Métodos Estocásticos da Engenharia I

Capítulo 5 - Distribuições de Probabilidade Conjunta

Prof. Magno Silvério Campos

2024/1

Bibliografia

Essas notas de aulas foram baseadas nas seguintes obras:

1. HINES, W.W.; *et al. Probabilidade e Estatística na Engenharia*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
2. MENDES, F. C. T. *Probabilidade para Engenharias*. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
3. MONTGOMERY, D.C.; RUNGER, G.C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
4. MORABITO, R. *Modelos Probabilísticos Aplicados à Engenharia de Produção*. 1. ed. São Carlos: Edufscar, 2002.

Aconselha-se pesquisá-las para se obter um maior aprofundamento e um melhor aproveitamento nos estudos.

Conteúdo Programático

1. Seção 1 - Conceitos básicos
   - Variáveis Aleatórias Bidimensionais
2. Seção 2 - Variáveis Aleatórias Bidimensionais Discretas
   - Função de probabilidade conjunta
   - Função de probabilidade marginal
   - Função de probabilidade condicional
   - Independência
   - Funções de variáveis aleatórias bidimensionais
3. Seção 3 - Variáveis Aleatórias Bidimensionais Contínuas
   - Função densidade de probabilidade conjunta
   - Função densidade de probabilidade marginal
   - Função densidade de probabilidade condicional
   - Independência
   - Funções de variáveis aleatórias bidimensionais

Variáveis Aleatórias Bidimensionais

Introdução

Em muitas situações, podemos estar interessados em observar duas características simultaneamente, o que nos leva a tratar cada característica como uma variável aleatória, e, portanto, as duas variáveis aleatórias conjuntamente como uma variável aleatória bidimensional. Da mesma forma como estudamos o caso unidimensional, neste capítulo introduzimos o caso bidimensional.

Definição

Sejam ϵ um experimento aleatório e Ω o espaço amostral associado a ϵ.

Sejam $X = X(w)$ e $Y = Y(w)$ duas funções matemáticas, cada uma associando um número real a cada resultado $w \in \Omega$.

Denominamos (X, Y) uma variável aleatória bidimensional (também chamada de vetor aleatório). Os valores da variável aleatória bidimensional (X, Y) são representados pelos pares ordenados (x, y).

Se tanto a variável aleatória X quanto a variável aleatória Y assumirem um número finito ou infinito enumerável de valores, então dizemos que a variável aleatória bidimensional (X, Y) é uma variável aleatória bidimensional discreta.

Caso a variável aleatória X e a variável aleatória Y assumirem, cada uma, um número infinito não enumerável de valores, então a variável aleatória bidimensional (X, Y) é dita uma variável aleatória bidimensional

Função de probabilidade conjunta

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta (VABD). A cada valor possível de (X, Y), isto é, a cada (x, y) associaremos um número real, denotado por $f(x, y)$, representando a probabilidade de a variável aleatória X assumir o valor x, ao mesmo tempo em que a variável aleatória Y assume o valor y, isto é,

$$f(x,\ y) = P(X = x\ ,\ Y = y).$$

O conunto de todas as probabilidades $f(x, y)$, para todos os valores válidos para as variáveis aleatórias X e Y, é definido como função de probabilidade conjunta da variáveis aleatória bidimensional discreta (X, Y).

A função de probabilidade conjunta discreta $f(x, y)$, como refresenta probabilidades, deve satisfazer às seguintes condições:

1. $0 \leq f(x, y) \leq 1$, $\forall(x, y)$;

Exemplo 1 - [Mendes(2010)]

Uma fábrica produz um determinado tipo de peça. A peça pode ser produzida por duas linhas de produção distintas. A capacidade de produção da linha I é de 4 peças por hora, e a capacidade de produção da linha II é de 3 peças por hora.

Representamos o número de peças produzidas pela duas linhas em uma determinada hora através de uma variável aleatória bidimensional, ou seja, (X, Y) representará o número de peças realmente produzidas pela linha I e pela linha II, respectivamente, em uma determinada hora.

A tabela a seguir fornece a função de probabilidade conjunta da VABD (X, Y). Cada célula na tabela representa **f(x,y)=P(X=x, Y=y)**.

Y ↓ X →	0	1	2	3	4
0	0,01	0,01	0,05	0,08	0,11
1	0,01	0,02	0,06	0,09	0,06
2	0,01	0,03	0,06	0,07	0,08
3	0,01	0,02	0,05	0,09	0,08

Observe que $0 \leq f(x, y) \leq 1$, $\forall(x, y)$, e que o somatório de todas as probabilidades é igual a 1.

