2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter

Automatentheorie und ihre Anwendungen
Teil 3: endliche Automaten auf unendlichen Wörtern

Wintersemester 2018/19 Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ws1819-autom

Di: S. 74 Mi: S. 111 8:40

Überblick

8:40

└Und nun . . .

Und nun . . .

Terminierung

Terminierung von Algorithmen ist wichtig für Problemlösung.

Übliches Szenario:

- Eingabe: endliche Menge von Daten
- Lasse Programm P laufen, bis es **terminiert**
- Ausgabe: Ergebnis, das durch P berechnet wurde

Um Ausgabe zu erhalten, **muss *P* für jede Eingabe terminieren**.

8:41

Terminierung von Algorithmen ist wichtig für Problemlösung.

Übliches Szenario:

- Eingabe: endliche Menge von Daten
- Lasse Programm P laufen, bis es **terminiert**
- Ausgabe: Ergebnis, das durch P berechnet wurde

Um Ausgabe zu erhalten, **muss *P* für jede Eingabe terminieren**.

Beispiel: Validierung von XML-Dokumenten für gegebenes Schema

- Konstruiere Automaten für Schema und Dokument **(terminiert)**
- Reduziere auf Leerheitsproblem **(terminiert)**
- Löse Leerheitsproblem
  (sammle erreichbare Zustände – **terminiert**)

8:41

└ Terminierung unerwünscht

Terminierung unerwünscht

Von manchen Systemen/Programmen fordert man,
dass sie **nie terminieren**.

Beispiele:

- (Mehrbenutzer-)Betriebssysteme
  sollen beliebig lange laufen ohne abzustürzen, egal was Benutzer tun
- Bankautomaten, Flugsicherungssysteme,
  Netzwerkkommunikationssysteme, …

Terminierung unerwünscht

Von manchen Systemen/Programmen fordert man,
dass sie **nie terminieren**.

Beispiele:

- (Mehrbenutzer-)Betriebssysteme
  sollen beliebig lange laufen ohne abzustürzen, egal was Benutzer tun
- Bankautomaten, Flugsicherungssysteme,
  Netzwerkkommunikationssysteme, ...

Gängiges Berechnungsmodell:

- endliche Automaten mit nicht-terminierenden Berechnungen
- Terminierung wird als Nicht-Akzeptanz angesehen
- ursprünglich durch Büchi entwickelt (1960)
  Ziel: Algorithmen zur Entscheidung mathematischer Theorien

8:43

Ziel und Vorgehen dieses Kapitels

Ziel

Beschreibung von Automatenmodellen mit **unendlichen** Eingaben und **nicht-terminierenden** Berechnungen

Vorgehen

- Theorie: ausgiebiges Studium von Büchi-Automaten und der von ihnen erkannten Sprachen
  - Definition, Abschlusseigenschaften
  - Charakterisierung mittels regulärer Sprachen
  - Determinisierung
  - Entscheidungsprobleme
- Anwendung von Büchi-Automaten: Spezifikation & Verifikation in Linearer Temporallogik (LTL)

8:45

Beispiel: Philosophenproblem (Dining Philosophers Problem)

Erläutert Nebenläufigkeit und Verklemmung von Prozessen
Demonstriert auch unendliche Berechnungen
Hier: einfachste Version mit 3 Philosophen

8:46

Weil dieses Beispiel so schräg und archaisch ist, belasse ich es mal bei der männlichen Form.

Beispiel: Philosophenproblem (Dining Philosophers Problem)

Erläutert Nebenläufigkeit und Verklemmung von Prozessen

Demonstriert auch unendliche Berechnungen

Hier: einfachste Version mit 3 Philosophen

Philosophenproblem

3 Philosophen P_1, P_2, P_3

Für alle i gilt: entweder denkt P_i, oder P_i isst.

Alle P_i sitzen um einen runden Tisch.

Jeder P_i hat einen Teller mit Essen vor sich.

Zwischen je zwei Tellern liegt ein Essstäbchen.

Um zu essen, benötigt P_i beide Stäbchen neben seinem Teller.

8:46

Weil dieses Beispiel so schräg und archaisch ist, belasse ich es mal bei der männlichen Form.

Beispiel: Philosophenproblem (Dining Philosophers Problem)

Erläutert Nebenläufigkeit und Verklemmung von Prozessen

Demonstriert auch unendliche Berechnungen

Hier: einfachste Version mit 3 Philosophen

Philosophenproblem

3 Philosophen P_1, P_2, P_3

Für alle i gilt: entweder denkt P_i, oder P_i isst.

Alle P_i sitzen um einen runden Tisch.

Jeder P_i hat einen Teller mit Essen vor sich.

Zwischen je zwei Tellern liegt ein Essstäbchen.

Um zu essen, benötigt P_i beide Stäbchen neben seinem Teller.

$\Rightarrow$ Keine zwei P_i, P_j können gleichzeitig essen.

8:46

Weil dieses Beispiel so schräg und archaisch ist, belasse ich es mal bei der männlichen Form.

2018-12-18

└─Skizze zum Philosophenproblem

Skizze zum Philosophenproblem

Zusammenfassung

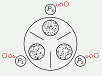
- Für alle i: entweder denkt P_i, oder P_i isst.
- Keine zwei P_i, P_j können gleichzeitig essen.

8:48

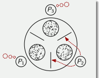
Skizze zum Philosophenproblem

Zusammenfassung

- Für alle i: entweder denkt P_i, oder P_i isst.
- Keine zwei P_i, P_j können gleichzeitig essen.



P_1, P_2, P_3 denken.



P_1, P_3 denken; P_2 isst.

8:48

Modellierung durch endliches Transitionssystem

Annahmen

- Am Anfang denken **(d)** alle P_i.
- Reihum können sich P_1, P_2, P_3 entscheiden, ob sie denken oder essen **(e)** wollen.

Zustände des Systems

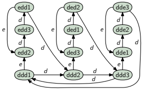
- Anfangszustand ddd1: alle P_i denken, und P_1 trifft nächste Entscheidung.
- alle zulässigen Zustände:

ddd1	edd1	ded1	dde1
ddd2	edd2	ded2	dde2
ddd3	edd3	ded3	dde3

Zustandsüberführungen:

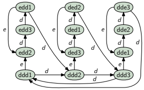
d oder *e* – je nach Entscheidung des P_i, der an der Reihe ist

8:49


edd1
ded2
dde3
edd3
ded1
dde2
edd2
ded3
dde1
ddd1
ddd2
ddd3
d
e

8:51

Das Transitionssystem

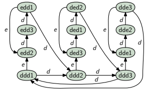


Was sind die Eingaben in das System?

8:51

8:51

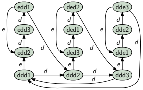
Das Transitionssystem



Was sind die Eingaben in das System?

Endliche Zeichenketten über $\Sigma = \{d, e\}$?

Das Transitionssystem



Was sind die Eingaben in das System?

Endliche Zeichenketten über $\Sigma = \{d, e\}$?
Dann ist das System ein NEA.

- **Unendliche Zeichenketten über $\boldsymbol{\Sigma} = \{d, e\}$!**

8:51

Warum unendliche Zeichenketten?

Nehmen an, jeder P_i möchte **beliebig oft** denken und essen.

System soll dazu **beliebig lange** ohne Terminierung laufen.

Philosoph P_i heißt **zufrieden**, wenn er währenddessen **unendlich oft** denkt und isst.

8:55

8:55

Warum unendliche Zeichenketten?

Nehmen an, jeder P_i möchte **beliebig oft** denken und essen.

System soll dazu **beliebig lange** ohne Terminierung laufen.

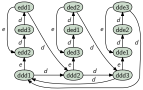
Philosoph P_i heißt **zufrieden**, wenn er währenddessen **unendlich oft** denkt und isst.

⇝ **Mögliche Fragen:**

1. Kann das System überhaupt beliebig lange laufen?
2. Ist es zusätzlich möglich, dass P_i zufrieden ist?
3. Ist es möglich, dass P_1, P_2 zufrieden sind, aber P_3 nicht?
4. Ist es möglich, dass alle P_i zufrieden sind?

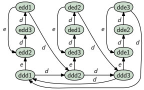
8:57

Frage 1



Ist es überhaupt möglich, dass das System beliebig lange läuft?

Frage 1



Ist es überhaupt möglich, dass das System beliebig lange läuft?

Ja: jeder Zustand hat mindestens einen Nachfolgerzustand.
dddddd . . . ist ein möglicher unendlicher Lauf.

8:57

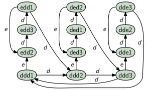
2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter

Motivation

Frage 2

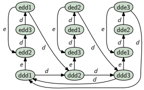
Frage 2



Ist es möglich, dass P_1 zufrieden ist?

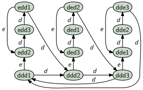
8:58

8:58



Ist es möglich, dass P_1 zufrieden ist?

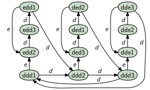
Ja: z. B. wenn ein Lauf ddd1 und edd1 unendlich oft durchläuft: $ed^5ed^5\dots$



Ist es möglich, dass P_1, P_2 zufrieden sind, aber P_3 nicht?

8:59

Frage 3

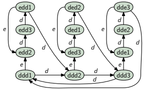


Ist es möglich, dass P_1, P_2 zufrieden sind, aber P_3 nicht?

Ja: z. B. „ddd1, edd1, ddd2, ded2 unendlich oft, aber dde*i* nicht“: $ed^3ed^4ed^3ed^4\ldots$

8:59

Frage 4

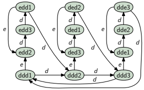


Ist es möglich, dass alle P_i zufrieden sind?

9:00

2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter
Motivation
Frage 4



Ist es möglich, dass alle P_i zufrieden sind?

Ja: z. B. „ddd1, edd1, ddd2, ded2, ddd3, dde3 unendlich oft“:
$ed^3ed^3\dots$ oder $ed^2ed^3ed^2ed^3\dots$ oder ...

9:00

9:01

... siehe Anhang, Folie 122 ...

Und nun . . .

Grundbegriffe

Unendliches Wort über **Alphabet** Σ

- ist Funktion $\alpha : \mathbb{N} \to \Sigma$
- $\alpha(n)$: Symbol an n-ter Stelle (auch: α_n)
- wird oft geschrieben als $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots$

9:02

Grundbegriffe

Unendliches Wort über **Alphabet** Σ

- ist Funktion $\alpha : \mathbb{N} \to \Sigma$
- **$\alpha(n)$:** Symbol an n-ter Stelle (auch: α_n)
- wird oft geschrieben als $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \dots$

Weitere Notation

- **$\alpha[m, n]$:** endliche Teilfolge $\alpha_m\alpha_{m+1} \dots \alpha_n$
- **$\#_w(\alpha)$:** Anzahl der Vorkommen von w als Teilwort in α
  $= \#\{(m, n) \mid \alpha[m, n] = w\}$
- **w^ω:** unendliche Verkettung von w
  (α mit $\alpha[i \cdot n, (i+1)n - 1] = w$ f. alle $i \geqslant 0$, $n = |w|$)

9:02

Grundbegriffe

Unendliches Wort über **Alphabet** Σ

- ist Funktion $\alpha : \mathbb{N} \to \Sigma$
- $\alpha(n)$: Symbol an n-ter Stelle (auch: α_n)
- wird oft geschrieben als $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots$

Weitere Notation

- $\alpha[m, n]$: endliche Teilfolge $\alpha_m\alpha_{m+1} \ldots \alpha_n$
- $\#_w(\alpha)$: Anzahl der Vorkommen von w als Teilwort in α
  $= \#\{(m, n) \mid \alpha[m, n] = w\}$
- w^ω: unendliche Verkettung von w
  (α mit $\alpha[i \cdot n, (i+1)n - 1] = w$ f. alle $i \geqslant 0$, $n = |w|$)

Σ^ω: Menge aller unendlichen Wörter

ω-Sprache: $L \subseteq \Sigma^\omega$

9:02

Definition 3.1

Ein **nichtdeterministischer Büchi-Automat (NBA)** über einem **Alphabet** Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ eine endliche nichtleere Menge von Zeichen ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die **Überführungsrelation** ist,
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.

9:04

Definition 3.1

Ein **nichtdeterministischer Büchi-Automat (NBA)** über einem **Alphabet** Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ eine endliche nichtleere Menge von Zeichen ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die **Überführungsrelation** ist,
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.

Bisher kein Unterschied zu NEAs, aber ...

9:04

Definition 3.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein Büchi-Automat.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf ω-Wort α ist eine Folge

$$r = q_0 q_1 q_2 \ldots,$$

so dass für alle $i \geqslant 0$ gilt: $(q_i, \alpha_i, q_{i+1}) \in \Delta$.

9:06

Berechnungen und Akzeptanz

Definition 3.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein Büchi-Automat.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf ω-Wort α ist eine Folge
  $$r = q_0 q_1 q_2 \dots,$$
  so dass für alle $i \geqslant 0$ gilt: $(q_i, \alpha_i, q_{i+1}) \in \Delta$.
- **Unendlichkeitsmenge Inf(r)** von $r = q_0 q_1 q_2 \dots$:
  Menge der Zustände, die unendlich oft in r vorkommen

9:06

Berechnungen und Akzeptanz

Definition 3.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein Büchi-Automat.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf ω-Wort α ist eine Folge
$$r = q_0 q_1 q_2 \ldots,$$
so dass für alle $i \geqslant 0$ gilt: $(q_i, \alpha_i, q_{i+1}) \in \Delta$.
- **Unendlichkeitsmenge Inf(r)** von $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$:
Menge der Zustände, die unendlich oft in r vorkommen
- **Erfolgreicher Run** $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$: $q_0 \in I$ und $\text{Inf}(r) \cap F \neq \emptyset$

9:06

9:06

Definition 3.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein Büchi-Automat.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf ω-Wort α ist eine Folge
$$r = q_0 q_1 q_2 \ldots,$$
so dass für alle $i \geqslant 0$ gilt: $(q_i, \alpha_i, q_{i+1}) \in \Delta$.
- **Unendlichkeitsmenge Inf(r)** von $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$:
Menge der Zustände, die unendlich oft in r vorkommen
- **Erfolgreicher Run** $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$: $q_0 \in I$ und $\mathrm{Inf}(r) \cap F \neq \emptyset$
- $\mathcal{A}$ **akzeptiert** α,
wenn es einen erfolgreichen Run von $\mathcal{A}$ auf α gibt.

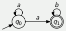
Berechnungen und Akzeptanz

Definition 3.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein Büchi-Automat.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf ω-Wort α ist eine Folge
$$r = q_0 q_1 q_2 \dots,$$
so dass für alle $i \geqslant 0$ gilt: $(q_i, \alpha_i, q_{i+1}) \in \Delta$.
- **Unendlichkeitsmenge Inf(r)** von $r = q_0 q_1 q_2 \dots$: Menge der Zustände, die unendlich oft in r vorkommen
- **Erfolgreicher Run** $r = q_0 q_1 q_2 \dots$: $q_0 \in I$ und $\mathrm{Inf}(r) \cap F \neq \emptyset$
- $\mathcal{A}$ **akzeptiert** α, wenn es einen erfolgreichen Run von $\mathcal{A}$ auf α gibt.
- Die von $\mathcal{A}$ **erkannte Sprache** ist $L_\omega(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } \alpha\}$.

9:06

$\mathcal{A}_1$: 

$L_\omega(\mathcal{A}_1) =$

9:08 bis 9:14

2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter

└Grundbegriffe und Büchi-Automaten

└Beispiele

$\mathcal{A}_1$:

$L_\omega(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^\omega \mid n \geqslant 1\}$

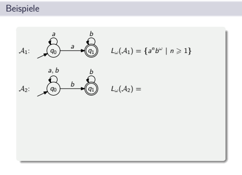
9:08 bis 9:14

2018-12-18

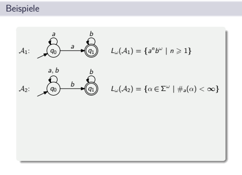
Teil 3: unendliche Wörter

└─Grundbegriffe und Büchi-Automaten

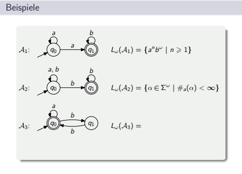
└─Beispiele



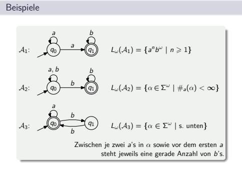
9:08 bis 9:14


Beispiele
$\mathcal{A}_1$:
a
b
q_0
q_1
$L_\omega(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^\omega \mid n \geqslant 1\}$
$\mathcal{A}_2$:
a, b
b
q_0
q_1
$L_\omega(\mathcal{A}_2) = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \#_a(\alpha) < \infty\}$

9:08 bis 9:14


Beispiele
$\mathcal{A}_1$:
$L_\omega(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^\omega \mid n \geqslant 1\}$
$\mathcal{A}_2$:
$L_\omega(\mathcal{A}_2) = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \#_a(\alpha) < \infty\}$
$\mathcal{A}_3$:
$L_\omega(\mathcal{A}_3) =$

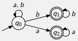
9:08 bis 9:14


Beispiele
$\mathcal{A}_1$:
$L_\omega(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^\omega \mid n \geqslant 1\}$
$\mathcal{A}_2$:
$L_\omega(\mathcal{A}_2) = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \#_a(\alpha) < \infty\}$
$\mathcal{A}_3$:
$L_\omega(\mathcal{A}_3) = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \text{s. unten}\}$
Zwischen je zwei a's in α sowie vor dem ersten a steht jeweils eine gerade Anzahl von b's.

9:08 bis 9:14

Mehr Beispiele

$\mathcal{A}_4$:

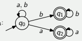


$L_\omega(\mathcal{A}_4) =$

9:14 bis 9:20; 5 min Pause

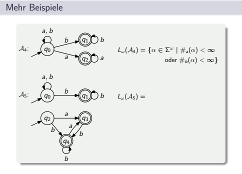
Mehr Beispiele

$\mathcal{A}_4$:

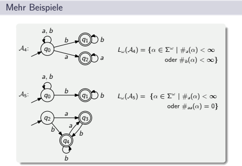


$$L_\omega(\mathcal{A}_4) = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \#_a(\alpha) < \infty \text{ oder } \#_b(\alpha) < \infty\}$$

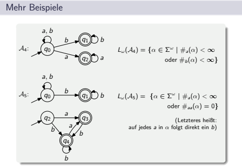
9:14 bis 9:20; 5 min Pause



9:14 bis 9:20; 5 min Pause



9:14 bis 9:20; 5 min Pause



9:14 bis 9:20; 5 min Pause

Erkennbare Sprache

Definition 3.3
Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ ist **Büchi-erkennbar**,
wenn es einen NBA $\mathcal{A}$ gibt mit $L = L_\omega(\mathcal{A})$.

9:20

2018-12-18

Operationen auf ω-Sprachen

Zur Erinnerung: die Menge der Büchi-erkennbaren Sprachen heißt abgeschlossen unter

- **Vereinigung**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
- **Schnitt**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
- **Komplement**, wenn gilt: Falls L Büchi-erkennbar, so auch $\overline{L}$.

9:21

2018-12-18

Operationen auf ω-Sprachen

Zur Erinnerung: die Menge der Büchi-erkennbaren Sprachen heißt abgeschlossen unter

- **Vereinigung**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
- **Schnitt**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
- **Komplement**, wenn gilt: Falls L Büchi-erkennbar, so auch $\overline{L}$.

Quiz

Unter welchen Operationen sind die Büchi-erkennbaren Sprachen abgeschlossen, und wie leicht ist das zu zeigen?

Vereinigung?
Schnitt?
Komplement?

9:21

Operationen auf ω-Sprachen

Zur Erinnerung: die Menge der Büchi-erkennbaren Sprachen heißt abgeschlossen unter

- **Vereinigung**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
- **Schnitt**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
- **Komplement**, wenn gilt: Falls L Büchi-erkennbar, so auch $\overline{L}$.

Quiz

Unter welchen Operationen sind die Büchi-erkennbaren Sprachen abgeschlossen, und wie leicht ist das zu zeigen?

Vereinigung? ✓ (leicht)
Schnitt?
Komplement?

9:21

Operationen auf ω-Sprachen

Zur Erinnerung: die Menge der Büchi-erkennbaren Sprachen heißt abgeschlossen unter

- **Vereinigung**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
- **Schnitt**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
- **Komplement**, wenn gilt: Falls L Büchi-erkennbar, so auch $\overline{L}$.

Quiz

Unter welchen Operationen sind die Büchi-erkennbaren Sprachen abgeschlossen, und wie leicht ist das zu zeigen?

Vereinigung? ✓ (leicht)
Schnitt? ✓ (mittel)
Komplement?

Operationen auf ω-Sprachen

Zur Erinnerung: die Menge der Büchi-erkennbaren Sprachen heißt abgeschlossen unter

- **Vereinigung**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
- **Schnitt**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
- **Komplement**, wenn gilt: Falls L Büchi-erkennbar, so auch $\overline{L}$.

Quiz

Unter welchen Operationen sind die Büchi-erkennbaren Sprachen abgeschlossen, und wie leicht ist das zu zeigen?

Vereinigung?	✓	(leicht)
Schnitt?	✓	(mittel)
Komplement?	✓	(schwer)

9:21

9:23

Satz 3.4
Die Menge der Büchi-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter den Operationen $\cup$ und $\cap$.

Direkte Konsequenz aus den folgenden Lemmata.

Abgeschlossenheit unter $^{-}$: siehe Abschnitt „Determinisierung“

2018-12-18

9:24

Abgeschlossenheit unter Vereinigung

Lemma 3.5
Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}_3$ mit $L_\omega(\mathcal{A}_3) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

2018-12-18

9:24

Lemma 3.5
Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}_3$ mit $L_\omega(\mathcal{A}_3) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Beweis. analog zu NEAs und NEBAs:

Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, I_i, F_i)$ für $i = 1, 2$.
O. B. d. A. gelte $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Konstruieren $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, \Delta_3, I_3, F_3)$ wie folgt.

9:24

Abgeschlossenheit unter Vereinigung

Lemma 3.5
Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}_3$ mit $L_\omega(\mathcal{A}_3) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Beweis. analog zu NEAs und NEBAs:

Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, I_i, F_i)$ für $i = 1, 2$.
O. B. d. A. gelte $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Konstruieren $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, \Delta_3, I_3, F_3)$ wie folgt.

- $Q_3 = Q_1 \cup Q_2$
- $\Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2$
- $I_3 = I_1 \cup I_2$
- $F_3 = F_1 \cup F_2$

2018-12-18

9:24

Abgeschlossenheit unter Vereinigung

Lemma 3.5
Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}_3$ mit $L_\omega(\mathcal{A}_3) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Beweis. analog zu NEAs und NEBAs:

Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, I_i, F_i)$ für $i = 1, 2$.
O. B. d. A. gelte $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Konstruieren $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, \Delta_3, I_3, F_3)$ wie folgt.

- $Q_3 = Q_1 \cup Q_2$
- $\Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2$
- $I_3 = I_1 \cup I_2$
- $F_3 = F_1 \cup F_2$

Dann gilt: $L_\omega(\mathcal{A}_3) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$ □

Abgeschlossenheit unter Schnitt

Für NEAs: Produktautomat

Idee: lasse $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ „gleichzeitig" auf Eingabewort laufen.

Gegeben $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, konstruiere $\mathcal{A}_3$ mit $L(\mathcal{A}_3) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$:

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$
- $\Delta_3 = \{((p,p'), a, (q,q')) \mid (p,a,q) \in \Delta_1 \text{ \& } (p',a,q') \in \Delta_2\}$
- $I_3 = I_1 \times I_2$
- $F_3 = F_1 \times F_2$ **T 3.1**

9:25 bis 9:35?

Abgeschlossenheit unter Schnitt

Für NEAs: Produktautomat

Idee: lasse $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ „gleichzeitig" auf Eingabewort laufen.
Gegeben $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, konstruiere $\mathcal{A}_3$ mit $L(\mathcal{A}_3) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$:

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$
- $\Delta_3 = \{((p, p'), a, (q, q')) \mid (p, a, q) \in \Delta_1 \ \& \ (p', a, q') \in \Delta_2\}$
- $I_3 = I_1 \times I_2$
- $F_3 = F_1 \times F_2$ **T 3.1**

Funktioniert das auch für Büchi-Automaten?

9:25 bis 9:35?

Für NEAs: Produktautomat

Idee: lasse $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ „gleichzeitig" auf Eingabewort laufen.
Gegeben $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, konstruiere $\mathcal{A}_3$ mit $L(\mathcal{A}_3) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$:

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$
- $\Delta_3 = \{((p, p'), a, (q, q')) \mid (p, a, q) \in \Delta_1 \; \& \; (p', a, q') \in \Delta_2\}$
- $I_3 = I_1 \times I_2$
- $F_3 = F_1 \times F_2$ **T 3.1**

Funktioniert das auch für Büchi-Automaten?

