Análise de Fourier

Comunicações I

Thadeu L. B. Dias

UFRJ

ToC

Intro

Funções Periódicas

Funções periódicas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são definidas pela seguinte propriedade:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists T > 0 \ni f(x) = f(x + T). \tag{1}$$

Para uma função periódica, se T é um período, então kT para $k \in \mathbb{N}^*$ também é um período (transitividade).

Se T_0 é o menor período para uma função, ele é chamado de *período fundamental*;

Propriedades de funções periódicas

Considere $\mathcal{P}_T$ o conjunto de funções periódicas com período T. Então, para $f, g \in \mathcal{P}_T$,

$$h : t \mapsto \alpha f(t) + \beta g(t) \in \mathcal{P}_T, \tag{2}$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Além disso, para qualquer $\tau \in \mathbb{R}$,

$$h : t \mapsto f(t + \tau) \in \mathcal{P}_T. \tag{3}$$

Função constante

A função constante

$$f(t) = c,$$

para $c \in \mathbb{R}$ também é periódica, contudo seu período fundamental não é definido. Por outro lado, $\forall T \in \mathbb{R}^+$, T é um período de f.

Série de Fourier

Se $f(t) \in \mathcal{P}_T$ é integrável e contínua por partes, então ela admite uma representação da seguinte forma:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right), \tag{4}$$

onde a_n e b_n são os *coeficientes da série de Fourier*.

Equações diferenciais

A motivação original por trás da série de Fourier é a resolução de equações diferenciais. Suponha que se queira determinar a solução para a seguinte EDO:

$$3\dot{y}(t) + 2y(t) = 5\cos(3t).$$

Assumindo que a solução é periódica com período $T = 2\pi$, então

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(nt\right) + b_n \sin\left(nt\right), \tag{5}$$

e

$$\dot{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n n \sin\left(nt\right) + b_n n \cos\left(nt\right). \tag{6}$$

Agrupando os termos, temos

$$2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3nb_n)\cos(nt) + (2b_n - 3na_n)\sin(nt) = 5\cos(3t). \quad (7)$$

Essa equação pode ser resolvida de forma algébrica com facilidade, se associando os termos relativos aos $\sin$ e $\cos$ correspondentes.

Para $n \neq 3$,

$$\begin{cases} 2a_n + 3nb_n = 0 \\ -3na_n + 2b_n = 0 \end{cases}$$

Para $n = 3$,

$$\begin{cases} 2a_3 + 9b_3 = 5 \\ -9a_3 + 2b_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, a solução é

$$y(t) = \frac{2}{17}\cos(3t) + \frac{9}{17}\sin(3t). \tag{8}$$

Coeficientes de Fourier

Para obtermos os coeficientes a_n e b_n, podemos integrar os dois lados da expansão ao longo de um período, por exemplo de $-\frac{T}{2}$ a $\frac{T}{2}$:

$$\int_{\langle T \rangle} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\langle T \rangle} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)\,\mathrm{d}t. \quad (9)$$

Contudo, é fácil verificar que

$$\int_{\langle T \rangle} \cos \frac{2\pi}{T} nt\,\mathrm{d}t = 0, \quad (10)$$

e

$$\int_{\langle T \rangle} \sin \frac{2\pi}{T} nt\,\mathrm{d}t = 0. \quad (11)$$

Logo,

$$\int_{\langle T \rangle} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\langle T \rangle} a_0\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

$$= a_0 \int_{\langle T \rangle} \mathrm{d}t \tag{13}$$

$$= a_0 T. \tag{14}$$

Ou seja,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{15}$$

Para se determinar os outros coeficientes, considere a integral anterior, porém multiplicada por um fator $\cos \frac{2\pi}{T} mt$:

$$\int_{\langle T \rangle} f(t) \cos \frac{2\pi}{T} mt \, \mathrm{d}t = \int_{\langle T \rangle} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \right] \cos \frac{2\pi}{T} mt \, \mathrm{d}t. \tag{16}$$

Agora,

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right], \tag{17}$$

e

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]; \tag{18}$$

A expansão se torna, portanto,

$$\dots a_n \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}(n+m)\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{T}(n-m)\right)\right]\dots \tag{19}$$

$$\dots b_n \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}(n+m)\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{T}(n-m)\right)\right]\dots \tag{20}$$

Simplificando os senos e cossenos com períodos completos, temos que

$$a_m = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(t)\cos\frac{2\pi}{T}mt\,\mathrm{d}t, \tag{21}$$

