Métodos Estocásticos da Engenharia I

Capítulo 6 - Processos Estocásticos e Cadeias de Markov

Prof. Magno Silvério Campos

2024/1

Bibliografia

Essas notas de aulas foram baseadas nas seguintes obras:

1. ANTON, H.; BUSBY, R. C. *Álgebra Linear Contemporânea*. Porto Alegre: Bookman, 2006.
2. HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introdução à Pesquisa Operacional*. 8. ed. São Paulo: McGraw Hill, 2010.
3. HINES, W.W.; *et al. Probabilidade e Estatística na Engenharia*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
4. TAHA, H. A. *Pesquisa Operacional*. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

Aconselha-se pesquisá-las para se obter um maior aprofundamento e um melhor aproveitamento nos estudos.

Conteúdo Programático

1. Seção 1 - Processos Estocásticos
   - Definição de processos estocásticos;
2. Seção 2 - Cadeias de Markov
   - Propriedade Markoviana;
   - Probabilidades de transição;
   - Matriz de transição;
   - Equações de Chapman-Kolmogorov;
   - Classificação dos estados em uma Cadeia de Markov;
   - Probabilidades de estado estável;
   - Tempo Médio para a primeira passagem;
   - Tempo de recorrência esperado;
   - Estados Absorventes;
   - Cadeias de Markov de tempo contínuo.

Processos Estocásticos e Cadeias de Markov

Introdução

Serão apresentados modelos para processos que evoluem ao longo do tempo de forma probabilística. Tais processos são chamados processos estocásticos.

Focaremos em um tipo especial, denominado *Cadeias de Markov*.

As *Cadeias de Markov* possuem a propriedade especial de que, as probabilidades referentes a como o processo evolui no futuro dependem apenas do estado atual do processo e, portanto, são independentes de eventos no passado.

Processos Estocásticos

Definição - [Hillier e Lieberman(2010)]

Um **processo estocástico** é definido como um conjunto indexado de variáveis aleatórias, $\{X_t\}$, em que o índice t percorre dado conjunto T. Normalmente, admite-se que T seja o conjunto de inteiros não-negativos e X_t represente uma característica mensurável de interesse no instante t. Por exemplo, X_t poderia representar o nível de estoque de determinado produto no final da semana t.

Um processo estocástico normalmente apresenta a seguinte estrutura:

O estado atual do sistema pode cair em qualquer uma das $M+1$ categorias mutuamente exclusivas denominadas estados. Para facilitar a notação, esses estados são identificados como $0, 1, \ldots, M$. A variável aleatória X_t representa o **estado do sistema no instante** t, de modo que seus únicos valores possíveis sejam $0, 1, \ldots, M$.

Os sistema é observado em pontos determinados do tempo, identificados por $t = 0, 1, 2, \ldots$. Portanto, o processo estocástico $X_t = X_0, X_1, X_2, \ldots$ fornece uma representação matemática de como o estado do sistema físico evolui ao longo do tempo.

Esse tipo de processo é conhecido como um processo estocástico *em tempo discreto* com um espaço de estado finito.

Exemplo 1 - Adaptado de [Hillier e Lieberman(2010)]

O tempo na cidade de Ouro Preto pode mudar de maneira bastante rápida de um dia para o outro. Entretanto, as chances de termos tempo seco (sem chuvas) amanhã são ligeiramente maiores, caso esteja seco hoje, do que se chover hoje.

Particularmente, a probabilidade de termos tempo seco amanhã é de $0,8$ caso hoje esteja seco, porém é de apenas $0,6$ caso hoje chova.

Essas probabilidade não mudam, caso as informações sobre o tempo antes de hoje também forem levadas em consideração.

A evolução do tempo, dia a dia, em Ouro Preto é um processo estocástico. Começando em dado dia inicial (chamado aqui de dia 0), o tempo é observado em cada dia t, para $t = 0, 1, 2, \ldots$.

O estado do sistema no dia t pode ser

- Estado 0: dia t é seco;
- Estado 1: dia t com chuva.