Nein. $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ besuchen ihre akzeptierenden Zustände möglicherweise nicht synchron! **T 3.1 Forts.**

9:25 bis 9:35?

9:35

Abgeschlossenheit unter Schnitt

Neue Idee für Schnitt-Automat $\mathcal{A}$:

- $\mathcal{A}$ simuliert $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ nach wie vor parallel, aber mit **2 Modi 1, 2**
- Modus i bedeutet: warte auf einen akz. Zustand f von $\mathcal{A}_i$
- Sobald so ein f erreicht ist, wechsle den Modus.
- Run von $\mathcal{A}$ ist erfolgreich, wenn er ∞ oft den Modus wechselt.

$\rightsquigarrow$ Es werden genau die Wörter akzeptiert,
für die $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ jeweils einen erfolgreichen Run haben.

Lemma 3.6
Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}$ mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

16:00 9:37 bis 9:59?

Kurze Wdhlg.: haben Büchi-Automaten eingeführt, Abschlusseigenschaften behandelt.

Vereinigung war einfach; Schnitt ist komplizierter:
2 Kopien des „alten" Produktaut., weil akz. Zust. asynchron auftreten können

Konstruktion auf Folie; jetzt noch 2. Richtung des Korrektheitsbeweises

Beweis bis 16:20

Abgeschlossenheit unter Schnitt

Lemma 3.6

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}$ mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Beweis: Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, I_i, F_i)$ NBAs für $i = 1, 2$.
Konstruieren $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ wie folgt.

$Q = Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\}$
$\Delta = \{((p, p', 1), a, (q, q', 1)) \mid p \notin F_1 \;\&\; (p, a, q) \in \Delta_1 \;\&\; (p', a, q') \in \Delta_2\}$

16:00 9:37 bis 9:59?

Kurze Wdhlg.: haben Büchi-Automaten eingeführt, Abschlusseigenschaften behandelt.

Vereinigung war einfach; Schnitt ist komplizierter:
2 Kopien des „alten“ Produktaut., weil akz. Zust. asynchron auftreten können

Konstruktion auf Folie; jetzt noch 2. Richtung des Korrektheitsbeweises

Beweis bis 16:20

Abgeschlossenheit unter Schnitt

Lemma 3.6
Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}$ mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Beweis: Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, I_i, F_i)$ NBAs für $i = 1, 2$.
Konstruieren $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ wie folgt.

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\}$$

$$\begin{aligned}\Delta = {} & \{((p, p', 1), a, (q, q', 1)) \mid p \notin F_1 \;\&\; (p, a, q) \in \Delta_1 \;\&\; (p', a, q') \in \Delta_2\} \\ & \cup \{((p, p', 1), a, (q, q', 2)) \mid p \in F_1 \;\&\; (p, a, q) \in \Delta_1 \;\&\; (p', a, q') \in \Delta_2\}\end{aligned}$$

16:00 **9:37 bis 9:59?**

Kurze Wdhlg.: haben Büchi-Automaten eingeführt, Abschlusseigenschaften behandelt.

Vereinigung war einfach; Schnitt ist komplizierter:
2 Kopien des „alten“ Produktaut., weil akz. Zust. asynchron auftreten können

Konstruktion auf Folie; jetzt noch 2. Richtung des Korrektheitsbeweises

Beweis bis 16:20

Abgeschlossenheit unter Schnitt

Lemma 3.6
Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}$ mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Beweis: Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, I_i, F_i)$ NBAs für $i = 1, 2$.
Konstruieren $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ wie folgt.

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\}$$

$$\begin{aligned}\Delta = {} & \{((p,p',1),a,(q,q',1)) \mid p \notin F_1 \;\&\; (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\} \\ & \cup \{((p,p',1),a,(q,q',2)) \mid p \in F_1 \;\&\; (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\} \\ & \cup \{((p,p',2),a,(q,q',2)) \mid p' \notin F_2 \;\&\; (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\}\end{aligned}$$

16:00 9:37 bis 9:59?

Kurze Wdhlg.: haben Büchi-Automaten eingeführt, Abschlusseigenschaften behandelt.

Vereinigung war einfach; Schnitt ist komplizierter:
2 Kopien des „alten“ Produktaut., weil akz. Zust. asynchron auftreten können

Konstruktion auf Folie; jetzt noch 2. Richtung des Korrektheitsbeweises

Beweis bis 16:20

Abgeschlossenheit unter Schnitt

Lemma 3.6
Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}$ mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Beweis: Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, I_i, F_i)$ NBAs für $i = 1, 2$.
Konstruieren $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ wie folgt.

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\}$$

$$\begin{aligned}
\Delta = {} & \{((p,p',1), a, (q,q',1)) \mid p \notin F_1 \;\&\; (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\} \\
& \cup \{((p,p',1), a, (q,q',2)) \mid p \in F_1 \;\&\; (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\} \\
& \cup \{((p,p',2), a, (q,q',2)) \mid p' \notin F_2 \;\&\; (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\} \\
& \cup \{((p,p',2), a, (q,q',1)) \mid p' \in F_2 \;\&\; (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\}
\end{aligned}$$

16:00 **9:37 bis 9:59?**

Kurze Wdhlg.: haben Büchi-Automaten eingeführt, Abschlusseigenschaften behandelt.

Vereinigung war einfach; Schnitt ist komplizierter:
2 Kopien des „alten" Produktaut., weil akz. Zust. asynchron auftreten können

Konstruktion auf Folie; jetzt noch 2. Richtung des Korrektheitsbeweises

Beweis bis 16:20

Abgeschlossenheit unter Schnitt

Lemma 3.6
Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}$ mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Beweis: Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, I_i, F_i)$ NBAs für $i = 1, 2$.
Konstruieren $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ wie folgt.

$$
\begin{aligned}
Q &= Q_1 \times Q_2 \times \{1,2\} \\
\Delta &= \{((p,p',1), a, (q,q',1)) \mid p \notin F_1 \;\&\; (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\} \\
&\quad \cup \{((p,p',1), a, (q,q',2)) \mid p \in F_1 \;\&\; (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\} \\
&\quad \cup \{((p,p',2), a, (q,q',2)) \mid p' \notin F_2 \;\&\; (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\} \\
&\quad \cup \{((p,p',2), a, (q,q',1)) \mid p' \in F_2 \;\&\; (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\} \\
I &= I_1 \times I_2 \times \{1\} \\
F &= Q_1 \times F_2 \times \{2\}
\end{aligned}
$$

T 3.2

16:00 9:37 bis 9:59?

Kurze Wdhlg.: haben Büchi-Automaten eingeführt, Abschlusseigenschaften behandelt.

Vereinigung war einfach; Schnitt ist komplizierter:
2 Kopien des „alten“ Produktaut., weil akz. Zust. asynchron auftreten können

Konstruktion auf Folie; jetzt noch 2. Richtung des Korrektheitsbeweises

Beweis bis 16:20

Abgeschlossenheit unter Schnitt

Lemma 3.6

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}$ mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Beweis: Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, I_i, F_i)$ NBAs für $i = 1, 2$.
Konstruieren $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ wie folgt.

$$
\begin{aligned}
Q &= Q_1 \times Q_2 \times \{1,2\} \\
\Delta &= \{((p,p',1), a, (q,q',1)) \mid p \notin F_1 \ \& \ (p,a,q) \in \Delta_1 \ \& \ (p',a,q') \in \Delta_2\} \\
&\quad \cup \{((p,p',1), a, (q,q',2)) \mid p \in F_1 \ \& \ (p,a,q) \in \Delta_1 \ \& \ (p',a,q') \in \Delta_2\} \\
&\quad \cup \{((p,p',2), a, (q,q',2)) \mid p' \notin F_2 \ \& \ (p,a,q) \in \Delta_1 \ \& \ (p',a,q') \in \Delta_2\} \\
&\quad \cup \{((p,p',2), a, (q,q',1)) \mid p' \in F_2 \ \& \ (p,a,q) \in \Delta_1 \ \& \ (p',a,q') \in \Delta_2\} \\
I &= I_1 \times I_2 \times \{1\} \\
F &= Q_1 \times F_2 \times \{2\}
\end{aligned}
$$

T 3.2

Dann gilt $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$. **T 3.2 Forts.** □

16:00 9:37 bis 9:59?

Kurze Wdhlg.: haben Büchi-Automaten eingeführt, Abschlusseigenschaften behandelt.

Vereinigung war einfach; Schnitt ist komplizierter:
2 Kopien des „alten" Produktaut., weil akz. Zust. asynchron auftreten können

Konstruktion auf Folie; jetzt noch 2. Richtung des Korrektheitsbeweises

Beweis bis 16:20

└─Abgeschlossenheit unter Komplement

... siehe Abschnitt
„Deterministische Büchi-Automaten und Determinisierung“

16:20 **9:59–10:00, Ende**

Ziel dieses Abschnitts
Charakterisierung der Büchi-erkennbaren Sprachen mittels regulärer Sprachen

16:20

W^ω entspricht dem Kleene-Stern bei Sprachen endlicher Wörter;
WL entspricht der Konkatenation.

Ziel dieses Abschnitts
Charakterisierung der Büchi-erkennbaren Sprachen mittels regulärer Sprachen

Etwas Notation
Seien $W \subseteq \Sigma^*$ und $L \subseteq \Sigma^\omega$.

- $\boldsymbol{W^\omega} = \{w_0 w_1 w_2 \cdots \mid w_i \in W \setminus \{\varepsilon\}$ für alle $i \geqslant 0\}$
  (ist ω-Sprache, weil ε ausgeschlossen wurde)
- $\boldsymbol{WL} = \{w\alpha \mid w \in W,\ \alpha \in L\}$
  (ist ω-Sprache)

16:20

W^ω entspricht dem Kleene-Stern bei Sprachen endlicher Wörter;
WL entspricht der Konkatenation.

Lemma 3.7
Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

16:22

(Idee: Füge neuen Startzustand hinzu; dupliziere alle Kanten, die von bisherigen SZen ausgehen.

Damit sind (1) und (2) erreicht. (3) ist korrekt, weil $\varepsilon \notin L(\mathcal{A}_1)$.)

(Gegenbeispiel für die Rückrichtung:

$W = \{a^n \mid n \text{ ist prim}\}$

$\Rightarrow\ W^\omega = \{a^\omega\} \qquad (\text{und } W^* = \{a^n \mid n \geq 2\}))$

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (1)

Lemma 3.7
Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

Beweis. (Schritt 1)
Sei $\mathcal{A}$ ein **NEA** mit $L(\mathcal{A}) = W$.

16:22

(Idee: Füge neuen Startzustand hinzu; dupliziere alle Kanten, die von bisherigen SZen ausgehen.

Damit sind (1) und (2) erreicht. (3) ist korrekt, weil $\varepsilon \notin L(\mathcal{A}_1)$.)

(Gegenbeispiel für die Rückrichtung:

$W = \{a^n \mid n \text{ ist prim}\}$

$\Rightarrow \; W^\omega = \{a^\omega\} \qquad (\text{und } W^* = \{a^n \mid n \geq 2\}))$

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (1)

Lemma 3.7
Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

Beweis. (Schritt 1)
Sei $\mathcal{A}$ ein **NEA** mit $L(\mathcal{A}) = W$.
Dann gibt es NEA $\mathcal{A}_1$ mit $L(\mathcal{A}_1) = W \setminus \{\varepsilon\}$ (Abschlusseig.!)

16:22

(Idee: Füge neuen Startzustand hinzu; dupliziere alle Kanten, die von bisherigen SZen ausgehen.

Damit sind (1) und (2) erreicht. (3) ist korrekt, weil $\varepsilon \notin L(\mathcal{A}_1)$.)

(Gegenbeispiel für die Rückrichtung:

$W = \{a^n \mid n \text{ ist prim}\}$

$\Rightarrow\ W^\omega = \{a^\omega\} \qquad (\text{und } W^* = \{a^n \mid n \geq 2\})$)

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (1)

Lemma 3.7
Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

Beweis. (Schritt 1)
Sei $\mathcal{A}$ ein **NEA** mit $L(\mathcal{A}) = W$.
Dann gibt es NEA $\mathcal{A}_1$ mit $L(\mathcal{A}_1) = W \setminus \{\varepsilon\}$ (Abschlusseig.!)
O. B. d. A. habe $\mathcal{A}_1$ ...

1. einen **einzigen** Anfangszustand q_I und
2. **keine** in q_I **eingehenden** Kanten: keine Transitionen $(\cdot, \cdot, q_I)$
3. und sei $q_I \notin F$.

16:22

$\Big($Idee: Füge neuen Startzustand hinzu; dupliziere alle Kanten, die von bisherigen SZen ausgehen.

Damit sind (1) und (2) erreicht. (3) ist korrekt, weil $\varepsilon \notin L(\mathcal{A}_1)$.$\Big)$

$\Big($Gegenbeispiel für die Rückrichtung:

$W = \{a^n \mid n \text{ ist prim}\}$

$\Rightarrow\ W^\omega = \{a^\omega\} \qquad (\text{und } W^* = \{a^n \mid n \geq 2\})\Big)$

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (1)

Lemma 3.7
Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

Beweis. (Schritt 1)
Sei $\mathcal{A}$ ein **NEA** mit $L(\mathcal{A}) = W$.
Dann gibt es NEA $\mathcal{A}_1$ mit $L(\mathcal{A}_1) = W \setminus \{\varepsilon\}$ (Abschlusseig.!)
O. B. d. A. habe $\mathcal{A}_1$ …

1. einen **einzigen** Anfangszustand q_I und
2. **keine** in q_I **eingehenden** Kanten: keine Transitionen $(\cdot, \cdot, q_I)$
3. und sei $q_I \notin F$.

Diese Form lässt sich durch Hinzufügen eines frischen Anfangszustandes (und der entsprechenden Transitionen) erreichen! (Ü)

16:22

(Idee: Füge neuen Startzustand hinzu; dupliziere alle Kanten, die von bisherigen SZen ausgehen.

Damit sind (1) und (2) erreicht. (3) ist korrekt, weil $\varepsilon \notin L(\mathcal{A}_1)$.)

(Gegenbeispiel für die Rückrichtung:

$W = \{a^n \mid n \text{ ist prim}\}$

$\Rightarrow\ W^\omega = \{a^\omega\} \qquad (\text{und } W^* = \{a^n \mid n \geq 2\})$)

2018-12-18

Lemma 3.7
Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

Beweis. (Schritt 2a)
Sei also $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \{q_I\}, F)$ mit den genannten Eigenschaften und $L(\mathcal{A}_1) = W \setminus \{\varepsilon\}$.

16:24

Letztlich ist das dieselbe Idee wie bei der Kleene-Abg. der NEA-erkennbaren Sprachen:
erzeuge Kreis, der ∞ oft durchlaufen werden kann.

Die kann man aber nicht so leicht auf Büchiaut. übertragen, denn sie führt ε-Kanten ein, und diese kann man innerhalb von Kreisen nicht so leicht eliminieren wie bei NEAs (ehemals akz. Zustände könnten keine ausgehenden Kanten mehr haben, also gehen erfolgr. Runs verloren . . .)

Lemma 3.7
Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

Beweis. (Schritt 2a)
Sei also $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \{q_I\}, F)$ mit den genannten Eigenschaften und $L(\mathcal{A}_1) = W \setminus \{\varepsilon\}$.

Idee: konstruiere **NBA $\mathcal{A}_2$**, der

- $\mathcal{A}_1$ simuliert, bis ein akzeptierender Zustand erreicht ist und
- dann **nichtdeterministisch entscheidet,** ob die Simulation fortgesetzt wird oder eine neue Simulation von q_0 aus gestartet wird

16:24

Letztlich ist das dieselbe Idee wie bei der Kleene-Abg. der NEA-erkennbaren Sprachen:
erzeuge Kreis, der ∞ oft durchlaufen werden kann.

Die kann man aber nicht so leicht auf Büchiaut. übertragen, denn sie führt ε-Kanten ein, und diese kann man innerhalb von Kreisen nicht so leicht eliminieren wie bei NEAs (ehemals akz. Zustände könnten keine ausgehenden Kanten mehr haben, also gehen erfolgr. Runs verloren . . .)

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (1)

Lemma 3.7

Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

Beweis. (Schritt 2b)

Sei also $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \{q_I\}, F)$ mit den genannten Eigenschaften und $L(\mathcal{A}_1) = W \setminus \{\varepsilon\}$.

Definiere NBA $\mathcal{A}_2 = (Q_1, \Sigma, \Delta_2, \{q_I\}, \{q_I\})$ mit

16:26 bis 16:45 $\rightarrow$ 5min Pause

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (1)

Lemma 3.7
Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

Beweis. (Schritt 2b)

Sei also $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \{q_I\}, F)$ mit den genannten Eigenschaften und $L(\mathcal{A}_1) = W \setminus \{\varepsilon\}$.

Definiere NBA $\boldsymbol{\mathcal{A}_2} = (Q_1, \Sigma, \boldsymbol{\Delta_2}, \{q_I\}, \{\boldsymbol{q_I}\})$ mit

$$\boldsymbol{\Delta_2} = \Delta_1 \cup \{(q, a, q_I) \mid (q, a, q_f) \in \Delta_1 \text{ für ein } q_f \in F\}$$

16:26 bis 16:45 $\rightarrow$ 5min Pause

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (1)

Lemma 3.7

Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

Beweis. (Schritt 2b)

Sei also $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \{q_I\}, F)$ mit den genannten Eigenschaften und $L(\mathcal{A}_1) = W \setminus \{\varepsilon\}$.

Definiere NBA $\boldsymbol{\mathcal{A}_2} = (Q_1, \Sigma, \boldsymbol{\Delta_2}, \{q_I\}, \{q_I\})$ mit

$$\boldsymbol{\Delta_2} \;=\; \Delta_1 \cup \{(q, a, q_I) \mid (q, a, q_f) \in \Delta_1 \text{ für ein } q_f \in F\}$$

(d. h. alle Kanten, die in $\mathcal{A}_1$ zu einem akz. Zustand führen, können in $\mathcal{A}_2$ zusätzlich zu q_I führen
– siehe „nichtdeterministisch entscheidet“ auf voriger Folie!)

16:26 bis 16:45 $\rightarrow$ 5min Pause

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (1)

Lemma 3.7

Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

Beweis. (Schritt 2b)

Sei also $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \{q_I\}, F)$ mit den genannten Eigenschaften und $L(\mathcal{A}_1) = W \setminus \{\varepsilon\}$.

Definiere NBA $\boldsymbol{\mathcal{A}_2} = (Q_1, \Sigma, \boldsymbol{\Delta_2}, \{q_I\}, \{q_I\})$ mit

$$\boldsymbol{\Delta_2} = \Delta_1 \cup \{(q, a, q_I) \mid (q, a, q_f) \in \Delta_1 \text{ für ein } q_f \in F\}$$

(d. h. alle Kanten, die in $\mathcal{A}_1$ zu einem akz. Zustand führen,
können in $\mathcal{A}_2$ zusätzlich zu q_I führen
– siehe „nichtdeterministisch entscheidet“ auf voriger Folie!)

Noch zu zeigen: $L_\omega(\mathcal{A}_2) = L(\mathcal{A}_1)^\omega$ **T 3.3** □

16:26 bis 16:45 → 5min Pause

16:50

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (2)

Lemma 3.8

Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$
und jede Büchi-erkennbare Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ gilt:
WL ist Büchi-erkennbar.

16:50

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (2)

Lemma 3.8

Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$
und jede Büchi-erkennbare Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ gilt:
WL ist Büchi-erkennbar.

Beweis:
Wie Abgeschlossenheit der regulären Sprachen unter Konkatenation. □

Satz von Büchi

Satz 3.9

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ ist Büchi-erkennbar genau dann, wenn es reguläre Sprachen $V_1, W_1, \ldots, V_n, W_n$ gibt mit $n \geqslant 1$ und

$$L = V_1 W_1^\omega \cup \cdots \cup V_n W_n^\omega$$

16:52 bis 17:02

TODO: Tafelanschrieb auf Folie; hier passiert nix Anstrengendes.

Satz von Büchi

Satz 3.9
Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ ist Büchi-erkennbar genau dann,
wenn es reguläre Sprachen $V_1, W_1, \dots, V_n, W_n$ gibt mit $n \geqslant 1$ und

$$L = V_1 W_1^\omega \cup \cdots \cup V_n W_n^\omega$$

Beweisskizze: (Quiz: Welche der Richtungen $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ist leichter?)

16:52 bis 17:02

TODO: Tafelanschrieb auf Folie; hier passiert nix Anstrengendes.

Satz von Büchi

Satz 3.9
Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ ist Büchi-erkennbar genau dann, wenn es reguläre Sprachen $V_1, W_1, \dots, V_n, W_n$ gibt mit $n \geqslant 1$ und

$$L = V_1 W_1^\omega \cup \dots \cup V_n W_n^\omega$$

Beweisskizze:

"$\Leftarrow$": folgt aus Lemmas 3.5, 3.7 und 3.8

"$\Rightarrow$": bilden V_i, W_i aus denjenigen Wörtern, die zum jeweils nächsten Vorkommen eines akzeptierenden Zustandes führen

Details siehe Tafel. **T 3.4** □

16:52 bis 17:02

TODO: Tafelanschrieb auf Folie; hier passiert nix Anstrengendes.

Satz von Büchi

Satz 3.9
Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ ist Büchi-erkennbar genau dann,
wenn es reguläre Sprachen $V_1, W_1, \dots, V_n, W_n$ gibt mit $n \geqslant 1$ und

$$L = V_1 W_1^\omega \cup \dots \cup V_n W_n^\omega$$

Beweisskizze:

"$\Leftarrow$": folgt aus Lemmas 3.5, 3.7 und 3.8

"$\Rightarrow$": bilden V_i, W_i aus denjenigen Wörtern, die zum jeweils nächsten Vorkommen eines akzeptierenden Zustandes führen

Details siehe Tafel. **T 3.4** □

Konsequenz:

Büchi-erkennbare Sprachen durch **ω-reguläre Ausdrücke** darstellbar:

$$r_1 s_1^\omega + \dots + r_n s_n^\omega \qquad (r_i, s_i \text{ sind reguläre Ausdrücke})$$

16:52 bis 17:02

TODO: Tafelanschrieb auf Folie; hier passiert nix Anstrengendes.

Ziel dieses Abschnitts

Wollen zeigen:

- det. und nichtdet. Büchi-Automaten sind **nicht** gleichmächtig
  d. h.: es gibt ω-Sprachen, die von NBAs akzeptiert werden, aber nicht von DBAs
- Komplement-Abgeschlossenheit gilt trotzdem
  (der Beweis wird aber anspruchsvoll sein)

17:02

„nicht gleichmächtig“: Überraschung! :)

Beachte: hier wieder „genau ein“
(Papierkörbe sind wieder einfach, wie bei DEAs)

Ziel dieses Abschnitts

Wollen zeigen:

- det. und nichtdet. Büchi-Automaten sind **nicht** gleichmächtig
  d. h.: es gibt ω-Sprachen, die von NBAs akzeptiert werden, aber nicht von DBAs
- Komplement-Abgeschlossenheit gilt trotzdem
  (der Beweis wird aber anspruchsvoll sein)

Definition 3.10
Ein **deterministischer Büchi-Automat (DBA)** ist ein NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit

- $|I| = 1$
- $|\{q' \mid (q, a, q') \in \Delta\}| = 1$ für alle $(q, a) \in Q \times \Sigma$

17:02

„nicht gleichmächtig“: Überraschung! :)

Beachte: hier wieder „genau ein“
(Papierkörbe sind wieder einfach, wie bei DEAs)

Zu Hilfe: Charakterisierung der DBA-erkennbaren Sprachen

Sei $W \subseteq \Sigma^*$.
$\overrightarrow{W} = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \alpha[0,n] \in W$ für unendlich viele $n\}$
(d. h. α hat ∞ viele Präfixe in W) **T 3.5**

17:04

Dazu zunächst auch eine Charakt. der DBA-erkennbaren Sprachen, die uns erlauben wird, NBAs und DBAs bezüglich der Mächtigkeit zu trennen.

T3.5 bis 17:14

T3.6 bis 17:24

Zu Hilfe: Charakterisierung der DBA-erkennbaren Sprachen

Sei $W \subseteq \Sigma^*$.
$\overrightarrow{W} = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \alpha[0,n] \in W$ für unendlich viele $n\}$
(d. h. α hat ∞ viele Präfixe in W) **T 3.5**

Satz 3.11
Eine ω-Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ ist DBA-erkennbar genau dann, wenn es eine reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gibt mit $L = \overrightarrow{W}$.