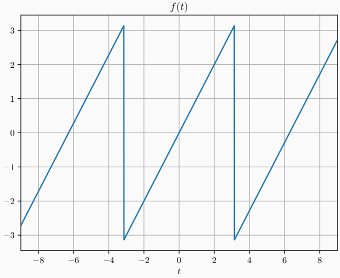
e através de um raciocínio análogo, multiplicando por $\sin\frac{2\pi}{T}mt$,

$$b_m = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(t)\sin\frac{2\pi}{T}mt\,\mathrm{d}t. \tag{22}$$

Ex. 1

Calcule os coeficientes da série de Fourier da função caracterizada a seguir:

$$f(t) = t, \text{ para } -\pi \leq t < \pi.$$



Identidades úteis:

$$\int t\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{\cos(nt) + nt\sin(nt)}{n^2} + C$$
$$\int t\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(nt) - nt\cos(nt)}{n^2} + C$$

Primeiro para a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\langle T \rangle} t \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{t^2}{2} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^2 - (-\pi)^2}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para a_n,

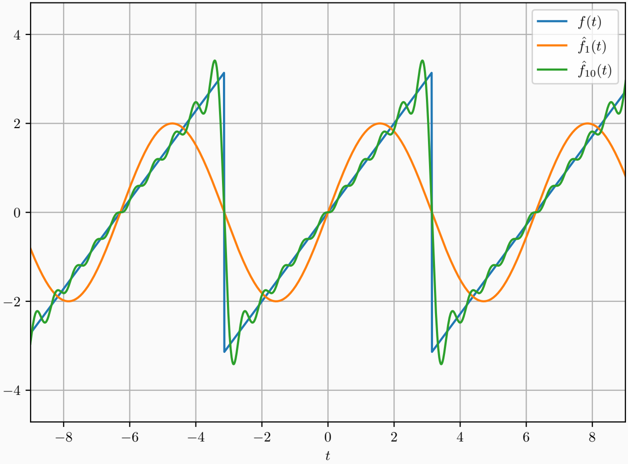
$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\langle T\rangle} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left.\frac{\cos(nt)+nt\sin(nt)}{n^2}\right|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\cos(n\pi)-\cos(-n\pi)+n\pi\sin(n\pi)+n\pi\sin(-n\pi)}{n^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\cos(n\pi)-\cos(n\pi)+n\pi 0+n\pi 0}{n^2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Para b_n,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\langle T\rangle} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left.\frac{\sin(nt) - nt\cos(nt)}{n^2}\right|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\sin(n\pi) - \sin(-n\pi) - n\pi\cos(n\pi) - n\pi\cos(-n\pi)}{n^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{0 - 0 - 2n\pi\cos(n\pi)}{n^2} \\
&= -2\frac{\cos(n\pi)}{n} = -2\frac{(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

Capacidade da aproximação da série:

$$\hat{f}_N(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt)$$



Derivação complexa

$$e^{j\pi} + 1 = 0.$$

Usando a identidade de Euler, podemos reescrever senos e cossenos como somas de exponenciais complexas:

$$\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \tag{23}$$

$$\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}, \tag{24}$$

e agrupando os termos por expoente,

$$\ldots a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \ldots$$

$$\ldots \frac{a_n - jb_n}{2} e^{j\frac{2\pi}{T}nt} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} \ldots$$

podemos associar

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, n > 0 \tag{25}$$

$$c_n = \frac{a_{-n} + jb_{-n}}{2}, n < 0 \tag{26}$$

$$c_0 = a_0 \tag{27}$$

Forma canônica

Com a forma complexa da série de Fourier, podemos generalizar para funções periódicas agora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, \tag{28}$$

e seus coeficientes são obtidos diretamente através da equação

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} f(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\,\mathrm{d}t. \tag{29}$$

Ex. 2: Demonstre a Eq. (29).

É conveniente agora, definir o produto interno entre duas funções ao longo de um período. Dadas funções f, g, o produto interno é definido como

$$\langle f, g\rangle_T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g^*(t)\,\mathrm{d}t.$$

Consideramos então o produto interno entre f e a função base $e^{-j\frac{2\pi}{T}mt}$:

$$\begin{aligned}\langle f, e^{j\frac{2\pi}{T}mt}\rangle_T &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, e^{j\frac{2\pi}{T}mt} \right\rangle_T \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, e^{j\frac{2\pi}{T}mt}\rangle_T\end{aligned}$$

Vamos focar no produto interno

$$\langle e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, e^{j\frac{2\pi}{T}mt}\rangle_T = \int_{\langle T\rangle} e^{j\frac{2\pi}{T}nt} e^{-j\frac{2\pi}{T}mt}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{\langle T\rangle} e^{j\frac{2\pi}{T}(n-m)t}\,\mathrm{d}t$$

