Modulações em ângulo

Comunicações I

Thadeu L. B. Dias

UFRJ

ToC

Cont.

Expansão PM não-linear

Vamos relembrar a equação do PM:

$$x_{\mathrm{PM}}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \kappa_p m(t)).$$

Agora

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$

logo,

$$x_{\mathrm{PM}}(t) = A_c \left[\cos(2\pi f_c t)\cos(\kappa_p m(t)) - \sin(2\pi f_c t)\sin(\kappa_p m(t))\right]. \quad (1)$$

Podemos então escrever o espectro do PM/FM como o QAM das transformações não-lineares $\cos(\kappa m(t))$ e $\sin(\kappa m(t))$.

PM caso geral

É util relembrar a série de Taylor das funções trigonométricas:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \tag{2}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{3}$$

Isso nos permite escrever os sinais modulantes efetivos como séries de $m(t)$:

$$\cos(\beta m(t)) = 1 - \frac{\beta^3 m^3(t)}{3!} + \frac{\beta^5 m^5(t)}{5!} - \dots, \tag{4}$$

$$\sin(\beta m(t)) = \beta m(t) - \frac{\beta^2 m^2(t)}{2!} + \frac{\beta^4 m^4(t)}{4!} - \dots, \tag{5}$$

que para sinais 'bem comportados' irá convergir razoavelmente rápido.

Em outras palavras, o espectro depende da transformada de Fourier de $m^2(t)$, $m^3(t)$, ...

Exceto em alguns casos específicos, não há forma geral para essas transformadas, mas qual é o efeito geral?

Caso Gaussiano

O caso de um sinal do tipo

$$m(t) = e^{-\pi t^2} \tag{6}$$

é razoavelmente tratável. Sua transformada de Fourier é

$$\mathcal{F}\{m(t)\} = M(f) = e^{-\pi f^2} \tag{7}$$

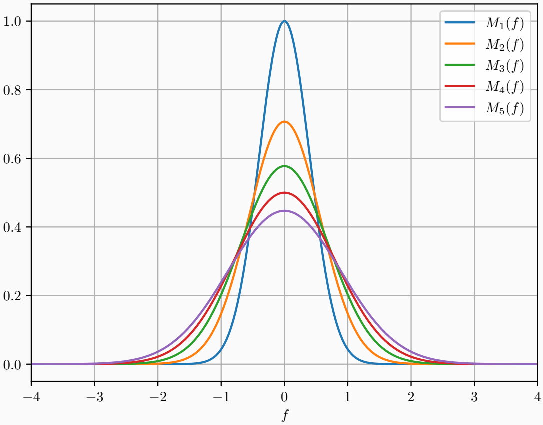
Podemos então usar a propriedade do produto da transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}\{a(t) \cdot b(t)\} = (A * B)(f), \tag{8}$$

e o Teorema central do Limite, onde para X e Y Gaussianas,

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2). \tag{9}$$

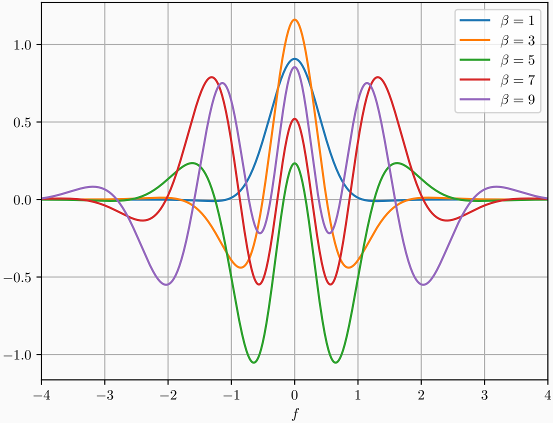
Considerando $M_n(f)$ a transformada de Fourier de $m^n(t)$, observamos algo desse formato:



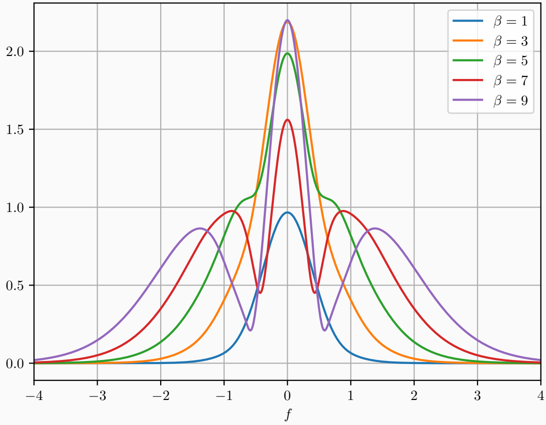
De forma geral, a convolução ‘espalha’ a função sendo operada!