Portanto, para $t = 0, 1, 2, \ldots$, a variável aleatória X_t assume os seguintes valores:

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{se o dia t estiver seco} \\ 1, & \text{se o dia t estiver chovendo.} \end{cases}$$

O processo estocástico $X_t = X_0, X_1, X_2, \ldots$ fornece uma representação matemática de como o estado do tempo em Ouro Preto evolui ao longo do tempo.

Cadeias de Markov

Propriedade Markoviana

Um processo estocástico X_t é dito ter *propriedade markoviana* se

$$P(X_{t+1} = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i) = P(X_{t+1} = j | X_t$$

para $t = 0, 1, \ldots$ e toda sequência $i, j, k_0, k_1, \ldots, k_{t-1}$.

Traduzindo isso em palavras, essa propriedade markoviana diz que a probabilidade condicional de qualquer "evento" futuro, dados "quaisquer" eventos passados e o estado presente $X_t = i$, é *independente* dos eventos passados e depende apenas do estado atual.

Um processo estocástico $X_t (t = 0, 1, \ldots)$ é uma Cadeia de Markov se possuir a propriedade markoviana.

Probabilidades de transição

As probabilidades condicionais $P(X_{t+1} = j|X_t = i)$ para uma Cadeia de Markov são chamadas **probabilidades de transição** (uma etapa). Se, para cada i e j,

$$P(X_{t+1} = j|X_t = i) = P(X_1 = j|X_0 = i)$$

, para todo $t = 1, 2, \ldots,$ então as probabilidades de transição (uma etapa) são ditas estacionárias.

Portanto, ter probabilidades de transição estacionárias implica que as probabilidades de transição não mudam ao longo do tempo. A existência de probabilidades de transição (em uma etapa) estacionárias também implica o mesmo, para cada i, j e n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$P(X_{t+n} = j|X_t = i) = P(X_n = j|X_0 = i)$$

para todo $t = 0, 1, \ldots$. Essas probabilidades condicionais são denominadas **probabilidades de transição** (em n etapas).

Notação

Para simplificar a notação com probabilidades de transição estacionárias, façamos que

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j|X_t = i)$$

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{t+n} = j|X_t = i).$$

Assim, a probabilidade de transição em n etapas $p_{ij}^{(n)}$ é simplesmente a probabilidade condicional de que o sistema estará no estado j após exatamente n etapas (unidades de tempo), dado que ele inicia no estado i a qualquer instante t. Quando $n = 1$, note que $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$.

Para $n = 0$, $p_{ij}^{(0)}$ é apenas $P(X_0 = j|X_0 = i)$ e, consequentemente, é 1 quando $i = j$ e 0 quando $i \neq j$.

Como as $p_{ij}^{(n)}$ são probabilidades condicionais, elas devem satisfazer as seguintes propriedades:

$$p_{ij}^{(n)} \geq 0\ ,\ \ \forall i, j, n,$$

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij}^{(n)} = 1\ ,\ \ \forall i, n.$$

Uma maneira conveniente de mostrar todas as probabilidades de transição em n etapas é o formato de matriz a seguir:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{oo}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1M}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \cdots & p_{MM}^{(n)} \end{bmatrix} \end{array}$$

que é denominada de matriz de transição em n etapas. Note que a probabilidade de transição em determinada linha e coluna é para a transição

Exemplo 2 - Adaptado de [Hillier e Lieberman(2010)]

Para o exemplo envolvendo o clima na seção anterior, relembre-se de que a evolução diária do clima em Ouro Preto foi formulada como um processo estocástico $X_t = X_0, X_1, X_2, \ldots$, em que