17:04

Dazu zunächst auch eine Charakt. der DBA-erkennbaren Sprachen, die uns erlauben wird, NBAs und DBAs bezüglich der Mächtigkeit zu trennen.

T3.5 bis 17:14

T3.6 bis 17:24

Zu Hilfe: Charakterisierung der DBA-erkennbaren Sprachen

Sei $W \subseteq \Sigma^*$.

$\overrightarrow{W} = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \alpha[0,n] \in W$ für unendlich viele $n\}$
(d. h. α hat ∞ viele Präfixe in W) **T 3.5**

Satz 3.11
Eine ω-Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ ist DBA-erkennbar genau dann, wenn es eine reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gibt mit $L = \overrightarrow{W}$.

Beweis. Genügt zu zeigen, dass für jeden DEA/DBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, \{q_I\}, F)$ gilt:

$$L_\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L(\mathcal{A})}$$

T 3.6 □

17:04

Dazu zunächst auch eine Charakt. der DBA-erkennbaren Sprachen, die uns erlauben wird, NBAs und DBAs bezüglich der Mächtigkeit zu trennen.

T3.5 bis 17:14

T3.6 bis 17:24

DBAs sind schwächer als NBAs

Satz 3.12
Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache,
die nicht durch einen DBA erkannt wird.

17:24 bis 17:29

Am Anfang fragen: Ideen für so eine Sprache?

2018-12-18

DBAs sind schwächer als NBAs

Satz 3.12
Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache,
die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Beweis.

- Betrachte $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\omega \mid \#_a(\alpha) \text{ ist endlich}\}$
- L ist Büchi-erkennbar:

17:24 bis 17:29

Am Anfang fragen: Ideen für so eine Sprache?

DBAs sind schwächer als NBAs

Satz 3.12
Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache,
die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Beweis.

- Betrachte $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\omega \mid \#_a(\alpha) \text{ ist endlich}\}$
- L ist Büchi-erkennbar: $L = \Sigma^*\{b\}^\omega$, wende Satz 3.9 an

17:24 bis 17:29

Am Anfang fragen: Ideen für so eine Sprache?

DBAs sind schwächer als NBAs

Satz 3.12
Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache,
die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Beweis.

- Betrachte $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\omega \mid \#_a(\alpha) \text{ ist endlich}\}$
- L ist Büchi-erkennbar: $L = \Sigma^*\{b\}^\omega$, wende Satz 3.9 an
- Annahme, L sei DBA-erkennbar.
  - $\Rightarrow$ Satz 3.11: $L = \overrightarrow{W}$ für eine reguläre Sprache W

17:24 bis 17:29

Am Anfang fragen: Ideen für so eine Sprache?

DBAs sind schwächer als NBAs

Satz 3.12
Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache,
die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Beweis.

- Betrachte $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\omega \mid \#_a(\alpha) \text{ ist endlich}\}$
- L ist Büchi-erkennbar: $L = \Sigma^*\{b\}^\omega$, wende Satz 3.9 an
- Annahme, L sei DBA-erkennbar.
  - $\Rightarrow$ Satz 3.11: $L = \overrightarrow{W}$ für eine reguläre Sprache W
  - $\Rightarrow$ Wegen $b^\omega \in L$ gibt es ein nichtleeres Wort $b^{n_1} \in W$

17:24 bis 17:29

Am Anfang fragen: Ideen für so eine Sprache?

DBAs sind schwächer als NBAs

Satz 3.12

Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache,
die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Beweis.

- Betrachte $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\omega \mid \#_a(\alpha) \text{ ist endlich}\}$
- L ist Büchi-erkennbar: $L = \Sigma^*\{b\}^\omega$, wende Satz 3.9 an
- Annahme, L sei DBA-erkennbar.
  - $\Rightarrow$ Satz 3.11: $L = \overrightarrow{W}$ für eine reguläre Sprache W
  - $\Rightarrow$ Wegen $b^\omega \in L$ gibt es ein nichtleeres Wort $b^{n_1} \in W$
    Wegen $b^{n_1}ab^\omega \in L$ gibt es ein nichtleeres Wort $b^{n_1}ab^{n_2} \in W$

17:24 bis 17:29

Am Anfang fragen: Ideen für so eine Sprache?

DBAs sind schwächer als NBAs

Satz 3.12
Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache,
die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Beweis.

- Betrachte $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\omega \mid \#_a(\alpha) \text{ ist endlich}\}$
- L ist Büchi-erkennbar: $L = \Sigma^*\{b\}^\omega$, wende Satz 3.9 an
- Annahme, L sei DBA-erkennbar.
  - $\Rightarrow$ Satz 3.11: $L = \overrightarrow{W}$ für eine reguläre Sprache W
  - $\Rightarrow$ Wegen $b^\omega \in L$ gibt es ein nichtleeres Wort $b^{n_1} \in W$
    Wegen $b^{n_1}ab^\omega \in L$ gibt es ein nichtleeres Wort $b^{n_1}ab^{n_2} \in W$

    $\vdots$

17:24 bis 17:29

Am Anfang fragen: Ideen für so eine Sprache?

DBAs sind schwächer als NBAs

Satz 3.12
Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache,
die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Beweis.

- Betrachte $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\omega \mid \#_a(\alpha) \text{ ist endlich}\}$
- L ist Büchi-erkennbar: $L = \Sigma^*\{b\}^\omega$, wende Satz 3.9 an
- Annahme, L sei DBA-erkennbar.
  - $\Rightarrow$ Satz 3.11: $L = \overrightarrow{W}$ für eine reguläre Sprache W
  - $\Rightarrow$ Wegen $b^\omega \in L$ gibt es ein nichtleeres Wort $b^{n_1} \in W$
    Wegen $b^{n_1}ab^\omega \in L$ gibt es ein nichtleeres Wort $b^{n_1}ab^{n_2} \in W$
    $\vdots$
  - $\Rightarrow$ $\alpha := b^{n_1}ab^{n_2}ab^{n_3}\ldots \in \overrightarrow{W}$

17:24 bis 17:29

Am Anfang fragen: Ideen für so eine Sprache?

DBAs sind schwächer als NBAs

Satz 3.12
Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache,
die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Beweis.

- Betrachte $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\omega \mid \#_a(\alpha) \text{ ist endlich}\}$
- L ist Büchi-erkennbar: $L = \Sigma^*\{b\}^\omega$, wende Satz 3.9 an
- Annahme, L sei DBA-erkennbar.
  - $\Rightarrow$ Satz 3.11: $L = \overrightarrow{W}$ für eine reguläre Sprache W
  - $\Rightarrow$ Wegen $b^\omega \in L$ gibt es ein nichtleeres Wort $b^{n_1} \in W$
    Wegen $b^{n_1}ab^\omega \in L$ gibt es ein nichtleeres Wort $b^{n_1}ab^{n_2} \in W$
    $\vdots$
  - $\Rightarrow$ $\alpha := b^{n_1}ab^{n_2}ab^{n_3}\ldots \in \overrightarrow{W}$ **Widerspruch:** $\alpha \notin L$ $\square$

17:24 bis 17:29

Am Anfang fragen: Ideen für so eine Sprache?

Die DBA-erkennbaren Sprachen sind **nicht** unter Komplement abgeschlossen:

- $L = \{\alpha \in \{a,b\}^\omega \mid \#_a(\alpha) \text{ ist endlich}\}$ wird von keinem DBA erkannt
- aber $\overline{L}$ wird von einem DBA erkannt (Ü)

17:29 bis 17:30 $\rightarrow$ hoffentlich Punktlandung!

Wie können wir trotzdem determinisieren?

8:30

Erinnerung vom letzten Mal: haben DBAs eingeführt und gezeigt, dass sie weniger mächtig sind als NBAs (über versch. Charakterisierungen mittels regulärer Sprachen)

Heute: wollen geänderte Automatenmodelle einführen und zeigen, dass ihre deterministischen Varianten genauso mächtig sind wie NBAs.

Wie können wir trotzdem determinisieren?

Indem wir das Automatenmodell ändern!

Genauer: ändern die Akzeptanzbedingung

8:30

Erinnerung vom letzten Mal: haben DBAs eingeführt und gezeigt, dass sie weniger mächtig sind als NBAs
(über versch. Charakterisierungen mittels regulärer Sprachen)

Heute: wollen geänderte Automatenmodelle einführen und zeigen, dass ihre deterministischen Varianten genauso mächtig sind wie NBAs.

Wie können wir trotzdem determinisieren?

Indem wir das Automatenmodell ändern!
Genauer: ändern die Akzeptanzbedingung

Zur Erinnerung
NBA ist 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit
- ...
- $F \subseteq Q$ (Menge der akz. Zustände)

Erfolgreicher Run: $r = q_0q_1q_2\ldots$ mit $q_0 \in I$ und $\mathrm{Inf}(r) \cap F \neq \emptyset$

Idee: r erfolgreich $\Leftrightarrow$ ein Zustand aus F kommt ∞ oft in r vor

(Julius Richard Büchi, 1924–1984, Logiker/Mathematiker; Zürich, Lafayette)

8:30

Erinnerung vom letzten Mal: haben DBAs eingeführt und gezeigt, dass sie weniger mächtig sind als NBAs
(über versch. Charakterisierungen mittels regulärer Sprachen)

Heute: wollen geänderte Automatenmodelle einführen und zeigen, dass ihre deterministischen Varianten genauso mächtig sind wie NBAs.

Muller-Automaten (David E. Muller, 1924–2008, Math./Inf.; Illinois)

Definition 3.13

Nichtdet. **Muller-Automat (NMA)** ist 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ mit

- ...
- $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$ (Kollektion von Endzustandsmengen)

Erfolgreicher Run $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$ mit $q_0 \in I$ und $\mathrm{Inf}(r) \in \mathcal{F}$

Idee: r erfolgreich $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Inf}(r)$ stimmt mit einer Menge aus $\mathcal{F}$ überein

T 3.7

8:32 bis 8:44

Rabin-Automaten (Michael O. Rabin, *1931, Inf.; Jerusalem, Princeton, Harvard)

Definition 3.14

Nichtdet. **Rabin-Automat (NRA)** ist 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \underset{\sim}{\mathcal{P}})$ mit

- ...
- $\mathcal{P} = \{(E_1, F_1),\ \ldots,\ (E_n, F_n)\}$ mit $E_i, F_i \subseteq Q$
  (Menge „akzeptierender Paare“)

Erfolgreicher Run $r = q_0q_1q_2\ldots$ mit $q_0 \in I$ und

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Inf}(r) \cap E_i = \emptyset \quad \text{und} \quad \mathrm{Inf}(r) \cap F_i \neq \emptyset$$

Idee: r erfolgreich $\Leftrightarrow$ es gibt Paar (E_i, F_i), so dass

- **mindestens ein** Zustand aus F_i unendlich oft in r vorkommt &
- **alle** Zustände aus E_i nur endlich oft in r vorkommen **T 3.8**

8:44 bis 8:54

Streett-Automaten (Robert S. Streett, ?; Boston, Oakland)

Definition 3.15

Nichtdet. **Streett-Automat (NSA)** ist 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{P})$ mit

- ...
- $\mathcal{P} = \{(E_1, F_1), \ldots, (E_n, F_n)\}$ mit $E_i, F_i \subseteq Q$ (Menge „fairer Paare")

Erfolgreicher Run $r = q_0q_1q_2\ldots$ mit $q_0 \in I$ und

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$: wenn $\mathrm{Inf}(r) \cap F_i \neq \emptyset$, dann $\mathrm{Inf}(r) \cap E_i \neq \emptyset$

Idee: r erfolgreich $\Leftrightarrow$ **für alle** Paare (E_i, F_i) gilt:

- **wenn** ein Zustand aus F_i unendlich oft in r vorkommt,
- **dann** kommt ein Zustand aus E_i unendlich oft in r vor **T 3.9**

8:54 bis 9:06

2018-12-18

Für $X \in \{$Muller, Rabin, Streett$\}$ werden analog definiert:

- $L_\omega(\mathcal{A})$ für (nichtdeterministische) X-Automaten
- **X-erkennbar**

9:06

Für $X \in \{\text{Muller}, \text{Rabin}, \text{Streett}\}$ werden analog definiert:

- $\boldsymbol{L_\omega(\mathcal{A})}$ für (nichtdeterministische) X-Automaten
- ***X*-erkennbar**

Satz 3.16

Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(B) L ist Büchi-erkennbar. (R) L ist Rabin-erkennbar.
(M) L ist Muller-erkennbar. (S) L ist Streett-erkennbar.

9:06

Gleichmächtigkeit der vier Automatenmodelle

Für $X \in \{\text{Muller}, \text{Rabin}, \text{Streett}\}$ werden analog definiert:

- $L_\omega(\mathcal{A})$ für (nichtdeterministische) X-Automaten
- **X-erkennbar**

Satz 3.16
Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.
(B) L ist Büchi-erkennbar. (R) L ist Rabin-erkennbar.
(M) L ist Muller-erkennbar. (S) L ist Streett-erkennbar.

Beweis: Konsequenz aus Lemmas 3.17–3.19. ↓ **T 3.10** □

9:06

Lemma 3.17

1. Wenn L Büchi-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.
2. Wenn L Rabin-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.
3. Wenn L Streett-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.

9:08

Idee: Kodiere F in $\mathcal{F}$.
Die Q' sind alle erlaubten Unendlichkeitsmengen $\mathrm{Inf}(r)$.

Lemma 3.17

1. Wenn L Büchi-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.
2. Wenn L Rabin-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.
3. Wenn L Streett-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.

Beweis.

(1) Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ NBA.
Konstruiere NMA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ mit

$$\mathcal{F} = \{Q' \subseteq Q \mid Q' \cap F \neq \emptyset\}.$$

Leicht zu sehen: $L_\omega(\mathcal{A}') = L_\omega(\mathcal{A})$.

9:08

Idee: Kodiere F in $\mathcal{F}$.
Die Q' sind alle erlaubten Unendlichkeitsmengen $\mathrm{Inf}(r)$.

Lemma 3.17

1. Wenn L Büchi-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.
2. Wenn L Rabin-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.
3. Wenn L Streett-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.

Beweis.
(2) Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{P})$ NRA.
Konstruiere NMA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ mit

$$\mathcal{F} = \{Q' \subseteq Q \mid \exists i \leq n : Q' \cap E_i = \emptyset \text{ und } Q' \cap F_i \neq \emptyset\}.$$

Leicht zu sehen: $L_\omega(\mathcal{A}') = L_\omega(\mathcal{A})$.

9:11

Dieselbe Idee: Kodiere $\mathcal{P}$ in $\mathcal{F}$.

… und natürlich auch bei Streett-Automaten …

Von B-, R-, S- zu Muller-Automaten

Lemma 3.17

1. Wenn L Büchi-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.
2. Wenn L Rabin-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.
3. Wenn L Streett-erkennbar, dann auch Muller-erkennbar.

Beweis.

(2) Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{P})$ NRA.
Konstruiere NMA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ mit

$$\mathcal{F} = \{Q' \subseteq Q \mid \exists i \leq n : Q' \cap E_i = \emptyset \text{ und } Q' \cap F_i \neq \emptyset\}.$$

Leicht zu sehen: $L_\omega(\mathcal{A}') = L_\omega(\mathcal{A})$.

(3) Analog. □

9:11

Dieselbe Idee: Kodiere $\mathcal{P}$ in $\mathcal{F}$.

… und natürlich auch bei Streett-Automaten …

Lemma 3.18

Wenn L Büchi-erkennbar, dann auch

1. Rabin-erkennbar und
2. Streett-erkennbar.

9:13 bis 9:15, 5 min Pause.

Jeweils vorm Aufdecken von $\mathcal{P}$: wer weiß es?

Lemma 3.18
Wenn L Büchi-erkennbar, dann auch
1. Rabin-erkennbar und
2. Streett-erkennbar.

Beweis.
(1) Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ NBA.
Konstruiere NRA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{P})$ mit

$$\mathcal{P} =$$

9:13 bis 9:15, 5 min Pause.

Jeweils vorm Aufdecken von $\mathcal{P}$: wer weiß es?

Lemma 3.18

Wenn L Büchi-erkennbar, dann auch

1. Rabin-erkennbar und
2. Streett-erkennbar.

Beweis.

(1) Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ NBA.

Konstruiere NRA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{P})$ mit

$$\mathcal{P} = \{(\emptyset, F)\}.$$

9:13 bis 9:15, 5 min Pause.

Jeweils vorm Aufdecken von $\mathcal{P}$: wer weiß es?

Lemma 3.18
Wenn L Büchi-erkennbar, dann auch
1. Rabin-erkennbar und
2. Streett-erkennbar.

Beweis.
(1) Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ NBA.
Konstruiere NRA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{P})$ mit

$$\mathcal{P} = \{(\emptyset, F)\}.$$

Leicht zu sehen: $L_\omega(\mathcal{A}') = L_\omega(\mathcal{A})$.

9:13 bis 9:15, 5 min Pause.

Jeweils vorm Aufdecken von $\mathcal{P}$: wer weiß es?

Von Büchi- zu R- und S-Automaten

Lemma 3.18
Wenn L Büchi-erkennbar, dann auch

1. Rabin-erkennbar und
2. Streett-erkennbar.

Beweis.
(1) Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ NBA.
Konstruiere NRA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{P})$ mit

$$\mathcal{P} = \{(\emptyset, F)\}.$$

Leicht zu sehen: $L_\omega(\mathcal{A}') = L_\omega(\mathcal{A})$.
(2) Analog, aber mit $\mathcal{P} =$

9:13 bis 9:15, 5 min Pause.

Jeweils vorm Aufdecken von $\mathcal{P}$: wer weiß es?

Lemma 3.18

Wenn L Büchi-erkennbar, dann auch

1. Rabin-erkennbar und
2. Streett-erkennbar.

Beweis.

(1) Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ NBA.
Konstruiere NRA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{P})$ mit

$$\mathcal{P} = \{(\emptyset, F)\}.$$

Leicht zu sehen: $L_\omega(\mathcal{A}') = L_\omega(\mathcal{A})$.

(2) Analog, aber mit $\mathcal{P} = \{(F, Q)\}$. □

9:13 bis 9:15, 5 min Pause.

Jeweils vorm Aufdecken von $\mathcal{P}$: wer weiß es?

Lemma 3.19
Jede Muller-erkennbare Sprache ist Büchi-erkennbar.

9:20

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Lemma 3.19
Jede Muller-erkennbare Sprache ist Büchi-erkennbar.

Beweis.

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ ein Muller-Automat

9:20

Lemma 3.19
Jede Muller-erkennbare Sprache ist Büchi-erkennbar.

Beweis.

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ ein Muller-Automat
- Dann ist $L_\omega(\mathcal{A}) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} L_\omega((Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\}))$

9:20

2018-12-18

9:20

Lemma 3.19
Jede Muller-erkennbare Sprache ist Büchi-erkennbar.

Beweis.

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ ein Muller-Automat
- Dann ist $L_\omega(\mathcal{A}) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} L_\omega((Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\}))$
- Wegen $\cup$-Abgeschlossenheit genügt es zu zeigen, dass $L_\omega((Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\}))$ Büchi-erkennbar ist

9:20

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Lemma 3.19
Jede Muller-erkennbare Sprache ist Büchi-erkennbar.

Beweis.

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ ein Muller-Automat
- Dann ist $L_\omega(\mathcal{A}) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} L_\omega(\,(Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})\,)$
- Wegen $\cup$-Abgeschlossenheit genügt es zu zeigen, dass $L_\omega(\,(Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})\,)$ Büchi-erkennbar ist
- Konstruiere Büchi-Automaten $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I, F')$, der
  - $\mathcal{A}$ simuliert
  - einen Zeitpunkt rät, ab dem nur noch Zustände aus F vorkommen
  - ab dort sicherstellt, dass *alle* diese unendlich oft vorkommen

Sei also $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})$ (Muller-Automat)
Konstruieren NBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

9:23

TODO Vorschlag (Tryggve, WiSe 18/19):

Man kann auch die Zustände aus F ordnen $(f_1, \dots, f_n)$ und dann analog zur Produktkonstruktion n Modi verwenden, d. h. Modus i bedeutet „erwarte f_i“. Dann sind die Zustände der Phase 2 nur Paare aus EZ und Modus, und Δ' hat vielleicht eine angenehmere Notation. $\rightsquigarrow$ **Ausprobieren!**

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Sei also $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})$ (Muller-Automat)
Konstruieren NBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \underbrace{Q}_{\text{Phase 1}} \cup \underbrace{\{\langle q_f, S\rangle \mid q_f \in F, S \subseteq F\}}_{\text{Phase 2}}$

9:23

TODO Vorschlag (Tryggve, WiSe 18/19):

Man kann auch die Zustände aus F ordnen $(f_1, \dots, f_n)$ und dann analog zur Produktkonstruktion n Modi verwenden, d. h. Modus i bedeutet „erwarte f_i“. Dann sind die Zustände der Phase 2 nur Paare aus EZ und Modus, und Δ' hat vielleicht eine angenehmere Notation. $\rightsquigarrow$ **Ausprobieren!**

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Sei also $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})$ (Muller-Automat)
Konstruieren NBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \underbrace{Q}_{\text{Phase 1}} \cup \underbrace{\{\langle q_f, S\rangle \mid q_f \in F, S \subseteq F\}}_{\text{Phase 2}}$

  Ph. 1: $\mathcal{A}'$ simuliert $\mathcal{A}$, bis $\mathcal{A}$ **irgendwann** in einem $q_f \in F$ ist

  Ph. 2: $\mathcal{A}'$ will nur noch Zustände $\in F$ sehen und **jeden** ∞ oft

9:23

TODO Vorschlag (Tryggve, WiSe 18/19):

Man kann auch die Zustände aus F ordnen $(f_1, \ldots, f_n)$ und dann analog zur Produktkonstruktion n Modi verwenden, d. h. Modus i bedeutet „erwarte f_i". Dann sind die Zustände der Phase 2 nur Paare aus EZ und Modus, und Δ' hat vielleicht eine angenehmere Notation. $\rightsquigarrow$ **Ausprobieren!**

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Sei also $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})$ (Muller-Automat)
Konstruieren NBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \underbrace{Q}_{\text{Phase 1}} \cup \underbrace{\{\langle q_f, S\rangle \mid q_f \in F, S \subseteq F\}}_{\text{Phase 2}}$

  Ph. 1: $\mathcal{A}'$ simuliert $\mathcal{A}$, bis $\mathcal{A}$ **irgendwann** in einem $q_f \in F$ ist

  Ph. 2: $\mathcal{A}'$ will nur noch Zustände $\in F$ sehen und **jeden** ∞ oft

  - $\mathcal{A}'$ wechselt in $\langle q_f, S\rangle$ mit $S = \{q_f\}$
  - S enthält die seit dem letzten Zurücksetzen besuchten $q \in F$
  - Wenn $S = F$, wird S auf $\emptyset$ „zurückgesetzt"
  - akz. Zustände: ein $\langle q_f, F\rangle$ muss ∞ oft gesehen werden

9:23

TODO Vorschlag (Tryggve, WiSe 18/19):

Man kann auch die Zustände aus F ordnen ($f_1, \ldots, f_n$) und dann analog zur Produktkonstruktion n Modi verwenden, d. h. Modus i bedeutet „erwarte f_i“. Dann sind die Zustände der Phase 2 nur Paare aus EZ und Modus, und Δ' hat vielleicht eine angenehmere Notation. $\leadsto$ **Ausprobieren!**

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Sei also $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})$ (Muller-Automat)
Konstruieren NBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \underbrace{Q}_{\text{Phase 1}} \cup \underbrace{\{\langle q_f, S\rangle \mid q_f \in F, S \subseteq F\}}_{\text{Phase 2}}$
- $\Delta' = \Delta$

9:26 bis spätestens 9:56

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Sei also $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})$ (Muller-Automat)
Konstruieren NBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \underbrace{Q}_{\text{Phase 1}} \cup \underbrace{\{\langle q_f, S\rangle \mid q_f \in F, S \subseteq F\}}_{\text{Phase 2}}$
- $\Delta' = \Delta$
  $\cup \{(q, a, \langle q_f, \{q_f\}\rangle) \mid (q, a, q_f) \in \Delta,\ q_f \in F\}$

9:26 bis spätestens 9:56

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Sei also $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})$ (Muller-Automat)
Konstruieren NBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \underbrace{Q}_{\text{Phase 1}} \cup \underbrace{\{\langle q_f, S\rangle \mid q_f \in F, S \subseteq F\}}_{\text{Phase 2}}$
- $\Delta' = \Delta$
  $\cup \{(q, a, \langle q_f, \{q_f\}\rangle) \mid (q, a, q_f) \in \Delta,\ q_f \in F\}$
  $\cup \{(\langle q, S\rangle, a, \langle q', S \cup \{q'\}\rangle) \mid (q, a, q') \in \Delta,\ q, q' \in F,\ S \neq F\}$

