Métodos Estocásticos da Engenharia I

Capítulo 2 - Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Prof. Magno Silvério Campos

2024/2

Bibliografia

Estas notas de aula foram baseadas nas obras de:

1. CANCHO, V.G. *Notas de Aulas sobre Noções de Estatística e Probabilidade*. São Paulo: USP, 2010.
2. HINES, W.W.; *et al. Probabilidade e Estatística na Engenharia*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
3. MENDES, F. C. T. *Probabilidade para Engenharias*. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
4. MEYER, P.L. Probabilidade: *Aplicações à Estatística*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.
5. MONTGOMERY, D.C.; Runger, G.C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

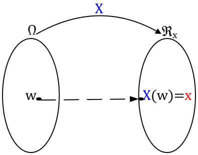
Aconselha-se pesquisá-las para se obter um maior aprofundamento e um melhor aproveitamento nos estudos.

Conteúdo Programático

1. Seção 1 - Conceitos básicos
   - Variável Aleatória;
   - Variáveis Aleatórias Discretas (VAD);
   - Variáveis Aleatórias Contínuas (VAC);
2. Seção 2 - Variáveis Aleatórias Discretas
   - Função de probabilidade;
   - Função de distribuição acumulada;
   - Propriedades;
3. Seção 3 - Variáveis Aleatórias Contínuas
   - Função densidade de probabilidade;
   - Função de distribuição acumulada;
   - Propriedades;
4. Seção 4 - Valor Esperado e Variância
5. Seção 5 - Funções de Variáveis Aleatórias
6. Seção 6 - Função Geratriz de Momentos

Variável aleatória

Definição: seja Ω o espaço amostral associado a um experimento aleatório. Uma variável aleatória, X, é uma função que tem como domínio Ω e como contradomínio um subconjunto dos números reais,$\Re_x \subset \Re$.



Isto é, uma variável aleatória é uma função que confere um número real a cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório.

Uma variável aleatória é denotada por uma letra maiúscula, tal como X. Depois de um experimento ser conduzido, o valor medido da variável aleatória é denotado por uma letra minúscula, tal como $x = 70$ cm.

Exemplo - [Cancho(2010)]

Retira-se, ao acaso, um produto de um grande lote e definem-se as variáveis:

$$\begin{aligned} X &: \text{Número de falhas do produto;} \\ Y &: \text{Tempo de vida do produto.} \end{aligned}$$

O espaço amostral associado a esse experimento aleatório é:

$$\Omega = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

Para o exemplo, os valores possíveis da variável X são $0, 1, 2, ...$, e os valores possíveis da variável Y serão números reais não negativos. Ou seja, o contradomínio das variáveis X e Y são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \Re_X &= \{x;\ x = 0, 1, 2, 3, ...\} \\ \Re_Y &= \{y;\ y \geq 0, y \in \Re\} \end{aligned}$$

As variáveis aleatórias podem ser classificadas, segundo o tipo de contradomínio em 2 tipos:

- *Variáveis aleatórias discretas (VAD)*: são aquelas variáveis cujo contradomínio é um **conjunto finito ou infinito enumerável** de valores. No exemplo anterior, X é uma variável aleatória discreta, pois seu contradomínio $\Re_x$ é um conjunto infinito enumerável. Outros exemplos:

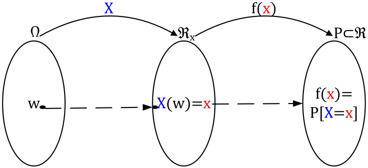
  número de arranhões em uma superfície, proporção de partes defeituosas entre 1.000 testadas, número de bits transmitidos que foram recebidos com erro, etc.

- *Variáveis aleatórias contínuas (VAC)*: são aquelas variáveis cujo contradomínio é um **conjunto infinito não enumerável**. No exemplo anterior, Y é uma variável aleatória contínua pois seu contradomínio $\Re_y$ é o conjunto infinito não enumerável com infinitos elementos. Outros exemplos:

  corrente elétrica, comprimento, pressão, temperatura, tempo, voltagem, peso, etc.