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{se o dia t estiver seco} \\ 1, & \text{se o dia t estiver chovendo.} \end{cases}$$

$$P(X_{t+1} = 0 | X_t = 0) = 0,8$$

$$P(X_{t+1} = 0 | X_t = 1) = 0,6.$$

Além disso, como essas probabilidades não mudam, caso informações sobre o tempo anteriores a hoje (dia t) também forem levadas em conta, então

$$P(X_{t+1} = 0 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 0) = P(X_{t+1} = 0 | X_t = 0),$$

$$P(X_{t+1} = 0 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 1) = P(X_{t+1} = 0 | X_t = 1),$$

$$P(X_{t+1} = 1 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 0) = P(X_{t+1} = 1 | X_t = 0),$$

$$P(X_{t+1} = 1 | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = 1) = P(X_{t+1} = 1 | X_t = 1)$$

Assim, o processo estocástico possui a *propriedade markoviana*, de forma que o processo é uma **Cadeia de Markov**.

Usando a notação introduzida nesta seção, as probabilidades de transição (em uma etapa) são

$$p_{00} = P(X_{t+1} = 0 | X_t = 0) = 0,8$$

$$p_{10} = P(X_{t+1} = 0 | X_t = 1) = 0,6$$

para todo $t = 0, 1, \ldots$, de maneira que estas sejam as probabilidades de transição estacionárias. Além disso,

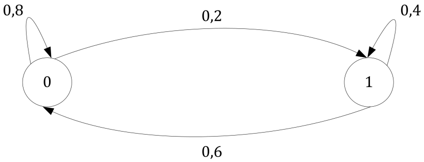
$$p_{00} + p_{01} = 1, \text{ de modo que } p_{01} = 1 - 0,8 = 0,2,$$

$$p_{10} + p_{11} = 1, \text{ de modo que } p_{11} = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Portanto, a matriz de transição fica

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix} \end{array}$$

em que essas probabilidades de transição referem-se à transição *do* estado de linha *para* o estado de coluna. O diagrama de transição abaixo representa graficamente as mesmas informações dadas pela matriz de transição.



Equações de Chapman-Kolmogorov

As equações de *Chapman-Kolmogorov* fornecem um método para calcular as probabilidades de transição em n etapas:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)},$$

para todo $i, j = 0, 1, \ldots, M$ e qualquer $m = 1, 2, \ldots, n-1$, $n = m + 1, m + 2, \ldots$.

Observação: $p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$ indica que, dado um ponto de partida de estado i, o processo vai ao estado k após m etapas e depois para o estado j em $n-m$ etapas. Logo, a soma das probabilidades sobre todos os possíveis k leva a $p_{ij}^{(n)}$.

No entanto, pode-se mostrar que

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$$

Portanto, a matriz de probabilidades de transição em n etapas $\mathbf{P}^{(n)}$ pode ser obtida calculando-se a n-ésima potência da matriz de de transição em uma etapa P.

Exemplo 3

Para o nosso exemplo do clima, podemos calcular algumas matrizes de transição em n etapas. Por exemplo, n=2

$$P^{(2)} = P \, . \, P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}76 & 0{,}24 \\ 0{,}72 & 0{,}28 \end{bmatrix}$$

Portanto, se o tempo estiver no estado 0 (seco) em dado dia, a probabilidade de se encontrar no estado 0 dois dias após é 0,76 e a probabilidade de se encontrar no estado 1 (chuva) então é 0,24. Similarmente, se o tempo se encontrar no estado 1 agora, a probabilidade de se encontrar no estado 0 dois dias após é 0,72, ao passo que a probabilidade de se encontrar no estado 1 então é 0,28.

As probabilidades do estado do tempo daqui a três, quatro ou cinco dias também podem ser lidas da mesma maneira:

$$P^{(3)} = P \, . \, P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}76 & 0{,}24 \\ 0{,}72 & 0{,}28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}752 & 0{,}248 \\ 0{,}744 & 0{,}256 \end{bmatrix}$$

$$P^{(4)} = P \, . \, P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}752 & 0{,}248 \\ 0{,}744 & 0{,}256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}749 & 0{,}251 \end{bmatrix}$$

$$P^{(5)} = P \, . \, P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}749 & 0{,}251 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Classificação dos estados em uma Cadeia de Markov

Estado Absorvente

Um estado j é absorvente caso, após adentrar esse estado, o processo **jamais deixará** este estado novamente. Portanto, $p_{jj} = 1$.

