmittel zum genauen Bestimmen der Komplexität

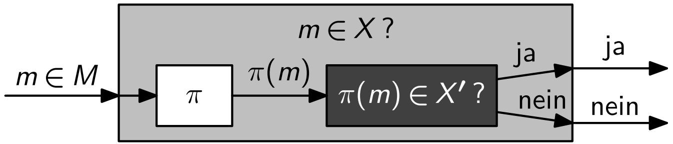
Intuition: Wenn $X \leq X'$, dann ist X *höchstens so schwer wie* X'.

Reduktion

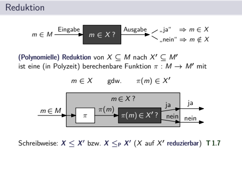


(Polynomielle) Reduktion von $X \subseteq M$ nach $X' \subseteq M'$
ist eine (in Polyzeit) berechenbare Funktion $\pi : M \to M'$ mit

$$m \in X \qquad \text{gdw.} \qquad \pi(m) \in X'$$



Schreibweise: $\boldsymbol{X \leq X'}$ bzw. $\boldsymbol{X \leq_{\mathsf{P}} X'}$ (X auf X' **reduzierbar**) **T 1.7**

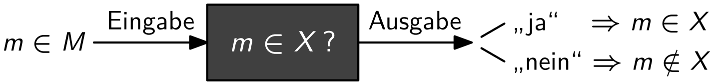


9:26 bis 9:38

Reduktion: wichtiges Hilfsmittel zum genauen Bestimmen der Komplexität

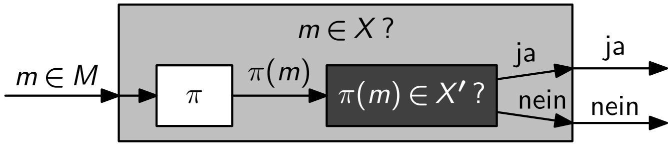
Intuition: Wenn $X \leq X'$, dann ist X *höchstens so schwer wie* X'.

Reduktion



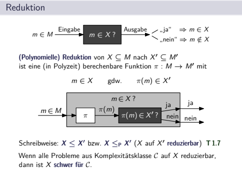
(Polynomielle) Reduktion von $X \subseteq M$ nach $X' \subseteq M'$
ist eine (in Polyzeit) berechenbare Funktion $\pi : M \to M'$ mit

$$m \in X \qquad \text{gdw.} \qquad \pi(m) \in X'$$



Schreibweise: $X \leq X'$ bzw. $X \leq_P X'$ (X auf X' **reduzierbar**) **T 1.7**

Wenn alle Probleme aus Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ auf X reduzierbar,
dann ist X **schwer für** $\mathcal{C}$.



9:26 bis 9:38

Reduktion: wichtiges Hilfsmittel zum genauen Bestimmen der Komplexität

Intuition: Wenn $X \leq X'$, dann ist X *höchstens so schwer wie* X'.

Bestimmung der Komplexität

Normalerweise zeigt man, dass ein Problem $X \subseteq M$ ...

- **in** einer Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ liegt, indem man
  - einen Algorithmus A findet, der X löst
  - zeigt, dass A korrekt ist (*ja*/*nein*-Antworten) und terminiert
  - zeigt, dass A für jedes $m \in M$ **höchstens** die $\mathcal{C}$-Ressourcen braucht

  ... A kann z. B. eine Reduktion zu einem Problem aus $\mathcal{C}$ sein

Bestimmung der Komplexität
Normalerweise zeigt man, dass ein Problem $X \subseteq M$ ...
in einer Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ liegt, indem man
einen Algorithmus A findet, der X löst
zeigt, dass A korrekt ist (ja/nein-Antworten) und terminiert
zeigt, dass A für jedes $m \in M$ höchstens die $\mathcal{C}$-Ressourcen braucht
... A kann z. B. eine Reduktion zu einem Problem aus $\mathcal{C}$ sein

9:38

Fragebogen F. 1 $\rightsquigarrow$ 9:02

Bestimmung der Komplexität

Normalerweise zeigt man, dass ein Problem $X \subseteq M$ ...