Variáveis Aleatórias Discretas

Função de Probabilidade



Se X é uma variável aleatória discreta que tem como contradomínio $\Re_x$, uma função $f(x)$ é chamada função de probabilidade da variável aleatória X se tem como domínio $\Re_x$, e como contradomínio um conjunto de números reais $P[X = x_i] = f(x_i)$ que satisfazem às seguintes condições:

1. $P[X = x_i] = f(x_i) \geq 0,$ se $x_i \in \Re_x$;
2. $0 \leq f(x_i) \leq 1,$ se $x_i \in \Re_x$;
3. $\sum f(x_i) = 1.$

Exemplo - [Cancho(2010)]

Suponha que 3 peças são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição, de uma caixa que contém 10 unidades, das quais 2 são defeituosas. Seja a variável aleatória, X : número de peças não defeituosas na amostra. Determinar a função de probabilidade de X.

Solução:

O espaço amostral, Ω, associado ao experimento aleatório é dado por:

$$\Omega = \{D_1D_2D_3^c, D_1D_2^cD_3, D_1^cD_2D_3, D_1D_2^cD_3^c, D_1^cD_2D_3^c, D_1^cD_2^cD_3, D_1^cD_2^cD_3^c\}$$

onde D_i e D_i^c representam respectivamente, a i-ésima peça defeituosa e não defeituosa, $i = 1, 2, 3$.

Como X conta o número de peças não defeituosas, segue imediatamente que X pode assumir os valores 1, 2 e 3.

Para deduzir a função de probabilidade de X, observe que o valor 1 ocorre nos eventos $\{D_1 D_2 D_3^c\}$, $\{D_1 D_2^c D_3\}$ e $\{D_1^c D_2 D_3\}$, enquanto que o valor 2 está associado aos eventos $\{D_1 D_2^c D_3^c\}$,$\{D_1^c D_2 D_3^c\}$ e $\{D_1^c D_2^c D_3\}$, e o valor 3 tem apenas um evento a ele associado, ou seja, $\{D_1^c D_2^c D_3^c\}$.

Segue, então, as probabilidades associadas aos valores X:

$$\begin{aligned}
f(1) = P[X = 1] \quad &= \quad P[(D_1, D_2, D_3^c) \cup (D_1, D_2^c, D_3) \cup (D_1^c, D_2, D_3)] \\
&= \quad P[(D_1, D_2, D_3^c) + P[(D_1, D_2^c, D_3)] + P[(D_1^c, D_2, D_3)] \\
&= \quad (2/10)(1/9)(8/8) + (2/10)(8/9)(1/8) + (8/10)(2/9)(1/8) = 1/15
\end{aligned}$$

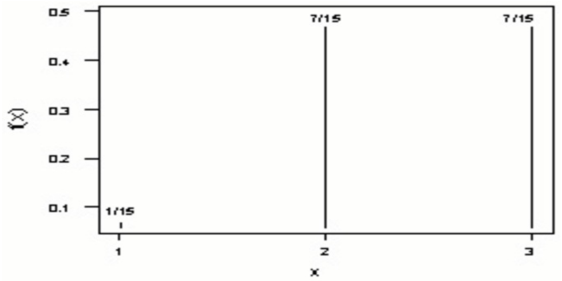
$$\begin{aligned}
f(2) = P[X = 2] \quad &= \quad P[(D_1, D_2^c, D_3^c) \cup (D_1^c, D_2, D_3^c) \cup (D_1^c, D_2^c, D_3)] \\
&= \quad P[(D_1, D_2^c, D_3^c) + P[(D_1^c, D_2, D_3^c)] + P[(D_1^c, D_2^c, D_3)] \\
&= \quad (2/10)(8/9)(7/8) + (8/10)(2/9)(7/8) + (8/10)(7/9)(2/8) = 7/15
\end{aligned}$$

$$f(3) = P[X = 3] \quad = \quad P[(D_1^c, D_2^c, D_3^c)] = (8/10)(7/9)(6/8) = 7/15$$

Consequentemente, a função de probabilidade da variável aleatória X é dada por:

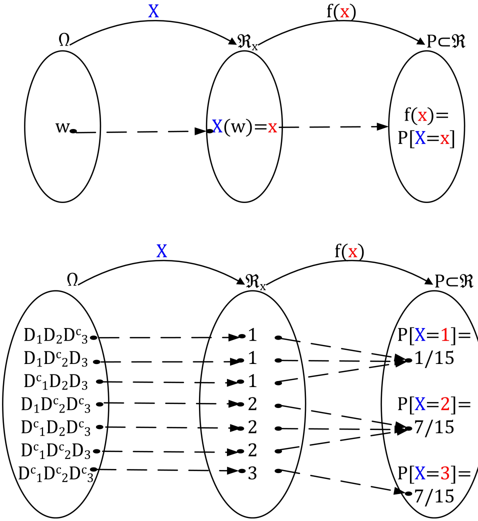
$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1/15, & \text{se } \ x = 1 \\ 7/15, & \text{se } \ x = 2, 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1}$$

