Teil 5: Alternierung

2019-01-30

Automatentheorie und ihre Anwendungen
Teil 5: Alternierung

Wintersemester 2018/19 Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ws1819-autom

8:30

Teil 5: Alternierung

Warum Alternierung?

Warum Alternierung?

- Starke Beziehungen zwischen Logik und Automaten, z. B.:
  - NBAs $\leftrightarrow$ LTL (Teil 3 dieser Vorlesung)
  - NEAs $\leftrightarrow$ S1S (Satz von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot, VL Logik)
- In Logiken kann man aber Sprachen oder Eigenschaften oft deutlich kürzer ausdrücken, z. B.:
  - LTL-Formel $\rightarrow$ NBA: exponentielle Explosion
  - S1S-Formel $\rightarrow$ NEA: sogar nicht-elementare Explosion
- Verkleinern dieser Lücke:
  Erlaube in Automaten nicht nur **existenzielle** (= nichtdeterm.) „Verzweigungen“, sondern auch **universelle**.

8:30

Büchi-Elgot-Trakhtenbrot: Logik-VL. S1S = monad. SO auf lin. Strukt.

„nicht-elementar“: jede Negation erfordert Potenzmengenkonstruktion, vergrößert Automaten exp.
$\rightarrow$ „exp. Turm“ unbeschränkt (Verschachtelungstiefe $\neg$ (und $\exists$))

Um die Lücke zu verkleinern, erweitert man das Automatenmodell so, dass es der Logik ähnlicher wird.

Teil 5: Alternierung

Warum Alternierung?

Warum Alternierung?

- „Alternierung“ heißt also, dass ein Maschinenmodell (abwechselnd) existenzielle und universelle Entscheidungen treffen kann.
- Alternierende Varianten gibt es für alle Automatentypen aus dieser Vorlesung (auf endlichen oder unendlichen Objekten, Wörtern oder Bäumen) und für andere Maschinenmodelle (z. B. Turingmaschinen).
- Für alternierende Automaten ist Komplementierung besonders leicht zu erreichen.
- Wir beschränken uns im Folgenden auf ω-**Wort**automaten, also auf alternierende Büchi-Automaten.

8:32

„Abwechselnd“ ist hier wichtig. Nur ex./nur univ. ist witzlos.

Für TMs: erlaubt z. B. feinere Komplexitätsanalyse

Teil 5: Alternierung

Überblick

Überblick

Und nun ...

Alternierung: Grundidee

- Nichtdeterministischer Automat $\mathcal{A}$ akzeptiert eine Eingabe, wenn ein akzeptierender Run **existiert**.
  d. h.: falls (q, a, q'), $(q, a, q'') \in \Delta$, kann $\mathcal{A}$ in Situation (q, a) „entscheiden“, wie der Run fortgesetzt wird.
  Mindestens eine dieser Entscheidungen muss zum Ziel führen.
- Alternierung erlaubt auch **universelle Entscheidungen**, in beliebiger Kombination mit existenziellen.
- „Beliebige Kombination“ wird realisiert durch **positive Boolesche Formel**, d. h. aussagenlogische Formel ohne $\neg$.
- Statt eines Runs (Zustandsfolge) gibt es nun einen **Run-Baum**, der alle universellen Entscheidungen berücksichtigt.

8:33

Positive Formeln werden manchmal auch monoton genannt. Hier egal.
Wichtig: keine Negation!

Teil 5: Alternierung
Einführung und Grundbegriffe
Positive Boolesche Formeln

8:35

Definition 5.1 (Syntax)

Die Menge der **positiven Booleschen Formeln (PBFs)** über einer Menge X, geschrieben $\mathbf{B^+(X)}$, ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Jedes Element $x \in X$ ist eine PBF.
- Die Konstanten $0, 1$ sind PBFs.
- Wenn φ, ψ PBFs sind, dann auch $\varphi \wedge \psi$ und $\varphi \vee \psi$.

8:35

Definition 5.1 (Syntax)

Die Menge der **positiven Booleschen Formeln (PBFs)** über einer Menge X, geschrieben $\mathbf{B^+(X)}$, ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Jedes Element $x \in X$ ist eine PBF.
- Die Konstanten $0, 1$ sind PBFs.
- Wenn φ, ψ PBFs sind, dann auch $\varphi \wedge \psi$ und $\varphi \vee \psi$.