- **in** einer Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ liegt, indem man
  - einen Algorithmus A findet, der X löst
  - zeigt, dass A korrekt ist (*ja*/*nein*-Antworten) und terminiert
  - zeigt, dass A für jedes $m \in M$ **höchstens** die $\mathcal{C}$-Ressourcen braucht

    ... A kann z. B. eine Reduktion zu einem Problem aus $\mathcal{C}$ sein

- **schwer (hard) für** $\mathcal{C}$ ist, indem man
  - ein Problem $X' \subseteq M'$ findet, dass **schwer für** $\mathcal{C}$ ist
  - und eine Reduktion von X' nach X angibt

Bestimmung der Komplexität

Normalerweise zeigt man, dass ein Problem $X \subseteq M$ ...

- **in** einer Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ liegt, indem man
  - einen Algorithmus A findet, der X löst
  - zeigt, dass A korrekt ist (*ja*/*nein*-Antworten) und terminiert
  - zeigt, dass A für jedes $m \in M$ **höchstens** die $\mathcal{C}$-Ressourcen braucht

    ... A kann z. B. eine Reduktion zu einem Problem aus $\mathcal{C}$ sein
- **schwer (hard) für** $\mathcal{C}$ ist, indem man
  - ein Problem $X' \subseteq M'$ findet, dass **schwer für** $\mathcal{C}$ ist
  - und eine Reduktion von X' nach X angibt

9:38

Fragebogen F. 1 $\rightsquigarrow$ 9:02

Bestimmung der Komplexität

Normalerweise zeigt man, dass ein Problem $X \subseteq M$ …

- **in** einer Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ liegt, indem man
  - einen Algorithmus A findet, der X löst
  - zeigt, dass A korrekt ist (*ja*/*nein*-Antworten) und terminiert
  - zeigt, dass A für jedes $m \in M$ **höchstens** die $\mathcal{C}$-Ressourcen braucht

    … A kann z. B. eine Reduktion zu einem Problem aus $\mathcal{C}$ sein
- **schwer (hard) für** $\mathcal{C}$ ist, indem man
  - ein Problem $X' \subseteq M'$ findet, dass **schwer für** $\mathcal{C}$ ist
  - und eine Reduktion von X' nach X angibt
- **vollständig für** $\mathcal{C}$ ist, indem man zeigt, dass es
  - **in** $\mathcal{C}$ liegt und
  - **schwer für** $\mathcal{C}$ ist

Bestimmung der Komplexität
Normalerweise zeigt man, dass ein Problem $X \subseteq M$ …
in einer Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ liegt, indem man
einen Algorithmus A findet, der X löst
zeigt, dass A korrekt ist (ja/nein-Antworten) und terminiert
zeigt, dass A für jedes $m \in M$ höchstens die $\mathcal{C}$-Ressourcen braucht
… A kann z. B. eine Reduktion zu einem Problem aus $\mathcal{C}$ sein
schwer (hard) für $\mathcal{C}$ ist, indem man
ein Problem $X' \subseteq M'$ findet, dass schwer für $\mathcal{C}$ ist
und eine Reduktion von X' nach X angibt
vollständig für $\mathcal{C}$ ist, indem man zeigt, dass es
in $\mathcal{C}$ liegt und
schwer für $\mathcal{C}$ ist

9:38

Fragebogen F. 1 $\rightsquigarrow$ 9:02

Entscheidungsprobleme für endliche Automaten

- Betrachten wesentliche Eigenschaften von Sprachen (Sprachen repräsentiert durch NEAs oder reguläre Ausdr.)
  - Ist eine gegebene Sprache leer?
  - Ist ein gegebenes Wort w in einer Sprache L?
  - Beschreiben zwei Repräsentationen einer Sprache tatsächlich dieselbe Sprache?

