Quantização

Comunicações I

Thadeu L. B. Dias

UFRJ

ToC

Recap

Vimos como transmitir um sinal amostrado no tempo usando PAM:

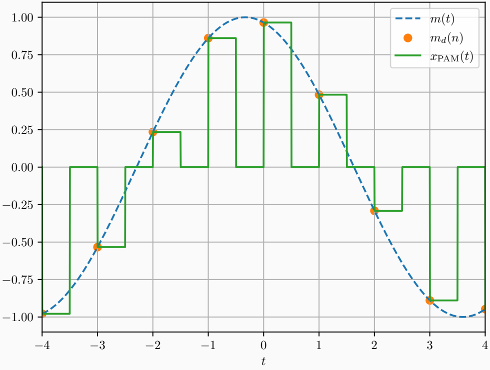
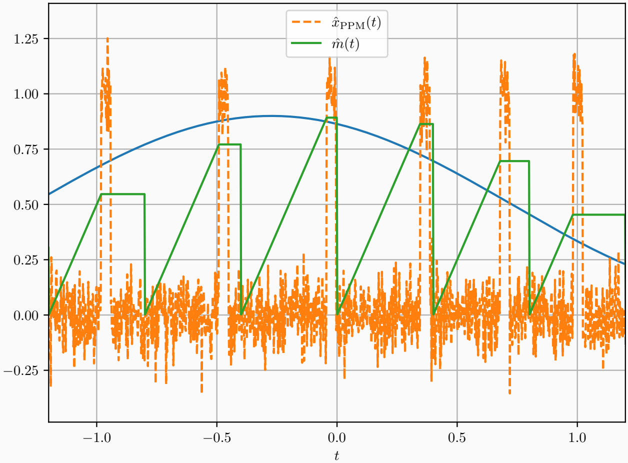


Figura 1: Sinal modulado do tipo PAM.

Apesar de estarmos usando valores de amplitude reais, conseguimos, por exemplo aumentar a resiliência ao ruído, com por exemplo, o PPM.

Se o canal usado para transmitir o PPM tem banda alta o suficiente, o PPM irá exibir um efeito ‘limiar’, onde o efeito do ruído é desprezível se seu valor estiver abaixo de um nível de potência específico;


$\hat{x}_{\mathrm{PPM}}(t)$
$\hat{m}(t)$
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
t

Comunicação mais robusta

A figura de mérito de resistência à ruído de um PPM, assim como a do FM tem uma característica quadrática com a banda ocupada pelo sinal.

É possivel fazer melhor do que isso?

Quantização

Quantização

O fundamento para se transmitir de maneira mais robusta um sinal envolve convertermos nossas amostras de um domínio real, onde há infinitos valores diferentes que $m(nT)$ pode assumir, para um *domínio discreto*, onde há um conjunto finito de valores possíveis que se irá transmitir:

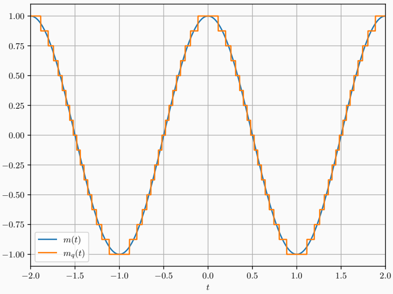


Figura 2: Sinal quantizado.

Característica do quantizador

A operação de quantização escalar é definida por uma função do tipo

$$g : \mathbb{R} \to \mathcal{Q}, m \mapsto v_k, \text{para algum } k. \quad (1)$$

O modelo da operação de quantização assume que ela é instantânea e sem memória, ou seja, não há atrasos nem efeitos de dependência entre amostras prévias ou anteriores.

Um quantizador, na prática, *particiona* o domínio de entrada, e assinala como saída, um valor fixo para todas as entradas que estiverem contidas na mesma partição. Por exemplo, se as partições de um quantizador escalar são definidas por

$$\mathcal{J}_k = \{x | m_k \leq x < m_{k+1}\}, \tag{2}$$

então há um valor v_k para cada célula tal que

$$g(m) = v_k, \text{se } m \in \mathcal{J}_k. \tag{3}$$

Quando o quantizador é tal que $m_{k+1} - m_k$ é constante para todo k, então dizemos que o quantizador é *uniforme*. O valor de $m_{k+1} - m_k$ é denominado *passo de quantização*, frequentemente simbolizado por Δ.

