Transmissão em banda base — Filtro casado

Comunicações I

Thadeu L. B. Dias

UFRJ

ToC

Recap

Identificando a transmissão com pulsos básicos com uma modulação linear, lembrando-se que

$$S_{XX}(f) = S_{AA}(f)|P(f)|^2, \tag{1}$$

para bits descorrelacionados ($R_{AA}[k] = \delta[k]$),

$$S_{XX}(f) = \frac{\sigma_A^2}{T}|P(f)|^2. \tag{2}$$

PSD dos pulsos básicos

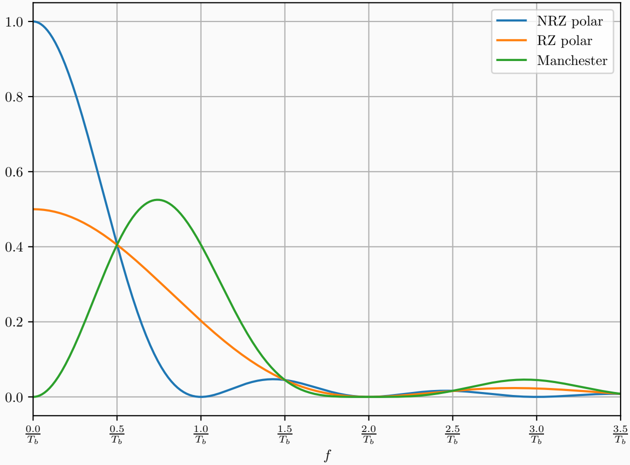

Figure 1: Densidade espectral de potência para códigos de linha (normalizado).

Critério de Nyquist para ISI.

$$P_\delta(f) = R_b \sum_k P(f - nR_b) = 1! \tag{3}$$

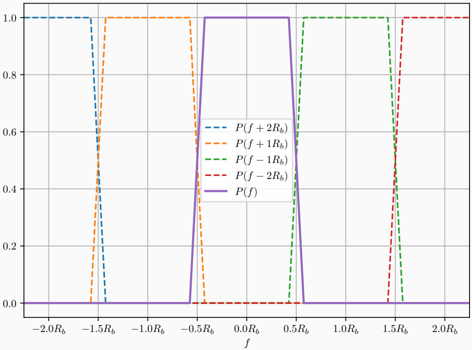

Figure 2: Exemplo do espectro de um pulso sem ISI.

Zeros de transmissão

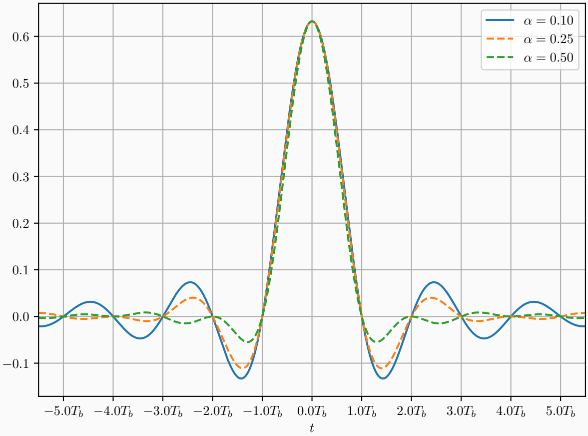

Figure 3: Formato de pulsos sem ISI.

Efeito do ruído em transmissão em banda base

Modelo de ruído

O modelo para o ruído de recepção é o AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), que significa:

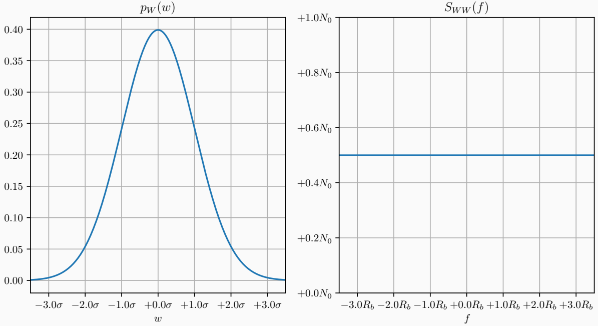

Figure 4: Formato de pulsos sem ISI.

