Quantização II

Comunicações I

Thadeu L. B. Dias

UFRJ

ToC

Recap

Quantizador uniforme

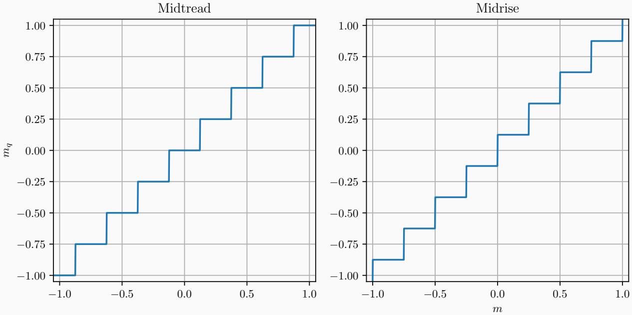
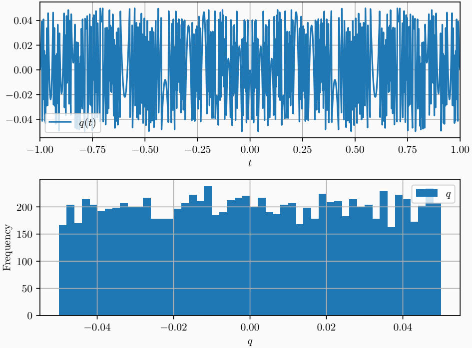


Figura 1: Tipos de quantizadores escalares uniforme.

Passo de quantização Δ, fixo.

Ruído de Quantização

Rigorosamente, a densidade de probabilidade do ruído se relaciona diretamente com densidade do sinal original.



Se o passo de quantização for relativamente *fino* com relação à faixa dinâmica do sinal, uma distribuição *uniforme*, $Q \sim \mathcal{U}(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})$ é uma suposição razoável.

Efeito do ruído de quantização

Na prática, o sinal quantizado é modelado como o sinal original M somado à um ruído Q:

$$M_q = M + Q. \tag{1}$$

Assumindo que a distribuição de Q é uniforme, sua potência média se torna

$$\bar{P}_Q = \sigma_Q^2 = \frac{1}{3} m_{\max}^2 2^{-2R}, \tag{2}$$

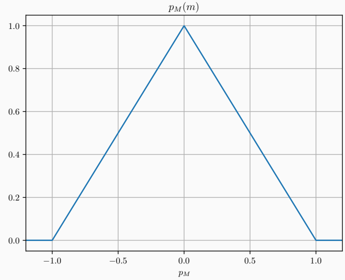
e a razão sinal-ruído de quantização é

$$\mathrm{SNR}_Q = \frac{P_m}{\sigma_Q^2} = \frac{3P_m}{m_{\max}^2} 2^{2R}. (3)$$

Quantização Robusta

Quantização Robusta

O quantizador uniforme não é nescessariamente ótimo no sentido de minimizar o ruído de quantização.
Por exemplo, suponha que a distribuição do sinal a ser amostrado tenha a seguinte distribuição:



O quantizador uniforme dá o mesmo ‘peso’ para cada região da variável; É possivel ser melhor que isso?

Distorção

Um quantizador dito ótimo é, na verdade, ótimo segundo algum critério.
Frequentemente, usamos uma medida de distorção, $d(m, g(m))$ como critério a ser otimizado, e desejamos achar o quantizador g que minimiza a distorção média.

Formalmente, esse é um problema de minimização do tipo

$$g^* = \min_g \mathbb{E}_M[d(M, g(M))]. \tag{4}$$

Intuição para o quantizador ótimo

Vamos assumir que o nosso quantizador é definido pela partição

$$\mathcal{J}_k = \{m | m_k \leq m < m_{k+1}\}, \quad k \in \{1, 2, 3, \ldots, K\},$$

e que o mapeamento g é tal que

$$g(m) = v_k | m \in \mathcal{J}_k.$$

A expectativa da Eq. (4) portanto tem a forma

$$\mathbb{E}[d(M, g(M))] = \sum_{k=1}^{K} \int_{\mathcal{J}_k} d(m, v_k) p_M(m) \, \mathrm{d}m. \tag{5}$$

Vamos então escrever o nosso problema em função dos limiares m_k e v_k.

Exercício 1

Desejamos criar um quantizador ótimo para uma variável aleatória limitada, com PDF dada por $p_M(m)$.
Supondo que o critério de otimização é a distorção média dada por uma função de distorção $d(m, v) = \frac{1}{2}(m - v)^2$, responda:

- Quais os valores de v_k que minimizam a distorção média, fixos os limiares m_k.
- Quais os valores de m_k que minimizam a distorção média, fixo o alfabeto $\{v_k\}$.