Estado Transiente

Um estado i é transiente se, após entrar nesse estado, existir a possibilidade de alcançar outro estado j mas **não puder voltar** ao estado i em que estava

Estado Recorrente

O estado i é dito ser recorrente se, após entrar neste estado, o processo **com certeza for retornar** a este estado novamente em outra etapa. Para isso, este estado não pode ser transiente.

Exemplo 4

Suponha que uma Cadeia de Markov possua a seguinte matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0,67 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os estados 0 e 1 são recorrentes, pois se o processo iniciar em qualquer um desses estados, o processo com certeza retornará a este estado.

O estado 2 é absorvente (e portanto, recorrente) , pois se o processo entrar neste estado, ele jamais o deixará. Note que $p_{22} = 1$.

Os estados 3 e 4 são transientes, pois se o processo iniciar ou chegar a um destes estados, existe a possibilidade de irem para outros estados e não poderem jamais voltar.

Estado Periódico

O período do estado i é definido como o inteiro $\mathbf{t}$,$(t > 1)$, tal que $p_{ii}^{(n)} = 0$ para todos os valores de n diferentes de $t, 2t, 3t, \ldots$, e t é o maior inteiro com essa propriedade.

Estado Aperiódico

Se existirem dois números consecutivos s e $s + 1$ tais que, o processo possa se encontrar no estado i nos instantes s e $s + 1$, o estado é dito como tendo período 1 e é dito aperiódico.

Estados Ergódicos

Em uma Cadeia de Markov de estados finitos, os estados recorrentes que forem *aperiódicos* são denominados estados ergódigos.

Cadeia Ergódiga

Uma Cadeia de Markov é dita ergódiga se todos os seus estados forem ergódigos, isto é, se todos os estados forem recorrentes e aperiódicos.

Probabilidades de Estado Estável

Para qualquer Cadeia de Markov ergódica e irredutível (todos os estados se comunicam), tem-se que

$$\lim_{n \to +\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0,$$

e é independente de i.

Os π_j são chamados probabilidades de estado estável de uma Cadeia de Markov e satisfazem às seguintes **equações de estado estável**:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij}, \quad \forall \quad j = 0, 1, \ldots, M,$$

$$\sum_{i=0}^{M} \pi_j = 1.$$

Exemplo 5

Encontrar as probabilidades de estado estável para o exemplo do clima de Ouro Preto.

Tempo Médio para a Primeira Passagem

Normalmente, é desejável determinar o número médio de transições realizadas pelo processo para ir do estado i ao estado j, **pela primeira vez**.

Essa expectativa é representada por μ_{ij}, e é definida por:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \infty, & \text{se a partir do estado i jamais se atinja o estad} \\ 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}\mu_{kj}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A segunda equação acima reconhece que a primeira transição de i pode ser tanto diretamente para j quanto para algum outro estado k.

Se for diretamente para j ou para outro estado k antes de ir para j, a segunda equação diz que μ_{ij} é igual ao valor 1 somado com todas as possibilidades para a primeira transição.

Exemplo 6

Encontrar os tempos médios para a primeira passagem para o exemplo do clima de Ouro Preto.

Tempo de Recorrência Esperado

O número esperado de transições até que o processo **retorne** ao estado inicial i é chamado de tempo de recorrência esperado e, é dado por:

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}, \quad \forall \quad i = 0, 1, 2, \ldots, M,$$

em que π_i são as probabilidades de estado estável.

Assim, para o exemplo do clima de Ouro Preto, temos:

$$\mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = \frac{1}{0,75} \cong 1,33 \;\; dia,$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = \frac{1}{0,25} = 4 \;\; dias.$$

Exemplo 7

Considere a seguinte matriz de transição de uma Cadeia de Markov:

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,4 & 0,55 \end{bmatrix}$$

1. Determine as probabilidades de transição após 4, 8 e 16 etapas;
2. Verifique se essa Cadeia é ergódiga e irredutível;
3. Se o item anterior for verificado, determine as probabilidades de estado estável;
4. Determine o tempo médio para a primeira passagem do estado 2 para o estado 0;
5. Determine os tempos médios de recorrência para todos os estados.