- Distribuição gaussiana: $\mu = 0$, $\sigma^2 = ?$.
- Densidade espectral de potência constante: $S_{WW}(f) = \frac{N_0}{2}$.

Filtro no receptor

Lembrando que a potência média de um processo é justamente a integral de sua densidade espectral de potência, sem um filtro (limitado) na entrada, a potência do ruído tende ao infinito.

Logo, todo receptor deve possuir um filtro na entrada; Vamos denominar esse filtro de entrada $H(f)$.

Modelo do sinal

Como o ruído é aditivo, o resultado do sinal que chega ao receptor é da forma

$$x(t) = g(t) + w(t), \tag{4}$$

onde $g(t)$ é a parcela emitida pelo transmissor e $w(t)$ é a parcela do ruído. Simplificar, podemos considerar $g(t)$ o sinal transmitido para apenas 1 símbolo. Pela linearidade e invariância no tempo, não faz diferença.
Sendo $y(t) = (x * h)(t)$, teremos

$$y(t) = g_0(t) + n(t), \tag{5}$$

sendo $g_0(t)$ a parcela do sinal e $n(t)$ o ruído filtrado.

A recepção do sinal envolve a amostragem de $y(t)$ com período T, para que a decisão entre as formas de onda seja feita.

Naturalmente, desejamos minimizar os erros de decisão, e isso envolve maximizar a razão sinal-ruído em $y(T)$,

$$\mathrm{SNR} = \frac{|g_0(T)|^2}{\mathbb{E}[n(T)]}. \tag{6}$$

Potência do sinal

Sendo $G(f)$ a transformada de Fourier de $g(t)$, então

$$G_0(f) = G(f)H(f), \tag{7}$$

logo

$$|g_0(T)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)H(f)e^{j2\pi fT} \, \mathrm{d}f \right|^2 \tag{8}$$

Potência do ruído

Para $n(t)$, temos

$$\begin{aligned} S_{NN}(f) &= S_{WW}(f)|H(f)|^2, \\ &= \frac{N_0}{2}|H(f)|^2, \end{aligned} \tag{9}$$

logo

$$\mathbb{E}[|n(T)|^2] = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2\,\mathrm{d}f. \tag{10}$$

Desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x)\phi_2(x)\,dx\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_1(x)|^2\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_2(x)|^2\,dx \tag{11}$$

A igualdade ocorre *se e somente se*

$$\phi_2(t) = k\phi_1^*(t). \tag{12}$$

Sendo

$$\mathrm{SNR} = \frac{|g_0(T)|^2}{\mathbb{E}[|n(T)|^2]} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)H(f)e^{j2\pi fT}\,\mathrm{d}f\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2\,\mathrm{d}f}, \tag{13}$$

maximizar o numerador significa

$$H_{\mathrm{opt}}(f) = kG^*(f)e^{-j2\pi fT}. \tag{14}$$

Agora, $G^*(f) \iff g^*(-t)$, e $e^{-j2\pi fT} \iff \delta(t+T)$, ou seja:

$$h_{\mathrm{opt}} = g^*(T-t). \tag{15}$$

Para sinais modulados linearmente, considerando a transmissão de 1 símbolo, temos que

$$g(t) = A[0]p(t), \tag{16}$$

ou seja, sendo $p(t)$ o formato do pulso, o filtro ótimo é exatamente $h_{\mathrm{opt}}(t) = k \cdot p^*(T - t)$!