O gráfico dessa distribuição de probabilidades é:



Fonte: [Cancho(2010)], p.66

Resumindo,


X
f(x)
Ω
ℜx
P⊂ℜ
w
X(w)=x
f(x)=
P[X=x]
X
f(x)
Ω
ℜx
P⊂ℜ
D1D2Dc3
D1Dc2D3
Dc1D2D3
D1Dc2Dc3
Dc1D2Dc3
Dc1Dc2D3
Dc1Dc2Dc3
1
1
1
2
2
2
3
P[X=1]=
1/15
P[X=2]=
7/15
P[X=3]=
7/15

Função de Distribuição Acumulada (FDA)

Seja X uma variável aleatória discreta com contradomínio $\Re_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e função de probabilidade $f(x_i) = P(X = x_i)$. A função de distribuição acumulada de X, denotada por $F(x)$, é definida como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i), \text{ onde } x_i \in \Re_x.$$

Exemplo - [Cancho(2010)]

Considere o exemplo anterior. Determine a função de distribuição acumulada da variável aleatória X : número de artigos não defeituosos. Ou seja, $F(x)$.

Solução

Neste caso, $\Re_x = \{1, 2, 3\}$. Portanto,

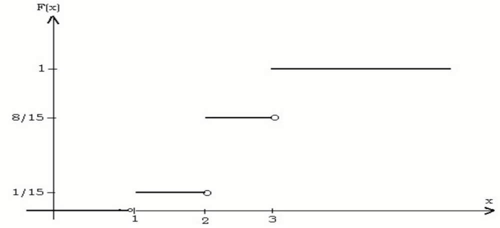
$$\begin{array}{lll}
\text{Se } x < 1 & F(x) = & P(X \leq x) = 0 \\
\text{Se } x = 1 & F(1) = & P(X \leq 1) = \sum_{x_i \leq 1} P(X = x_i) = P(X = 1) = f(1) = \frac{1}{15} \\
\text{Se } 1 \leq x < 2 & F(x) = & P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = P(X = 1) = \frac{1}{15} \\
\text{Se } x = 2 & F(2) = & P(X \leq 2) = \sum_{x_i \leq 2} P(X = x_i) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{15} + \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \\
\text{Se } 2 \leq x < 3 & F(x) = & P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{15} + \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \\
\text{Se } x = 3 & F(3) = & P(X \leq 3) = \sum_{x_i \leq 3} P(X = x_i) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\
 & = & \frac{1}{15} + \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = 1 \\
\text{Se } x \geq 3 & F(x) = & P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1
\end{array}$$

Observação: Pode-se observar, que se $x \in [1;\ 2)$, então $F(x) = F(1)$, se $x \in [2;\ 3)$, $F(x) = F(2)$. Em geral, se $x \in [x_i;\ x_{i+1})$, então $F(x) = F(x_i)$, onde x_i e x_{i+1} são elementos de $\Re_x$.

Logo, a função de distribuição acumulada (FDA) de X pode ser escrita como:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x < 1 \\ \frac{1}{15}, & \text{se } \ 1 \leq x < 2 \\ \frac{8}{15}, & \text{se } \ 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } \ x \geq 3 \end{cases} \tag{2}$$

Na figura abaixo, é apresentado o gráfico da FDA da variável aleatória X.



Fonte: [Cancho(2010)], p.68

Propriedades da função de distribuição acumulada

Sendo $F(x)$ a FDA da variável aleatória discreta X com contradomínio $\Re_x$, então ela deve satisfazer às seguintes propriedades:

1. Para todo $x \in \Re$, $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $F(x)$ é uma função monótona não decrescente;
3. $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$$
4. Se $\Re_x = \{x_1, x_2, \dots\}$ tal que, $x_1 < x_2 < \dots$, então $f(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(X_{i-1})$;
5. Se $a, b \in \Re$ tal que $a < b$, então
   (i) $P(X \leq a) = F(a)$
   (ii) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
   (iii) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
   (iv) $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$