Entscheidungsprobleme für endliche Automaten
- Betrachten wesentliche Eigenschaften von Sprachen (Sprachen repräsentiert durch NEAs oder reguläre Ausdr.)
  - Ist eine gegebene Sprache leer?
  - Ist ein gegebenes Wort w in einer Sprache L?
  - Beschreiben zwei Repräsentationen einer Sprache tatsächlich dieselbe Sprache?

9:42

Umwandlung ...

- DEA $\longrightarrow$ NEA: konstante Zeit ☺
- NEA $\longrightarrow$ DEA: Exponentialzeit ☹
- reg. Ausdr. $\longrightarrow$ NEA: Polynomialzeit ☺
- NEA $\longrightarrow$ reg. Ausdr.: Exponentialzeit ☹
- NEA $\longleftrightarrow$ Typ-3-Gramm.: Polynomialzeit ☺

Entscheidungsprobleme für endliche Automaten

- Betrachten wesentliche Eigenschaften von Sprachen (Sprachen repräsentiert durch NEAs oder reguläre Ausdr.)
  - Ist eine gegebene Sprache leer?
  - Ist ein gegebenes Wort w in einer Sprache L?
  - Beschreiben zwei Repräsentationen einer Sprache tatsächlich dieselbe Sprache?
- Wichtig für Anwendungen (siehe Einführung)

Entscheidungsprobleme für endliche Automaten

- Betrachten wesentliche Eigenschaften von Sprachen (Sprachen repräsentiert durch NEAs oder reguläre Ausdr.)
  - Ist eine gegebene Sprache leer?
  - Ist ein gegebenes Wort w in einer Sprache L?
  - Beschreiben zwei Repräsentationen einer Sprache tatsächlich dieselbe Sprache?
- Wichtig für Anwendungen (siehe Einführung)

9:42

Umwandlung ...

- DEA $\longrightarrow$ NEA: konstante Zeit ☻
- NEA $\longrightarrow$ DEA: Exponentialzeit ☹
- reg. Ausdr. $\longrightarrow$ NEA: Polynomialzeit ☻
- NEA $\longrightarrow$ reg. Ausdr.: Exponentialzeit ☹
- NEA $\longleftrightarrow$ Typ-3-Gramm.: Polynomialzeit ☻

Entscheidungsprobleme für endliche Automaten

- Betrachten wesentliche Eigenschaften von Sprachen (Sprachen repräsentiert durch NEAs oder reguläre Ausdr.)
  - Ist eine gegebene Sprache leer?
  - Ist ein gegebenes Wort w in einer Sprache L?
  - Beschreiben zwei Repräsentationen einer Sprache tatsächlich dieselbe Sprache?
- Wichtig für Anwendungen (siehe Einführung)
- Art der Repräsentation spielt manchmal eine Rolle: NEA, DEA, regulärer Ausdruck, Typ-3-Grammatik etc.

  Wir betrachten im Folgenden **NEAs und DEAs.**

Entscheidungsprobleme für endliche Automaten
- Betrachten wesentliche Eigenschaften von Sprachen (Sprachen repräsentiert durch NEAs oder reguläre Ausdr.)
  - Ist eine gegebene Sprache leer?
  - Ist ein gegebenes Wort w in einer Sprache L?
  - Beschreiben zwei Repräsentationen einer Sprache tatsächlich dieselbe Sprache?
- Wichtig für Anwendungen (siehe Einführung)
- Art der Repräsentation spielt manchmal eine Rolle: NEA, DEA, regulärer Ausdruck, Typ-3-Grammatik etc.

  Wir betrachten im Folgenden **NEAs und DEAs.**

9:42

Umwandlung . . .