Estados Absorventes

Sabe-se que um estado j é *absorvente* se $p_{jj} = 1$, de modo que assim que a cadeia visitar j ela permanecerá ali para sempre.

Quando existirem dois ou mais estados absorventes em uma Cadeia de Markov e for evidente que o processo será absorvido por um desses estados, é desejável encontrar essas **probabilidades de absorção**.

As probabilidades de absorção são importantes em **caminhos aleatórios**. Um caminho aleatório é uma Cadeia de Markov com a propriedade de que, se o sistema se encontrar em um estado i, então em uma única transição o sistema permanece em i ou então se desloca para um dos dois estados imediatamente adjacentes a i.

A análise de cadeias de Markov com estados absorventes pode ser executada convenientemente usando matrizes. Em primeiro lugar, a cadeia de Markov é repartida da seguinte maneira:

$$P = \left(\begin{array}{c|c} N & A \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

O arranjo requer que todos os estados absorventes ocupem o canto sudeste da nova matriz. Por exemplo, considere a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz **P** pode ser rearranjada e repartida como

$$P^* = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$N = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dada a definição de **A** e **N**, e o vetor coluna unitário **1** de todos os elementos 1, pode-se mostrar que:

- Número médio de passagens no estado j começando no estado $i =$

$$\text{Elemento (i, j) de } (I - N)^{-1}$$

- Tempo esperado para absorção pelo estado j saindo do estado $i =$

$$(I - N)^{-1} \cdot 1$$

- Probabilidade de absorção pelo estado $j =$

$$(I - N)^{-1} \cdot A$$

Exemplo 8 - Adaptado de [Taha(2008)]

Uma máquina é projetada para funcionar adequadamente com tensão entre 108 e 112 volts; Se a tensão sair dessa faixa, a máquina pára. O regulador de tensão da máquina pode detectar variações em incrementos de 1 volt. A experiência mostra que variações de tensão ocorrem uma vez a cada 15 minutos e que, dentro da faixa admissível (108 a 112 volts), a tensão pode subir 1 volt, permanecer inalterada ou baixar 1 volt, todas com probabilidades iguais.

1. Expresse o problema como uma Cadeia de Markov;
2. Determine a probabilidade de uma máquina parar porque a tensão está baixa. Idem se a tensão estiver alta;
3. Qual seria o ajuste ideal de tensão que resultaria no maior tempo de vida útil para a máquina?

Cadeias de Markov de tempo contínuo

Introdução

Há certas situações nas quais é necessário um parâmetro de tempo contínuo (chamemos de t'), em virtude da evolução do processo ser observada continuamente ao longo do tempo. A variável $X(t')$ representa o estado do sistema no instante t'.

Portanto, $X(t')$ assumirá um dos $(M+1)$ possíveis estados ao longo de algum intervalo $0 \leq t' < t_1$, e depois terá outro valor ao longo do próximo intervalo, $t_1 \leq t' < t_2$, e etc., em que esses pontos de transição $(t_1, t_2, \ldots)$ são pontos aleatórios no tempo (não necessariamente inteiros).

Considere agora os seguintes pontos no tempo:

- $t' = r$ (com $r \geq 0$) sendo um tempo passado;
- $t' = s$ (com $s > r$) sendo o tempo presente; e,
- $t' = s + t$ (com $t > 0$) representando t unidades de tempo no futuro.

Portanto, o estados observados do sistema nesses instantes são:

$$X(s) = i \text{ e } X(r) = x(r).$$

Assim, poderíamos ter interesse em calcular

$$P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i \text{ e } X(r) = x(r)\}, \;\; \forall\, j = 0, 1, 2, \ldots, M.$$

O cálculo dessa probabilidade pode ser facilitado, caso o processo estocástico em questão possua a propriedade markoviana.