9:26 bis spätestens 9:56

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Sei also $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})$ (Muller-Automat)
Konstruieren NBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \underbrace{Q}_{\text{Phase 1}} \cup \underbrace{\{\langle q_f, S\rangle \mid q_f \in F, S \subseteq F\}}_{\text{Phase 2}}$
- $$\begin{aligned} \Delta' = \Delta & \\ &\cup \{(q, a, \langle q_f, \{q_f\}\rangle) \mid (q, a, q_f) \in \Delta,\ q_f \in F\} \\ &\cup \{(\langle q, S\rangle, a, \langle q', S \cup \{q'\}\rangle) \mid (q, a, q') \in \Delta,\ q, q' \in F,\ S \neq F\} \\ &\cup \{(\langle q, F\rangle, a, \langle q', \{q'\}\rangle) \mid (q, a, q') \in \Delta,\ q, q' \in F\} \end{aligned}$$

9:26 bis spätestens 9:56

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Sei also $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})$ (Muller-Automat)
Konstruieren NBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \underbrace{Q}_{\text{Phase 1}} \cup \underbrace{\{\langle q_f, S\rangle \mid q_f \in F, S \subseteq F\}}_{\text{Phase 2}}$
- $$\begin{aligned}\Delta' = \Delta & \cup \{(q, a, \langle q_f, \{q_f\}\rangle) \mid (q, a, q_f) \in \Delta,\ q_f \in F\} \\ & \cup \{(\langle q,S\rangle, a, \langle q', S \cup \{q'\}\rangle) \mid (q,a,q') \in \Delta,\ q,q' \in F,\ S \neq F\} \\ & \cup \{(\langle q,F\rangle, a, \langle q', \{q'\}\rangle) \mid (q,a,q') \in \Delta,\ q,q' \in F\}\end{aligned}$$
- $I' = I$

9:26 bis spätestens 9:56

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Sei also $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})$ (Muller-Automat)
Konstruieren NBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \underbrace{Q}_{\text{Phase 1}} \cup \underbrace{\{\langle q_f, S\rangle \mid q_f \in F, S \subseteq F\}}_{\text{Phase 2}}$
- $\Delta' = \Delta$
  $\cup \{(q, a, \langle q_f, \{q_f\}\rangle) \mid (q, a, q_f) \in \Delta,\ q_f \in F\}$
  $\cup \{(\langle q, S\rangle, a, \langle q', S \cup \{q'\}\rangle) \mid (q, a, q') \in \Delta,\ q, q' \in F,\ S \neq F\}$
  $\cup \{(\langle q, F\rangle, a, \langle q', \{q'\}\rangle) \mid (q, a, q') \in \Delta,\ q, q' \in F\}$
- $I' = I$
- $F' = \{\langle q_f, F\rangle \mid q_f \in F\}$

9:26 bis spätestens 9:56

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Sei also $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\})$ (Muller-Automat)
Konstruieren NBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \underbrace{Q}_{\text{Phase 1}} \cup \underbrace{\{\langle q_f, S\rangle \mid q_f \in F, S \subseteq F\}}_{\text{Phase 2}}$
- $$\begin{aligned}\Delta' = \Delta & \cup \{(q, a, \langle q_f, \{q_f\}\rangle) \mid (q, a, q_f) \in \Delta,\ q_f \in F\} \\ & \cup \{(\langle q, S\rangle, a, \langle q', S \cup \{q'\}\rangle) \mid (q, a, q') \in \Delta,\ q, q' \in F,\ S \neq F\} \\ & \cup \{(\langle q, F\rangle, a, \langle q', \{q'\}\rangle) \mid (q, a, q') \in \Delta,\ q, q' \in F\}\end{aligned}$$
- $I' = I$
- $F' = \{\langle q_f, F\rangle \mid q_f \in F\}$

Dann gilt: $L_\omega(\mathcal{A}') = L_\omega(\mathcal{A})$. **T 3.11** □

9:26 bis spätestens 9:56

Direkte Konsequenz aus

- Satz 3.4 (Abschlusseigenschaften der Büchi-erkennbaren Spr.)
- und Satz 3.16 (Gleichmächtigkeit der Automatenmodelle):

Folgerung 3.20
Die Menge der

- Muller-erkennbaren Sprachen,
- Rabin-erkennbaren Sprachen,
- Streett-erkennbaren Sprachen

ist abgeschlossen unter den Operationen $\cup$ und $\cap$.

9:56

Tief durchatmen; wir sind so gut wie fertig für heute. :)

Abschlusseigenschaften

Direkte Konsequenz aus

- Satz 3.4 (Abschlusseigenschaften der Büchi-erkennbaren Spr.)
- und Satz 3.16 (Gleichmächtigkeit der Automatenmodelle):

Folgerung 3.20

Die Menge der

- Muller-erkennbaren Sprachen,
- Rabin-erkennbaren Sprachen,
- Streett-erkennbaren Sprachen

ist abgeschlossen unter den Operationen $\cup$ und $\cap$.

Zu Komplement-Abgeschlossenheit kommen wir jetzt.
Benötigen zunächst deterministische Varianten von Muller-, Rabin-, Streett-Automaten.

9:56

Tief durchatmen; wir sind so gut wie fertig für heute. :)

Deterministische Varianten

Deterministische Varianten sind analog zu NBA definiert:

Ein Muller-, Rabin- oder Streett-Automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, Acc)$ ist **deterministisch**, wenn gilt:

- $|I| = 1$
- $|\{q' \mid (q, a, q') \in \Delta\}| = 1$ für alle $(q, a) \in Q \times \Sigma$

9:58 bis 10:00 $\rightsquigarrow$ Punktlandung?

Wenn Zeit, dann was zum Ablauf Prüfungen sagen.

Satz 3.21 folgt **nicht** unmittelbar aus den bisherigen Resultaten für **N**xAs.
Er wird stückweise in Meghyns Skript bewiesen;
dort sind Muller-, Rabin- und Streett-Automaten immer deterministisch.

Deterministische Varianten

Deterministische Varianten sind analog zu NBA definiert:

Ein Muller-, Rabin- oder Streett-Automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, Acc)$ ist **deterministisch**, wenn gilt:

- $|I| = 1$
- $|\{q' \mid (q, a, q') \in \Delta\}| = 1$ für alle $(q, a) \in Q \times \Sigma$

Zu Satz 3.16 analoge Aussage:

Satz 3.21
Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.
(M) L ist von einem deterministischen Muller-Autom. erkennbar.
(R) L ist von einem deterministischen Rabin-Autom. erkennbar.
(S) L ist von einem deterministischen Streett-Autom. erkennbar.

9:58 bis 10:00 $\rightsquigarrow$ Punktlandung?

Wenn Zeit, dann was zum Ablauf Prüfungen sagen.

Satz 3.21 folgt **nicht** unmittelbar aus den bisherigen Resultaten für **N**xAs.
Er wird stückweise in Meghyns Skript bewiesen;
dort sind Muller-, Rabin- und Streett-Automaten immer deterministisch.

Deterministische Varianten

Deterministische Varianten sind analog zu NBA definiert:

Ein Muller-, Rabin- oder Streett-Automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, Acc)$ ist **deterministisch**, wenn gilt:

- $|I| = 1$
- $|\{q' \mid (q, a, q') \in \Delta\}| = 1$ für alle $(q, a) \in Q \times \Sigma$

Zu Satz 3.16 analoge Aussage:

Satz 3.21

Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.
(M) L ist von einem deterministischen Muller-Autom. erkennbar.
(R) L ist von einem deterministischen Rabin-Autom. erkennbar.
(S) L ist von einem deterministischen Streett-Autom. erkennbar.

Ohne Beweis (ähnlich wie Lemmas 3.17–3.19).

9:58 bis 10:00 $\rightsquigarrow$ Punktlandung?

Wenn Zeit, dann was zum Ablauf Prüfungen sagen.

Satz 3.21 folgt **nicht** unmittelbar aus den bisherigen Resultaten für **N**xAs.
Er wird stückweise in Meghyns Skript bewiesen;
dort sind Muller-, Rabin- und Streett-Automaten immer deterministisch.

Überblick der Automatenmodelle

Büchi-Automat (NBA):

- $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit $F \subseteq Q$
- Erfolgreicher Run r: $\mathrm{Inf}(r) \cap F \neq \emptyset$

Muller-Automat (NMA):

- $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ mit $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$
- Erfolgreicher Run r: $\mathrm{Inf}(r) \in \mathcal{F}$

Rabin-Automat (NRA):

- $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{P})$ mit $\mathcal{P} \subseteq 2^Q \times 2^Q$
- Erfolg: $\exists (E, F) \in \mathcal{P} : \mathrm{Inf}(r) \cap F \neq \emptyset$ und $\mathrm{Inf}(r) \cap E = \emptyset$

Streett-Automat (NSA):

- $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{P})$ mit $\mathcal{P} \subseteq 2^Q \times 2^Q$
- Erfolg: $\forall (E, F) \in \mathcal{P} : \mathrm{Inf}(r) \cap F \neq \emptyset$ impliziert $\mathrm{Inf}(r) \cap E \neq \emptyset$

16:00

16:02

Erinnerung an Satz 3.12: Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache, die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Erinnerung an Satz 3.12: Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache, die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Ziel

Prozedur zur Umwandlung eines gegebenen NBA in einen äquivalenten deterministischen **Rabin**-Automaten

16:02

16:02

Erinnerung an Satz 3.12: Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache, die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Ziel

Prozedur zur Umwandlung eines gegebenen NBA in einen äquivalenten deterministischen **Rabin**-Automaten

$\rightsquigarrow$ wegen Satz 3.21 erhält man daraus auch äquivalente deterministische Muller-/Streett-Automaten

Determinisierung von Büchi-Automaten

Erinnerung an Satz 3.12: Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache, die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Ziel

Prozedur zur Umwandlung eines gegebenen NBA in einen äquivalenten deterministischen **Rabin**-Automaten

$\rightsquigarrow$ wegen Satz 3.21 erhält man daraus auch äquivalente deterministische Muller-/Streett-Automaten

- Resultat geht auf McNaughton zurück
  (1965 von Robert McNaughton, Philosoph/Inform., Harvard, Rensselaer)

16:02

Determinisierung von Büchi-Automaten

Erinnerung an Satz 3.12: Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache, die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Ziel

Prozedur zur Umwandlung eines gegebenen NBA in einen äquivalenten deterministischen **Rabin**-Automaten

$\rightsquigarrow$ wegen Satz 3.21 erhält man daraus auch äquivalente deterministische Muller-/Streett-Automaten

- Resultat geht auf McNaughton zurück (1965 von Robert McNaughton, Philosoph/Inform., Harvard, Rensselaer)
- Wir verwenden intuitiveren Beweis von Safra (1988 von Shmuel Safra, Informatiker, Tel Aviv)

16:02

Potenzmengenkonstruktion versagt

Zwei naheliegende Versuche:

1. NBA ⇝ DBA mittels Potenzmengenkonstruktion **(PMK)**
   muss wegen Satz 3.12 fehlschlagen – Bsp. siehe Tafel **T 3.12**

16:03

T3.12 bis 16:10

T3.13 bis 16:17

insg. bis 16:19

Potenzmengenkonstruktion versagt

Zwei naheliegende Versuche:

1. NBA $\rightsquigarrow$ DBA mittels Potenzmengenkonstruktion **(PMK)**
   muss wegen Satz 3.12 fehlschlagen – Bsp. siehe Tafel **T 3.12**
2. NBA $\rightsquigarrow$ determ. Muller-(Rabin-/Streett-)Automat via PMK
   schlägt auch fehl – mit demselben Gegenbeispiel **T 3.13**

16:03

T3.12 bis 16:10

T3.13 bis 16:17

insg. bis 16:19

2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter
└─Deterministische Büchi-Automaten und Determinisierung
└─Potenzmengenkonstruktion versagt

Potenzmengenkonstruktion versagt

Zwei naheliegende Versuche:

1. NBA $\rightsquigarrow$ DBA mittels Potenzmengenkonstruktion **(PMK)**
   muss wegen Satz 3.12 fehlschlagen – Bsp. siehe Tafel **T 3.12**
2. NBA $\rightsquigarrow$ determ. Muller-(Rabin-/Streett-)Automat via PMK
   schlägt auch fehl – mit demselben Gegenbeispiel **T 3.13**

Hauptproblem:

- Potenzautomat simuliert mehrere Runs gleichzeitig
- akzeptierende Zustände **(akzZ)** müssen dabei **nicht synchron** erreicht werden
- **Bad runs:**
  Wenn DBA $\mathcal{A}^d$ für α eine ∞ Folge von akzZ findet,
  dann können diese akzZ von **verschiedenen** Runs des NBA $\mathcal{A}$ auf **Präfixen** von α stammen.
  Diese Runs müssen nicht zu einem Run auf α fortsetzbar sein.

16:03

T3.12 bis 16:10

T3.13 bis 16:17

insg. bis 16:19

16:19

Abhilfe: Safras „Tricks“

Ziel

- Wandle NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$
  in determ. Rabin-Automaten $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P}^d)$ um
  mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}^d)$
- Vermeide "bad runs": **Safras Tricks**

Abhilfe: Safras „Tricks“

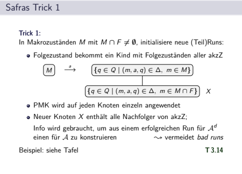
Ziel

- Wandle NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ in determ. Rabin-Automaten $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P}^d)$ um mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}^d)$
- Vermeide "bad runs": **Safras Tricks**

Vorbetrachtungen

- **Makrozustände**: Zustände der alten PMK (Mengen $M \subseteq Q$)
- **Zustände von $\mathcal{A}^d$**:
  $\approx$ Bäume, deren Knoten mit Makrozuständen markiert sind
- **Startzustand**:
  Knoten I (Menge der Anfangszust., wie bei PMK)

16:19



16:22

Safras Ideen bestehen aus drei Tricks, die ich jetzt halb formal, halb intuitiv vorstelle.

Anschließend präzise als Konstruktion mit 6 Schritten beschreiben.

Kinder im Baum sind immer unten; deshalb keine Pfeilspitzen!

Teil 3: unendliche Wörter
└─Deterministische Büchi-Automaten und Determinisierung
└─Konsequenzen aus Trick 1

16:32

Konsequenzen aus Trick 1

- Organisation dieser Mengen von Makrozuständen: als geordnete Bäume – **Safra-Bäume**
- Trick 1 fügt neue Kinder/Geschwister hinzu $\rightsquigarrow$ Höhe/Breite des Safra-Baums wächst
- Zum Begrenzen der Höhe/Breite: Trick 2 und 3

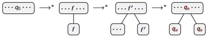
Safras Trick 2

Trick 2:
Erkenne zusammenlaufende Teilruns und lösche überflüssige Info

Bsp.: Betrachte Teilruns, die in demselben Zustand q_n enden:

$$
\begin{aligned}
r &= q_0 q_1 q_2 \ldots f \ldots\ldots q_{n-1} q_n \\
r' &= q_0 q_1' q_2' \ldots\ldots f' \ldots q_{n-1}' q_n \qquad (f, f' \in F)
\end{aligned}
$$

Zugehörige n Schritte von $\mathcal{A}^d$ unter Anwendung von Trick 1:



Trick 2 vereinigt die beiden $\{q_n\}$-Kinder („horizontal merge“)

$\rightsquigarrow$ **Weite** von Safra-Bäumen wird beschränkt

16:33

Safras Trick 3

Trick 3:
Gib überflüssige Makrozustände zur Löschung frei

Wenn alle Kinder eines MZ M bezeugen,
dass *jeder* Zustand in M einen akz. Zustand als Vorgänger hat,
dann können die Kinder gelöscht werden

Genauer: wenn M Kinder $M_1, \ldots, M_n$ hat mit $M_1 \cup \cdots \cup M_n = M$,
dann werden die M_i gelöscht und M mit ! markiert

$\rightsquigarrow$ „vertical merge", beschränkt die **Tiefe** von Safra-Bäumen

16:37 bis 16:39, dann 5min Pause

Definition Safra-Baum

Sei $\boldsymbol{Q}$ Zustandsmenge des ursprünglichen NBA
und $\boldsymbol{V}$ eine nichtleere Menge von **Knotennamen**.

Makrozustand (MZ) über Q: Teilmenge $M \subseteq Q$

Safra-Baum über Q, V:

- geordneter Baum mit Knoten aus V
  (der leere Baum ist erlaubt!)
- jeder Knoten mit einem **nichtleeren** MZ markiert
  und möglicherweise auch mit (!)
- Wenn Knoten v mit M und v's Kinder mit $M_1, \dots, M_n$ markiert sind, dann:
  1. $M_1 \cup \dots \cup M_n \subsetneq M$
  2. M_i sind paarweise disjunkt

16:44

Fragen: Wer ahnt, wozu die letzte Bedingung (1 und 2) wichtig ist?
(Antw.: stellt sicher, dass es nicht zu viele mögliche SB gibt – zeigen wir jetzt!)

Safra-Bäume sind beschränkt

„Wenn Knoten v mit M und v's Kinder mit $M_1, \dots, M_n$ markiert sind, dann:

1. $M_1 \cup \dots \cup M_n \subsetneq M$
2. *M_i sind paarweise disjunkt"*

16:47

TODO: Größe und Anzahl der Safra-Bäume sauber abschätzen & erklären!

Safra-Bäume sind beschränkt

„Wenn Knoten v mit M und v's Kinder mit $M_1, \ldots, M_n$ markiert sind, dann:

1. $M_1 \cup \cdots \cup M_n \subsetneq M$
2. *M_i sind paarweise disjunkt"*

Konsequenzen

- *wegen (1):* Höhe jedes SB ist durch $|Q|$ beschränkt
- *wegen (2):* Anzahl Kinder pro Knoten kleiner als $|Q|$
- *sogar:* Jeder SB über Q hat höchstens $|Q|$ Knoten (Beweis per Induktion über Baumhöhe)

16:47

TODO: Größe und Anzahl der Safra-Bäume sauber abschätzen & erklären!

Safra-Bäume sind beschränkt

„Wenn Knoten v mit M und v's Kinder mit $M_1, \ldots, M_n$ markiert sind, dann:

1. $M_1 \cup \cdots \cup M_n \subsetneq M$
2. *M_i sind paarweise disjunkt“*

Konsequenzen

- *wegen (1):* Höhe jedes SB ist durch $|Q|$ beschränkt
- *wegen (2):* Anzahl Kinder pro Knoten kleiner als $|Q|$
- *sogar:* Jeder SB über Q hat höchstens $|Q|$ Knoten (Beweis per Induktion über Baumhöhe)

$\leadsto$ Anzahl der möglichen SB ist beschränkt durch ?

16:47

TODO: Größe und Anzahl der Safra-Bäume sauber abschätzen & erklären!

Safra-Bäume sind beschränkt

„Wenn Knoten v mit M und v's Kinder mit $M_1, \dots, M_n$ markiert sind, dann:

1. $M_1 \cup \cdots \cup M_n \subsetneq M$
2. *M_i sind paarweise disjunkt"*

Konsequenzen

- *wegen (1):* Höhe jedes SB ist durch $|Q|$ beschränkt
- *wegen (2):* Anzahl Kinder pro Knoten kleiner als $|Q|$
- *sogar:* Jeder SB über Q hat höchstens $|Q|$ Knoten
  (Beweis per Induktion über Baumhöhe)

$\rightsquigarrow$ Anzahl der möglichen SB ist beschränkt durch $2^{O(|Q| \cdot \log |Q|)}$

16:47

TODO: Größe und Anzahl der Safra-Bäume sauber abschätzen & erklären!

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NBA und $V = \{1, \dots, 2|Q|\}$.
Konstruieren DRA $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P})$:

- Q^d = Menge aller Safra-Bäume über Q, V
- I^d = Safra-Baum mit einzigem Knoten I
- $\Delta^d = \{(S, a, S') \mid S'$ wird aus S wie folgt konstruiert$\}$

16:50

Knotennamen $1, \dots, 2|Q|$ reichen wegen der Beschränkungen, die wir für die Knotenzahl eines SB gerade aufgestellt haben.

Übergangsrelation folgt genau Safras Tricks (in jedem **einzelnen** Übergang!).

Akzeptanzkomponente kommt am Ende.

Konstruktion von S' aus S in 6 Schritten

Sei S Safra-Baum mit Knotennamen $V' \subseteq V$; sei $a \in \Sigma$

1. Beginne mit S; entferne alle Markierungen (!)

16:52

Und das sind die 6 Schritte, die auf den 3 Tricks von Safra beruhen.

Schritt 2 = Trick 1
Schritt 4 = Trick 2
Schritt 6 = Trick 3

Illustration auf nächster Folie

Konstruktion von S' aus S in 6 Schritten

Sei S Safra-Baum mit Knotennamen $V' \subseteq V$; sei $a \in \Sigma$

1. Beginne mit S; entferne alle Markierungen (!)
2. Für jeden Knoten v mit Makrozustand M und $M \cap F \neq \emptyset$, füge neues Kind $v' \in V \setminus V'$ mit Markierung $M \cap F$ hinzu (als **jüngstes** (rechtes) Geschwister aller evtl. vorhandenen Kinder)

16:52

Und das sind die 6 Schritte, die auf den 3 Tricks von Safra beruhen.

Schritt 2 = Trick 1
Schritt 4 = Trick 2
Schritt 6 = Trick 3

Illustration auf nächster Folie

Konstruktion von S' aus S in 6 Schritten

Sei S Safra-Baum mit Knotennamen $V' \subseteq V$; sei $a \in \Sigma$

1. Beginne mit S; entferne alle Markierungen (!)
2. Für jeden Knoten v mit Makrozustand M und $M \cap F \neq \emptyset$, füge neues Kind $v' \in V \setminus V'$ mit Markierung $M \cap F$ hinzu (als **jüngstes** (rechtes) Geschwister aller evtl. vorhandenen Kinder)
3. Wende Potenzmengenkonstruktion auf alle Knoten v an: ersetze MZ M durch $\{q \in Q \mid (m, a, q) \in \Delta \text{ für ein } m \in M\}$

16:52

Und das sind die 6 Schritte, die auf den 3 Tricks von Safra beruhen.

Schritt 2 = Trick 1
Schritt 4 = Trick 2
Schritt 6 = Trick 3

Illustration auf nächster Folie

Konstruktion von S' aus S in 6 Schritten

Sei S Safra-Baum mit Knotennamen $V' \subseteq V$; sei $a \in \Sigma$

1. Beginne mit S; entferne alle Markierungen (!)
2. Für jeden Knoten v mit Makrozustand M und $M \cap F \neq \emptyset$, füge neues Kind $v' \in V \setminus V'$ mit Markierung $M \cap F$ hinzu (als **jüngstes** (rechtes) Geschwister aller evtl. vorhandenen Kinder)
3. Wende Potenzmengenkonstruktion auf alle Knoten v an: ersetze MZ M durch $\{q \in Q \mid (m, a, q) \in \Delta$ für ein $m \in M\}$
4. **Horizontales Zusammenfassen**: Für jeden Knoten v mit MZ M, lösche jeden Zustand q, der im MZ eines älteren Geschwisters vorkommt, aus M *und aus den MZen der Kinder von v*

16:52

Und das sind die 6 Schritte, die auf den 3 Tricks von Safra beruhen.

Schritt 2 = Trick 1
Schritt 4 = Trick 2
Schritt 6 = Trick 3

Illustration auf nächster Folie

Konstruktion von S' aus S in 6 Schritten

Sei S Safra-Baum mit Knotennamen $V' \subseteq V$; sei $a \in \Sigma$

1. Beginne mit S; entferne alle Markierungen (!)
2. Für jeden Knoten v mit Makrozustand M und $M \cap F \neq \emptyset$, füge neues Kind $v' \in V \setminus V'$ mit Markierung $M \cap F$ hinzu (als **jüngstes** (rechtes) Geschwister aller evtl. vorhandenen Kinder)
3. Wende Potenzmengenkonstruktion auf alle Knoten v an: ersetze MZ M durch $\{q \in Q \mid (m, a, q) \in \Delta \text{ für ein } m \in M\}$
4. **Horizontales Zusammenfassen:** Für jeden Knoten v mit MZ M, lösche jeden Zustand q, der im MZ eines älteren Geschwisters vorkommt, aus M *und aus den MZen der Kinder von v*
5. Entferne alle Knoten mit leeren MZen

16:52

Und das sind die 6 Schritte, die auf den 3 Tricks von Safra beruhen.