Determinar a probabilidade de a linha I produzir um número maior de peças do que a linha II em uma determinada hora.

Exemplo 2 - [Mendes(2010)]

A função de probabilidade conjunta da VABD (X, Y) é $f(x, y) = c(2x + y)$, onde x e y são valores inteiros tais que $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 3$. Pede-se:

a) Determinar o valor da constante c;

Solução:

Y ↓ X →	0	1	2
0			
1			
2			
3			

Então, a função de probabilidade conjunta da VABD (X, Y) é dada por

Y ↓ X →	0	1	2
0			
1			
2			
3			

b) Determinar a $P(X \geq 1, Y \geq 2)$.

Função de probabilidade marginal

Podemos estar interessados na função de probabilidade da variável aleatória X ou na função de probabilidade da variávels aleatória Y, denominadas, respectivamente, *função de probabilidade marginal de* X e *função de probabilidade marginal de* Y.

A função

$$p(x) = P(X = x) = \sum_{y} f(x, y) \ , \ \ \forall x$$

representa a função de probabilidade marginal da variável aleatória X.

Analogamente, definimos a função

$$q(y) = P(Y = y) = \sum_{x} f(x, y) \ , \ \ \forall y$$

representa a função de probabilidade marginal da variável aleatória Y.

Observação

É importante verificar que, como $p(x)$ e $q(y)$ são funções de probabilidade, então devem ser satisfeitas as seguintes condições:

- $0 \leq p(x) \leq 1$;
- $\sum_x p(x) = 1$;
- $0 \leq q(y) \leq 1$;
- $\sum_y q(y) = 1$.

Exemplo 3 - ([Mendes(2010)]

Voltando ao Exemplo 1 das duas linhas de produção. estamos interessados em obter a função de probabilidade marginal da variável aleatória X e a função de probabilidaade marginal da variável aleatória Y. A tabela a seguir fornece a função de probabilidade conjunta de (X, Y), isto é, $f(x, y)$.

Y ↓ X →	0	1	2	3	4	$q(y)$
0	0,01	0,01	0,05	0,08	0,11	
1	0,01	0,02	0,06	0,09	0,06	
2	0,01	0,03	0,06	0,07	0,08	
3	0,01	0,02	0,05	0,09	0,08	
$p(x)$						

Exemplo 4 - [Mendes(2010)]

Voltando ao Exemplo 2. Estamos interessados em obter a função de probabilidade marginal da variável aleatória X e a função de probabilidaade marginal da variável aleatória Y. A tabela a seguir fornece a função de probabilidade conjunta de (X, Y), isto é, $f(x, y)$.

Y ↓ X →	0	1	2	$q(y)$
0	0	$1/21$	$2/21$	
1	$1/42$	$1/14$	$5/42$	
2	$1/21$	$2/21$	$1/7$	
3	$1/14$	$5/42$	$1/6$	
$p(x)$				

Função de probabilidade condicional

O conceito de probabilidade condicional pode agora ser introduzido, e é análogo ao conceito de eventos condicionados. A função de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$, denotada por $p(x|y)$, é definida por

$$p(x|y) = \frac{f(x,y)}{q(y)}\ , \ \ \forall x \ \ e \ \ q(y) \neq 0.$$

Analogamente, a função de probabilidade condicional de Y dado que $X = x$, denotada por $q(y|x)$, é definida por

$$q(y|x) = \frac{f(x,y)}{p(x)}\ , \ \ \forall y \ \ e \ \ p(x) \neq 0.$$

Observação

É importante verificar que, como $p(x|y)$ e $q(y|x)$ são funções de probabilidade, então devem ser satisfeitas as seguintes condições:

- $0 \leq p(x|y) \leq 1$;
- $\sum_x p(x|y) = 1 \ , \quad \forall \ y$;
- $0 \leq q(y|x) \leq 1$;
- $\sum_y q(y|x) = 1 \ , \quad \forall \ x$.

Exemplo 5 - [Mendes(2010)])

Voltando novamente à VABD do Exemplo 1. Suponhamos ser de interesse calcular a probabilidade condicional de que a linha I produza 2 peças, sabendo que a produção da linha II foi de 2 peças, em uma determinada hora.

Exemplo 6 - [Mendes(2010)]

Voltando novamente à VABD do Exemplo 2. Estamos interessados em obter a função de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$, para todo y, e a função de probabilidade condicional de Y dado $X = x$, para todo x.