Definition 5.2 (Semantik)

Jede Menge $Y \subseteq X$ definiert eine **Belegung** $V_Y : X \to \{0, 1\}$:
$V_Y(x) = 1$, falls $x \in Y$; $V_Y(x) = 0$ sonst.

Eine Menge $Y \subseteq X$ **erfüllt** eine PBF $\varphi \in \mathrm{B}^+(X)$, geschrieben $Y \models \varphi$, wenn $V_Y \models \varphi$ (nach Standard-Semantik AL).

Definition 5.3

Ein **alternierender Büchi-Automat** auf ω-Wörtern **(ABA)** ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ eine **Alphabet** (endliche nichtleere Menge von Zeichen) ist,
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathrm{B}^+(Q)$ die **Überführungsfunktion** ist,
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.

8:41

Überführungs**funktion:** weil die PBF bereits die nichtdeterministischen Entscheidungen enthält

Definition 5.3

Ein **alternierender Büchi-Automat** auf ω-Wörtern **(ABA)** ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ eine **Alphabet** (endliche nichtleere Menge von Zeichen) ist,
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathrm{B}^+(Q)$ die **Überführungsfunktion** ist,
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.

Wir nehmen wieder o. B. d. A. $I = \{q_I\}$ an.

Alternative Akzeptanzbedingungen (Muller, Parität usw.) sind auch möglich.

8:41

Überführungs**funktion:** weil die PBF bereits die nichtdeterministischen Entscheidungen enthält

Run-Bäume

Betrachten **Baum mit Verzweigungsgrad** $\leq n$, für festes $n \in \mathbb{N}$

- Positionen: Menge $P \subseteq \{1, \ldots, n\}^*$, präfix-abgeschlossen
- **Kinder** eines Knotens p: **Kinder**$(p) \subseteq \{p1, \ldots, pn\}$
- **Tiefe, Ebene, Nachfolger, Pfad:** wie gehabt

8:43

Runs sind jetzt Bäume mit endlichem Verzweigungsgrad; Bäume müssen nicht vollständig sein.

Präfix-Abg.: wie bei endlichen Bäumen; jedes Kind braucht sein Elter!

Run-Bäume

Betrachten **Baum mit Verzweigungsgrad** $\leq n$, für festes $n \in \mathbb{N}$

- Positionen: Menge $P \subseteq \{1, \ldots, n\}^*$, präfix-abgeschlossen
- **Kinder** eines Knotens p: **Kinder**$(p) \subseteq \{p1, \ldots, pn\}$
- **Tiefe, Ebene, Nachfolger, Pfad:** wie gehabt

Pfad in P: endliche oder unendliche Folge $\pi = \pi_0\pi_1\pi_2\cdots$ von **Positionen** $\pi_i \in P$ mit

- $\pi_0 = \varepsilon$ und
- $\pi_{i+1} \in$ Kinder(π_i) für alle $i \geq 0$

8:43

Runs sind jetzt Bäume mit endlichem Verzweigungsgrad; Bäume müssen nicht vollständig sein.

Präfix-Abg.: wie bei endlichen Bäumen; jedes Kind braucht sein Elter!

Run-Bäume

Betrachten **Baum mit Verzweigungsgrad** $\leq n$, für festes $n \in \mathbb{N}$

- Positionen: Menge $P \subseteq \{1, \ldots, n\}^*$, präfix-abgeschlossen
- **Kinder** eines Knotens p: **Kinder**$(p) \subseteq \{p1, \ldots, pn\}$
- **Tiefe, Ebene, Nachfolger, Pfad:** wie gehabt

Pfad in P: endliche oder unendliche Folge $\pi = \pi_0\pi_1\pi_2\cdots$ von **Positionen** $\pi_i \in P$ mit

- $\pi_0 = \varepsilon$ und
- $\pi_{i+1} \in$ Kinder(π_i) für alle $i \geq 0$

Σ-Baum (P, t) (Alphabet Σ):

- P wie oben
- $t : P \to \Sigma$ ist Markierungsfunktion **T 5.2**

8:43

Runs sind jetzt Bäume mit endlichem Verzweigungsgrad; Bäume müssen nicht vollständig sein.

Präfix-Abg.: wie bei endlichen Bäumen; jedes Kind braucht sein Elter!