Schritt 2 = Trick 1
Schritt 4 = Trick 2
Schritt 6 = Trick 3

Illustration auf nächster Folie

Konstruktion von S' aus S in 6 Schritten

Sei S Safra-Baum mit Knotennamen $V' \subseteq V$; sei $a \in \Sigma$

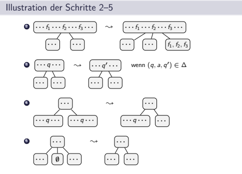
1. Beginne mit S; entferne alle Markierungen (!)
2. Für jeden Knoten v mit Makrozustand M und $M \cap F \neq \emptyset$, füge neues Kind $v' \in V \setminus V'$ mit Markierung $M \cap F$ hinzu (als **jüngstes** (rechtes) Geschwister aller evtl. vorhandenen Kinder)
3. Wende Potenzmengenkonstruktion auf alle Knoten v an: ersetze MZ M durch $\{q \in Q \mid (m, a, q) \in \Delta \text{ für ein } m \in M\}$
4. **Horizontales Zusammenfassen:** Für jeden Knoten v mit MZ M, lösche jeden Zustand q, der im MZ eines älteren Geschwisters vorkommt, aus M *und aus den MZen der Kinder von* v
5. Entferne alle Knoten mit leeren MZen
6. **Vertikales Zusammenfassen:** Für jeden Knoten v, dessen Markierung nur Zustände aus v's Kindern enthält, lösche alle Nachfolger von v und markiere v mit (!)

16:52

Und das sind die 6 Schritte, die auf den 3 Tricks von Safra beruhen.

Schritt 2 = Trick 1
Schritt 4 = Trick 2
Schritt 6 = Trick 3

Illustration auf nächster Folie



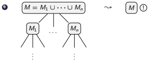
16:58

Hier wieder schematische Skizzen; als nächstes am konkreten Bsp.

nur letztes Bild an Tafel (ist hier nicht eindeutig)

17:01

Illustration von Schritt 6



d. h. alle Zustände in M kommen im Makrozustand eines Kindes M_i vor

d. h. jeder Zustand in M hat einen akzZ als Vorgänger!

Erläuterungen zur Konstruktion

- S' ist wieder ein Safra-Baum:
  Wenn Knoten v mit M und v's Kinder mit $M_1, \ldots, M_n$ markiert sind, dann:
  1. $M_1 \cup \cdots \cup M_n \subsetneq M$ — *"$\subseteq$": Schritte 2, 3; "$\neq$": Schritt 6*
  2. *M_i sind paarweise disjunkt* — *Schritt 4*

17:04

Def. der Akzeptanzkomponente kommt nach dem Beispiel.

Bsp. bis 17:28

- S' ist wieder ein Safra-Baum:
  Wenn Knoten v mit M und v's Kinder mit $M_1, \ldots, M_n$ markiert sind, dann:
  1. $M_1 \cup \cdots \cup M_n \subsetneq M$ — *"$\subseteq$": Schritte 2, 3; "$\neq$": Schritt 6*
  2. *M_i sind paarweise disjunkt* — *Schritt 4*
- Beispiel: siehe Tafel **T 3.15**

17:04

Def. der Akzeptanzkomponente kommt nach dem Beispiel.

Bsp. bis 17:28

Akzeptanzkomponente von $\mathcal{A}^d$

$\mathcal{P} = \{(E_v, F_v) \mid v \in V\}$ mit

- E_v = alle Safra-Bäume ohne Knoten v
- F_v = alle Safra-Bäume, in denen v mit ! markiert ist

17:28 bis 17:30 $\rightsquigarrow$ Punktlandung?

Jetzt müssen wir natürlich noch zeigen, dass die Konstruktion korrekt ist.

Das tun wir nächste Woche! :)

Akzeptanzkomponente von $\mathcal{A}^d$

$\mathcal{P} = \{(E_v, F_v) \mid v \in V\}$ mit

- E_v = alle Safra-Bäume ohne Knoten v
- F_v = alle Safra-Bäume, in denen v mit ! markiert ist

$\rightsquigarrow$ d. h. Run $r = S_0 S_1 S_2 \dots$ von $\mathcal{A}^d$ ist erfolgreich, wenn es einen Knotennamen v gibt, so dass

- alle S_i, bis auf endlich viele, einen Knoten v haben und
- unendlich oft auf v Schritt 6 angewendet wurde, d. h. vorher kamen alle Zustände in v's MZ in v's Kindern vor

T 3.15 Forts.

17:28 bis 17:30 $\rightsquigarrow$ Punktlandung?

Jetzt müssen wir natürlich noch zeigen, dass die Konstruktion korrekt ist.

Das tun wir nächste Woche! :)

Korrektheit und Vollständigkeit der Konstruktion

Lemma 3.22
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NBA und sei $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P})$ der DRA, den man nach Safras Konstruktion aus $\mathcal{A}$ erhält.
Dann gilt $L_\omega(\mathcal{A}^d) = L_\omega(\mathcal{A})$.

Korrektheit: *(Soundness)*
$\mathcal{A}^d$ akzeptiert nur Wörter, die $\mathcal{A}$ akzeptiert

$$L_\omega(\mathcal{A}^d) \subseteq L_\omega(\mathcal{A})$$

Vollständigkeit: *(Completeness)*
$\mathcal{A}^d$ akzeptiert (mindestens) alle Wörter, die $\mathcal{A}$ akzeptiert

$$L_\omega(\mathcal{A}^d) \supseteq L_\omega(\mathcal{A})$$

Beweis: Folgerung aus den nächsten beiden Lemmas

8:30

Korrektheit

Lemma 3.23
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NBA und sei $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P})$ der DRA, den man nach Safras Konstruktion aus $\mathcal{A}$ erhält.
Dann gilt $L_\omega(\mathcal{A}^d) \subseteq L_\omega(\mathcal{A})$.

Beweisidee. Sei $I = \{q_I\}$ und $I^d = \{S_I\}$. Sei $\alpha \in L_\omega(\mathcal{A}^d)$.

- Betrachte erfolgreichen Run s von $\mathcal{A}^d$ auf α.
- „Konstruiere" daraus erfolgr. Run von $\mathcal{A}$ auf α *stückweise:*

  $s = S_I \ldots T_1 \ldots T_2 \ldots T_3 \ldots,$ (alle T_i laut $\mathcal{P}$ gewählt)
- Jeder Teilrun $T_i \ldots T_{i+1}$ induziert Teilrun von $\mathcal{A}$ auf Teilwort von α, der einen akz. Zustand enthält
- Ordnen diese endl. Teilruns in einem ∞ Baum $\mathcal{T}$ an
- Gesuchter Run von $\mathcal{A}$ ist ein ∞ Pfad in $\mathcal{T}$

8:32

Zuerst die Beweis**idee.**

Korrektheit

Beweis. Sei also $\alpha \in L_\omega(\mathcal{A}^d)$.

Dann gibt es erfolgreichen Run $s = S_0 S_1 S_2 \ldots$ von $\mathcal{A}^d$ auf α und ein Knoten v, der (wegen $\mathcal{P}^d$)

- in allen Safra-Bäumen $S_j, S_{j+1}, \ldots$ vorkommt, für ein $j \geqslant 0$, und
- in ∞ vielen Safra-Bäumen mit ! markiert ist.
  Seien diese $T_1, T_2, \ldots$ und sei $T_0 = S_0$:

$$s = T_0 \ldots T_1 \ldots T_2 \ldots T_3 \ldots$$

8:36

Jetzt der eigentliche Beweis.

Bis 9:10

Beweis. Sei also $\alpha \in L_\omega(\mathcal{A}^d)$.
Dann gibt es erfolgreichen Run $s = S_0S_1S_2\dots$ von $\mathcal{A}^d$ auf α und ein Knoten v, der (wegen $\mathcal{P}^d$)

- in allen Safra-Bäumen $S_j, S_{j+1}, \dots$ vorkommt, für ein $j \geqslant 0$, und
- in ∞ vielen Safra-Bäumen mit ! markiert ist.
  Seien diese $T_1, T_2, \dots$ und sei $T_0 = S_0$:

$$s = T_0 \dots T_1 \dots T_2 \dots T_3 \dots$$

Zeigen **Hilfsaussage [HA]**:

Für alle T_i und alle Zustände p im MZ von v in T_{i+1}
gibt es einen Zustand q im MZ von v in T_i
und einen endlichen Run $q \dots p$ von $\mathcal{A}$ auf dem zugehörigen Teilwort von α, der einen akzZ enthält.

8:36

Jetzt der eigentliche Beweis.

Bis 9:10

Korrektheit

Beweis. Sei also $\alpha \in L_\omega(\mathcal{A}^d)$.

Dann gibt es erfolgreichen Run $s = S_0 S_1 S_2 \ldots$ von $\mathcal{A}^d$ auf α und ein Knoten v, der (wegen $\mathcal{P}^d$)

- in allen Safra-Bäumen $S_j, S_{j+1}, \ldots$ vorkommt, für ein $j \geqslant 0$, und
- in ∞ vielen Safra-Bäumen mit ! markiert ist.
  Seien diese $T_1, T_2, \ldots$ und sei $T_0 = S_0$:

$$s = T_0 \ldots T_1 \ldots T_2 \ldots T_3 \ldots$$

Zeigen **Hilfsaussage [HA]:**

Für alle T_i und alle Zustände p im MZ von v in T_{i+1}
gibt es einen Zustand q im MZ von v in T_i
und einen endlichen Run $q \ldots p$ von $\mathcal{A}$ auf dem zugehörigen Teilwort von α, der einen akzZ enthält.

Beweis der Hilfsaussage: s. Tafel **T 3.16**

8:36

Jetzt der eigentliche Beweis.

Bis 9:10

Korrektheit

Kombiniere nun Runs aus [HA] zu ∞ Run von $\mathcal{A}$

- Seien $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots$ Positionen der T_i in s
- Sei M_j der MZ von v an Positionen i_j, $j \geqslant 0$

9:10

Korrektheit

Kombiniere nun Runs aus [HA] zu ∞ Run von $\mathcal{A}$

- Seien $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots$ Positionen der T_i in s
- Sei M_j der MZ von v an Positionen i_j, $j \geqslant 0$

Konstruiere Baum $\mathcal{T}$:

- Knoten = Paare (q, j) mit $q \in M_j$, $j \geqslant 0$
- Jeder Knoten $(p, j+1)$ bekommt *genau ein* Elternteil: beliebiger (q, j) mit $q \in M_j$ und $\exists$ Run $q \dots p$ wie in **[HA]**

$\Rightarrow$ ∞ viele Knoten, Verzweigungsgrad $\leqslant |Q|$, Wurzel $(q_I, 0)$

9:10

Korrektheit

Kombiniere nun Runs aus [HA] zu ∞ Run von $\mathcal{A}$

- Seien $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots$ Positionen der T_i in s
- Sei M_j der MZ von v an Positionen i_j, $j \geqslant 0$

Konstruiere Baum $\mathcal{T}$:

- Knoten = Paare (q, j) mit $q \in M_j$, $j \geqslant 0$
- Jeder Knoten $(p, j+1)$ bekommt *genau ein* Elternteil: beliebiger (q, j) mit $q \in M_j$ und $\exists$ Run $q \dots p$ wie in **[HA]**

$\Rightarrow$ ∞ viele Knoten, Verzweigungsgrad $\leqslant |Q|$, Wurzel $(q_I, 0)$

Nach Lemma von Kőnig (nächste Folie) folgt:

- $\mathcal{T}$ hat einen ∞ Pfad $(q_I, 0),\ (q_1, 1),\ (q_2, 2),\ \dots;$
- Verkettung aller Teilruns entlang dieses Pfades ist ein Run von $\mathcal{A}$ auf α, der ∞ oft einen akzZ besucht

$\Rightarrow$ $\alpha \in L_\omega(\mathcal{A})$ □

9:10

Lemma 3.24 (Lemma von Kőnig)
Jeder unendliche Baum mit endlichem Verzweigungsgrad hat einen unendlichen Pfad.

- ohne Beweis
- „endlicher Verzweigungsgrad“: jeder Knoten hat endlich viele Kinder
- 1936 von Dénes Kőnig (1884–1944, Mathematiker, Budapest)

9:15

einschl. 4min Pause bis 9:20

Vollständigkeit

Lemma 3.25

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NBA und sei $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P})$ der DRA, den man nach Safras Konstruktion aus $\mathcal{A}$ erhält.
Dann gilt $L_\omega(\mathcal{A}) \subseteq L_\omega(\mathcal{A}^d)$.

Beweis.

- Sei $\alpha \in L_\omega(\mathcal{A})$ und $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$ erfolgr. Run von $\mathcal{A}$ auf α
- $\mathcal{A}^d$ hat *eindeutigen* Run $s = S_0 S_1 S_2 \ldots$ auf α
- Zu zeigen: s ist erfolgreich, d. h.:

9:20 bis 9:55

Vollständigkeit

Lemma 3.25

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NBA und sei $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P})$ der DRA, den man nach Safras Konstruktion aus $\mathcal{A}$ erhält.

Dann gilt $L_\omega(\mathcal{A}) \subseteq L_\omega(\mathcal{A}^d)$.

Beweis.

- Sei $\alpha \in L_\omega(\mathcal{A})$ und $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$ erfolgr. Run von $\mathcal{A}$ auf α
- $\mathcal{A}^d$ hat *eindeutigen* Run $s = S_0 S_1 S_2 \ldots$ auf α
- Zu zeigen: s ist erfolgreich, d. h.:

Es gibt einen Knotennamen v, für den gilt:

(a) $\exists m \geqslant 0 : S_i$ enthält Knoten v für alle $i \geqslant m$

(b) v ist in ∞ vielen S_i mit ! markiert

9:20 bis 9:55

Vollständigkeit

Lemma 3.25

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NBA und sei $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P})$ der DRA, den man nach Safras Konstruktion aus $\mathcal{A}$ erhält.

Dann gilt $L_\omega(\mathcal{A}) \subseteq L_\omega(\mathcal{A}^d)$.

Beweis.

- Sei $\alpha \in L_\omega(\mathcal{A})$ und $r = q_0q_1q_2\dots$ erfolgr. Run von $\mathcal{A}$ auf α
- $\mathcal{A}^d$ hat *eindeutigen* Run $s = S_0S_1S_2\dots$ auf α
- Zu zeigen: s ist erfolgreich, d. h.:

Es gibt einen Knotennamen v, für den gilt:

(a) $\exists m \geqslant 0 : S_i$ enthält Knoten v für alle $i \geqslant m$

(b) v ist in ∞ vielen S_i mit ! markiert

Beweis dieser Aussage: s. Tafel **T 3.17** □

9:20 bis 9:55

2018-12-18

Konsequenz aus Safras Konstruktion

Satz 3.26 (Satz von McNaughton)
Sei $\mathcal{A}$ ein NBA. Dann gibt es einen DRA $\mathcal{A}^d$ mit $L_\omega(\mathcal{A}^d) = L_\omega(\mathcal{A})$.

Beweis. Folgt aus Lemma 3.22.

9:55

Konsequenz aus Safras Konstruktion

Satz 3.26 (Satz von McNaughton)
Sei $\mathcal{A}$ ein NBA. Dann gibt es einen DRA $\mathcal{A}^d$ mit $L_\omega(\mathcal{A}^d) = L_\omega(\mathcal{A})$.

Beweis. Folgt aus Lemma 3.22.

Folgerung 3.27
Die Klasse der Büchi-erkennbaren Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

9:55

Konsequenz aus Safras Konstruktion

Satz 3.26 (Satz von McNaughton)
Sei $\mathcal{A}$ ein NBA. Dann gibt es einen DRA $\mathcal{A}^d$ mit $L_\omega(\mathcal{A}^d) = L_\omega(\mathcal{A})$.

Beweis. Folgt aus Lemma 3.22.

Folgerung 3.27
Die Klasse der Büchi-erkennbaren Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis. Über folgende Transformationskette:

$$\begin{array}{llll} \text{NBA für } L & \to & \text{DRA für } L & \text{(gemäß Satz 3.26)} \\ & \to & \text{DMA für } L & \text{(gemäß Satz 3.21)} \\ & \to & \text{DMA für } \overline{L} & \text{(wie gehabt)} \\ & \to & \text{NBA für } \overline{L} & \text{(gemäß Satz 3.16)} \end{array}$$ □

9:55

Konsequenz aus Safras Konstruktion

Satz 3.26 (Satz von McNaughton)
Sei $\mathcal{A}$ ein NBA. Dann gibt es einen DRA $\mathcal{A}^d$ mit $L_\omega(\mathcal{A}^d) = L_\omega(\mathcal{A})$.

Beweis. Folgt aus Lemma 3.22.

Folgerung 3.27
Die Klasse der Büchi-erkennbaren Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis. Über folgende Transformationskette:

NBA für L	➜	DRA für L	(gemäß Satz 3.26)
	$\rightarrow$	DMA für L	(gemäß Satz 3.21)
	$\rightarrow$	DMA für $\overline{L}$	(wie gehabt)
	➜	NBA für $\overline{L}$	(gemäß Satz 3.16) □

9:55

Anmerkungen zur Komplexität

Determinisierung NBA $\longrightarrow$ DRA gemäß Safras Konstruktion

- liefert einen **exponentiell** größeren DRA
- genauer: wenn der NBA n Zustände hat,
  - gibt es 2^n mögliche Makrozustände
  - und $2^{O(n \log n)}$ mögliche Safrabäume

  $\rightsquigarrow$ DRA hat maximal $m := 2^{O(n \log n)}$ Zustände
- Das ist optimal (siehe Roggenbachs Kapitel in LNCS 2500)

9:57 bis Ende

TODO: Größe und Anzahl der Safra-Bäume sauber abschätzen & erklären! (siehe Folie $\approx$ 66)

Anmerkungen zur Komplexität

Determinisierung NBA $\longrightarrow$ DRA gemäß Safras Konstruktion

- liefert einen **exponentiell** größeren DRA
- genauer: wenn der NBA n Zustände hat,
  - gibt es 2^n mögliche Makrozustände
  - und $2^{O(n \log n)}$ mögliche Safrabäume

  $\leadsto$ DRA hat maximal $m := 2^{O(n \log n)}$ Zustände
- Das ist optimal (siehe Roggenbachs Kapitel in LNCS 2500)

Komplementierung beinhaltet auch den Schritt DMA $\longrightarrow$ NBA

- liefert einen nochmal **exponentiell** größeren DBA:
  wenn der DMA m Zustände hat,
  hat der NBA $O(m \cdot 2^m)$ Zustände

$\leadsto$ Resultierender NBA hat $2^{2^{O(n^2)}}$ Zustände

9:57 bis Ende

TODO: Größe und Anzahl der Safra-Bäume sauber abschätzen & erklären! (siehe Folie $\approx$ 66)

Anmerkungen zur Komplexität

Determinisierung NBA $\longrightarrow$ DRA gemäß Safras Konstruktion

- liefert einen **exponentiell** größeren DRA
- genauer: wenn der NBA n Zustände hat,
  - gibt es 2^n mögliche Makrozustände
  - und $2^{O(n \log n)}$ mögliche Safrabäume

  $\rightsquigarrow$ DRA hat maximal $m := 2^{O(n \log n)}$ Zustände
- Das ist optimal (siehe Roggenbachs Kapitel in LNCS 2500)

Komplementierung beinhaltet auch den Schritt DMA $\longrightarrow$ NBA

- liefert einen nochmal **exponentiell** größeren DBA:
  wenn der DMA m Zustände hat,
  hat der NBA $O(m \cdot 2^m)$ Zustände

$\rightsquigarrow$ Resultierender NBA hat $2^{2^{O(n^2)}}$ Zustände

- Alternative Prozedur erfordert nur $2^{O(n \log n)}$ Zustände

9:57 bis Ende

TODO: Größe und Anzahl der Safra-Bäume sauber abschätzen & erklären! (siehe Folie ≈ 66)

2018-12-18

2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter
└─Entscheidungsprobleme
└─Vorbetrachtungen

Vorbetrachtungen

Betrachten 4 Standardprobleme:

- Leerheitsproblem
- Wortproblem (Wort ist durch NBA gegeben)
- Äquivalenzproblem
- Universalitätsproblem

16:00

Vorbetrachtungen

Betrachten 4 Standardprobleme:

- Leerheitsproblem
- Wortproblem (Wort ist durch NBA gegeben)
- Äquivalenzproblem
- Universalitätsproblem

Beschränken uns auf das **Leerheitsproblem** – die anderen . . .

- lassen sich wie üblich darauf reduzieren
- aber teils mit (doppelt) exponentiellem „Blowup"
  (Determinisierung, Komplementierung, siehe Folie 80)
  $\rightsquigarrow$ höhere Komplexität

16:00

Vorbetrachtungen

Betrachten 4 Standardprobleme:

- Leerheitsproblem
- Wortproblem (Wort ist durch NBA gegeben)
- Äquivalenzproblem
- Universalitätsproblem

Beschränken uns auf das **Leerheitsproblem** – die anderen ...

- lassen sich wie üblich darauf reduzieren
- aber teils mit (doppelt) exponentiellem „Blowup“
  (Determinisierung, Komplementierung, siehe Folie 80)
  $\rightsquigarrow$ höhere Komplexität

Beschränken uns auf **NBA**,
aber Entscheidbarkeit überträgt sich auf die anderen Modelle

16:00

16:02

Zur Erinnerung:

Gegeben: NBA $\mathcal{A}$

Frage: Gilt $L_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset$?

16:02

Das Leerheitsproblem

Zur Erinnerung:

Gegeben: NBA $\mathcal{A}$
Frage: Gilt $L_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset$?

Satz 3.28
Das Leerheitsproblem für NBAs ist entscheidbar.

2018-12-18

Das Leerheitsproblem

Zur Erinnerung:

Gegeben: NBA $\mathcal{A}$

Frage: Gilt $L_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset$?

Satz 3.28

Das Leerheitsproblem für NBAs ist entscheidbar.

Quiz: Welche Komplexität hat es? **NL** ... **P** ... höher?

16:02

16:02

Das Leerheitsproblem

Zur Erinnerung:

Gegeben: NBA $\mathcal{A}$
Frage: Gilt $L_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset$?

Satz 3.28
Das Leerheitsproblem für NBAs ist entscheidbar.

Quiz: Welche Komplexität hat es? **NL** ... **P** ... höher?

Beweis. $L_\omega(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn gilt:

Es gibt $q_0 \in I$ und $q_f \in F$
und einen Pfad von q_0 zu q_f in $\mathcal{A}$
und einen Pfad von q_f zu q_f in $\mathcal{A}$

$\Rightarrow$ Reduktion zum Leerheitsproblem für NEAs:

Bezeichne $L(\mathcal{A}_{q_1,q_2})$ die von $\mathcal{A}$ **als NEA** erkannte Sprache, wenn $\{q_1\}$ Anfangs- und $\{q_2\}$ Endzustandsmenge ist

Folgender Algorithmus entscheidet das Leerheitsproblem:

1. Rate nichtdeterministisch $q_0 \in I$
2. Rate nichtdeterministisch $q_f \in F$
3. Wenn $L(\mathcal{A}_{q_0,q_f}) = \emptyset$, dann Ausgabe „leer" und stop
4. Wenn $L(\mathcal{A}_{q_f,q_f}) = \emptyset$, dann Ausgabe „leer" und stop
5. Ausgabe „nicht leer" □

16:05 bis 16:07

TODO: Tabelle zu Komplexität Entscheidungsproblemen, wie in vorigen Kapiteln?

Das Leerheitsproblem

Bezeichne $L(\mathcal{A}_{q_1,q_2})$ die von $\mathcal{A}$ **als NEA** erkannte Sprache, wenn $\{q_1\}$ Anfangs- und $\{q_2\}$ Endzustandsmenge ist

Folgender Algorithmus entscheidet das Leerheitsproblem:

1. Rate nichtdeterministisch $q_0 \in I$
2. Rate nichtdeterministisch $q_f \in F$
3. Wenn $L(\mathcal{A}_{q_0,q_f}) = \emptyset$, dann Ausgabe „leer" und stop
4. Wenn $L(\mathcal{A}_{q_f,q_f}) = \emptyset$, dann Ausgabe „leer" und stop
5. Ausgabe „nicht leer" □

Das ist ein **NL**-Algorithmus
(eigentlich **coNL**, aber **NL** = **coNL** ist bekannt, Immerman–Szelepcsényi 1987)

Leerheit für NBAs ist **NL**-vollständig

16:05 bis 16:07

TODO: Tabelle zu Komplexität Entscheidungsproblemen, wie in vorigen Kapiteln?