- DEA $\rightarrow$ NEA: konstante Zeit ☺
- NEA $\rightarrow$ DEA: Exponentialzeit ☹
- reg. Ausdr. $\rightarrow$ NEA: Polynomialzeit ☺
- NEA $\rightarrow$ reg. Ausdr.: Exponentialzeit ☹
- NEA $\leftrightarrow$ Typ-3-Gramm.: Polynomialzeit ☺

Das Leerheitsproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?

d. h. $\mathbf{LP_{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$,
$\mathbf{LP_{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$

Das Leerheitsproblem
Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?
d. h. $\mathbf{LP_{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$,
$\mathbf{LP_{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$

9:44 Def. der Probleme: Eingabe ist üblicherweise ein Wort, also braucht man eine geeignete Kodierung von NEAs/DEAs (s. ThI 2).

Überprüfung, ob Eingabe wohlgeformt ist, ist üblicherweise billig, macht also keinen Unterschied, ob sie mit in Komplexität zählt oder nicht.

coNL, weil das Komplement (Nichtleerheit) NL-vollst. ist.

coNL-Härte: bei DEAs aufpassen – für jede ausgehende Kante e. Knotens braucht man ein neues Zeichen, also Alphabetgröße = max. Ausgangsgrad. Außerdem Papierkorbzustände einbauen.

(Nicht-)Leerheit von NEAs/DEAs ist also nichts anderes als Wegsuche in gerichteten Graphen.

Fragebogen F. 2: Tabelle, während der nächsten Folien vervollständigen

Das Leerheitsproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?

d. h. $\mathbf{LP_{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$,
$\mathbf{LP_{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$

Satz 1.14

LP_{NEA} und LP_{DEA} sind entscheidbar und **coNL**-vollständig.

Das Leerheitsproblem
Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?
d. h. $\mathbf{LP_{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$,
$\mathbf{LP_{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$
Satz 1.14
LP_{NEA} und LP_{DEA} sind entscheidbar und coNL-vollständig.

9:44 Def. der Probleme: Eingabe ist üblicherweise ein Wort, also braucht man eine geeignete Kodierung von NEAs/DEAs (s. ThI 2).

Überprüfung, ob Eingabe wohlgeformt ist, ist üblicherweise billig, macht also keinen Unterschied, ob sie mit in Komplexität zählt oder nicht.

coNL, weil das Komplement (Nichtleerheit) NL-vollst. ist.

coNL-Härte: bei DEAs aufpassen – für jede ausgehende Kante e. Knotens braucht man ein neues Zeichen, also Alphabetgröße = max. Ausgangsgrad.

Außerdem Papierkorbzustände einbauen.

(Nicht-)Leerheit von NEAs/DEAs ist also nichts anderes als Wegsuche in gerichteten Graphen.

Fragebogen F. 2: Tabelle, während der nächsten Folien vervollständigen

Das Leerheitsproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?

d. h. $\mathsf{LP}_{\mathsf{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$,
$\mathsf{LP}_{\mathsf{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$

Satz 1.14

$\mathsf{LP}_{\mathsf{NEA}}$ und $\mathsf{LP}_{\mathsf{DEA}}$ sind entscheidbar und **coNL**-vollständig.

Beweis.

- Entscheidbarkeit (in Polyzeit): siehe ThI 1
- **coNL**-Zugehörigkeit:
  Reduktion zu Erreichbarkeit in gerichteten Graphen, siehe T1.7
- **coNL**-Härte:
  Reduktion *von* Erreichbarkeit, analog □

Das Leerheitsproblem
Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?
d. h. $\mathsf{LP}_{\mathsf{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$, $\mathsf{LP}_{\mathsf{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$
Satz 1.14
$\mathsf{LP}_{\mathsf{NEA}}$ und $\mathsf{LP}_{\mathsf{DEA}}$ sind entscheidbar und coNL-vollständig.
Beweis.
Entscheidbarkeit (in Polyzeit): siehe ThI 1
coNL-Zugehörigkeit: Reduktion zu Erreichbarkeit in gerichteten Graphen, siehe T1.7
coNL-Härte: Reduktion von Erreichbarkeit, analog

9:44 Def. der Probleme: Eingabe ist üblicherweise ein Wort, also braucht man eine geeignete Kodierung von NEAs/DEAs (s. ThI 2).