SNR máxima

Perceba que sendo a energia de 1 símbolo

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, \mathrm{d}f, \tag{17}$$

então

$$g_0(T) = kE, \tag{18}$$

e similarmente,

$$\mathbb{E}[|n(T)|^2] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \, \mathrm{d}f = k^2 E \frac{N_0}{2} \tag{19}$$

logo

$$\begin{aligned} \mathrm{SNR} &= \frac{|g_0(T)|^2}{\mathbb{E}[n^2(T)]} \\ &= \frac{k^2 E^2}{k^2 E \frac{N_0}{2}} \\ &= \frac{2E}{N_0} \end{aligned} \tag{20}$$

ISI e filtro casado

Perceba que para que a recepção não tenha interferência intersimbólica, o critério de Nyquist deve ser respeitado sobre o sinal *recebido*, após o filtro $H(f)$.

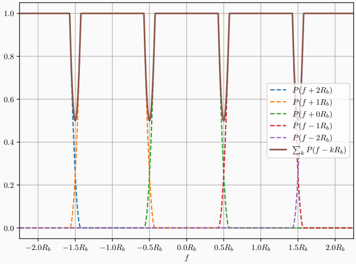

Figure 5: Espectro de casamento com ISI.

Isso significa que a propriedade original deve ser respeitada não por $P(f)$, mas pela composição $P(f)H(f)$!

Notando que $H(f)$ e $P(f)$ tem na verdade a mesma forma exceto de um delay e inversão, o critério de Nyquist então deve ser aplicado sobre $P^2(f)$!

Pulso RC

Um bom pulso base para transmissão deve ser bom em vários critérios: comprimento do pulso, largura de banda, compatibilidade com filtro casado, ISI.

Um formato de pulso que possui boas características nesse sentido é a família parametrizada *Raised Cosine*:

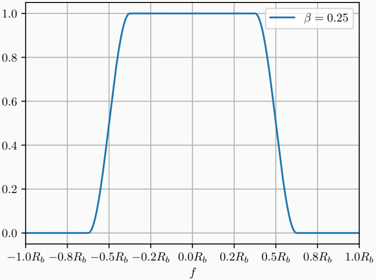

Figure 6: Espectro e pulso do tipo Raised Cosine.

Família RC

Os pulsos RC possuem um parâmetro β que controla o quão abrupta é a descida do espectro:

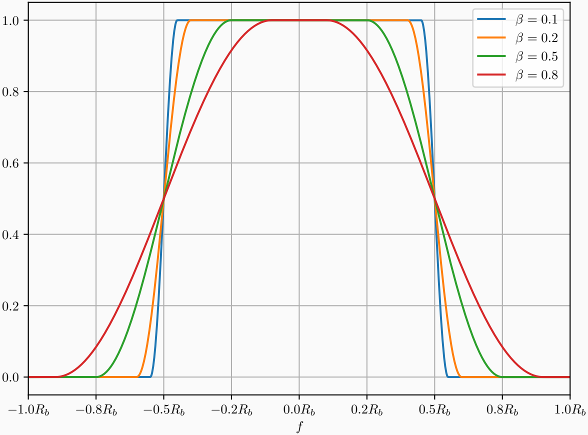

Figure 7: Espectros do tipo Raised Cosine.

O custo de uma descida mais rápida é o maior comprimento efetivo do pulso:

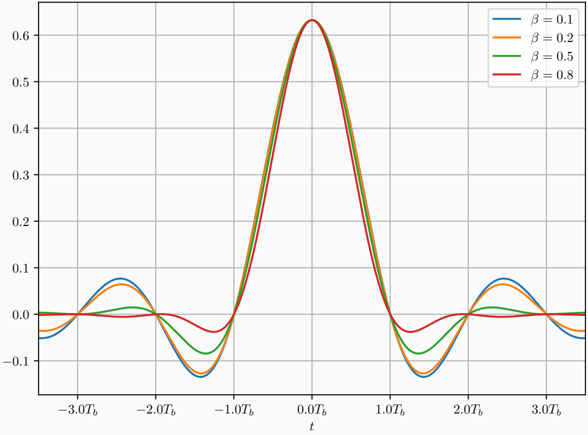

Figure 8: Pulsos do tipo Raised Cosine.