Überblick Entscheidungsprobleme für NBAs

Problem	entscheidbar?	Komplexität	effizient lösbar?
LP	✓	**NL**-vollständig	✓
WP	— macht keinen Sinn, da Eingabewort ∞ —		
ÄP	✓	**PSpace**-vollst.	✗*
UP	✓	**PSpace**-vollst.	✗*

* unter den üblichen komplexitätstheoretischen Annahmen (z. B. **PSpace** $\neq$ **P**)

16:07

Hier nochmal für Euch als Überblick.
Situation dieselbe wie für NEAs; nur WP macht hier keinen Sinn.

16:08

Reaktive Systeme und Verifikation

Reaktive Systeme

- interagieren mit ihrer Umwelt
- terminieren oft nicht
- Beispiele:
  - Betriebssysteme, Bankautomaten, Flugsicherungssysteme, ...
  - s. a. Philosophenproblem, Konsument-Produzent-Problem

Reaktive Systeme und Verifikation

Reaktive Systeme

- interagieren mit ihrer Umwelt
- terminieren oft nicht
- Beispiele:
  - Betriebssysteme, Bankautomaten, Flugsicherungssysteme, ...
  - s. a. Philosophenproblem, Konsument-Produzent-Problem

Verifikation = Prüfen von Eigenschaften eines Systems

- Eingabe-Ausgabe-Verhalten hat hier keine Bedeutung
- Andere Eigenschaften sind wichtig, z. B.: keine Verklemmung (deadlock) bei Nebenläufigkeit

16:08

Bestandteile

- **Variablen**: repräsentieren Werte, die zur Beschreibung des Systems notwendig sind
- **Zustände**: „Schnappschüsse" des Systems
  Zustand enthält Variablenwerte zu einem bestimmten Zeitpunkt
- **Transitionen**: erlaubte Übergänge zwischen Zuständen

Pfad (Berechnung) in einem System:
unendliche Folge von Zuständen entlang der Transitionen

16:09

16:10

Definition 3.29

Sei AV eine Menge von Aussagenvariablen. Eine **Kripke-Struktur** $\mathcal{S}$ über AV ist ein Quadrupel $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$, wobei

- S eine endliche nichtleere Menge von **Zuständen** ist,
- $S_0 \subseteq S$ die Menge der **Anfangszustände** ist,

* Saul Kripke, geb. 1940, Philosoph und Logiker, Princeton und New York, USA

2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter
└ *Anwendung: Model-Checking in Linearer Temporallogik (LTL)*
  └ Transitionsgraph als Kripke-Struktur*

Transitionsgraph als Kripke-Struktur*

Definition 3.29

Sei AV eine Menge von Aussagenvariablen. Eine **Kripke-Struktur** $\mathcal{S}$ über AV ist ein Quadrupel $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$, wobei

- S eine endliche nichtleere Menge von **Zuständen** ist,
- $S_0 \subseteq S$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $R \subseteq S \times S$ eine **Übergangsrelation** ist, die **total ist**: $\forall s \in S\ \exists s' \in S : sRs'$

* Saul Kripke, geb. 1940, Philosoph und Logiker, Princeton und New York, USA

16:10

Transitionsgraph als Kripke-Struktur*

Definition 3.29

Sei AV eine Menge von Aussagenvariablen. Eine **Kripke-Struktur** $\mathcal{S}$ über AV ist ein Quadrupel $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$, wobei

- S eine endliche nichtleere Menge von **Zuständen** ist,
- $S_0 \subseteq S$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $R \subseteq S \times S$ eine **Übergangsrelation** ist, die **total ist**: $\forall s \in S\ \exists s' \in S : sRs'$
- $\ell : S \to 2^{\mathrm{AV}}$ eine Funktion ist, die **Markierungsfunktion**. $\ell(s) = \{p_1, \ldots, p_m\}$ bedeutet: in s sind genau $p_1, \ldots, p_m$ wahr

* Saul Kripke, geb. 1940, Philosoph und Logiker, Princeton und New York, USA

16:10

16:10

Transitionsgraph als Kripke-Struktur*

Definition 3.29

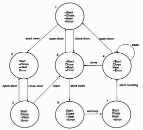
Sei AV eine Menge von Aussagenvariablen. Eine **Kripke-Struktur** $\mathcal{S}$ über AV ist ein Quadrupel $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$, wobei

- S eine endliche nichtleere Menge von **Zuständen** ist,
- $S_0 \subseteq S$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $R \subseteq S \times S$ eine **Übergangsrelation** ist, die **total ist**: $\forall s \in S\ \exists s' \in S : sRs'$
- $\ell : S \to 2^{\mathrm{AV}}$ eine Funktion ist, die **Markierungsfunktion**. $\ell(s) = \{p_1, \ldots, p_m\}$ bedeutet: in s sind genau $p_1, \ldots, p_m$ wahr

Ein **Pfad** in $\mathcal{S}$ ist eine unendliche Folge $\pi = s_0 s_1 s_2 \ldots$ von Zuständen mit $s_0 \in S_0$ und $s_i R s_{i+1}$ für alle $i \geqslant 0$.

* Saul Kripke, geb. 1940, Philosoph und Logiker, Princeton und New York, USA

Beispiel 1: Mikrowelle



aus: E. M. Clarke et al., Model Checking, MIT Press 1999

16:14

16:17

Beispiel 2: nebenläufiges Programm

P 0 **cobegin**
    1    $P_0 \| P_1$
    2 **coend**

16:17

Beispiel 2: nebenläufiges Programm

```
P    0   cobegin
     1     P0 || P1
     2   coend

P0  10   while(true) do
    11     wait(turn = 0)
    12     turn ← 1
    13   end while
```

Beispiel 2: nebenläufiges Programm

```
P    0   cobegin
     1     P0 || P1
     2   coend

P0  10   while(true) do
    11     wait(turn = 0)
    12     turn ← 1          kritischer Bereich
    13   end while
```

16:17

Beispiel 2: nebenläufiges Programm

```
P     0   cobegin
      1     P0 || P1
      2   coend

P0   10   while(true) do
     11     wait(turn = 0)
     12     turn ← 1          kritischer Bereich
     13   end while

P1   20   while(true) do
     21     wait(turn = 1)
     22     turn ← 0
     23   end while
```

16:17

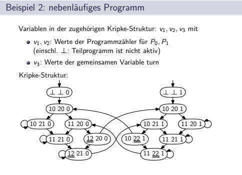
Beispiel 2: nebenläufiges Programm

```
P    0   cobegin
     1     P0 || P1
     2   coend

P0  10   while(true) do
    11     wait(turn = 0)
    12     turn ← 1             kritischer Bereich
    13   end while

P1  20   while(true) do
    21     wait(turn = 1)
    22     turn ← 0             kritischer Bereich
    23   end while
```

16:17



16:20

Hier sind die v_i natürlich keine **Aussagenvar.**, um es einfacher zu machen. Man braucht eigentlich für v_1, v_2 jeweils mehrere AV.

Spezifikationen

… sind Zusicherungen über die Eigenschaften eines Systems, z. B.:

- „Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben.“
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird,
  fängt sie immer nach endlicher Zeit an zu heizen.“
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird,
  ist es *möglich*, danach zu heizen.“

16:24

2018-12-18

Spezifikationen

... sind Zusicherungen über die Eigenschaften eines Systems, z. B.:

- „Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben."
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird, fängt sie immer nach endlicher Zeit an zu heizen."
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird, ist es *möglich*, danach zu heizen."

- „Es kommt nie vor, dass beide Teilprogramme zugleich im kritischen Bereich sind."
- „Jedes Teilprog. kommt beliebig oft in seinen krit. Bereich."
- „Jedes Teilprogramm *kann* beliebig oft in seinen kritischen Bereich gelangen."

16:24

2018-12-18

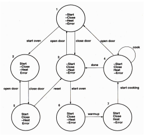
Teil 3: unendliche Wörter
└─*Anwendung: Model-Checking in Linearer Temporallogik (LTL)*
└─Spezifikationen

Spezifikationen

... sind Zusicherungen über die Eigenschaften eines Systems, z. B.:

- „Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben."
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird,
  fängt sie immer nach endlicher Zeit an zu heizen."
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird,
  ist es *möglich*, danach zu heizen."
- „Es kommt nie vor,
  dass beide Teilprogramme zugleich im kritischen Bereich sind."
- „Jedes Teilprog. kommt beliebig oft in seinen krit. Bereich."
- „Jedes Teilprogramm *kann* beliebig oft in seinen kritischen Bereich gelangen."
- ...

16:24



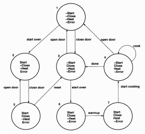
aus:
E. M. Clarke et al.,
Model Checking,
MIT Press 1999

16:26

Jeweils fragen: Ist die Zusicherung erfüllt?

Vorsicht: Es kommt darauf an, ob gemeint ist „in jedem Lauf“ oder „es gibt einen Lauf“. (univ. vs. exist. Model-Checking) – **Diskutieren!**

Spezifikationen für das Beispiel Mikrowelle



aus:
E. M. Clarke et al.,
Model Checking,
MIT Press 1999

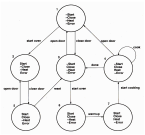
„Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben."

16:26

Jeweils fragen: Ist die Zusicherung erfüllt?

Vorsicht: Es kommt darauf an, ob gemeint ist „in jedem Lauf" oder „es gibt einen Lauf". (univ. vs. exist. Model-Checking) – **Diskutieren!**

Spezifikationen für das Beispiel Mikrowelle



aus:
E. M. Clarke et al.,
Model Checking,
MIT Press 1999

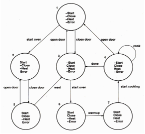
„Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben.“ ✘

16:26

Jeweils fragen: Ist die Zusicherung erfüllt?

Vorsicht: Es kommt darauf an, ob gemeint ist „in jedem Lauf“ oder „es gibt einen Lauf“. (univ. vs. exist. Model-Checking) – **Diskutieren!**

Spezifikationen für das Beispiel Mikrowelle



aus:
E. M. Clarke et al.,
Model Checking,
MIT Press 1999

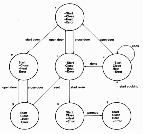
„Wenn MW gestartet, beginnt sie immer nach endl. Zeit zu heizen.“

16:26

Jeweils fragen: Ist die Zusicherung erfüllt?

Vorsicht: Es kommt darauf an, ob gemeint ist „in jedem Lauf“ oder „es gibt einen Lauf“. (univ. vs. exist. Model-Checking) – **Diskutieren!**

Spezifikationen für das Beispiel Mikrowelle



aus:
E. M. Clarke et al.,
Model Checking,
MIT Press 1999

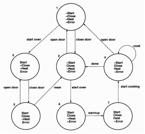
„Wenn MW gestartet, beginnt sie immer nach endl. Zeit zu heizen.“ ✘

16:26

Jeweils fragen: Ist die Zusicherung erfüllt?

Vorsicht: Es kommt darauf an, ob gemeint ist „in jedem Lauf“ oder „es gibt einen Lauf“. (univ. vs. exist. Model-Checking) – **Diskutieren!**

Spezifikationen für das Beispiel Mikrowelle



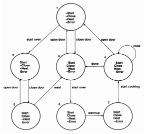
aus:
E. M. Clarke et al.,
Model Checking,
MIT Press 1999

„Wenn MW gestartet, ist es *möglich*, danach zu heizen.“

16:26

Jeweils fragen: Ist die Zusicherung erfüllt?

Vorsicht: Es kommt darauf an, ob gemeint ist „in jedem Lauf“ oder „es gibt einen Lauf“. (univ. vs. exist. Model-Checking) – **Diskutieren!**



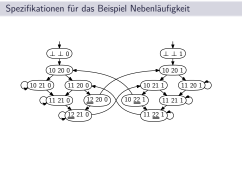
aus:
E. M. Clarke et al., Model Checking, MIT Press 1999

„Wenn MW gestartet, ist es *möglich*, danach zu heizen.“ ✓

16:26

Jeweils fragen: Ist die Zusicherung erfüllt?

Vorsicht: Es kommt darauf an, ob gemeint ist „in jedem Lauf“ oder „es gibt einen Lauf“. (univ. vs. exist. Model-Checking) – **Diskutieren!**

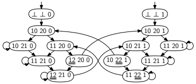


16:30

Jeweils wieder fragen . . .

Anmerken: Diese Sätze sind mit Absicht schwammig formuliert. Wir werden noch Hilfsmittel kennen lernen, mit denen man sie präzise formulieren kann.

Spezifikationen für das Beispiel Nebenläufigkeit



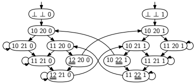
„Es kommt nie vor,
dass beide Teilprogramme zugleich im kritischen Bereich sind."

16:30

Jeweils wieder fragen ...

Anmerken: Diese Sätze sind mit Absicht schwammig formuliert. Wir werden noch Hilfsmittel kennen lernen, mit denen man sie präzise formulieren kann.

Spezifikationen für das Beispiel Nebenläufigkeit



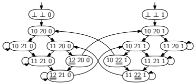
„Es kommt nie vor, dass beide Teilprogramme zugleich im kritischen Bereich sind.“ ✓

16:30

Jeweils wieder fragen ...

Anmerken: Diese Sätze sind mit Absicht schwammig formuliert. Wir werden noch Hilfsmittel kennen lernen, mit denen man sie präzise formulieren kann.

Spezifikationen für das Beispiel Nebenläufigkeit

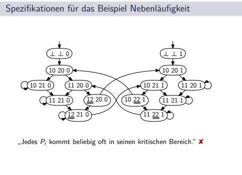


„Jedes P_i kommt beliebig oft in seinen kritischen Bereich.“

16:30

Jeweils wieder fragen . . .

Anmerken: Diese Sätze sind mit Absicht schwammig formuliert. Wir werden noch Hilfsmittel kennen lernen, mit denen man sie präzise formulieren kann.

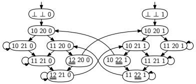


16:30

Jeweils wieder fragen . . .

Anmerken: Diese Sätze sind mit Absicht schwammig formuliert. Wir werden noch Hilfsmittel kennen lernen, mit denen man sie präzise formulieren kann.

Spezifikationen für das Beispiel Nebenläufigkeit

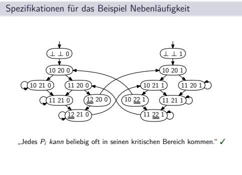


„Jedes P_i *kann* beliebig oft in seinen kritischen Bereich kommen."

16:30

Jeweils wieder fragen …

Anmerken: Diese Sätze sind mit Absicht schwammig formuliert. Wir werden noch Hilfsmittel kennen lernen, mit denen man sie präzise formulieren kann.



16:30

Jeweils wieder fragen . . .

Anmerken: Diese Sätze sind mit Absicht schwammig formuliert. Wir werden noch Hilfsmittel kennen lernen, mit denen man sie präzise formulieren kann.

Model-Checking

… beantwortet die Frage,
ob ein gegebenes System eine gegebene Spezifikation erfüllt

16:33

Model-Checking

… beantwortet die Frage,
ob ein gegebenes System eine gegebene Spezifikation erfüllt

Definition 3.30 (Model-Checking-Problem MCP)

Gegeben ein System $\mathcal{S}$ und eine Spezifikation E,

- gilt E **für jeden Pfad** in $\mathcal{S}$?
  (universelle Variante)
- **gibt es einen Pfad** in $\mathcal{S}$, der E erfüllt?
  (existenzielle Variante)

16:33

2018-12-18

Model-Checking

… beantwortet die Frage,
ob ein gegebenes System eine gegebene Spezifikation erfüllt

Definition 3.30 (Model-Checking-Problem MCP)

Gegeben ein System $\mathcal{S}$ und eine Spezifikation E,

- gilt E **für jeden Pfad** in $\mathcal{S}$?
  (universelle Variante)
- **gibt es einen Pfad** in $\mathcal{S}$, der E erfüllt?
  (existenzielle Variante)

Frage: Wie kann man Model-Checking

- exakt beschreiben und
- algorithmisch lösen?

16:33

Schritt 1

- Stellen System $\mathcal{S}$ als NBA $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ dar
  $\rightsquigarrow$ Pfade in $\mathcal{S}$ sind erfolgreiche Runs von $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$

16:35

Nun zunächst Schritt 1.

Model-Checking mittels Büchi-Automaten!

Schritt 1

- Stellen System $\mathcal{S}$ als NBA $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ dar
  $\rightsquigarrow$ Pfade in $\mathcal{S}$ sind erfolgreiche Runs von $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$
- Stellen Spezifikation E als NBA $\mathcal{A}_E$ dar
  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_E$ beschreibt die Pfade, die E erfüllen

16:35

Nun zunächst Schritt 1.

Model-Checking mittels Büchi-Automaten!

Schritt 1

- Stellen System $\mathcal{S}$ als NBA $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ dar
  $\rightsquigarrow$ Pfade in $\mathcal{S}$ sind erfolgreiche Runs von $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$
- Stellen Spezifikation E als NBA $\mathcal{A}_E$ dar
  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_E$ beschreibt die Pfade, die E erfüllen

$\rightsquigarrow$ Universelles MCP $=$ „$L(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?“
Existenzielles MCP $=$ „$L(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) \cap L(\mathcal{A}_E) \neq \emptyset$?“
(beide reduzierbar zum Leerheitsproblem, benutzt Abschlusseigenschaften)

16:35

Nun zunächst Schritt 1.

Model-Checking mittels Büchi-Automaten!

Schritt 1

- Stellen System $\mathcal{S}$ als NBA $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ dar
  $\rightsquigarrow$ Pfade in $\mathcal{S}$ sind erfolgreiche Runs von $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$
- Stellen Spezifikation E als NBA $\mathcal{A}_E$ dar
  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_E$ beschreibt die Pfade, die E erfüllen

$\rightsquigarrow$ Universelles MCP $=$ „$L(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?"
Existenzielles MCP $=$ „$L(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) \cap L(\mathcal{A}_E) \neq \emptyset$?"
(beide reduzierbar zum Leerheitsproblem, benutzt Abschlusseigenschaften)

Schritt 2

- intuitivere Beschreibung von E mittels Temporallogik
- Umwandlung von Temporallogik-Formel φ_E in Automaten $\mathcal{A}_E$

16:35

Nun zunächst Schritt 1.

Konstruktion des NBA $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ für das System $\mathcal{S}$

Erinnerung: $\mathcal{S}$ gegeben als Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$
(Zustände, Anfangszustände, Transitionen, Markierungen)

16:37

Kripke-Struktur in Automaten umwandeln ist ganz einfach: im Prinzip ist die KS bereits der Automat.

Konstruktion des NBA $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ für das System $\mathcal{S}$

Erinnerung: $\mathcal{S}$ gegeben als Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$
(Zustände, Anfangszustände, Transitionen, Markierungen)

Zugehöriger Automat $\mathcal{A}_\mathcal{S} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$:

- $\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$
- $Q = S \uplus \{q_0\}$
- $I = \{q_0\}$
- $F = Q$
- $\Delta = \quad \{\, (q_0, \ell(s), s) \;\mid s \in S_0\} \cup \{\, (s, \ell(s'), s') \;\mid (s, s') \in R\}$

16:37

Kripke-Struktur in Automaten umwandeln ist ganz einfach: im Prinzip ist die KS bereits der Automat.

Konstruktion des NBA $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ für das System $\mathcal{S}$

Erinnerung: $\mathcal{S}$ gegeben als Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$
(Zustände, Anfangszustände, Transitionen, Markierungen)

Zugehöriger Automat $\mathcal{A}_\mathcal{S} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$:

- $\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$
- $Q = S \uplus \{q_0\}$
- $I = \{q_0\}$
- $F = Q$
- $\Delta = \quad \{ (q_0, \ell(s), s) \mid s \in S_0\} \cup \{ (s, \ell(s'), s') \mid (s, s') \in R\}$

Beispiel: siehe Tafel. **T 3.18**

16:37

Kripke-Struktur in Automaten umwandeln ist ganz einfach: im Prinzip ist die KS bereits der Automat.

Beschreibung von E durch NBA $\mathcal{A}_E$

Beispiel Mikrowelle (siehe Bild auf Folie 90)

(a) „Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben."
(b) „Wenn die Mikrowelle gestartet wird, fängt sie nach endlicher Zeit an zu heizen."
(c) „Wenn die Mikrowelle gestartet wird, ist es *möglich*, danach zu heizen."

Beispiel Nebenläufigkeit (siehe Bild auf Folie 92)

(d) „Es kommt nie vor, dass beide Teilprog. zugleich im kritischen Bereich sind."
(e) „Jedes Teilprog. kommt beliebig oft in seinen krit. Bereich."
(f) „Jedes Teilprogramm *kann* beliebig oft in seinen kritischen Bereich gelangen."

16:43 bis 16:55 und 5min Pause

Verifikation mittels der konstruierten NBAs

Gegeben sind wieder System $\mathcal{S}$ und Spezifikation E.

Universelles MCP

- Gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?

17:00

„Exponentielle Explosion“: wie schon gesagt, liefert der Weg über die Safra-Konstruktion einen **doppelt** exp. Blowup.

Es gibt aber direkte Verfahren zur Komplementierung mit einfach exp. Blowup.

Außerdem kann man natürlich nicht den exp. großen Komplement-Automaten im Ganzen erzeugen, wenn man nur Polyplatz zur Verfügung hat.

Man muss ihn also „on the fly“ stückchenweise generieren, während man den Algo. für das Leerheitsproblem laufen lässt.

Verifikation mittels der konstruierten NBAs

Gegeben sind wieder System $\mathcal{S}$ und Spezifikation E.

Universelles MCP

- Gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?

17:00

„Exponentielle Explosion“: wie schon gesagt, liefert der Weg über die Safra-Konstruktion einen **doppelt** exp. Blowup.

Es gibt aber direkte Verfahren zur Komplementierung mit einfach exp. Blowup.

Außerdem kann man natürlich nicht den exp. großen Komplement-Automaten im Ganzen erzeugen, wenn man nur Polyplatz zur Verfügung hat.

Man muss ihn also „on the fly“ stückchenweise generieren, während man den Algo. für das Leerheitsproblem laufen lässt.

Verifikation mittels der konstruierten NBAs

Gegeben sind wieder System $\mathcal{S}$ und Spezifikation E.

Universelles MCP

- Gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap \overline{L(\mathcal{A}_E)} = \emptyset$?

17:00

„Exponentielle Explosion“: wie schon gesagt, liefert der Weg über die Safra-Konstruktion einen **doppelt** exp. Blowup.

Es gibt aber direkte Verfahren zur Komplementierung mit einfach exp. Blowup.

Außerdem kann man natürlich nicht den exp. großen Komplement-Automaten im Ganzen erzeugen, wenn man nur Polyplatz zur Verfügung hat.

Man muss ihn also „on the fly“ stückchenweise generieren, während man den Algo. für das Leerheitsproblem laufen lässt.

Verifikation mittels der konstruierten NBAs

Gegeben sind wieder System $\mathcal{S}$ und Spezifikation E.

Universelles MCP

- Gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap \overline{L(\mathcal{A}_E)} = \emptyset$?

$\rightsquigarrow$ Komplementierung $\mathcal{A}_E$, Produktautomat, Leerheitsproblem

17:00

„Exponentielle Explosion": wie schon gesagt, liefert der Weg über die Safra-Konstruktion einen **doppelt** exp. Blowup.

Es gibt aber direkte Verfahren zur Komplementierung mit einfach exp. Blowup.

Außerdem kann man natürlich nicht den exp. großen Komplement-Automaten im Ganzen erzeugen, wenn man nur Polyplatz zur Verfügung hat.

Man muss ihn also „on the fly" stückchenweise generieren, während man den Algo. für das Leerheitsproblem laufen lässt.

Verifikation mittels der konstruierten NBAs

Gegeben sind wieder System $\mathcal{S}$ und Spezifikation E.

Universelles MCP

- Gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap \overline{L(\mathcal{A}_E)} = \emptyset$?

$\leadsto$ Komplementierung $\mathcal{A}_E$, Produktautomat, Leerheitsproblem

- Komplexität: **PSpace** (exponentielle Explosion bei Komplementierung)

17:00

„Exponentielle Explosion“: wie schon gesagt, liefert der Weg über die Safra-Konstruktion einen **doppelt** exp. Blowup.

Es gibt aber direkte Verfahren zur Komplementierung mit einfach exp. Blowup.

Außerdem kann man natürlich nicht den exp. großen Komplement-Automaten im Ganzen erzeugen, wenn man nur Polyplatz zur Verfügung hat.

Man muss ihn also „on the fly“ stückchenweise generieren, während man den Algo. für das Leerheitsproblem laufen lässt.