Exemplo - [Cancho(2010)]

A variável aleatória X tem a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \;\; x < 0 \\ 1/8, & \text{se} \;\; 0 \leq x < 1 \\ 1/2, & \text{se} \;\; 1 \leq x < 2 \\ 5/8, & \text{se} \;\; 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se} \;\; x \geq 3 \end{cases}$$

Calcular:

(a) $P(1 < X \leq 3)$;

(b) $P(X > 2)$;

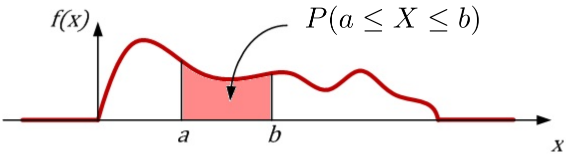
(c) A função de probabilidade da variável aleatória X.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Função Densidade de Probabilidade

A função densidade de probabilidade $f(x)$ pode ser usada para descrever a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória contínua X.

Se um intervalo for provável de conter um valor para X, então sua probabilidade é grande e ela corresponde a valores grandes para $f(x)$. A probabilidade de X estar entre a e b é determinada pela integral de $f(x)$ de a a b, conforme a figura abaixo:



Função Densidade de Probabilidade

Uma função $f(x)$ é chamada função de probabilidade ou função densidade de probabilidade da variável aleatória contínua X, se satisfaz às seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$, se $\quad x \in \Re$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

3. Seja o evento $A = \{x/\ \ a \leq x \leq b\}$. Assim,

$$P[A] = P[x \in A] = P[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x)\, dx$$

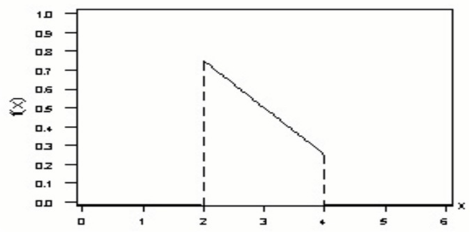
Exemplo - [Cancho(2010)]

Suponha que o tempo de produção de um artigo (em minutos) é uma variável aleatória (VA) X que tem como função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(5-x)}{4}, & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3}$$

Verificar se $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade e calcular a probabilidade do tempo de produção de um artigo, escolhido ao acaso, ser menor que 3 minutos.

Solução



Fonte: [Cancho(2010)], p.74

Observações:

Se X é uma variável aleatória contínua, então

1. $P(X = x) = 0$, para todo $x \in \Re_x$;
2. $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$, para todo $a, b \in \Re_x$
3. $P(X \leq a) = P(X < a)$, para todo $a \in \Re$.

Função de Distribuição Acumulada (FDA)

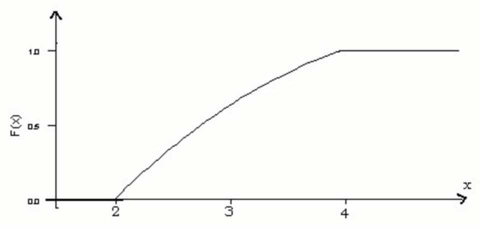
Seja X uma variável aleatória contínua (VAC) com função densidade de probabilidade $f(x)$. A função de distribuição acumulada (FDA) da VAC X é definida como

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{para todo} \quad x \in \Re.$$

Considere a variável aleatória X do exemplo anterior. Determine a FDA de X.

Solução

O gráfico da FDA da variável X é:



Fonte: [Cancho(2010)], p.77

Exemplo - [Cancho(2010)]

Considere a FDA do exemplo anterior. Obtenha:

1. $P(X < 3)$

2. $P(2,5 \leq X < 3,5)$

Propriedades da Função de Distribuição Acumulada

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, para todo $x \in \Re$.
2. $F(x)$ é uma função monótona não decrescente.
3. $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0 \quad \text{e}$$
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$$
4. F(x) é função contínua para todo $x \in \Re$
5. Do cálculo diferencial e integral, tem-se:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

.

Exemplo - [Cancho(2010)]

Suponha que o tempo de vida de um componente eletrônico seja uma variável aleatória X com a seguinte FDA:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - ke^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(a) Para que valor de k, $F(x)$ é uma FDA da variável X.

(b) Determinar: $P(X \geq 2)$, $P(2 < X \leq 4)$ e$P(X \geq -1)$.