Definition 5.4

Ein **Run** eines ABA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, F)$ auf einem Wort $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots \in \Sigma^\omega$ ist ein **Q-Baum** (P, r), so dass:

- $r(\varepsilon) = q_I$
- für alle $p \in P$: wenn $r(p) = q$, dann

$$\{r(p') \mid p' \in \text{Kinder}(p)\} \models \delta(q, \alpha_{|p|}) . \quad \text{T 5.3}$$

(für andere Akzeptanzbedingungen analog)

8:48 bis 8:59

Bedingung 2, Run:
die Kinder eines Knotens p enthalten **eine** Menge von Zuständen,
die die PBF erfüllen, die δ dem Paar $\big(r(p)$, |p|-tes Zeichen von $\alpha\big)$ zuweist

Ein Beispiel an Tafel; weiteres Beispiel im nächsten Abschnitt (LTL)!

Definition 5.4

Ein **Run** eines ABA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, F)$ auf einem Wort $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots \in \Sigma^\omega$ ist ein **Q-Baum** (P, r), so dass:

- $r(\varepsilon) = q_I$
- für alle $p \in P$: wenn $r(p) = q$, dann

$$\{r(p') \mid p' \in \text{Kinder}(p)\} \models \delta(q, \alpha_{|p|}) . \quad \text{T 5.3}$$

Run (P, r) ist **erfolgreich**, wenn für **jeden unendlichen** Pfad $\pi = \pi_0\pi_1\pi_2\ldots$ in P gilt:

$$\text{Inf}(r, \pi) \cap F \neq \emptyset \quad \text{T 5.3 Forts.}$$

(für andere Akzeptanzbedingungen analog)

8:48 bis 8:59

Bedingung 2, Run:
die Kinder eines Knotens p enthalten **eine** Menge von Zuständen,
die die PBF erfüllen, die δ dem Paar $\big(r(p)$, |p|-tes Zeichen von $\alpha\big)$ zuweist

Ein Beispiel an Tafel; weiteres Beispiel im nächsten Abschnitt (LTL)!

Definition 5.4

Ein **Run** eines ABA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, F)$ auf einem Wort $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots \in \Sigma^\omega$ ist ein **Q-Baum** (P, r), so dass:

- $r(\varepsilon) = q_I$
- für alle $p \in P$: wenn $r(p) = q$, dann

$$\{r(p') \mid p' \in \text{Kinder}(p)\} \models \delta(q, \alpha_{|p|}) . \quad \text{T 5.3}$$

Run (P, r) ist **erfolgreich**, wenn für **jeden unendlichen** Pfad $\pi = \pi_0\pi_1\pi_2\ldots$ in P gilt:

$$\text{Inf}(r, \pi) \cap F \neq \emptyset \quad \text{T 5.3 Forts.}$$

$L_\omega(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \mathcal{A} \text{ hat einen erfolgr. Run auf } \alpha\}$ **T 5.3 Forts.**

(für andere Akzeptanzbedingungen analog)

8:48 bis 8:59

Bedingung 2, Run:
die Kinder eines Knotens p enthalten **eine** Menge von Zuständen,
die die PBF erfüllen, die δ dem Paar $\big(r(p)$, |p|-tes Zeichen von $\alpha\big)$ zuweist

Ein Beispiel an Tafel; weiteres Beispiel im nächsten Abschnitt (LTL)!

Teil 5: Alternierung
Von LTL zu alternierenden Automaten
Und nun ...

Übersetzung logischer Formeln in alternierende Automaten ist oft einfacher als in nichtdeterministische Automaten.

Hier am Beispiel LTL → ABA

8:59

Formeln hier als Grammatik angegeben.

- Variablen als x, nicht p (schon für Positionen vergeben).
- $\vee$ ist eigentlich überflüssig, kann man aber gleich ganz bequem behandeln.
- F, G sind nur Abkürzungen mittels U.

Expansionsgesetz: kann man leicht semantisch überprüfen.
Haben wir damals auch im (G)NBA kodiert.
Allerdings jetzt einfacher mit ABA modellierbar!

Übersetzung logischer Formeln in alternierende Automaten ist oft einfacher als in nichtdeterministische Automaten.

Hier am Beispiel LTL $\rightarrow$ ABA

Erinnerung an LTL: $\varphi ::= x \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid X\varphi \mid \varphi \, U \, \varphi$
mit $x \in$ AV (Aussagenvariablen)

8:59

Formeln hier als Grammatik angegeben.