Überprüfung, ob Eingabe wohlgeformt ist, ist üblicherweise billig, macht also keinen Unterschied, ob sie mit in Komplexität zählt oder nicht.

coNL, weil das Komplement (Nichtleerheit) NL-vollst. ist.

coNL-Härte: bei DEAs aufpassen – für jede ausgehende Kante e. Knotens braucht man ein neues Zeichen, also Alphabetgröße = max. Ausgangsgrad.

Außerdem Papierkorbzustände einbauen.

(Nicht-)Leerheit von NEAs/DEAs ist also nichts anderes als Wegsuche in gerichteten Graphen.

Fragebogen F. 2: Tabelle, während der nächsten Folien vervollständigen

Das Wortproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$, Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(\mathcal{A})$?

d. h. $\mathbf{WP}_{\mathbf{NEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$,
$\mathbf{WP}_{\mathbf{DEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$

Das Wortproblem
Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$, Wort $w \in \Sigma^*$
Frage: Ist $w \in L(\mathcal{A})$?
d. h. $\mathbf{WP}_{\mathbf{NEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$,
$\mathbf{WP}_{\mathbf{DEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$

9:48 Reduktion zum LP:
- $\mathcal{A}_w$ ist ein N/DEA, der nur w akzeptiert (einfach zu bauen)
- nutzt Abgeschlossenheit unter Schnitt (Konstr. Produktautomat)
- liefert nur „in P“

obere Schranke: Rate Weg der Länge $\leq |Q|$ ab q_0,
so dass im i-ten Schritt das i-te Zeichen von w gelesen wird.
Akzeptiere, wenn am Ende ein akz. Zustand erreicht ist.

Für DEAs muss nicht geraten werden.

NL-Härte: Wandle gegebenen $G = (V, E)$ in NEA, so dass alle Kanten mit a beschriftet sind. Anfangs-/akz. Zustand: s, t. Zusätzlich a-Schleife an t. Dann frage nach $w = a^{|V|}$.

L-Härte: Führt hier zu weit; braucht speziellen Reduktionsbegriff (weak red., siehe auch Holzer & Kutrib, Inf & Comp. 2011)

Das Wortproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$, Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(\mathcal{A})$?

d. h. $\mathbf{WP_{NEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$,
$\mathbf{WP_{DEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$

Satz 1.15

$\mathrm{WP_{NEA}}$ und $\mathrm{WP_{DEA}}$ sind entscheidbar.
$\mathrm{WP_{NEA}}$ ist **NL**-vollständig; $\mathrm{WP_{DEA}}$ ist **L**-vollständig.

Das Wortproblem
Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$, Wort $w \in \Sigma^*$
Frage: Ist $w \in L(\mathcal{A})$?
d. h. $\mathrm{WP_{NEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$, $\mathrm{WP_{DEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$
Satz 1.15
$\mathrm{WP_{NEA}}$ und $\mathrm{WP_{DEA}}$ sind entscheidbar.
$\mathrm{WP_{NEA}}$ ist NL-vollständig; $\mathrm{WP_{DEA}}$ ist L-vollständig.

9:48 Reduktion zum LP:

- $\mathcal{A}_w$ ist ein N/DEA, der nur w akzeptiert (einfach zu bauen)
- nutzt Abgeschlossenheit unter Schnitt (Konstr. Produktautomat)
- liefert nur „in P“

obere Schranke: Rate Weg der Länge $\leq |Q|$ ab q_0,
so dass im i-ten Schritt das i-te Zeichen von w gelesen wird.
Akzeptiere, wenn am Ende ein akz. Zustand erreicht ist.