Propriedade Markoviana

Um processo estocástico de tempo contínuo possui a **propriedade markoviana** se

$$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i \text{ e } X(r)=x(r)\} =$$

$$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}, \ \forall\, j=0,1,2,\ldots,M.$$

Observe que $P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}$ é uma **probabilidade de transição**.

Se as probabilidades de transição forem independentes, de modo que

$$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\} = P\{X(t)=j \mid X(0)=i\}$$

para todo $s>0$, elas são denominadas **probabilidades de transição estacionárias**.

Representaremos essas probabilidades de transição estacionárias por

$$p_{ij}(t) = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}$$

Definição

Um processo estocático de tempo contínuo $X(t')$, $t' \geq 0$ é uma **cadeia de Markov de tempo contínuo** se ela possuir a *propriedade markoviana*.

Tempo remanescente

Cada vez que o processo entra no estado i, o tempo que ele gastará no estado i antes que ocorra uma transição para o estado j (caso não ocorra antes uma transição para algum outro estado) é uma variável aleatória T_{ij}.

T_{ij} são variáveis aleatórias independentes, nas quais cada T_{ij} segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ_{ij}, de modo que $E(T_{ij}) = \frac{1}{\lambda_{ij}}$.

O tempo gasto no estado i até que ocorra uma transição (T_i) é o mínimo de T_{ij}, com $E(T_i) = \frac{1}{\lambda_i}$.

Quando ocorre a transição, a probabilidade de que o sistema se encontre no estado j é $p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}$.

Propriedade da falta de memória

A *propriedade markoviana* (com probabilidades de transição estacionárias) implica que:

$$P\{T_i > s + t \mid T_i > s\} = P\{T_i > t\},$$

isto é, a distribuição probabilística do tempo remanescente até o processo sair de dado estado é sempre a mesma, independentemente de quanto tempo o processo tiver gasto nesse estado.

Probabilidade de estado estável

Probabilidade de estado estável

Diz-se que os estados i e j se comunicam entre si se houver tempo t_1 e t_2 tal que $p_{ij}(t_1) > 0$ e $p_{ji}(t_2) > 0$.

Diz-se também que todos os estados que se *comunicam* formam uma *classe*. Se todos os estados formarem uma única classe, isto é, se a cadeia de Markov for irredutível (e assim suposta daqui pra frente), então:

$$p_{ij}(t) > 0$$

e

$$\lim_{t \to +\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$$

sempre existe, é independente do estado inicial e é conhecida como **probabilidade de estado estável** (ou probabilidade estacionária).

As **equações de estado estável** a seguir fornecem um sistema de equações para encontrar as probabilidades de estado estável:

$$\pi_j \lambda_j = \sum_{i \neq j} \pi_i \lambda_{ij}, \ \ \forall \ \ j = 0, 1, 2, \ldots, M.$$

e

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1.$$

Exemplo 9 - Adaptado de [Hillier e Lieberman(2010)]

Certa fábrica tem duas máquinas idênticas que são operadas continuamente, exceto quando estão quebradas, situação na qual ocorre o reparo.

O tempo exigido para reparar uma máquina segue uma distribuição exponencial com média igual a $\frac{1}{2}$ dia. Assim que o reparo tiver terminado, o tempo até a próxima vez em que essa máquina se quebrar segue uma distribuição exponencial com média igual a 1 dia. Essas distribuições são independentes.

Defina uma variável aleatória $X(t')$ como

$$X(t') = \text{número de máquinas quebradas no instante } t',$$

de modo que os valores possíveis de $X(t')$ são 0, 1 ou 2.

Assim, fazendo com que o parâmetro de tempo t' execute continuamente a partir do instante 0, o processo estocástico de tempo contínuo

Uma vez que os tempos envolvidos seguem distribuições exponenciais, esse processo estocástico pode ser definido como uma *cadeia de Markov de tempo contínuo* com estados 0, 1 e 2.