Composição

Finalmente, usando a série, podemos avaliar a transformada de Fourier de, por exemplo, $\sin(\beta m(t))$:



Talvez o mais claro seja a transformada de
$\cos(\beta m(t)) + j\sin(\beta(m(t))) - 1$:



Caso Monotom

Mesmo quando temos um caso razoavelmente ‘fácil’, até mesmo *estimar* a banda ocupada é muito trabalhoso.

O caso em que o sinal modulado é uma senóide pura é passivel de uma análise mais *quantitativa*. Por ex. consideramos os sinais modulantes

$$m_{\mathrm{PM}}(t) = a\cos(2\pi f_m t), \tag{10}$$

e

$$m_{\mathrm{FM}}(t) = -a\sin(2\pi f_m t). \tag{11}$$

Os sinais modulados correspondentes se tornam

$$x_{\mathrm{PM}}(t) = A\cos(2\pi f_c t + \kappa_p a \cos(2\pi f_m t)), \tag{12}$$

e

$$x_{\mathrm{FM}}(t) = A\cos(2\pi f_c t + \frac{\kappa_f}{f_m} a \cos(2\pi f_m t)), \tag{13}$$

respectivamente. Essa escolha nos permite unificar a análise para um sinal geral do tipo

$$x(t) = A\cos(2\pi f_c t + \beta \cos(2\pi f_m t)), \tag{14}$$

onde o PM e FM tem seus valores de β apropriado.

É possivel computar a *série* de Fourier do sinal do tipo

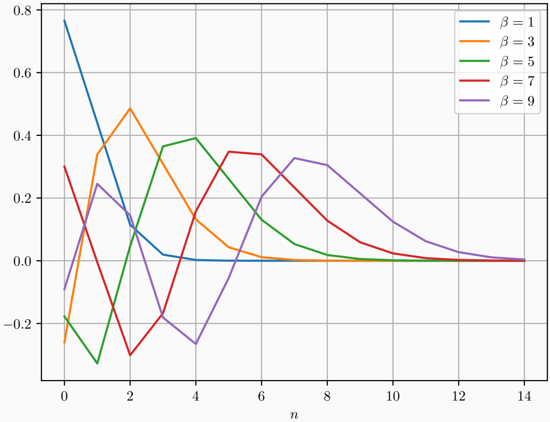
$$x(t) = A\cos(2\pi f_c t + \beta\cos(2\pi f_m t)), \tag{15}$$

que resulta na série do tipo

$$x(t) = A\sum_n J_n(\beta)\cos(2\pi(f_c + nf_m)t), \tag{16}$$

onde $J_n(\beta)$ são as chamadas funções de Bessel do primeiro tipo, de ordem n.

$J_n(\beta)$



Avaliando as funções para valores fixos de β, vemos que os coeficientes tendem a 0 rapidamente a medida que n aumenta.

Convergencia

Rigorosamente, essa série descreve um sinal com infinitos impulsos em frequências do tipo $f_c + nf_m$, contudo por conta da rápida convergência, selecionando um numero finito de valores de n, conseguimos uma fração significativa da energia total.

A Regra de Carson para β inteiro nos diz que com $N_0 = \beta + 1$, a série truncada

$$\hat{x}(t) = A \sum_{n=-N_0}^{N_0} J_n(\beta) \cos(2\pi(f_c + nf_m)t) \tag{17}$$

representa pelo menos 97% da energia da série original.

Generalização da Regra de Carson

Apesar de rigorosamente a regra ser definida para β inteiro, podemos generalizá-la para valores positivos quaisquer, o que significa que para um sinal monotom com frequência f_m, a banda ocupada será

$$B = 2(\beta + 1)f_m. \tag{18}$$

Para um sinal geral, não monotonico, generalizaremos o caso anterior, porém consideraremos a maior frequência ocupada pelo sinal original, ou seja, se B_m é a maior frequência de $m(t)$, então

$$B = 2(\beta + 1)B_m. \tag{19}$$

Ex. 1

Mostre que quando $\beta \to 0$, então $B = 2B_m$.

Dica: use a série de Taylor de $\sin$ e $\cos$.

Ex. 2: Chirp

Um sinal é chamado de *chirp* quando sua frequência instantânea sobe ou desce com o tempo.
Por exemplo, a frequência instantânea de um chirp linear é dada por

$$f(t) = f_0 + \alpha t$$

1. Qual a forma do sinal $x(t)$ de um chirp linear usando a Eq. anterior?
2. O sinal $x(t)$ é emitido por um transmissor, e reflete em um anteparo posicionado a distancia d, retornando ao receptor como $\hat{x}(t)$. Qual a relação entre $\hat{x}(t)$ e $x(t)$?
3. O que acontece se *demodularmos* $\hat{x}(t)$ com $x(t)$? Qual sua relação com d?