Solução:
Do Exemplo 2, sabemos que

Y ↓ X →	0	1	2	$q(y)$
0	0	1/21	2/21	1/7
1	1/42	1/14	5/42	3/14
2	1/21	2/21	1/7	6/21
3	1/14	5/42	1/6	5/14
$p(x)$	1/7	1/3	11/21	1

a) A função de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$ é:

a) A função de probabilidade condicional de Y dado que $X = x$ é:

Exemplo 7 - [Mendes(2010)]

A tabela abaixo fornece a função de probabilidade conjunta da VABD (X, Y).

Y ↓ X →	0	1	2
0	1/18	1/9	1/6
1	1/9	1/18	1/6
2	1/6	1/9	1/18

Determinar a $P(1 \leq X < 3 | Y \geq 1)$.

Independência

Dizemos que X e Y são variáveis aleatórias discretas independentes quando o resultado de X, por exemplo, de modo algum influenciar o resultado de Y, e vice-versa, ou seja, se $p(x|y) = p(x)$ para todo x e y, ou, equivalentemente, se $q(y|x) = q(y)$ para todo x e y.

Então, seja (X, Y) uma VABD. Dizemos que X e Y são variáveis aleatórias discretas independentes se, e somente se,

$$f(x, y) = p(x) \cdot q(y) \ , \quad \forall (x, y).$$

Exemplo 8 - [Mendes(2010)]

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias, representando, respectivamente, o número de gols marcados pela equipe A e o número de gols marcados pela equipe B, com funções de probabilidades dadas por:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,2	0,4	0,2	0,2

y	0	1	2
$q(y)$	0,2	0,4	0,4

Calcular a função de probabilidade conjunta da VABD (X, Y), sabendo que as variáveis aleatórias X e Y são independentes.

Conclusão: a $f(x, y)$ é dada conforma a tabela a seguir:

Y ↓ X →	0	1	2	3
0				
1				
2				

Exemplo 9 - [Mendes(2010)]

Suponhamos que uma máquina seja utilizada para a produção de um tipo de peça durante a manhã, e para a produção de outro tipo de peça diferente durante a tarde. Representemos por X e Y, respectivamente, o número de peças produzidas durante a manhã, e o número de peças produzidas durante a tarde. A tabela a seguir fornece a função de probabilidade conjunta da VABD (X, Y).

Y ↓ X →	0	1	2
0	0,10	0,20	0,20
1	0,04	0,08	0,08
2	0,06	0,12	0,12

Verificar se as variáveis aleatória X e Y são independentes.

Solução:

Inicialmente, calculamos as funções de probabilidade marginais de X e Y, como expresso na tabela a sequir:

Y ↓ X →	0	1	2	$q(y)$
0	0,10	0,20	0,20	
1	0,04	0,08	0,08	
2	0,06	0,12	0,12	
$p(x)$				

Funções de variáveis aleatórias bidimensionais

Seja (X, Y) uma VABD. Seja $W = H(X, Y)$ uma função da VABD (X, Y). Então, W será uma variável aleatória unidimensional discreta (VAD), e estamos interessados em obter a sua função de probabilidade.

O problema de obtenção da função de probabilidade da VAD W é facilmente resolvido. Precisamos verificar os valores w que a VAD W pode tomar, de acordo com a função $H(X, Y)$ e os valores que a variável aleatória X e a variável aleatória Y assumem, e calcular suas respectivas probabilidades, isto é, precisamos obter

$$r(w) = P(W = w)\ , \quad \forall w.$$

Para tal, basta verificar os valores w correspondentes aos pares ordenados (x, y), do mesmo modo como fizemos no caso unidimensional.

Exemplo 10 - [Mendes(2010)]

Voltando ao Exemplo 1, das duas linhas de produção. A variável aleatória X representa o número de peças produzidas pela linha I, e a variável aleatória Y representa o número de peças produzidas pela linha II, em uma determinada hora. A tabela a seguir fornece a função de probabilidade conjunta da VABD (X, Y), conforme dada naquele exemplo.

Y ↓ X →	0	1	2	3	4
0	0,01	0,01	0,05	0,08	0,11
1	0,01	0,02	0,06	0,09	0,06
2	0,01	0,03	0,06	0,07	0,08
3	0,01	0,02	0,05	0,09	0,08

Seja $W = X + Y$ o número total de peças produzidas pelas duas linhas, em uma determinada hora. Determinar a função de probabilidade da variável aleatória W.

Portanto, a função de probabilidade de W pode ser expressa conforme a tabela a seguir:

w	0	1	2	3	4	5	6	7
$r(w)$								

Exemplo 11 - [Mendes(2010)]

Voltando ao Exemplo 2. A VABD (X, Y) tem função de probabilidade conjunta dada por

Y ↓ X →	0	1	2
0	0	1/21	2/21
1	1/42	1/14	5/42
2	1/21	2/21	1/7
3	1/14	5/42	1/6

Seja $W = XY$. Determinar a função de probabilidade da variável aleatória W.