- Variablen als x, nicht p (schon für Positionen vergeben).
- $\vee$ ist eigentlich überflüssig, kann man aber gleich ganz bequem behandeln.
- F, G sind nur Abkürzungen mittels U.

Expansionsgesetz: kann man leicht semantisch überprüfen.
Haben wir damals auch im (G)NBA kodiert.
Allerdings jetzt einfacher mit ABA modellierbar!

Vorbetrachtungen

Übersetzung logischer Formeln in alternierende Automaten ist oft einfacher als in nichtdeterministische Automaten.

Hier am Beispiel LTL $\to$ ABA

Erinnerung an LTL: $\varphi ::= x \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid X\varphi \mid \varphi \, U \, \varphi$
mit $x \in \mathsf{AV}$ (Aussagenvariablen)

$s, i \models \varphi \, U \, \psi$, falls $s, j \models \psi$ für ein $j \geqslant i$
und $s, k \models \varphi$ für alle k mit $i \leqslant k < j$

8:59

Formeln hier als Grammatik angegeben.

- Variablen als x, nicht p (schon für Positionen vergeben).
- $\vee$ ist eigentlich überflüssig, kann man aber gleich ganz bequem behandeln.
- F, G sind nur Abkürzungen mittels U.

Expansionsgesetz: kann man leicht semantisch überprüfen.
Haben wir damals auch im (G)NBA kodiert.
Allerdings jetzt einfacher mit ABA modellierbar!

Vorbetrachtungen

Übersetzung logischer Formeln in alternierende Automaten ist oft einfacher als in nichtdeterministische Automaten.

Hier am Beispiel LTL $\to$ ABA

Erinnerung an LTL: $\varphi ::= x \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid X\varphi \mid \varphi \, U \, \varphi$
mit $x \in \mathsf{AV}$ (Aussagenvariablen)

$s, i \models \varphi \, U \, \psi$, falls $s, j \models \psi$ für ein $j \geqslant i$
und $s, k \models \varphi$ für alle k mit $i \leqslant k < j$

$F\varphi \equiv (x \vee \neg x) \, U \, \varphi$
$G\varphi \equiv \neg F \neg \varphi$

8:59

Formeln hier als Grammatik angegeben.

- Variablen als x, nicht p (schon für Positionen vergeben).
- $\vee$ ist eigentlich überflüssig, kann man aber gleich ganz bequem behandeln.
- F, G sind nur Abkürzungen mittels U.

Expansionsgesetz: kann man leicht semantisch überprüfen.
Haben wir damals auch im (G)NBA kodiert.
Allerdings jetzt einfacher mit ABA modellierbar!

Vorbetrachtungen

Übersetzung logischer Formeln in alternierende Automaten ist oft einfacher als in nichtdeterministische Automaten.

Hier am Beispiel LTL $\to$ ABA

Erinnerung an LTL: $\varphi ::= x \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid X\varphi \mid \varphi \, U \, \varphi$
mit $x \in \mathsf{AV}$ (Aussagenvariablen)

$s, i \models \varphi \, U \, \psi$, falls $s, j \models \psi$ für ein $j \geqslant i$
und $s, k \models \varphi$ für alle k mit $i \leqslant k < j$

$F\varphi \equiv (x \vee \neg x) \, U \, \varphi$
$G\varphi \equiv \neg F \neg \varphi$

Expansionsgesetz:
$s, i \models \varphi \, U \, \psi$ **gdw.** $s, i \models \psi$ oder $(s, i \models \varphi$ und $s, i+1 \models \varphi \, U \, \psi)$

8:59

Formeln hier als Grammatik angegeben.

- Variablen als x, nicht p (schon für Positionen vergeben).
- $\vee$ ist eigentlich überflüssig, kann man aber gleich ganz bequem behandeln.
- F, G sind nur Abkürzungen mittels U.

Expansionsgesetz: kann man leicht semantisch überprüfen.
Haben wir damals auch im (G)NBA kodiert.
Allerdings jetzt einfacher mit ABA modellierbar!