(c) Determinar a função de densidade de X.

Valor Esperado e Variância

Valor Esperado de uma variável aleatória

Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade ou função densidade de probabilidade,$f(x)$. O valor esperado, ou esperança matemática ou média da variável aleatória, denotado por $E(X) = \mu_X$, é definido como:

1. Se X é uma variável aleatória discreta,

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x).$$

2. Se X é uma variável aleatória contínua,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Supõe-se que somatório e a integral convergem. Caso contrário, dizemos que o valor esperado da variável aleatória X não existe.

Valor Esperado de uma função de variável aleatória

Seja $Y = g(X)$, sendo $g(.)$ uma função real e contínua na variável aleatória X. O valor esperado de $g(X)$ é definido como:

1. Se X é uma variável aleatória discreta,

$$E(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x)f(x),$$

2. Se X é uma variável aleatória contínua,

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx,$$

Como anteriormente, supõe-se que tanto a somatório quanto a integral convergem.

Variância de uma variável aleatória

Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade $f(x)$ com média $E(X) = \mu_X$. A variância da variável aleatória X, denotada por $Var(X) = \sigma^2$, é definida como o valor esperado da variável aleatória $(X - \mu_X)^2$.

1. Se X é uma variável aleatória discreta,

$$Var(X) = E[(X - \mu_X)^2] = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 f(x) = E[x^2] - (E[x])^2.$$

2. Se X é uma variável aleatória contínua,

$$Var(X) = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx = E[x^2] - (E[x])^2.$$

Propriedades do valor esperado e da variância de uma variável aleatória

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço amostral Ω e a e b duas constantes reais. É possível mostrar as seguintes propriedades:

1. $E(a) = a$.
2. $E(aX) = aE(X)$
3. $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$
4. $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$
5. $Var(a) = 0$
6. $Var(aX) = a^2 Var(X)$
7. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, $V(aX \pm bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$.

Exemplo 1 - [Cancho(2010)]

Considere a seguinte função de probabilidade de uma variável aleatória Y:

$$f(y) = P(Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{se } y = 1 \\ \frac{4}{8}, & \text{se } y = 2 \\ \frac{3}{8}, & \text{se } y = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual é a média e a variância de Y?

Exemplo 2 - [Cancho(2010)]

Suponha que a venda diária de uma empresa (em dezenas de milhares de dólares) é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} x, \ \ \text{se}, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, \ \ \text{se}, & 1 \leq x < 2 \\ 0, \ \ \text{caso contrário} & \end{cases}$$

Escolhe-se ao acaso um dia de venda. Determine:

(a) A probabilidade de que as vendas dessa empresa sejam maiores que 5.000 dólares mas não superiores a 15.000 dólares.

(b) A média e o desvio padrão das vendas diárias.

(c) Se o lucro diário é definido pela função $Y = 0,2X - 0,1$, calcule a média e variância do lucro diário.

Funções de variáveis aleatórias discretas

Introdução

Se X for uma VAD e $Y = g(X)$, então Y será também uma VAD.

Assim, como Y é uma VAD, pode-se ter interesse em obter os valores que ela assume e suas respectivas probabilidades, isto é, determinar a função de probabilidade $f(y)$.

Procedimentos

Para se obter os valores y que a VA Y assume, basta substituir os valores x, que a VA X assume, na função $g(X)$.

Para calcular a função de probabilidade de Y, proceda da seguinte maneira:

- Se $g(X)$ for uma função tal que a cada valor y corresponda exatamente um único valor x, então $f(y) = f(x)$, onde os valores x e y são correspondentes;
- Se $g(X)$ for uma função tal que vários valores de X levam ao mesmo valor de Y, então $f(y)$ é obtida somando-se as probabilidades dos valores x correspondentes a tal valor y.

Exemplo 1

Suponha que a VAD X assuma os valores -2, 0 e 2, com probabilidades 1/6, 1/2 e 1/3, respectivamente. Seja $Y = g(X) = 5X + 4$. Determinar a função de probabilidade da variável aleatória Y.

Exemplo 2

Suponha que a VAD X assuma os valores -2, 0 e 2, com probabilidades 1/6, 1/2 e 1/3, respectivamente. No entanto, agora $Y = g(X) = X^2$. Determinar a função de probabilidade da variável aleatória Y.