Portanto, a função de probabilidade de W pode ser expressa conforme a tabela a seguir:

w	0	1	2	3	4	6
$r(w)$						

Função de densidade de probabilidade conjunta

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua (VABC). A textcolorredfunção de densidade de probabilidade conjunta da VABC (X, Y), denotada por $f(x, y)$, e representando a superfície de probabilidades dos valores (x, y), isto é, que a variável aleatória (X, Y) assume, é uma função que deve satisfazer às seguintes condições:

1. $f(x, y) \geq 0, \; \forall (x, y)$;
2. $\int_x \int_y f(x, y) dy dx = 1$.

Exemplo 12 - [Mendes(2010)]

Suponhamos que a VABC (X, Y) tenha a função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = x^2 + \frac{xy}{3}\ , \ \ 0 \leq x \leq 1 \ \ e \ \ 0 \leq y \leq 2.$$

Seja o evento $A = \{$a soma das variáveis aleatórias X e Y é inferior a $1\}$. Determinar a probabilidade desse evento ocorrer.

Exemplo 13 - [Mendes(2010)]

Uma VABC (X, Y) apresenta a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x, y) = c(x + y)\ , 0 < x < 3\ \ e\ \ x < y < x + 2.$$

Determinar o valor da constante c.

Função densidade de probabilidade marginal

Podemos estar interessados na função densidade de probabilidade da variável aleatória X ou na função densidade de probabilidade da variável aleatória Y, denominadas, respectivamente, *função densidade de probabilidade marginal de* X e *função densidade de probabilidade marginal de* Y.

A função

$$g(x) = \int_y f(x,y)dy$$

representa a função densidade de probabilidade marginal da VA X.
Analogamente, definimos a função

$$h(y) = \int_x f(x,y)dx$$

representa a função densidade de probabilidade marginal da VA Y.

Observação

É importante verificar que, como $g(x)$ e $h(y)$ são funções densidade de probabilidade, então devem ser satisfeitas as seguintes condições:

- $g(x) \geq 0$;
- $\int_x g(x)dx = 1$;
- $h(y) \geq 0$;
- $\int_y h(y)dy = 1$.

Exemplo 14 - [Mendes(2010)]

Voltando ao Exemplo 14. A VABC (X, Y) tem função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = x^2 + \frac{xy}{3}\ ,\ \ 0 \leq x \leq 1\ \ e\ \ 0 \leq y \leq 2.$$

Determinar a função densidade de probabilidade marginal de X e a função densidade de probabilidade marginal de Y.

Exemplo 15 - [Mendes(2010)]

Seja (X, Y) uma VABC com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x, y) = cxy^2 \ , \ \ 0 \leq x \leq 1 \ \ e \ \ 0 \leq y \leq 2.$$

a) Determinar o valor da constante c.

b) Determinar a função densidade de probabilidade marginal de X e a função densidade de probabilidade marginal de Y.

Exemplo 16 - [Mendes(2010)]

Uma VABC (X, Y) apresenta a função densidade de probabilidade conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{4}e^{-y}\ ,\ \ 0 < x < 4\ \ e\ \ y > 0.$$

a) Calcular $P(X > 2,\ Y < 4)$.

b) Calcular $P(X > 1)$.

c) Calcular $P(Y < 1)$.

Função densidade de probabilidade condicional

O conceito de probabilidade condicional pode agora ser introduzido, e é análogo ao conceito de eventos condicionados. A função densidade de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$, denotada por $g(x|y)$, é definida por

$$g(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \ \ h(y) > 0.$$

Analogamente, a função densidade de probabilidade condicional de Y dado que $X = x$, denotada por $h(y|x)$, é definida por

$$h(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \ \ g(x) > 0.$$

Observação

É importante verificar que, como $g(x|y)$ e $h(y|x)$ são funções de probabilidade, então devem ser satisfeitas as seguintes condições:

- $g(x|y) \geq 0$;
- $\int_x \int_y g(x|y) dy dx = 1$;
- $h(y|x) \geq 0$;
- $\int_x \int_y h(y|x) dy dx = 1$.

Exemplo 17 - [Mendes(2010)]

Voltando novamente à VABC do Exemplo 14. Aquela VABC tem função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = x^2 + \frac{xy}{3}\ ,\ \ 0 \leq x \leq 1\ \ e\ \ 0 \leq y \leq 2.$$

a) Determinar $g(x|y)$ e $h(y|x)$.

b) Determinar $P(Y < \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2})$.