Für DEAs muss nicht geraten werden.

NL-Härte: Wandle gegebenen $G = (V, E)$ in NEA, so dass alle Kanten mit a beschriftet sind. Anfangs-/akz. Zustand: s, t. Zusätzlich a-Schleife an t. Dann frage nach $w = a^{|V|}$.

L-Härte: Führt hier zu weit; braucht speziellen Reduktionsbegriff (weak red., siehe auch Holzer & Kutrib, Inf & Comp. 2011)

Das Wortproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$, Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(\mathcal{A})$?

d. h. $\mathbf{WP_{NEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$,
$\mathbf{WP_{DEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$

Satz 1.15

$\mathrm{WP_{NEA}}$ und $\mathrm{WP_{DEA}}$ sind entscheidbar.
$\mathrm{WP_{NEA}}$ ist **NL**-vollständig; $\mathrm{WP_{DEA}}$ ist **L**-vollständig.

Beweis.

- Entscheidbarkeit (in Polyzeit): siehe ThI 1
  (Reduktion zum LP: $w \in L(\mathcal{A})$ gdw. $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}_w) \neq \emptyset$)
- **NL**-Vollst.: $\approx$ Erreichbarkeit in gerichteten Graphen □

Das Wortproblem
Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$, Wort $w \in \Sigma^*$
Frage: Ist $w \in L(\mathcal{A})$?
d. h. $\mathbf{WP_{NEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$,
$\mathbf{WP_{DEA}} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, w \in L(\mathcal{A})\}$
Satz 1.15
$\mathrm{WP_{NEA}}$ und $\mathrm{WP_{DEA}}$ sind entscheidbar.
$\mathrm{WP_{NEA}}$ ist NL-vollständig; $\mathrm{WP_{DEA}}$ ist L-vollständig.
Beweis.
Entscheidbarkeit (in Polyzeit): siehe ThI 1
(Reduktion zum LP: $w \in L(\mathcal{A})$ gdw. $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}_w) \neq \emptyset$)
NL-Vollst.: $\approx$ Erreichbarkeit in gerichteten Graphen □

9:48 Reduktion zum LP:
- $\mathcal{A}_w$ ist ein N/DEA, der nur w akzeptiert (einfach zu bauen)
- nutzt Abgeschlossenheit unter Schnitt (Konstr. Produktautomat)
- liefert nur „in P"

obere Schranke: Rate Weg der Länge $\leq |Q|$ ab q_0,
so dass im i-ten Schritt das i-te Zeichen von w gelesen wird.
Akzeptiere, wenn am Ende ein akz. Zustand erreicht ist.

Für DEAs muss nicht geraten werden.

NL-Härte: Wandle gegebenen $G = (V, E)$ in NEA, so dass alle Kanten mit a beschriftet sind. Anfangs-/akz. Zustand: s, t. Zusätzlich a-Schleife an t. Dann frage nach $w = a^{|V|}$.

L-Härte: Führt hier zu weit; braucht speziellen Reduktionsbegriff (weak red., siehe auch Holzer & Kutrib, Inf & Comp. 2011)

Das Äquivalenzproblem

Eingabe: NEAs (oder DEAs) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$?

d. h. $\textbf{ÄP}_{\textbf{NEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ NEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$,
$\textbf{ÄP}_{\textbf{DEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ DEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$

Das Äquivalenzproblem
Eingabe: NEAs (oder DEAs) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$?
d. h. $\textbf{ÄP}_{\textbf{NEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ NEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$,
$\textbf{ÄP}_{\textbf{DEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ DEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$

9:54

$\triangle$ = symmetrische Differenz zweier Mengen;
ausdrückbar mittels $\cup, \cap, \bar{\cdot}$ $\rightsquigarrow$ Abschlusseigenschaften!