Intuitionen der Konstruktion

Seien φ eine LTL-Formel und ψ eine beliebige Teilformel.

$$\sim\psi = \begin{cases} \vartheta & \text{falls } \psi = \neg\vartheta \\ \neg\psi & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathsf{cl}(\varphi) = \{\psi, \sim\psi \mid \psi \text{ ist Teilformel von } \varphi\}$$

9:03

„Negation der PBF“: geht natürlich nicht, weil PBFs keine $\neg$ haben.
Gleich mehr.

Intuitionen der Konstruktion

Seien φ eine LTL-Formel und ψ eine beliebige Teilformel.

$$\sim\psi = \begin{cases} \vartheta & \text{falls } \psi = \neg\vartheta \\ \neg\psi & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathsf{cl}(\varphi) = \{\psi, \sim\psi \mid \psi \text{ ist Teilformel von } \varphi\}$

Bestandteile des ABA $\mathcal{A}_\varphi$

- Eingabealphabet: $\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$ wie gehabt
- Zustände: für jede Formel $\psi \in \mathsf{cl}(\varphi)$ ein q_ψ; Startzustand q_φ

9:03

„Negation der PBF“: geht natürlich nicht, weil PBFs keine $\neg$ haben.
Gleich mehr.

Intuitionen der Konstruktion

Seien φ eine LTL-Formel und ψ eine beliebige Teilformel.

$$\sim\psi = \begin{cases} \vartheta & \text{falls } \psi = \neg\vartheta \\ \neg\psi & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathsf{cl}(\varphi) = \{\psi, \sim\psi \mid \psi \text{ ist Teilformel von } \varphi\}$

Bestandteile des ABA $\mathcal{A}_\varphi$

- Eingabealphabet: $\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$ wie gehabt
- Zustände: für jede Formel $\psi \in \mathsf{cl}(\varphi)$ ein q_ψ; Startzustand q_φ
- Übergänge:
  - für $\wedge, \vee$: mittels PBF
  - für $\neg$: per „Negation“ der PBF
  - für $X\psi$: schicke q_ψ zur nächsten Position
  - für U: per Expansionsgesetz

9:03

„Negation der PBF“: geht natürlich nicht, weil PBFs keine $\neg$ haben.
Gleich mehr.

Intuitionen der Konstruktion

Seien φ eine LTL-Formel und ψ eine beliebige Teilformel.

$$\sim\psi = \begin{cases} \vartheta & \text{falls } \psi = \neg\vartheta \\ \neg\psi & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathsf{cl}(\varphi) = \{\psi, \sim\psi \mid \psi \text{ ist Teilformel von } \varphi\}$

Bestandteile des ABA $\mathcal{A}_\varphi$

- Eingabealphabet: $\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$ wie gehabt
- Zustände: für jede Formel $\psi \in \mathsf{cl}(\varphi)$ ein q_ψ; Startzustand q_φ
- Übergänge:
  - für $\wedge, \vee$: mittels PBF
  - für $\neg$: per „Negation“ der PBF
  - für $X\psi$: schicke q_ψ zur nächsten Position
  - für U: per Expansionsgesetz
- F verhindert unendliches „Aufschieben“ von U-Teilformeln!

9:03

„Negation der PBF“: geht natürlich nicht, weil PBFs keine $\neg$ haben.
Gleich mehr.

„Negation von PBFs“

Idee: Nutzen stattdessen Dualität von $\wedge, \vee$ (de Morgan), um Negation nach innen zu ziehen.
Negation eines Atoms q_ψ ist dann $q_{\sim\psi}$.

Genauer: mittels Operator $\overline{\ }$ wie folgt:

$$\overline{\zeta_1 \wedge \zeta_2} = \overline{\zeta_1} \vee \overline{\zeta_2}$$
$$\overline{\zeta_1 \vee \zeta_2} = \overline{\zeta_1} \wedge \overline{\zeta_2}$$
$$\overline{q_\psi} = q_{\sim\psi}$$
$$\overline{1} = 0$$
$$\overline{0} = 1$$

9:07

Achtung: wir wollen *nur PBFs* „negieren“, nicht LTL-Formeln.
Deshalb brauchen wir nur Fälle für $\wedge$, $\vee$ und Atome.

Aussagenvariablen sind aber hier immer nur die q_ψ;
und die können wir negieren, indem wir ψ negieren.