Verifikation mittels der konstruierten NBAs

Gegeben sind wieder System $\mathcal{S}$ und Spezifikation E.

Universelles MCP

- Gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap \overline{L(\mathcal{A}_E)} = \emptyset$?

$\rightsquigarrow$ Komplementierung $\mathcal{A}_E$, Produktautomat, Leerheitsproblem

- Komplexität: **PSpace** (exponentielle Explosion bei Komplementierung)

Existenzielles MCP

- Gibt es einen Pfad in $\mathcal{S}$, der E erfüllt?

17:00

„Exponentielle Explosion“: wie schon gesagt, liefert der Weg über die Safra-Konstruktion einen **doppelt** exp. Blowup.

Es gibt aber direkte Verfahren zur Komplementierung mit einfach exp. Blowup.

Außerdem kann man natürlich nicht den exp. großen Komplement-Automaten im Ganzen erzeugen, wenn man nur Polyplatz zur Verfügung hat.

Man muss ihn also „on the fly“ stückchenweise generieren, während man den Algo. für das Leerheitsproblem laufen lässt.

Verifikation mittels der konstruierten NBAs

Gegeben sind wieder System $\mathcal{S}$ und Spezifikation E.

Universelles MCP

- Gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap \overline{L(\mathcal{A}_E)} = \emptyset$?

$\rightsquigarrow$ Komplementierung $\mathcal{A}_E$, Produktautomat, Leerheitsproblem

- Komplexität: **PSpace** (exponentielle Explosion bei Komplementierung)

Existenzielles MCP

- Gibt es einen Pfad in $\mathcal{S}$, der E erfüllt?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap L(\mathcal{A}_E) \neq \emptyset$?

17:00

„Exponentielle Explosion“: wie schon gesagt, liefert der Weg über die Safra-Konstruktion einen **doppelt** exp. Blowup.

Es gibt aber direkte Verfahren zur Komplementierung mit einfach exp. Blowup.

Außerdem kann man natürlich nicht den exp. großen Komplement-Automaten im Ganzen erzeugen, wenn man nur Polyplatz zur Verfügung hat.

Man muss ihn also „on the fly“ stückchenweise generieren, während man den Algo. für das Leerheitsproblem laufen lässt.

Verifikation mittels der konstruierten NBAs

Gegeben sind wieder System $\mathcal{S}$ und Spezifikation E.

Universelles MCP

- Gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap \overline{L(\mathcal{A}_E)} = \emptyset$?

$\leadsto$ Komplementierung $\mathcal{A}_E$, Produktautomat, Leerheitsproblem

- Komplexität: **PSpace** (exponentielle Explosion bei Komplementierung)

Existenzielles MCP

- Gibt es einen Pfad in $\mathcal{S}$, der E erfüllt?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap L(\mathcal{A}_E) \neq \emptyset$?

$\leadsto$ Produktautomat, Leerheitsproblem

17:00

„Exponentielle Explosion“: wie schon gesagt, liefert der Weg über die Safra-Konstruktion einen **doppelt** exp. Blowup.

Es gibt aber direkte Verfahren zur Komplementierung mit einfach exp. Blowup.

Außerdem kann man natürlich nicht den exp. großen Komplement-Automaten im Ganzen erzeugen, wenn man nur Polyplatz zur Verfügung hat.

Man muss ihn also „on the fly“ stückchenweise generieren, während man den Algo. für das Leerheitsproblem laufen lässt.

Verifikation mittels der konstruierten NBAs

Gegeben sind wieder System $\mathcal{S}$ und Spezifikation E.

Universelles MCP

- Gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap \overline{L(\mathcal{A}_E)} = \emptyset$?

$\leadsto$ Komplementierung $\mathcal{A}_E$, Produktautomat, Leerheitsproblem

- Komplexität: **PSpace** (exponentielle Explosion bei Komplementierung)

Existenzielles MCP

- Gibt es einen Pfad in $\mathcal{S}$, der E erfüllt?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap L(\mathcal{A}_E) \neq \emptyset$?

$\leadsto$ Produktautomat, Leerheitsproblem

- Komplexität: **NL** (keine exponentielle Explosion)

17:00

„Exponentielle Explosion“: wie schon gesagt, liefert der Weg über die Safra-Konstruktion einen **doppelt** exp. Blowup.

Es gibt aber direkte Verfahren zur Komplementierung mit einfach exp. Blowup.

Außerdem kann man natürlich nicht den exp. großen Komplement-Automaten im Ganzen erzeugen, wenn man nur Polyplatz zur Verfügung hat.

Man muss ihn also „on the fly“ stückchenweise generieren, während man den Algo. für das Leerheitsproblem laufen lässt.

Bemerkung zur Implementierung

Praktisches Problem

- Komplexität von MCP wird **bezüglich** $|\mathcal{A}_\mathcal{S}| + |\mathcal{A}_\mathcal{E}|$ gemessen
- $|\mathcal{S}|$ und damit $|\mathcal{A}_\mathcal{S}|$ ist **exponentiell** in der Anzahl der Variablen: **State space explosion problem**

$\leadsto$ universelles bzw. existenzielles MCP sind eigentlich in **ExpSpace** bzw. in **PSpace** bezüglich Anz. der Variablen

17:06

„Abhilfe“: macht natürlich nicht die Komplexität kleiner, vermeidet aber, den ganzen Automaten in den Speicher schreiben zu müssen.

Bemerkung zur Implementierung

Praktisches Problem

- Komplexität von MCP wird **bezüglich** $|\mathcal{A}_\mathcal{S}| + |\mathcal{A}_\mathcal{E}|$ gemessen
- $|\mathcal{S}|$ und damit $|\mathcal{A}_\mathcal{S}|$ ist **exponentiell** in der Anzahl der Variablen: **State space explosion problem**

$\rightsquigarrow$ universelles bzw. existenzielles MCP sind eigentlich in **ExpSpace** bzw. in **PSpace** bezüglich Anz. der Variablen

Abhilfe:

- „On-the-fly model checking"
- Zustände von $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ werden während des Leerheitstests nur bei Bedarf erzeugt

17:06

„Abhilfe": macht natürlich nicht die Komplexität kleiner, vermeidet aber, den ganzen Automaten in den Speicher schreiben zu müssen.

Spezifikationen mittels Linearer Temporallogik (LTL)

Nun zu Schritt 2. Ziele:

- intuitivere Beschreibung der Spezifikation E durch Formel φ_E
- Prozedur zur Umwandlung φ_E in $\mathcal{A}_E$
  (!) allerdings ist $|\mathcal{A}_E|$ exponentiell in $|\varphi_E|$
- dafür Explosion bei Komplementierung vermeiden:
  wandle $\neg\varphi_E$ in Automaten um

$\rightsquigarrow$ beide MCP für LTL sind PSpace-vollständig

17:08

2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter
└─ *Anwendung: Model-Checking in Linearer Temporallogik (LTL)*
└─ LTL im Überblick

17:09

LTL im Überblick

LTL = Aussagenlogik + Operatoren, die über **Pfade** sprechen:

F (Future)
: $F\varphi$ bedeutet „φ ist irgendwann in der Zukunft wahr“

G (Global)
: $G\varphi$ bedeutet „φ ist ab jetzt immer wahr“

X (ne$X$t)
: $X\varphi$ bedeutet „φ ist im nächsten Zeitpunkt wahr“

U: (Until)
: $\varphi U \psi$ bedeutet „ψ ist irgendwann in der Zukunft wahr und bis dahin ist immer φ wahr“

2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter
└ *Anwendung: Model-Checking in Linearer Temporallogik (LTL)*
└ LTL-Syntax

LTL-Syntax

Sei **AV** abzählbare Menge von **Aussagenvariablen**.

Definition 3.31 (LTL-Formeln)

- Jede Aussagenvariable $p \in \mathrm{AV}$ ist eine LTL-Formel.

17:11

LTL-Syntax

Sei **AV** abzählbare Menge von **Aussagenvariablen**.

Definition 3.31 (LTL-Formeln)

- Jede Aussagenvariable $p \in$ AV ist eine LTL-Formel.
- Wenn φ und ψ LTL-Formeln sind, dann sind die folgenden auch LTL-Formeln.
  - $\neg\varphi$ „nicht φ"
  - $\varphi \wedge \psi$ „φ und ψ"
  - $F\varphi$ „in Zukunft irgendwann φ"
  - $G\varphi$ „in Zukunft immer φ"
  - $X\varphi$ „im nächsten Zeitpunkt φ"
  - $\varphi\, U\, \psi$ „in Zukunft irgendwann ψ; bis dahin immer φ"

17:11

LTL-Syntax

Sei **AV** abzählbare Menge von **Aussagenvariablen**.

Definition 3.31 (LTL-Formeln)

- Jede Aussagenvariable $p \in$ AV ist eine LTL-Formel.
- Wenn φ und ψ LTL-Formeln sind, dann sind die folgenden auch LTL-Formeln.
  - $\neg\varphi$ „nicht φ"
  - $\varphi \wedge \psi$ „φ und ψ"
  - $F\varphi$ „in Zukunft irgendwann φ"
  - $G\varphi$ „in Zukunft immer φ"
  - $X\varphi$ „im nächsten Zeitpunkt φ"
  - $\varphi \, U \, \psi$ „in Zukunft irgendwann ψ; bis dahin immer φ"

Verwenden die üblichen Abkürzungen $\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, $\varphi \to \psi = \neg\varphi \vee \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

17:11

LTL-Semantik

Pfad: Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to 2^{\mathsf{AV}}$ Schreiben $\pi_0\pi_1\dots$ statt $\pi(0)\pi(1)\dots$

17:13 bis Ende 17:40

8:30 – Kurzwdhlg.: Syntax+Semantik LTL; Bsp. $a\ U\ b$ an Tafel

Hinweisen: „nicht strikte Semantik", also „$\geqslant$" statt „$>$"; „für ein" ($=$ „es gibt") vs. „für alle"

LTL-Semantik

Pfad: Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to 2^{\mathsf{AV}}$ Schreiben $\pi_0\pi_1\dots$ statt $\pi(0)\pi(1)\dots$

Definition 3.32
Sei φ eine LTL-Formel, π ein Pfad und $i \in \mathbb{N}$.
Das **Erfülltsein** von φ in π, i $(\pi, i \models \varphi)$ ist wie folgt definiert.

17:13 bis Ende 17:40

8:30 – Kurzwdhlg.: Syntax+Semantik LTL; Bsp. $a\ U\ b$ an Tafel

Hinweisen: „nicht strikte Semantik", also „$\geqslant$" statt „$>$";
„für ein" (= „es gibt") vs. „für alle"

LTL-Semantik

Pfad: Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to 2^{\mathsf{AV}}$ Schreiben $\pi_0\pi_1\dots$ statt $\pi(0)\pi(1)\dots$

Definition 3.32

Sei φ eine LTL-Formel, π ein Pfad und $i \in \mathbb{N}$.
Das **Erfülltsein** von φ in π, i $(\pi, i \models \varphi)$ ist wie folgt definiert.

- $\pi, i \models p$, falls $p \in \pi_i$, für alle $p \in \mathsf{AV}$

17:13 bis Ende 17:40
8:30 – Kurzwdhlg.: Syntax+Semantik LTL; Bsp. $a\ U\ b$ an Tafel

Hinweisen: „nicht strikte Semantik“, also „$\geqslant$“ statt „$>$“;
„für ein“ (= „es gibt“) vs. „für alle“

LTL-Semantik

Pfad: Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to 2^{\mathsf{AV}}$ Schreiben $\pi_0\pi_1 \ldots$ statt $\pi(0)\pi(1)\ldots$

Definition 3.32

Sei φ eine LTL-Formel, π ein Pfad und $i \in \mathbb{N}$.
Das **Erfülltsein** von φ in π, i $(\pi, i \models \varphi)$ ist wie folgt definiert.

- $\pi, i \models p$, falls $p \in \pi_i$, für alle $p \in \mathsf{AV}$
- $\pi, i \models \neg\psi$, falls $\pi, i \not\models \psi$

17:13 bis Ende 17:40

8:30 – Kurzwdhlg.: Syntax+Semantik LTL; Bsp. *a U b* an Tafel

Hinweisen: „nicht strikte Semantik“, also „$\geqslant$“ statt „$>$“; „für ein“ (= „es gibt“) vs. „für alle“

LTL-Semantik

Pfad: Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to 2^{\mathsf{AV}}$ Schreiben $\pi_0\pi_1\dots$ statt $\pi(0)\pi(1)\dots$

Definition 3.32

Sei φ eine LTL-Formel, π ein Pfad und $i \in \mathbb{N}$.
Das **Erfülltsein** von φ in π, i $(\pi, i \models \varphi)$ ist wie folgt definiert.

- $\pi, i \models p$,   falls $p \in \pi_i$, für alle $p \in \mathsf{AV}$
- $\pi, i \models \neg\psi$,   falls $\pi, i \not\models \psi$
- $\pi, i \models \varphi \wedge \psi$,   falls $\pi, i \models \varphi$ und $\pi, i \models \psi$

17:13 bis Ende 17:40

8:30 – Kurzwdhlg.: Syntax+Semantik LTL; Bsp. *a U b* an Tafel

Hinweisen: „nicht strikte Semantik", also „$\geqslant$" statt „$>$";
„für ein" (= „es gibt") vs. „für alle"

LTL-Semantik

Pfad: Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to 2^{\mathsf{AV}}$ Schreiben $\pi_0\pi_1\dots$ statt $\pi(0)\pi(1)\dots$

Definition 3.32

Sei φ eine LTL-Formel, π ein Pfad und $i \in \mathbb{N}$.
Das **Erfülltsein** von φ in π, i $(\boldsymbol{\pi, i \models \varphi})$ ist wie folgt definiert.

- $\pi, i \models p$, falls $p \in \pi_i$, für alle $p \in \mathsf{AV}$
- $\pi, i \models \neg\psi$, falls $\pi, i \not\models \psi$
- $\pi, i \models \varphi \wedge \psi$, falls $\pi, i \models \varphi$ und $\pi, i \models \psi$
- $\pi, i \models F\varphi$, falls $\pi, j \models \varphi$ für ein $j \geqslant i$

17:13 bis Ende 17:40

8:30 – Kurzwdhlg.: Syntax+Semantik LTL; Bsp. *a U b* an Tafel

Hinweisen: „nicht strikte Semantik", also „$\geqslant$" statt „$>$";
„für ein" (= „es gibt") vs. „für alle"

LTL-Semantik

Pfad: Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to 2^{\mathrm{AV}}$ Schreiben $\pi_0\pi_1\ldots$ statt $\pi(0)\pi(1)\ldots$

Definition 3.32

Sei φ eine LTL-Formel, π ein Pfad und $i \in \mathbb{N}$.
Das **Erfülltsein** von φ in π, i $(\pi, i \models \varphi)$ ist wie folgt definiert.

- $\pi, i \models p$, falls $p \in \pi_i$, für alle $p \in \mathrm{AV}$
- $\pi, i \models \neg\psi$, falls $\pi, i \not\models \psi$
- $\pi, i \models \varphi \wedge \psi$, falls $\pi, i \models \varphi$ und $\pi, i \models \psi$
- $\pi, i \models F\varphi$, falls $\pi, j \models \varphi$ für ein $j \geqslant i$
- $\pi, i \models G\varphi$, falls $\pi, j \models \varphi$ für alle $j \geqslant i$

17:13 bis Ende 17:40

8:30 – Kurzwdhlg.: Syntax+Semantik LTL; Bsp. *a U b* an Tafel

Hinweisen: „nicht strikte Semantik“, also „$\geqslant$“ statt „$>$“; „für ein“ (= „es gibt“) vs. „für alle“

LTL-Semantik

Pfad: Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to 2^{\mathsf{AV}}$ Schreiben $\pi_0\pi_1\ldots$ statt $\pi(0)\pi(1)\ldots$

Definition 3.32

Sei φ eine LTL-Formel, π ein Pfad und $i \in \mathbb{N}$.
Das **Erfülltsein** von φ in π, i $(\pi, i \models \varphi)$ ist wie folgt definiert.

- $\pi, i \models p$, falls $p \in \pi_i$, für alle $p \in \mathsf{AV}$
- $\pi, i \models \neg\psi$, falls $\pi, i \not\models \psi$
- $\pi, i \models \varphi \wedge \psi$, falls $\pi, i \models \varphi$ und $\pi, i \models \psi$
- $\pi, i \models F\varphi$, falls $\pi, j \models \varphi$ für ein $j \geqslant i$
- $\pi, i \models G\varphi$, falls $\pi, j \models \varphi$ für alle $j \geqslant i$
- $\pi, i \models X\varphi$, falls $\pi, i+1 \models \varphi$

17:13 bis Ende 17:40

8:30 – Kurzwdhlg.: Syntax+Semantik LTL; Bsp. *a U b* an Tafel

Hinweisen: „nicht strikte Semantik“, also „$\geqslant$“ statt „$>$“;
„für ein“ (= „es gibt“) vs. „für alle“

LTL-Semantik

Pfad: Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to 2^{\mathsf{AV}}$ Schreiben $\pi_0\pi_1\ldots$ statt $\pi(0)\pi(1)\ldots$

Definition 3.32

Sei φ eine LTL-Formel, π ein Pfad und $i \in \mathbb{N}$.
Das **Erfülltsein** von φ in π, i $(\pi, i \models \varphi)$ ist wie folgt definiert.

- $\pi, i \models p$, falls $p \in \pi_i$, für alle $p \in \mathsf{AV}$
- $\pi, i \models \neg\psi$, falls $\pi, i \not\models \psi$
- $\pi, i \models \varphi \wedge \psi$, falls $\pi, i \models \varphi$ und $\pi, i \models \psi$
- $\pi, i \models F\varphi$, falls $\pi, j \models \varphi$ für ein $j \geqslant i$
- $\pi, i \models G\varphi$, falls $\pi, j \models \varphi$ für alle $j \geqslant i$
- $\pi, i \models X\varphi$, falls $\pi, i+1 \models \varphi$
- $\pi, i \models \varphi\, U\, \psi$, falls $\pi, j \models \psi$ für ein $j \geqslant i$ und $\pi, k \models \varphi$ für alle k mit $i \leqslant k < j$

17:13 bis Ende 17:40

8:30 – Kurzwdhlg.: Syntax+Semantik LTL; Bsp. $a\ U\ b$ an Tafel

Hinweisen: „nicht strikte Semantik", also „$\geqslant$" statt „$>$"; „für ein" (= „es gibt") vs. „für alle"

LTL-Semantik

Pfad: Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to 2^{AV}$ Schreiben $\pi_0\pi_1\ldots$ statt $\pi(0)\pi(1)\ldots$

Definition 3.32

Sei φ eine LTL-Formel, π ein Pfad und $i \in \mathbb{N}$.
Das **Erfülltsein** von φ in π, i $(\pi, i \models \varphi)$ ist wie folgt definiert.

- $\pi, i \models p$, falls $p \in \pi_i$, für alle $p \in AV$
- $\pi, i \models \neg\psi$, falls $\pi, i \not\models \psi$
- $\pi, i \models \varphi \wedge \psi$, falls $\pi, i \models \varphi$ und $\pi, i \models \psi$
- $\pi, i \models F\varphi$, falls $\pi, j \models \varphi$ für ein $j \geqslant i$
- $\pi, i \models G\varphi$, falls $\pi, j \models \varphi$ für alle $j \geqslant i$
- $\pi, i \models X\varphi$, falls $\pi, i+1 \models \varphi$
- $\pi, i \models \varphi\, U\, \psi$, falls $\pi, j \models \psi$ für ein $j \geqslant i$
  und $\pi, k \models \varphi$ für alle k mit $i \leqslant k < j$

17:13 bis Ende 17:40

8:30 – Kurzwdhlg.: Syntax+Semantik LTL; Bsp. $a\ U\ b$ an Tafel

Hinweisen: „nicht strikte Semantik“, also „$\geqslant$“ statt „$>$“;
„für ein“ (= „es gibt“) vs. „für alle“

Beispiel-Spezifikationen als LTL-Formeln

Beispiel Mikrowelle (siehe Bild auf Folie 90)

- „Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben.“
  $G(e \to F\neg e)$ ($e \in AV$ steht für „Error“)

8:32

Wir brauchen das Bild nicht zu sehen; hier geht es nur um die Eigenschaften und die entsprechenden LTL-Formeln.

Bedeutung der AV steht daneben.

Beispiel-Spezifikationen als LTL-Formeln

Beispiel Mikrowelle (siehe Bild auf Folie 90)

- „Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben.“
  $G(e \to F\neg e)$ ($e \in$ AV steht für „Error“)
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird,
  fängt sie nach endlicher Zeit an zu heizen.“
  $G(s \to Fh)$ ($s, h \in$ AV stehen für „Start“ bzw. „Heat“)

8:32

Wir brauchen das Bild nicht zu sehen; hier geht es nur um die Eigenschaften und die entsprechenden LTL-Formeln.

Bedeutung der AV steht daneben.

Beispiel-Spezifikationen als LTL-Formeln

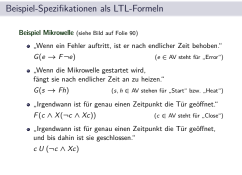
Beispiel Mikrowelle (siehe Bild auf Folie 90)

- „Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben."
  $G(e \rightarrow F\neg e)$ ($e \in$ AV steht für „Error")
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird,
  fängt sie nach endlicher Zeit an zu heizen."
  $G(s \rightarrow Fh)$ ($s, h \in$ AV stehen für „Start" bzw. „Heat")
- „Irgendwann ist für genau einen Zeitpunkt die Tür geöffnet."
  $F(c \wedge X(\neg c \wedge Xc))$ ($c \in$ AV steht für „Close")

8:32

Wir brauchen das Bild nicht zu sehen; hier geht es nur um die Eigenschaften und die entsprechenden LTL-Formeln.

Bedeutung der AV steht daneben.



Beispiel-Spezifikationen als LTL-Formeln

Beispiel Mikrowelle (siehe Bild auf Folie 90)

- „Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben."
  $G(e \to F\neg e)$ ($e \in AV$ steht für „Error")
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird,
  fängt sie nach endlicher Zeit an zu heizen."
  $G(s \to Fh)$ ($s, h \in AV$ stehen für „Start" bzw. „Heat")
- „Irgendwann ist für genau einen Zeitpunkt die Tür geöffnet."
  $F(c \wedge X(\neg c \wedge Xc))$ ($c \in AV$ steht für „Close")
- „Irgendwann ist für genau einen Zeitpunkt die Tür geöffnet,
  und bis dahin ist sie geschlossen."
  $c\,U\,(\neg c \wedge Xc)$

8:32

Wir brauchen das Bild nicht zu sehen; hier geht es nur um die Eigenschaften und die entsprechenden LTL-Formeln.

Bedeutung der AV steht daneben.

2018-12-18

Beispiel Nebenläufigkeit (siehe Bild auf Folie 92)

- Es kommt nie vor,
  dass beide Teilprog. zugleich im kritischen Bereich sind.
  $G\neg(p_{12} \wedge p_{22})$ ($p_i \in AV$ stehen für „Programmzähler in Zeile i")

8:35

Beispiel-Spezifikationen als LTL-Formeln

Beispiel Nebenläufigkeit (siehe Bild auf Folie 92)

- Es kommt nie vor,
  dass beide Teilprog. zugleich im kritischen Bereich sind.
  $G\neg(p_{12} \wedge p_{22})$ ($p_i \in$ AV stehen für „Programmzähler in Zeile i")
- Jedes Teilprog. kommt beliebig oft in seinen krit. Bereich.
  $GFp_{12} \wedge GFp_{22}$

8:35

Zur Erinnerung:

Definition 3.30: Model-Checking-Problem MCP

Gegeben ein System $\mathcal{S}$ und eine Spezifikation E,

- gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
  (universelle Variante)
- gibt es einen Pfad in $\mathcal{S}$, der E erfüllt?
  (existenzielle Variante)

8:37

Model-Checking mit LTL-Formeln

Für LTL:

(jedem Pfad $s_0 s_1 s_2 \dots$ in einer Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$ entspricht ein LTL-Pfad $\pi_0 \pi_1 \pi_2 \dots$ mit $\pi_i = \ell(s_i)$)

8:38

„Algorithmische Lösung?“ – Büchi-Automaten zu Hilfe! :)

Model-Checking mit LTL-Formeln

Für LTL:
(jedem Pfad $s_0 s_1 s_2 \dots$ in einer Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$ entspricht ein LTL-Pfad $\pi_0 \pi_1 \pi_2 \dots$ mit $\pi_i = \ell(s_i)$)

Definition 3.33 (Model-Checking-Problem)

Gegeben Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$ und LTL-Formel φ,

- gilt $\pi, 0 \models \varphi$ für alle Pfade π, die in einem $s_0 \in S_0$ starten? **(universelle Variante)**

8:38

„Algorithmische Lösung?“ – Büchi-Automaten zu Hilfe! :)

Für LTL:
(jedem Pfad $s_0 s_1 s_2 \ldots$ in einer Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$ entspricht ein LTL-Pfad $\pi_0 \pi_1 \pi_2 \ldots$ mit $\pi_i = \ell(s_i)$)

Definition 3.33 (Model-Checking-Problem)

Gegeben Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$ und LTL-Formel φ,

- gilt $\pi, 0 \models \varphi$ für alle Pfade π, die in einem $s_0 \in S_0$ starten? **(universelle Variante)**
- gibt es Pfad π, der in einem $\pi_0 \in S_0$ startet, mit $\pi, 0 \models \varphi$? **(existenzielle Variante)**

8:38

„Algorithmische Lösung?“ – Büchi-Automaten zu Hilfe! :)

Model-Checking mit LTL-Formeln

Für LTL:
(jedem Pfad $s_0 s_1 s_2 \ldots$ in einer Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$ entspricht ein LTL-Pfad $\pi_0 \pi_1 \pi_2 \ldots$ mit $\pi_i = \ell(s_i)$)

Definition 3.33 (Model-Checking-Problem)
Gegeben Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$ und LTL-Formel φ,
- gilt $\pi, 0 \models \varphi$ für alle Pfade π, die in einem $s_0 \in S_0$ starten? **(universelle Variante)**
- gibt es Pfad π, der in einem $\pi_0 \in S_0$ startet, mit $\pi, 0 \models \varphi$? **(existenzielle Variante)**

✓ Exakte Beschreibung des Model-Checking-Problems
- Algorithmische Lösung?