Das Äquivalenzproblem

Eingabe: NEAs (oder DEAs) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$?

d. h. $\textbf{ÄP}_{\textbf{NEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ NEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$,
$\textbf{ÄP}_{\textbf{DEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ DEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$

Satz 1.16

ÄP_{NEA} und ÄP_{DEA} sind entscheidbar.
ÄP_{NEA} ist **PSpace**-vollständig; ÄP_{DEA} ist **NL**-vollständig.

Das Äquivalenzproblem
Eingabe: NEAs (oder DEAs) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$?
d. h. $\text{ÄP}_{\text{NEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ NEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$,
$\text{ÄP}_{\text{DEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ DEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$
Satz 1.16
ÄP_{NEA} und ÄP_{DEA} sind entscheidbar.
ÄP_{NEA} ist PSpace-vollständig; ÄP_{DEA} ist NL-vollständig.

9:54

$\triangle$ = symmetrische Differenz zweier Mengen;
ausdrückbar mittels $\cup, \cap, \bar{\cdot}$ $\rightsquigarrow$ Abschlusseigenschaften!

Das Äquivalenzproblem

Eingabe: NEAs (oder DEAs) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$?

d. h. $\textbf{ÄP}_{\textbf{NEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ NEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$,
$\textbf{ÄP}_{\textbf{DEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ DEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$

Satz 1.16

ÄP_{NEA} und ÄP_{DEA} sind entscheidbar.
ÄP_{NEA} ist **PSpace**-vollständig; ÄP_{DEA} ist **NL**-vollständig.

Beweis.

- Entscheidbarkeit: siehe ThI 1
  (Red. zum LP: $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$ gdw. $L(\mathcal{A}_1) \triangle L(\mathcal{A}_2) = \emptyset$)
- Komplexität: Automat für $L(\mathcal{A}_1) \triangle L(\mathcal{A}_2)$ ist exponentiell in der Größe der Eingabe-NEAs; polynomiell im Fall von DEAs
  Details: siehe [Holzer & Kutrib 2011] □

Das Äquivalenzproblem
Eingabe: NEAs (oder DEAs) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$?
d. h. $\text{ÄP}_{\text{NEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ NEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$,
$\text{ÄP}_{\text{DEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ DEAs}, L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$
Satz 1.16
ÄP_{NEA} und ÄP_{DEA} sind entscheidbar.
ÄP_{NEA} ist PSpace-vollständig; ÄP_{DEA} ist NL-vollständig.
Beweis.
Entscheidbarkeit: siehe ThI 1 (Red. zum LP: $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$ gdw. $L(\mathcal{A}_1) \triangle L(\mathcal{A}_2) = \emptyset$)
Komplexität: Automat für $L(\mathcal{A}_1) \triangle L(\mathcal{A}_2)$ ist exponentiell in der Größe der Eingabe-NEAs; polynomiell im Fall von DEAs Details: siehe [Holzer & Kutrib 2011]

9:54

$\triangle$ = symmetrische Differenz zweier Mengen;
ausdrückbar mittels $\cup, \cap, \bar{\cdot}$ $\rightsquigarrow$ Abschlusseigenschaften!

Das Universalitätsproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$?

d. h. $\mathsf{UP}_{\mathsf{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$,
$\mathsf{UP}_{\mathsf{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$

Das Universalitätsproblem
Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$?
d. h. $\mathsf{UP}_{\mathsf{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$,
$\mathsf{UP}_{\mathsf{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$

9:57

Reduktion vom/zum Komplement LP:
$L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$ gdw. $\overline{L(\mathcal{A})} = \emptyset$

Für DEAs NL-v., analog zu Wegsuche:
ist ein nicht-akz. Zustand erreichbar?

Für NEAs PSPACE-v., Wegsuche im Potenz-DEA on-the-fly

Das Universalitätsproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$?

d. h. $\text{UP}_{\text{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$,
$\text{UP}_{\text{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$

Satz 1.17

UP_{NEA} und UP_{DEA} sind entscheidbar.