Konstruktion des ABA

- $Q = \{q_\psi \mid \psi \in \mathrm{cl}(\varphi)\}, \quad q_I = q_\varphi$
- $\Sigma = 2^{\mathrm{AV}}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathrm{B}^+(Q)$ wie folgt:

$$\delta(q_x, a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\delta(q_{\sim\psi}, a) = \overline{\delta(q_\psi, a)}$$
$$\delta(q_{\psi\wedge\vartheta}, a) = \delta(q_\psi, a) \wedge \delta(q_\vartheta, a)$$
$$\delta(q_{\psi\vee\vartheta}, a) = \delta(q_\psi, a) \vee \delta(q_\vartheta, a)$$
$$\delta(q_{X\psi}, a) = q_\psi$$
$$\delta(q_{\psi U\vartheta}, a) = \delta(q_\vartheta, a) \vee (\delta(q_\psi, a) \wedge q_{\psi U\vartheta})$$

- $F = \{q_{\neg(\psi U\vartheta)} \mid \neg(\psi \; U \; \vartheta) \in \mathrm{cl}(\varphi)\}$ T 5.4

9:09

Erklären, 5min Pause, dann Beispiel vorrechnen $\longrightarrow$ bis 9:30 ?

Man kann natürlich für die Zustände direkt ψ statt q_ψ schreiben.
Das sorgt aber für Verwirrung in der Definition von $\overline{\ }$,
weil man bei $\wedge, \vee$ nicht mehr sieht, ob PBFs oder LTL-Formeln verknüpft werden.

Teil 5: Alternierung
Von LTL zu alternierenden Automaten
Vergleich mit Konstruktion LTL → (G)NBA aus Teil 3

Auffällige Unterschiede

- ABA hat linear viele Zustände, GNBA exponentiell viele.
- Hier wird die Bedeutung **aller** Operatoren in δ kodiert.

Gemeinsamkeiten

- Beide Konstruktionen verwenden das Expansionsgesetz.
- Beide Akzeptanzbedingungen verfolgen denselben Zweck: verbieten, die Erfüllung von U-Formeln ∞ weit hinauszuzögern.

1. Punkt bedeutet natürlich, dass es zu einem ABA im Allg. keinen polynomiell großen äquivalenten NBA geben kann.

9:30

Letzter Satz: wenn ABA → NBA wieder gemacht wird, dann „Mehr dazu später“ in Folie wieder einkommentieren.

Und nun ...

Abschluss unter Komplement

... ist für ABA-erkennbare Sprachen besonders leicht zu zeigen.

Für eine PBF φ definieren wir **dual(φ)**
als die PBF, die durch „Umdrehen“ von $\wedge$ und $\vee$ entsteht,
z. B.: $\text{dual}((q_1 \wedge q_2) \vee q_3) = (q_1 \vee q_2) \wedge q_3$

Wir betrachten zur weiteren Erleichterung jetzt A**M**As
(alternierende **Muller**-Aut., Akzeptanzkomp. $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$ wie gehabt)

9:31

Grund für Muller:
Akzeptanzbedingung des Komplementautomaten wird einfacher.

Satz 5.5
Die Klasse der AMA-erkennbaren ω-Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

9:32 bis 9:45 (nur Bsp. und kein Beweis)
Konstruktion: vergleiche mit Safra-Konstruktion

Beweis: braucht Spiele (sehr ähnlich zu denen aus Kap. 4)
und alternative Def. alternierender Automaten $\rightsquigarrow$ hier nicht.

Satz 5.5
Die Klasse der AMA-erkennbaren ω-Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, \mathcal{F})$ ein AMA.

9:32 bis 9:45 (nur Bsp. und kein Beweis)
Konstruktion: vergleiche mit Safra-Konstruktion

Beweis: braucht Spiele (sehr ähnlich zu denen aus Kap. 4)
und alternative Def. alternierender Automaten $\rightsquigarrow$ hier nicht.

Abschluss unter Komplement

Satz 5.5
Die Klasse der AMA-erkennbaren ω-Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, \mathcal{F})$ ein AMA.

Konstruiere AMA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \delta', \{q_I\}, \mathcal{F}')$ wie folgt:

- Für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$, setze $\delta'(q, a) = \text{dual}(\delta(q, a))$.

9:32 bis 9:45 (nur Bsp. und kein Beweis)
Konstruktion: vergleiche mit Safra-Konstruktion

Beweis: braucht Spiele (sehr ähnlich zu denen aus Kap. 4)
und alternative Def. alternierender Automaten $\rightsquigarrow$ hier nicht.