Tipos de quantizador uniforme

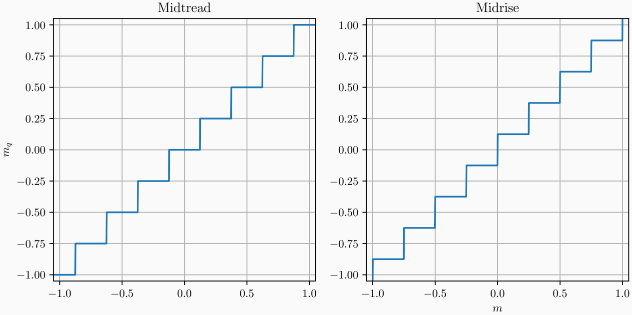
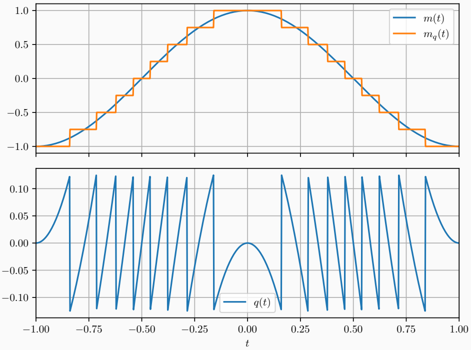


Figura 3: Tipos de quantizadores escalares uniforme.

Para o quantizador uniforme, geralmente $v_k = \frac{m_k + m_{k+1}}{2}$.

Erro de quantização

Por natureza, o processo de quantização é irreversível. Para cada valor quantizado, há um conjunto de valores de entrada possíveis que poderiam ter levado ao valor observado ($\mathcal{J}_k$). Isso significa que iremos inevitávelmente cometer erros.



Modelo do erro de quantização

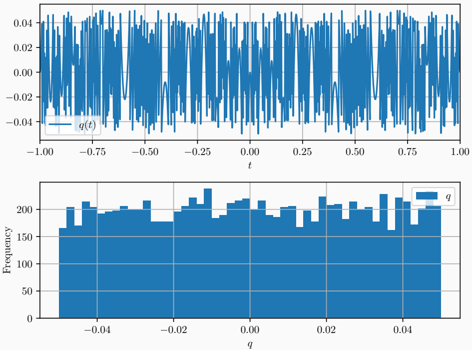
Na prática, o erro de quantização,

$$q(n) = m(n) - v(n) \tag{4}$$

é modelado como uma variável aletória. Isso significa que, equivalentemente, o sinal $v(n)$ é o sinal $m(n)$ corrompido por um ruído:

$$v(n) = m(n) - q(n) \tag{5}$$

Rigorosamente, a densidade de probabilidade do ruído se relaciona diretamente com densidade do sinal original.



Se o passo de quantização for relativamente *fino* com relação à faixa dinâmica do sinal, uma distribuição *uniforme*, $Q \sim \mathcal{U}(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})$ é uma suposição razoável.

Exemplo 1

Um sinal senoidal adequadamente amostrado $m(n) = A\cos(\omega n)$ passa por um quantizador uniforme g, com L níveis, ajustado para a faixa dinâmica do sinal original. Dado isso, responda:

1. Qual a potência média de $m(n)$?
2. Qual a faixa dinâmica de $m(n)$?
3. Qual o passo de quantização Δ?
4. Qual a potência média de $q(n)$?
5. Qual a razão entre P_M e P_Q?

Tipicamente, nós iremos transmitir o índice k digitalmente, em binário;

Considerando, por exemplo, que são disponíveis R bits por mensagem, então

$$L = 2^R. \tag{6}$$

Combinando tudo:

$$\Delta = \frac{2m_{\max}}{L}$$
$$\sigma_Q^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$
$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{3}m_{\max}^2 2^{-2R}$$