Exemplo 18 - [Mendes(2010)]

Seja (X, Y) uma VABC com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x, y) = cx(1 - y)\ , \ \ 0 < x < 1 \ \ e \ \ 0 < y < 1.$$

a) Determinar o valor da constante c.

b) Calcule a função densidade de probabilidade condicional $g(x|y)$.

c) Calcule a função densidade de probabilidade condicional $h(y|x)$.

Independência

Dizemos que X e Y são variáveis aleatórias contínuas independentes quando o resultado de X, por exemplo, de modo algum influenciar o resultado de Y, e vice-versa, ou seja, X e Y serão independentes se $g(x|y) = g(x)$, ou, equivalentemente, se $h(y|x) = h(y)$ para todo x e y.

Então, seja (X, Y) uma VABC. Dizemos que X e Y são variáveis aleatórias contínua independentes se, e somente se,

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y) \ , \ \ \forall (x, y).$$

Exemplo 19 - [Mendes(2010)]

Verificar se as variáveis X e Y do Exemplo 14 são independentes. Aquela VABC tem função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = x^2 + \frac{xy}{3}\ ,\ \ 0 \leq x \leq 1 \ \ e \ \ 0 \leq y \leq 2.$$

Exemplo 20 - [Mendes(2010)]

Considere a variável aleatória bidimensional (X, Y) com a seguinte função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x, y) = x + y \ , \ \ 0 < x < 1 \ \ e \ \ 0 < y < 1.$$

Verificar se as variáveis aleatórias X e Y são independentes.

Exemplo 21 - [Mendes(2010)]

O consumo de gasolina de uma marca de carro em determinada viagem é representada por uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \frac{x}{2},\ 0 < x < 2,$$

e o consumo de óleo é representado por uma variável aleatória Y com função densidade de probabilidade dada por

$$g(y) = \frac{y^3}{4},\ 0 < y < 2.$$

supondo que o consumo de gasolina e o consumo de óleo sejam independentes, qual a probabilidade de o consumo de óleo ser menor que o consumo de gasolina?

Funções de variáveis aleatórias bidimensionais

Seja (X, Y) uma VABC. Seja $W = H(X, Y)$ uma função contínua de (X, Y). Então, W será uma variável aleatória unidimensional contínua (VAC), e estamos interessados em obter a sua função de probabilidade.

O problema de obtenção da função de probabilidade da VAC W é facilmente resolvido. Para acharmos a função densidade de probabilidade da variável aleatória W, podemos introduzir uma segunda variável aleatória de interesse, denotada por $K = L(X, Y)$, e obter a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis W e K, denotada por $f(w, k)$.

Com o conhecimento de $f(w, k)$, podemos então, chegar à função densidade de probabilidade marginal da variável aleatória W, denotada por $g(w)$.

Funções de variáveis aleatórias bidimensionais

A função densidade de probabilidade conjunta da VABC (W, K) é dada pela expressão

$$f(w,k) = f(x,y) \cdot |J(w,k)|$$

, com x e y expressos em termos de w e k. O $|J(w,k)|$ representa o módulo do determinante 2×2 de derivadas parciais, denominado jacobiano da transformação $(x,y) \to (w,k)$, isto é,

$$J(w,k) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial k} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial k} \end{vmatrix}.$$

Exemplo 22 - [Mendes(2010)]

Seja (X, Y) uma VABC com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x, y) = e^{-(x+y)} \; x > 0 \;\; e \;\; y > 0.$$

Sejam $W = \frac{X}{Y}$ e $K = X + Y$. Determinar a função densidade de probabilidade conjunta da variável aleatória (W, K).

Exemplo 23 - [Mendes(2010)]

Seja (X, Y) uma VABC com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \frac{(3 - y)}{16} \; 0 < x < 4 \;\; e \;\; 0 < y < 2.$$

Sejam $W = X(3 - Y)$ e $K = \frac{1}{X}$. Determinar a função densidade de probabilidade conjunta da variável aleatória (W, K).

Exemplo 24 - [Mendes(2010)]

Considere a VABC (X, Y) do Exemplo 14, com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3}\ ,\ \ 0 \leq x \leq 1\ \ e\ \ 0 \leq y \leq 2.$$

Sejam $W = XY$ e $K = X$. Determinar a função densidade de probabilidade conjunta da variável aleatória (W, K).

Mendes, F., 2010. Probabilidade para Engenharias. Rio de Janeiro: LTC.