Abschluss unter Komplement

Satz 5.5
Die Klasse der AMA-erkennbaren ω-Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, \mathcal{F})$ ein AMA.

Konstruiere AMA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \delta', \{q_I\}, \mathcal{F}')$ wie folgt:

- Für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$, setze $\delta'(q, a) = \text{dual}(\delta(q, a))$.
- $\mathcal{F}' = 2^Q \setminus \mathcal{F}$ **T5.5**

9:32 bis 9:45 (nur Bsp. und kein Beweis)
Konstruktion: vergleiche mit Safra-Konstruktion

Beweis: braucht Spiele (sehr ähnlich zu denen aus Kap. 4)
und alternative Def. alternierender Automaten $\rightsquigarrow$ hier nicht.

Abschluss unter Komplement

Satz 5.5
Die Klasse der AMA-erkennbaren ω-Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, \mathcal{F})$ ein AMA.

Konstruiere AMA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \delta', \{q_I\}, \mathcal{F}')$ wie folgt:

- Für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$, setze $\delta'(q, a) = \text{dual}(\delta(q, a))$.
- $\mathcal{F}' = 2^Q \setminus \mathcal{F}$ **T5.5**

Dann gilt: $L_\omega(\mathcal{A}') = \overline{L_\omega(\mathcal{A})}$ (Beweis mittels Spielen) □

9:32 bis 9:45 (nur Bsp. und kein Beweis)
Konstruktion: vergleiche mit Safra-Konstruktion

Beweis: braucht Spiele (sehr ähnlich zu denen aus Kap. 4)
und alternative Def. alternierender Automaten $\rightsquigarrow$ hier nicht.

9:32 bis 9:45 (nur Bsp. und kein Beweis)

Konstruktion: vergleiche mit Safra-Konstruktion

Beweis: braucht Spiele (sehr ähnlich zu denen aus Kap. 4)
und alternative Def. alternierender Automaten $\rightsquigarrow$ hier nicht.

Abschluss unter Komplement

Satz 5.5

Die Klasse der AMA-erkennbaren ω-Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, \mathcal{F})$ ein AMA.

Konstruiere AMA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \delta', \{q_I\}, \mathcal{F}')$ wie folgt:

- Für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$, setze $\delta'(q, a) = \text{dual}(\delta(q, a))$.
- $\mathcal{F}' = 2^Q \setminus \mathcal{F}$ **T 5.5**

Dann gilt: $L_\omega(\mathcal{A}') = \overline{L_\omega(\mathcal{A})}$ (Beweis mittels Spielen) □

Insbesondere ist $\mathcal{A}'$ (bis auf $\mathcal{F}'$) nicht größer als $\mathcal{A}$!

Teil 5: Alternierung

Alternierende vs. nichtdeterministische Automaten

9:45

Noch ein wichtiges Resultat, aber ohne Beweis

Alternierende vs. nichtdeterministische Automaten

Satz 5.6 (Miyano & Hayashi 1984)

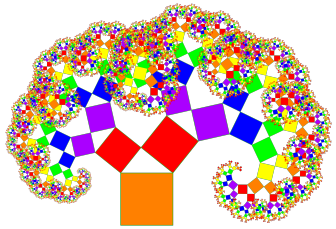
Für jeden ABA $\mathcal{A}$ gibt es einen NBA $\mathcal{A}'$ mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}')$.

Alternierende und nichtdeterministische Büchi-Automaten sind also **gleichmächtig**.

Beweisskizze: Siehe Folien aus dem letzten Jahr
`http://tinyurl.com/ws1718-automaten`

Teil 5: Alternierung

Fast fertig für dieses Semester . . .



Pythagoras-Baum. Quelle: Wikipedia, User Gjacquenot (Lizenz CC BY-SA 3.0)

Danke für Eure Aufmerksamkeit!

9:46

- Literatur
- Eval.
- Prüfungshinweise?

Teil 5: Alternierung

Literatur für diesen Teil

Literatur für diesen Teil

Bernd Finkbeiner.
Automata, Games, and Verification.
Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, SoSe 2015.
Kap. 8: Alternating Büchi Automata.
https://www.react.uni-saarland.de/teaching/automata-games-verification-15/lecture-notes.html
https://www.react.uni-saarland.de/teaching/automata-games-verification-15/downloads/notes.pdf

Teil 5: Alternierung