Função Geral de uma VAD - (Caso um para um)

Suponha que X seja uma VAD com função de probabilidade $f_X(x)$.

Seja $Y = g(X)$ uma transformação um para um entre os valores de X e Y, de modo que a equação $y = g(x)$ possa ser resolvida unicamente para x em termos de y. Seja essa solução escrita como $x = u(y)$.

Então, a função de probabilidade da VA Y é dada por

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P[X = u(y)] = f_X[u(y)]$$

Exemplo - [Montgomery e Runger(2016)]

Seja X uma VA, com distribuição de probabilidades

$$f_X(x) = p(1-p)^{(x-1)}\ , \quad x = 1, 2, ...$$

Encontre a distribuição de probabilidades de $Y = X^2$.

Funções de variáveis aleatórias contínuas

Introdução

Se X for uma VAC e $Y = g(X)$, então Y será também uma VAC.

Cálculo de $f_Y(y)$

Suponha que X seja uma VAC com distribuição de probabilidades $f_X(x)$. Sendo a função $Y = g(x)$ uma transformação um para um entre os valores de X e Y, de modo que a equação $y = g(x)$ pode ser resolvida unicamente para x em termos de y. Seja essa solução escrita como $x = u(y)$.

A distribuição de probabilidades de Y é dada por

$$f_Y(y) = f_X[u(y)] \cdot |J|$$

sendo $J = u'(y)$ chamada de jacobiana.

Exemplo 1 - [Mendes(2010)]

Seja a VAC X com $f.d.p.$ dada por

$$f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2 \quad , \quad 0 \leq x < 2.$$

Determinar a $f.d.p.$ da VAC $Y = 2X$.

Exemplo 2 - [Mendes(2010)]

Seja a VAC X com $f.d.p.$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determinar a $f.d.p.$ da VAC $Y = X - 1$.

Função Geratriz de Momentos

Definição: A função geratriz de momentos da VA X, denotada por $M_X(t)$ é definida como o valor esperado de e^{tX}, ou seja,

$$M_X(t) = E(e^{tX}),$$

sendo t é uma constante.

Se X for uma VAD, com função de probabilidade dada por $f(x)$, então

$$M_X(t) = \sum_{\forall x} e^{tx} f(x).$$

Se X for uma VAC, com $f.d.p.$ dada por $f(x)$, então

$$M_X(t) = \int_x e^{tx} f(x) dx.$$

Exemplo 1 - [Mendes(2010)]

A VAD X possui a seguinte função de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se} \quad x = 0;\ 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a função geratriz de momentos de X.

Exemplo 2

A VAC X possui a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a função geratriz de momentos de X.

Propriedades

1 - Suponha que a VA X tenha função geratriz de momentos $M_X(t)$. Seja também, a VA $Y = aX + b$, com a e b sendo constantes. A função geratriz de momentos de Y é dada por

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at).$$

2 - Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes. Sejam $M_X(t)$ e $M_Y(t)$ as funções geratrizes de momentos das variáveis aleatórias X e Y, respectivamente. Se $W = X + Y$, então,

$$M_W(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t).$$

Esta propriedade pode ser generalizada para o caso de n variáveis aleatórias independentes, isto é, $W = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$. Então,

$$M_W(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot M_{X_3}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$$

3 - Sejam X e Y duas VA. Se $M_X(t) = M_Y(t)$ para todos os valores de t, então as variáveis aleatórias X e Y terão a mesma distribuição de probabilidade.

4 - A n-ésima derivada da função geratriz de momentos da VA X, calculada para $t = 0$, fornece $E(X^n)$, denominado momento de ordem n de X, em relação a 0. Ou seja,

$$M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$$

Por isso, a partir do conhecimento da função geratriz de momentos da VA X, os momentos dessa VA podem ser gerados, o que justifica o nome dessa função.

Exemplo - [Mendes(2010)]

Suponha que uma VA X possua a seguinte função geratriz de momentos:

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t},$$

em que p e q são constantes tais que, $p + q = 1$. Usando as propriedades da função geratriz de momentos, obter o primeiro momento, o segundo momento e a variância dessa variável.

- Cancho, V., 2010. Notas de aulas sobre noções de estatística e probabilidade - São Paulo: USP.
- Mendes, F., 2010. Probabilidade para Engenharias. Rio de Janeiro: LTC.
- Montgomery, D., Runger, G., 2016. Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros. Rio de Janeiro: LTC.