8:38

„Algorithmische Lösung?" – Büchi-Automaten zu Hilfe! :)

MCP weiterhin mittels Büchi-Automaten lösen!

Vorgehen wie gehabt:

- Wandle Kripke-Struktur $\mathcal{S}$ in NBA $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ um
  $\rightsquigarrow$ Pfade in $\mathcal{S}$ sind erfolgreiche Runs von $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$

8:41

8:41

MCP weiterhin mittels Büchi-Automaten lösen!

Vorgehen wie gehabt:

- Wandle Kripke-Struktur $\mathcal{S}$ in NBA $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ um
  $\rightsquigarrow$ Pfade in $\mathcal{S}$ sind erfolgreiche Runs von $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$
- Wandeln LTL-Formel φ_E in NBA $\mathcal{A}_E$ um
  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_E$ beschreibt Pfade, die E erfüllen

MCP weiterhin mittels Büchi-Automaten lösen!

Vorgehen wie gehabt:

- Wandle Kripke-Struktur $\mathcal{S}$ in NBA $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ um
  $\rightsquigarrow$ Pfade in $\mathcal{S}$ sind erfolgreiche Runs von $\mathcal{A}_\mathcal{S}$
- Wandeln LTL-Formel φ_E in NBA $\mathcal{A}_E$ um
  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_E$ beschreibt Pfade, die E erfüllen

$\rightsquigarrow$ Universelles MCP $=$ „$L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?“
Existenzielles MCP $=$ „$L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap L(\mathcal{A}_E) \neq \emptyset$?“

8:41

8:41

MCP weiterhin mittels Büchi-Automaten lösen!

Vorgehen wie gehabt:

- Wandle Kripke-Struktur $\mathcal{S}$ in NBA $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ um
  $\rightsquigarrow$ Pfade in $\mathcal{S}$ sind erfolgreiche Runs von $\mathcal{A}_\mathcal{S}$
- Wandeln LTL-Formel φ_E in NBA $\mathcal{A}_E$ um
  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_E$ beschreibt Pfade, die E erfüllen

$\rightsquigarrow$ Universelles MCP $=$ „$L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?“
Existenzielles MCP $=$ „$L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap L(\mathcal{A}_E) \neq \emptyset$?“

Noch zu klären: Wie wandeln wir φ_E in $\mathcal{A}_E$ um?

Wandeln φ_E in **generalisierten Büchi-Automaten (GNBA)** um:

- $\mathcal{A}_{\varphi_E} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ mit $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$
- $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$ ist erfolgreich: $\mathrm{Inf}(r) \cap F \neq \emptyset$ **für alle** $F \in \mathcal{F}$
- GNBAs und NBAs sind äquivalent (nur quadratische Vergrößerung)

8:43

„GNBAs und NBAs sind äquivalent“:

Richtung NBA $\rightarrow$ GNBA trivial.

Richtung GNBA $\rightarrow$ NBA:
Wenn $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$, erzeuge n Kopien des GNBA.
Von jedem akzZ. der i-ten Kopie wechsle in $((i+1) \bmod n)$-te Kopie.
Neue akzZ: die bisherigen akzZ. *einer* beliebigen Kopie.

Vorbetrachtungen

Sei φ_E eine LTL-Formel, in der o. B. d. A.

- nur die Operatoren $\neg, \wedge, X, U$ vorkommen
  Die anderen kann man mit diesen ausdrücken:
  $F\varphi \equiv (\neg(p \wedge \neg p))\ U\ \varphi \qquad G\varphi \equiv \neg F \neg \varphi$
- keine doppelte Negation vorkommt
  natürlich gilt $\neg\neg\psi \equiv \psi$ für alle Teilformeln ψ

(Hier steht $\alpha \equiv \beta$ für $\forall \pi \forall i : \pi, i \models \alpha$ gdw. $\pi, i \models \beta$)

8:45

Die Einschränkung der vorkommenden Operatoren
• ist o. B. d. A., wie wir an den Äquivalenzen sehen;
• macht die folgenden Definitionen deutlich übersichtlicher;
• führt aber dazu, dass Automaten schon für kleine F-/G-Formeln riesig werden.
Deshalb nur kurze Beispiele hier und in ÜS.

Vorbetrachtungen

Sei φ_E eine LTL-Formel, in der o. B. d. A.

- nur die Operatoren $\neg, \wedge, X, U$ vorkommen

  Die anderen kann man mit diesen ausdrücken:
  $F\varphi \equiv (\neg(p \wedge \neg p))\ U\ \varphi \qquad G\varphi \equiv \neg F \neg\varphi$

- keine doppelte Negation vorkommt

  natürlich gilt $\neg\neg\psi \equiv \psi$ für alle Teilformeln ψ

(Hier steht $\alpha \equiv \beta$ für $\forall\pi\forall i : \pi, i \models \alpha$ gdw. $\pi, i \models \beta$)

Etwas Notation

- $\sim\psi = \begin{cases} \vartheta & \text{falls } \psi = \neg\vartheta \\ \neg\psi & \text{sonst} \end{cases}$
- $\mathrm{cl}(\varphi_E) = \{\psi, \sim\psi \mid \psi \text{ ist Teilformel von } \varphi_E\}$
- $\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$

8:45

Die Einschränkung der vorkommenden Operatoren

- ist o. B. d. A., wie wir an den Äquivalenzen sehen;
- macht die folgenden Definitionen deutlich übersichtlicher;
- führt aber dazu, dass Automaten schon für kleine F-/G-Formeln riesig werden.

Deshalb nur kurze Beispiele hier und in ÜS.

Intuitionen

Erweiterung von Pfaden

- Betrachten Pfade $\pi = s_0 s_1 s_2 \ldots$ mit $s_i \subseteq \mathrm{AV}$
- Erweitern jedes s_i mit den $\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$, für die $\pi, i \models \psi$ gilt
- Resultat: Folge $\overline{\pi} = t_0 t_1 t_2 \ldots$ mit $t_i \subseteq \mathrm{cl}(\varphi_E)$

$\searrow$ Skizze: s. Tafel **T 3.21**

8:48

bis 8:56, 5min Pause

Intuitionen

Erweiterung von Pfaden

- Betrachten Pfade $\pi = s_0 s_1 s_2 \dots$ mit $s_i \subseteq \mathrm{AV}$
- Erweitern jedes s_i mit den $\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$, für die $\pi, i \models \psi$ gilt
- Resultat: Folge $\overline{\pi} = t_0 t_1 t_2 \dots$ mit $t_i \subseteq \mathrm{cl}(\varphi_E)$

Skizze: s. Tafel **T 3.21**

Bestandteile des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

- Zustände: $\approx$ alle t_i
- $\overline{\pi} = t_0 t_1 t_2 \dots$ wird ein Run von $\mathcal{A}_{\varphi_E}$ für $s_0 s_1 s_2 \dots$ sein
- Run $\overline{\pi}$ wird erfolgreich sein gdw. $\pi, 0 \models \varphi_E$
- Kodieren Bedeutung der logischen Operatoren in
  - Zustände ($\neg$, $\wedge$, teilweise U)
  - Überführungsrelation (X, teilweise U)
  - Akzeptanzbedingung (teilweise U)

8:48

bis 8:56, 5min Pause

Zustandsmenge des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Q = Menge aller elementaren Formelmengen,
wobei $t \subseteq \mathrm{cl}(\varphi_E)$ **elementar** ist, wenn gilt:

1. t ist **konsistent** bzgl. Aussagenlogik, d. h.
   für alle $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$ und $\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   - $\psi_1 \wedge \psi_2 \in t$ gdw. $\psi_1 \in t$ und $\psi_2 \in t$
   - wenn $\psi \in t$, dann $\sim\psi \notin t$

9:01 bis 9:15

Zustandsmenge des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Q = Menge aller elementaren Formelmengen,
wobei $t \subseteq \mathrm{cl}(\varphi_E)$ **elementar** ist, wenn gilt:

1. t ist **konsistent** bzgl. Aussagenlogik, d. h.
   für alle $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$ und $\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   - $\psi_1 \wedge \psi_2 \in t$ gdw. $\psi_1 \in t$ und $\psi_2 \in t$
   - wenn $\psi \in t$, dann $\sim\psi \notin t$
2. t ist **lokal konsistent** bzgl. des U-Operators, d. h.
   für alle $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   - wenn $\psi_2 \in t$, dann $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in t$
   - wenn $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in t$ und $\psi_2 \notin t$, dann $\psi_1 \in t$

9:01 bis 9:15

Zustandsmenge des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Q = Menge aller elementaren Formelmengen,
wobei $t \subseteq \mathrm{cl}(\varphi_E)$ **elementar** ist, wenn gilt:

1. t ist **konsistent** bzgl. Aussagenlogik, d. h.
   für alle $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$ und $\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   - $\psi_1 \wedge \psi_2 \in t$ gdw. $\psi_1 \in t$ und $\psi_2 \in t$
   - wenn $\psi \in t$, dann $\sim\psi \notin t$
2. t ist **lokal konsistent** bzgl. des U-Operators, d. h.
   für alle $\psi_1 \, U \, \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   - wenn $\psi_2 \in t$, dann $\psi_1 \, U \, \psi_2 \in t$
   - wenn $\psi_1 \, U \, \psi_2 \in t$ und $\psi_2 \notin t$, dann $\psi_1 \in t$
3. t ist **maximal**, d. h. für alle $\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   wenn $\psi \notin t$, dann $\sim\psi \in t$

9:01 bis 9:15

Zustandsmenge des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Q = Menge aller elementaren Formelmengen,
wobei $t \subseteq \mathrm{cl}(\varphi_E)$ **elementar** ist, wenn gilt:

1. t ist **konsistent** bzgl. Aussagenlogik, d. h.
   für alle $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$ und $\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   - $\psi_1 \wedge \psi_2 \in t$ gdw. $\psi_1 \in t$ und $\psi_2 \in t$
   - wenn $\psi \in t$, dann $\sim\psi \notin t$
2. t ist **lokal konsistent** bzgl. des U-Operators, d. h.
   für alle $\psi_1 \, U \, \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   - wenn $\psi_2 \in t$, dann $\psi_1 \, U \, \psi_2 \in t$
   - wenn $\psi_1 \, U \, \psi_2 \in t$ und $\psi_2 \notin t$, dann $\psi_1 \in t$
3. t ist **maximal**, d. h. für alle $\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   wenn $\psi \notin t$, dann $\sim\psi \in t$

Beispiel: $a \, U \, (\neg a \wedge b)$, siehe Tafel

T 3.22

9:01 bis 9:15

Überführungsrelation des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Seien $t, t' \in Q$ (elementare Formelmengen) und $s \in \Sigma$ ($\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$)

Δ besteht aus allen Tripeln (t, s, t') mit

1. $s = t \cap \mathsf{AV}$ (d. h. s besteht aus allen Aussagevariablen in t)

9:15 bis 9:26

9:15 bis 9:26

Überführungsrelation des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Seien $t, t' \in Q$ (elementare Formelmengen) und $s \in \Sigma$ ($\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$)

Δ besteht aus allen Tripeln (t, s, t') mit

1. $s = t \cap \mathsf{AV}$ (d. h. s besteht aus allen Aussagevariablen in t)
2. für alle $X\psi \in \mathsf{cl}(\varphi_E)$: $X\psi \in t$ gdw. $\psi \in t'$

Überführungsrelation des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Seien $t, t' \in Q$ (elementare Formelmengen) und $s \in \Sigma$ ($\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$)

Δ besteht aus allen Tripeln (t, s, t') mit

1. $s = t \cap \mathsf{AV}$ (d. h. s besteht aus allen Aussagevariablen in t)
2. für alle $X\psi \in \mathsf{cl}(\varphi_E)$: $X\psi \in t$ gdw. $\psi \in t'$
3. für alle $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in \mathsf{cl}(\varphi_E)$:
   $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in t$ gdw. $\psi_2 \in t$ oder ($\psi_1 \in t$ und $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in t'$)
   („Aufschieben" von $\psi_1 \; U \; \psi_2$) ⚠

9:15 bis 9:26

Überführungsrelation des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Seien $t, t' \in Q$ (elementare Formelmengen) und $s \in \Sigma$ ($\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$)

Δ besteht aus allen Tripeln (t, s, t') mit

1. $s = t \cap \mathsf{AV}$ (d. h. s besteht aus allen Aussagevariablen in t)
2. für alle $X\psi \in \mathsf{cl}(\varphi_E)$: $X\psi \in t$ gdw. $\psi \in t'$
3. für alle $\psi_1 \, U \, \psi_2 \in \mathsf{cl}(\varphi_E)$:
   $\psi_1 \, U \, \psi_2 \in t$ gdw. $\psi_2 \in t$ oder ($\psi_1 \in t$ und $\psi_1 \, U \, \psi_2 \in t'$)
   („Aufschieben" von $\psi_1 \, U \, \psi_2$) ⚠

Skizzen: siehe Tafel **T 3.23**

9:15 bis 9:26

9:26 bis 9:58

Anfangszustände und Akzeptanzkomponente von $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Menge der Anfangszustände

alle elementaren Formelmengen, die φ_E enthalten

$$I = \{t \in Q \mid \varphi_E \in t\}$$

9:26 bis 9:58

Anfangszustände und Akzeptanzkomponente von $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Menge der Anfangszustände

alle elementaren Formelmengen, die φ_E enthalten

$$I = \{t \in Q \mid \varphi_E \in t\}$$

Menge der akzeptierenden Zustände

stellen sicher, dass kein $\psi_1 \; U \; \psi_2$ für immer "aufgeschoben" wird

$$\mathcal{F} = \{M_{\psi_1 U \psi_2} \mid \psi_1 \; U \; \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)\} \text{ mit}$$

$$M_{\psi_1 U \psi_2} = \{t \in Q \mid \psi_1 \; U \; \psi_2 \notin t \text{ oder } \psi_2 \in t\}$$

Anfangszustände und Akzeptanzkomponente von $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Menge der Anfangszustände

alle elementaren Formelmengen, die φ_E enthalten

$$I = \{t \in Q \mid \varphi_E \in t\}$$

Menge der akzeptierenden Zustände

stellen sicher, dass kein $\psi_1 \; U \; \psi_2$ für immer "aufgeschoben" wird

$$\mathcal{F} = \{M_{\psi_1 U \psi_2} \mid \psi_1 \; U \; \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)\} \text{ mit}$$

$$M_{\psi_1 U \psi_2} = \{t \in Q \mid \psi_1 \; U \; \psi_2 \notin t \text{ oder } \psi_2 \in t\}$$

Intuition: Ein $t \in M_{\psi_1 U \psi_2}$ kommt unendlich oft vor gdw. $\psi_1 \; U \; \psi_2$ immer nur höchstens endlich lange "aufgeschoben" wird

9:26 bis 9:58

Anfangszustände und Akzeptanzkomponente von $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Menge der Anfangszustände

alle elementaren Formelmengen, die φ_E enthalten

$$I = \{t \in Q \mid \varphi_E \in t\}$$

Menge der akzeptierenden Zustände

stellen sicher, dass kein $\psi_1 \; U \; \psi_2$ für immer "aufgeschoben" wird

$$\mathcal{F} = \{M_{\psi_1 U \psi_2} \mid \psi_1 \; U \; \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)\} \text{ mit}$$

$$M_{\psi_1 U \psi_2} = \{t \in Q \mid \psi_1 \; U \; \psi_2 \notin t \text{ oder } \psi_2 \in t\}$$

Intuition: Ein $t \in M_{\psi_1 U \psi_2}$ kommt unendlich oft vor gdw. $\psi_1 \; U \; \psi_2$ immer nur höchstens endlich lange "aufgeschoben" wird

Beispiel: Xa, siehe Tafel **T 3.24**

Beispiel: $(\neg a) \; U \; b$, siehe Tafel **T 3.25**

9:26 bis 9:58

Abschließende Betrachtungen

- $|Q|$ ist exponentiell in $|\varphi_E|$
- Dafür kann man jetzt beim universellen MCP auf Komplementierung $\mathcal{A}_{\varphi_E}$ verzichten:
  Wandle $\neg\varphi_E$ in Automaten um

$\rightsquigarrow$ beide MCP-Varianten in **PSpace**

- beide MCP-Varianten sind **PSpace**-vollständig
  (aber für bestimmte LTL-Fragmente **NP**- oder **NL**-vollständig)

A. Prasad Sistla, Edmund M. Clarke: *The Complexity of Propositional Linear Temporal Logics*. Journal of the ACM 32(3): 733-749 (1985)

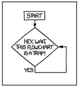
Michael Bauland, Martin Mundhenk, Thomas Schneider, Henning Schnoor, Ilka Schnoor, Heribert Vollmer: *The Tractability of Model Checking for LTL: the Good, the Bad, and the Ugly Fragments*. ACM Trans. Comput. Log. 12(2): 13 (2011)

9:58 bis Ende – umblättern und evtl. Prüfungshinweise

2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter

└─Damit sind wir am Ende dieses Kapitels.



Vielen Dank.

2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter

└─ Literatur für diesen Teil (1)

Literatur für diesen Teil (1)

Wolfgang Thomas.
Automata on Infinite Objects.
In J. van Leeuwen (Hrsg.):
Handbook of Theoretical Computer Science.
Volume B: Formal Models and Sematics.
Elsevier, 1990, S. 133–192.
SUB, Zentrale: `a inf 400 ad/465-2`

Wolfgang Thomas.
Languages, automata, and logic.
In G. Rozenberg and A. Salomaa (Hrsg.:)
Handbook of Formal Languages. Volume 3: Beyond Words.
Springer, 1997, S. 389–455.
SUB, Zentrale: `a inf 330/168-3`

Literatur für diesen Teil (2)

- Markus Roggenbach.
  Determinization of Büchi Automata.
  In E. Grädel, W. Thomas, T. Wilke (Hrsg.):
  Automata, Logics, and Infinite Games.
  LNCS 2500, Springer, 2002, S. 43–60.
  Erklärt anschaulich Safras Konstruktion.
  `http://www.cs.tau.ac.il/~rabinoa/Lncs2500.zip`
  Auch erhältlich auf Anfrage in der BB Mathematik im MZH:
  `19h inf 001 k/100-2500`
- Meghyn Bienvenu.
  Automata on Infinite Words and Trees.
  Vorlesungsskript, Uni Bremen, WS 2009/10. Kapitel 2.
  `http://www.informatik.uni-bremen.de/tdki/lehre/ws09/automata/automata-notes.pdf`

Literatur für diesen Teil (3)

- Christel Baier, Joost-Pieter Katoen.
  Principles of Model Checking.
  MIT Press 2008.
  Abschnitt 4.3 „Automata on Infinite Words"
  Abschnitt 5.2 „Automata-Based LTL Model Checking"
  SUB, Zentrale: `a inf 440 ver/782`, `a inf 440 ver/782a`
- Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, Doron A. Peled.
  Model Checking.
  MIT Press 1999.
  Abschnitt 2 „Modeling Systems" bis Mitte S. 14,
  Abschnitt 2.2.3+2.3 „Concurrent Programs" und „Example ...",
  Abschnitt 3 „Temporal Logics",
  Abschnitt 9.1 „Automata on Finite and Infinite Words".
  SUB, Zentrale: `a inf 440 ver/780(6)`, `a inf 440 ver/780(6)a`

Anhang: Beispiel Konsument-Produzent-Problem

- P erzeugt Produkte und legt sie einzeln in einem Lager ab
- K entnimmt Produkte einzeln dem Lager
- Lager fasst maximal 3 Stück

Anhang: Beispiel Konsument-Produzent-Problem

- P erzeugt Produkte und legt sie einzeln in einem Lager ab
- K entnimmt Produkte einzeln dem Lager
- Lager fasst maximal 3 Stück

Modellierung durch endliches Transitionssystem

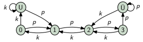
- Zustände $0, 1, 2, 3, \ddot{U}, U$
  - 0,1,2,3: im Lager liegen 0,1,2,3 Stück
  - *Ü*berschuss: P will ein Stück im vollen Lager ablegen
  - *U*nterversorgung: K will ein Stück aus leerem Lager nehmen
- Aktionen P, K (P legt ab oder K entnimmt)

Teil 3: unendliche Wörter

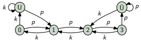
2018-12-18

Das Transitionssystem

Das Transitionssystem



Das Transitionssystem

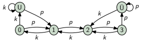


Eingaben in das System: unendliche Zeichenketten über $\Sigma = \{p, k\}$
(Läufe)

Teil 3: unendliche Wörter

└─Das Transitionssystem

Das Transitionssystem



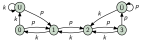
Eingaben in das System: unendliche Zeichenketten über $\Sigma = \{p, k\}$ **(Läufe)**

Zufriedenheit: P (K) möchte ...

- beliebig oft Produkte produzieren (konsumieren)
- nur endlich oft $\ddot{U}$berschuss (Unterversorgung) erleiden

Teil 3: unendliche Wörter

Das Transitionssystem



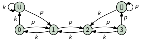
Eingaben in das System: unendliche Zeichenketten über $\Sigma = \{p, k\}$ **(Läufe)**

Zufriedenheit: P (K) möchte ...

- beliebig oft Produkte produzieren (konsumieren)
- nur endlich oft *Ü*berschuss (*U*nterversorgung) erleiden

Lauf, der P und K zufrieden stellt:

Das Transitionssystem



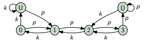
Eingaben in das System: unendliche Zeichenketten über $\Sigma = \{p, k\}$ **(Läufe)**

Zufriedenheit: P (K) möchte ...

- beliebig oft Produkte produzieren (konsumieren)
- nur endlich oft *Ü*berschuss (*U*nterversorgung) erleiden

Lauf, der *P* und *K* zufrieden stellt:
$p^3k^3p^3k^3\dots$ oder $ppkpkpk\dots$ oder ...

Das Transitionssystem



Eingaben in das System: unendliche Zeichenketten über $\Sigma = \{p, k\}$ **(Läufe)**

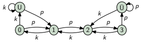
Zufriedenheit: P (K) möchte …

- beliebig oft Produkte produzieren (konsumieren)
- nur endlich oft *Ü*berschuss (*U*nterversorgung) erleiden

Lauf, der P und K zufrieden stellt:
$p^3k^3p^3k^3\ldots$ oder $ppkpkpk\ldots$ oder …

Lauf, der weder P noch K zufrieden stellt:

Das Transitionssystem



Eingaben in das System: unendliche Zeichenketten über $\Sigma = \{p, k\}$ **(Läufe)**

Zufriedenheit: P (K) möchte ...

- beliebig oft Produkte produzieren (konsumieren)
- nur endlich oft *Ü*berschuss (*U*nterversorgung) erleiden

Lauf, der P und K zufrieden stellt:
$p^3k^3p^3k^3\dots$ oder $ppkpkpk\dots$ oder $\dots$

Lauf, der weder P noch K zufrieden stellt: $p^4k^4p^4k^4\dots$

2018-12-18

Teil 3: unendliche Wörter