Podemos ter interesse em determinar as probabilidades de estado estável para essa cadeia. Para isso, basta aplicar as seguintes equações:

$$\pi_j \lambda_j = \sum_{i \neq j} \pi_i \lambda_{ij}, \;\; \forall \;\; j = 0, 1, 2, \ldots, M.$$

e

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1.$$

Portanto, teremos:

$\pi_0 \lambda_0 = \sum_{i \neq 0} \pi_i \lambda_{i0} = \pi_1 \lambda_{10} + \pi_2 \lambda_{20}$
$\pi_1 \lambda_1 = \sum_{i \neq 1} \pi_i \lambda_{i1} = \pi_0 \lambda_{01} + \pi_2 \lambda_{21}$
$\pi_2 \lambda_2 = \sum_{i \neq 2} \pi_i \lambda_{i2} = \pi_0 \lambda_{02} + \pi_1 \lambda_{12}$
$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1.$

Do enunciado, temos que:

$$E(T_{reparo}) = \frac{1}{2} \text{ dia.}$$

Como,

$$E(T_{21}) = \frac{1}{\lambda_{21}} = E(T_{10}) = \frac{1}{\lambda_{10}} = \frac{1}{2} \text{ dia,}$$

vem: $\lambda_{21} = \lambda_{10} = 2$ *reparos por dia.*
Do enunciado, ainda temos que:

$$E(T_{quebra}) = 1 \text{ dia.}$$

Como,

$$E(T_{01}) = \frac{1}{\lambda_{01}} = E(T_{12}) = \frac{1}{\lambda_{12}} = 1 \text{ dia,}$$

vem: $\lambda_{01} = 1$ *quebra por dia* para uma máquina e $\lambda_{12} = 1$. Como são duas máquinas, existem duas possibilidades de ir do estado 0 para o estado 1. Assim, $\lambda_{01} = 1 + 1 = 2$ *quebras por dia.*

Já que as quebras e os reparos acontecem um de cada vez, $\lambda_{02} = 0$ e $\lambda_{20} = 0$.

Agora, podemos calcular λ_0, λ_1 e λ_2: $\lambda_0 = \lambda_{01} = 2$;
$\lambda_1 = \lambda_{10} + \lambda_{12} = 3$
$\lambda_2 = \lambda_{21} = 2$;

Finalmente, levando os valores calculados de λ_{ij} e λ_i nas equações de estado estável, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2\pi_0 = 2\pi_1 \\ 3\pi_1 = 2\pi_0 + 2\pi_2 \\ 2\pi_2 = \pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Cuja solução é dada por

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}).$$

Exercício 2 - Adaptado de [Hillier e Lieberman(2010)]

Reconsidere o exemplo anterior. Suponha agora que uma terceira máquina, idêntica às duas primeiras, tenha sido agregada à fábrica. O único responsável pela manutenção ainda tem de preservar todas as máquinas.

1. Represente um *diagrama de taxas* para essa cadeia de Markov;
2. Escreva as respectivas equações de estado estável;
3. Determine as probabilidades de estado estável.

Exercício 3 - Adaptado de [Hillier e Lieberman(2010)]

O estado de determinada cadeia de Markov de tempo contínuo é definido como o número de tarefas atuais em certo centro de produção, em que é permitido um máximo de três tarefas. As tarefas chegam individualmente. Sempre que menos de três tarefas estiverem presentes, o tempo até a próximas chegada tem uma distribuição exponencial com média de 2 dias. As tarefas são processadas no centro de produção uma por vez e depois saem imediatamente. Os tempos de processamento possuem uma distribuição exponencial com média igual a 1 dia.

1. Represente um *diagrama de taxas* para essa cadeia de Markov;
2. Escreva as respectivas equações de estado estável;
3. Determine as probabilidades de estado estável.

Hillier, F., Lieberman, G., 2010. Introdução à Pesquisa Operacional. Porto Alegre: McGraw Hill.

Taha, H., 2008. Pesquisa Operacional. Porto Alegre: Pearson Prentice Hall.