Beweis: Übungsaufgabe

Das Universalitätsproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) $\mathcal{A}$
Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$?
d. h. $\text{UP}_{\text{NEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA}, L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$,
$\text{UP}_{\text{DEA}} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA}, L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$

Satz 1.17
UP_{NEA} und UP_{DEA} sind entscheidbar.

Beweis: Übungsaufgabe

9:57

Reduktion vom/zum Komplement LP:
$L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$ gdw. $\overline{L(\mathcal{A})} = \emptyset$

Für DEAs NL-v., analog zu Wegsuche:
ist ein nicht-akz. Zustand erreichbar?

Für NEAs PSPACE-v., Wegsuche im Potenz-DEA on-the-fly

Überblick Entscheidungsprobleme für NEAs/DEAs

Problem	entscheidbar?	für DEAs effizient lösbar?	für NEAs effizient lösbar?
LP	✓	✓	✓
WP	✓	✓	✓
ÄP	✓	✓	✗*
UP	✓	✓	✗*

* unter den üblichen komplexitätstheoretischen Annahmen (z. B. PSpace $\neq$ P)

Überblick Entscheidungsprobleme für NEAs/DEAs

Problem	entscheidbar?	für DEAs effizient lösbar?	für NEAs effizient lösbar?
LP	✓	✓	✓
WP	✓	✓	✓
ÄP	✓	✓	✗*
UP	✓	✓	✗*

* unter den üblichen komplexitätstheoretischen Annahmen (z. B. PSpace $\neq$ P)

9:58 bis 10:00, Ende

Hier nochmal für Euch als Überblick

Zum **Literaturverzeichnis** blättern

Literatur für diesen Teil (Basis)

John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman.
Introduction to Automata Theory, Languages and Computation.
2. Auflage, Addison-Wesley, 2001.
Kapitel 1,2.
Verfügbar in SUUB (verschiedene Auflagen, auch auf Deutsch)

Meghyn Bienvenu.
Automata on Infinite Words and Trees.
Vorlesungsskript, Uni Bremen, WS 2009/10.
http://www.informatik.uni-bremen.de/tdki/lehre/ws09/automata/automata-notes.pdf

Literatur für diesen Teil (Basis)

John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman.
Introduction to Automata Theory, Languages and Computation.
2. Auflage, Addison-Wesley, 2001.
Kapitel 1,2.
Verfügbar in SUUB (verschiedene Auflagen, auch auf Deutsch)
Meghyn Bienvenu.
Automata on Infinite Words and Trees.
Vorlesungsskript, Uni Bremen, WS 2009/10.
http://www.informatik.uni-bremen.de/tdki/lehre/ws09/automata/automata-notes.pdf

„Basis“: um die Inhalte der Vorlesung nachzulesen

Literatur für diesen Teil (weiterführend)

Markus Holzer, Martin Kutrib.

Descriptional and computational complexity of finite automata – A survey.

Information and Computation 209:456–470, 2011.

Kapitel 3: sehr umfassender Überblick über Entscheidungsprobleme für endliche Automaten und deren Komplexität; viel Literatur

Verfügbar in SUUB (elektronisch)
`https://doi.org/10.1016/j.ic.2010.11.013`

Literatur für diesen Teil (weiterführend)
Markus Holzer, Martin Kutrib.
Descriptional and computational complexity of finite automata – A survey.
Information and Computation 209:456–470, 2011.
Kapitel 3: sehr umfassender Überblick über Entscheidungsprobleme für endliche Automaten und deren Komplexität; viel Literatur
Verfügbar in SUUB (elektronisch)
https://doi.org/10.1016/j.ic.2010.11.013

„weiterführend“: um bestimmte Details zu vertiefen, die in der Vorlesung nur am Rande angesprochen werden

Teil 1: endliche Wörter