Vamos relembrar a equação da distorção média,

$$J = \mathbb{E}[d(M, g(M))] = \sum_{k=1}^{K} \int_{\mathcal{J}_k} d(m, v_k) p_M(m) \, \mathrm{d}m.$$

Derivando parcialmente em função de v_k, temos:

$$\begin{aligned} \partial_{v_k} J &= \int_{\mathcal{J}_k} \partial_{v_k} d(m, v_k) p_M(m) \, \mathrm{d}m \\ &= -\int_{\mathcal{J}_k} (m - v_k) p_M(m) \, \mathrm{d}m. \end{aligned}$$

Resolvendo em v_k para $\partial_{v_k} J = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_{\mathcal{J}_k} m p_M(m) \, \mathrm{d}m + v_k \int_{\mathcal{J}_k} p_M(m) \, \mathrm{d}m \\ v_k &= \frac{\int_{\mathcal{J}_k} m p_M(m) \, \mathrm{d}m}{\int_{\mathcal{J}_k} p_M(m) \, \mathrm{d}m} = \mathbb{E}[M | M \in \mathcal{J}_k]. \end{aligned}$$

Derivando parcialmente em função de v_k, temos:

$$\begin{aligned} \partial_{m_k} J &= \partial_{m_k} \sum_{k=1}^{K} \int_{\mathcal{J}_k} d(m, v_k) p_M(m) \, \mathrm{d}m \\ &= [(m_k - v_{k-1})^2 - (m_k, v_k)^2] p_M(m_k) \end{aligned}$$

Resolvendo em m_k para $\partial_{m_k} J = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= [m_k^2 - 2m_k v_{k-1} + v_{k-1}^2 - m_k^2 + 2m_k v_k - v_k^2] p_M(m_k) \\ &= 2m_k(v_k - v_{k-1}) - (v_k^2 - v_{k-1}^2) \\ m_k &= \frac{v_k^2 - v_{k-1}^2}{2(v_k - v_{k-1})} = \frac{v_{k-1} + v_k}{2} \end{aligned}$$

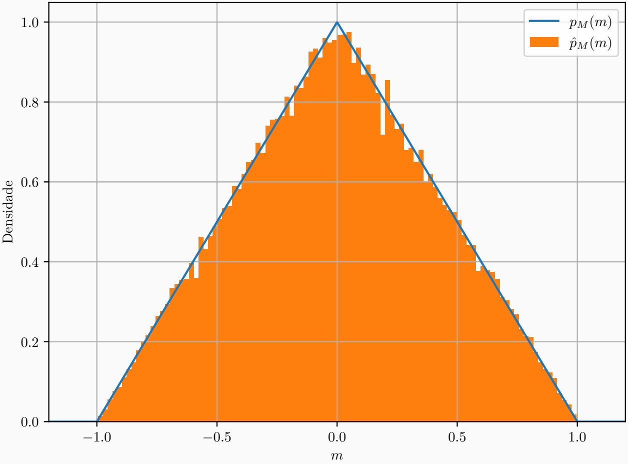
Lloyd-Max

Através de um processo iterativo, podemos obter limiares ótimos para dado alfabeto, em sequência, um alfabeto ótimo para os novos limiares, depois novos limiares, assim sucessivamente, até a convergência.
Esse processo se chama *iteração de LLoyd*. Um quantizador feito com esse processo se chama *Lloyd-Max*.

Esse processo pode ser generalizado para variáveis de dimensões superiores, i.e. $M \in \mathbb{R}^N$; nesse caso, o algorítmo irá gerar um *quantizador vetorial*, e o algoritmo se chama k*-means*.

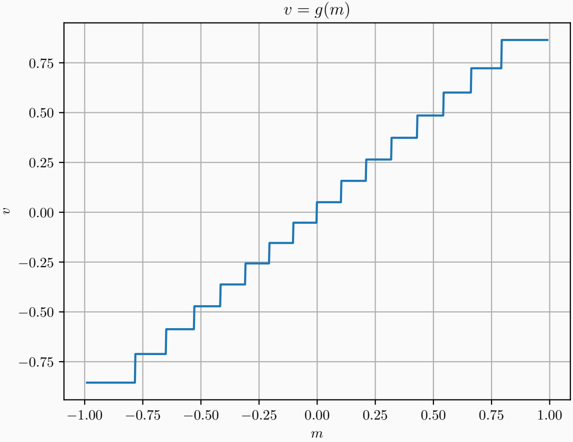
Experimento numérico

Aqui faremos uma demonstração do algorítmo de Lloyd.
Primeiro geramos dados seguindo uma distribuição escolhida a priori:



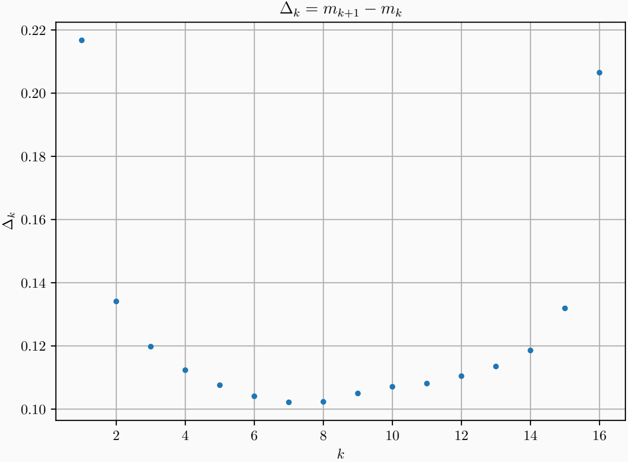
Exemplo de quantizador Lloyd-Max

Iterando os dois passos em sequência, partição e centralização, obtemos uma curva de quantização da seguinte forma:



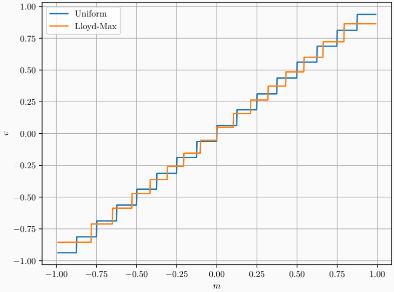
Passo de quantização variável

Observe como os intervalos diminuem a medida que a probabilidade se torna mais densa:



Comparação com quantizador uniforme

Podemos medir, para o dado conjunto de amostras o erro quadrático médio;



Uniforme	0.001299
Lloyd-Max	**0.001079**

Uma alternativa

O processo de LLoyd de fato gera quantizadores ótimos, contudo, quantizadores uniformes ainda são muito mais simples de se construir.

Os quantizadores uniformes são bons quando a distribuição é uniforme (no sentido quadrático); e se nós transformarmos nossa variável para que ela se pareça mais com a uniforme?

Compressão (analógica)

A idéia agora é aproveitar alguma característica conhecida do sinal para torná-lo mais uniforme;
Por exemplo, um sinal de voz frequentemente assume amplitudes mais baixas que as altas.

Se aplicarmos uma curva que ‘amplifique’ os valores mais baixos e ‘atenue’ os valores mais altos, podemos ‘uniformizar’ a distribuição para nosso quantizador!

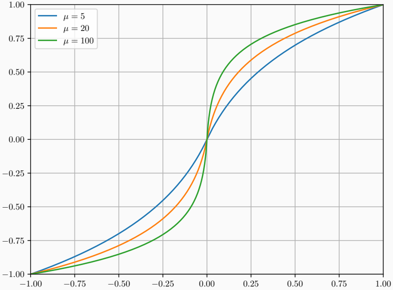
Lei-μ

O padrão estadunidense de telefonia estabelece uma transformação do tipo

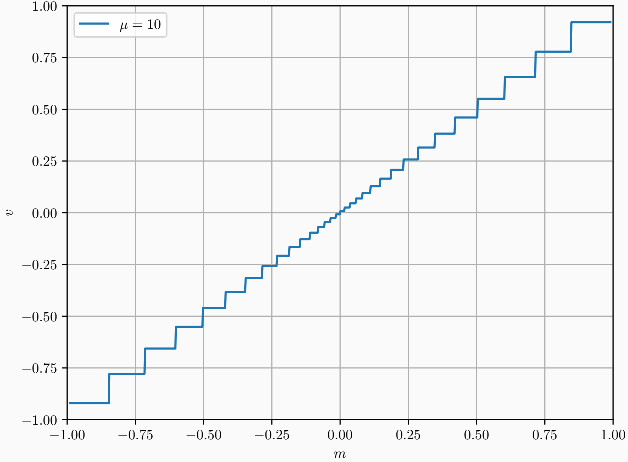
$$\nu = \mathrm{sign}(m)\frac{\log(1+|m|\mu)}{\log(1+\mu)},$$

com $\mu = 255$ antes da quantização; No receptor, o inverso da curva é aplicado, desfazendo a transformação.

$$m = \mathrm{sign}(\nu)\frac{(1+\mu)^{|\nu|}-1}{\mu}$$



Quantizador não-uniforme lei-μ



Exemplo numérico

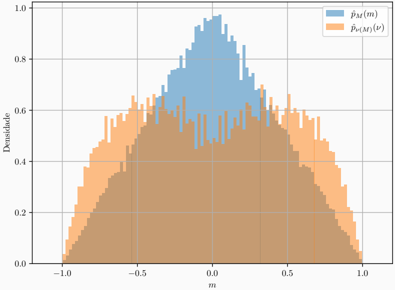


Figura 2: Distribuição original e transformada pela lei-μ, com $\mu = 2.5$

.

Uniforme	0.001299
Lloyd-Max	**0.001079**
Lei-μ	0.001205

Exercício 2

Dada uma variável aleatória M, com distribuição $p_M(m)$, encontre uma transformação g tal que $g(M) \sim \mathcal{U}[0, 1]$.

Exemplo: Inversão de Gaussiana

Aqui, $M \sim \mathcal{N}(0,1)$, e $g(m) = \frac{1}{2}\left[0.5 + \text{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)\right]$