Para $m \neq n$:

$$= \int_{\langle T\rangle} e^{j\frac{2\pi}{T}(n-m)t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left.\frac{e^{j\frac{2\pi}{T}(n-m)t}}{j\frac{2\pi}{T}(n-m)}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$
$$= \frac{e^{j\pi(n-m)} - e^{-j\pi(n-m)}}{j\frac{2\pi}{T}(n-m)}$$
$$= \frac{(-1)^{(n-m)} - (-1)^{-(n-m)}}{j\frac{2\pi}{T}(n-m)}$$
$$= 0.$$

Para $m = n$:

$$= \int_{\langle T\rangle} e^{j\frac{2\pi}{T}(0)t}\,\mathrm{d}t = \int_{\langle T\rangle} 1\,\mathrm{d}t$$
$$= t\big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$
$$= T.$$

Em outras palavras,

$$\langle e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, e^{j\frac{2\pi}{T}mt}\rangle_T = T\delta[n-m].$$

Outro nome para esse resultado: $e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ e $e^{j\frac{2\pi}{T}mt}$ são *ortogonais*. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle f, e^{j\frac{2\pi}{T}mt}\rangle_T &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, e^{j\frac{2\pi}{T}mt} \right\rangle_T \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, e^{j\frac{2\pi}{T}mt}\rangle_T \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T\delta[n-m] \\
&= Tc_m
\end{aligned}$$

Conexão com a transformada

Uma vez que a série é estabelecida,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt},$$

Podemos aplicar a transformada de Fourier nos dois lados,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - \frac{n}{T}),$$

estabelecendo a conexão "Função periódica $\Rightarrow$ Espectro impulsivo".

Ex. 3 — Trem de impulsos

O trem de impulsos é uma função periódica com um impulso a cada período T, logo,

$$\operatorname{comb}_T(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Sua série de Fourier, portanto, é

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \operatorname{comb}_T(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} \,\mathrm{d}t.$$

Notando que o intervalo de integração é $-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$,

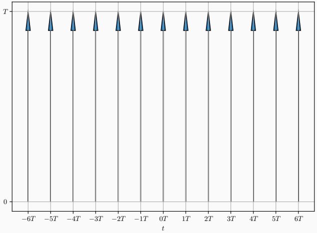
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} T\delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} T \\ &= 1 \end{aligned}$$

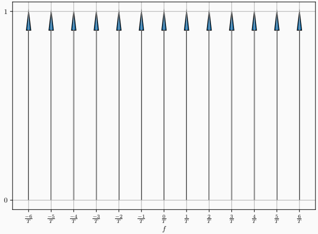
Finalmente,

$$\text{comb}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, \tag{30}$$

e sua transformada de Fourier é

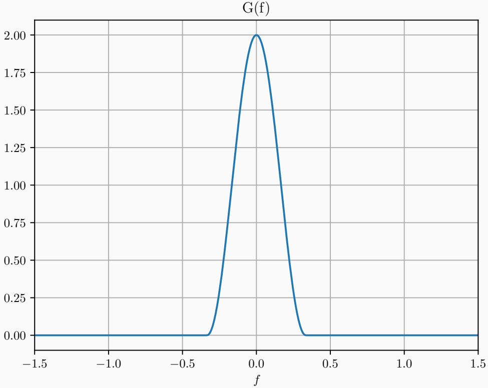
$$\mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T}) \tag{31}$$





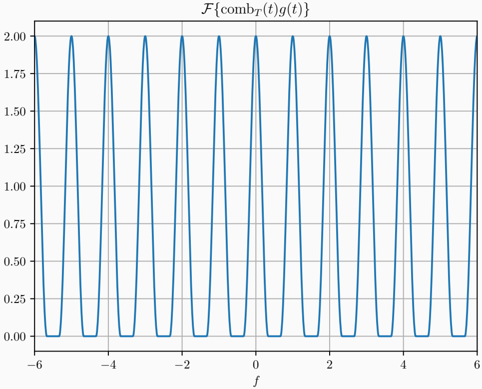
Multiplicação com um trem de impulsos

Se temos a função $g(t)$ e sua transformada $G(f)$, por ex.



Como fica o espectro do produto $\mathrm{comb}_T(t)g(t)$?

$$\mathcal{F}\{g(t)\mathrm{comb}_T(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{n}{T}\right) \tag{32}$$



A se pensar: qual a condição sobre $G(f)$ para que essa operação seja reversível?