Pulso SRRC

Como precisamos da ISI após a composição com o filtro casado, tiraremos a raiz quadrada do espectro RC: Esse pulso é denominado *Square-Rooted Raised Cosine*

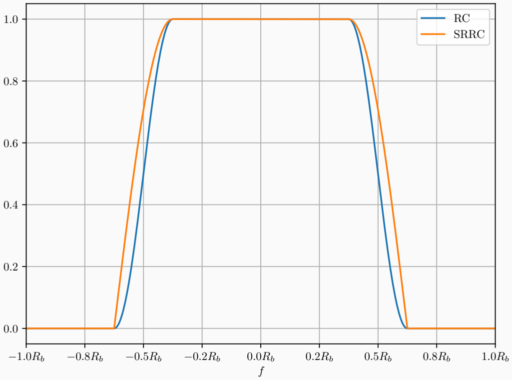

Figure 9: Espectros RC e SRRC.

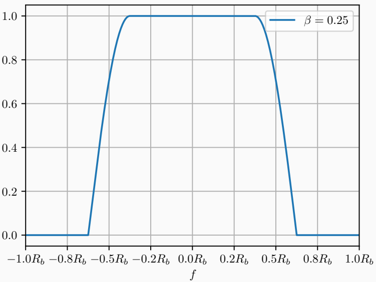

Figure 10: Espectros e pulso SRRC.

Note como o pulso não tem zeros nos períodos inteiros!

Experimento Eye Pattern

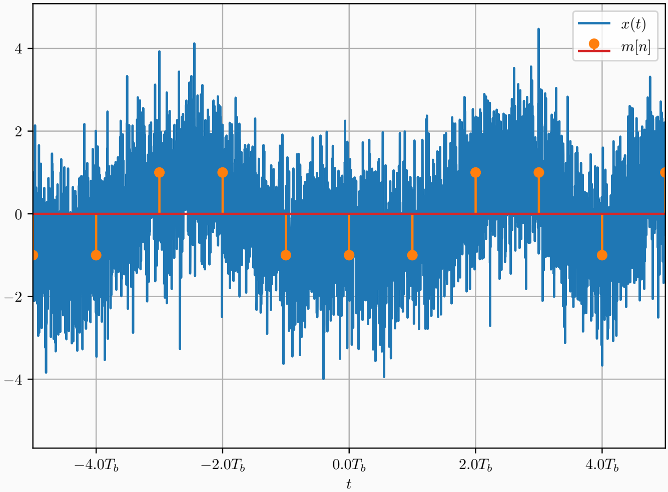

Figure 11: Sinal recebido (pré filtro casado).

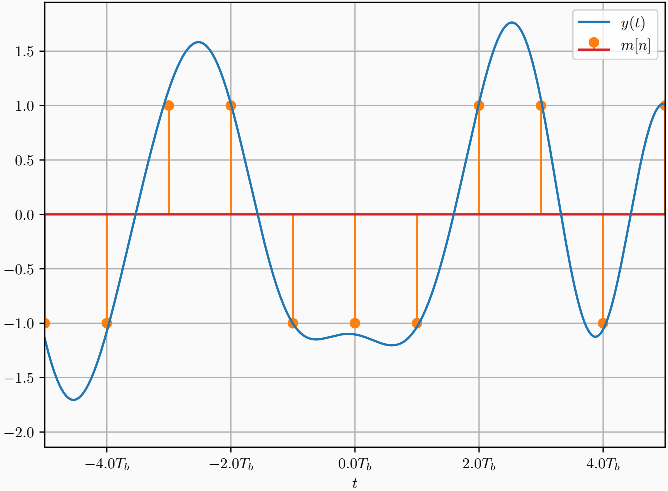

Figure 12: Sinal recebido (pós filtro casado).

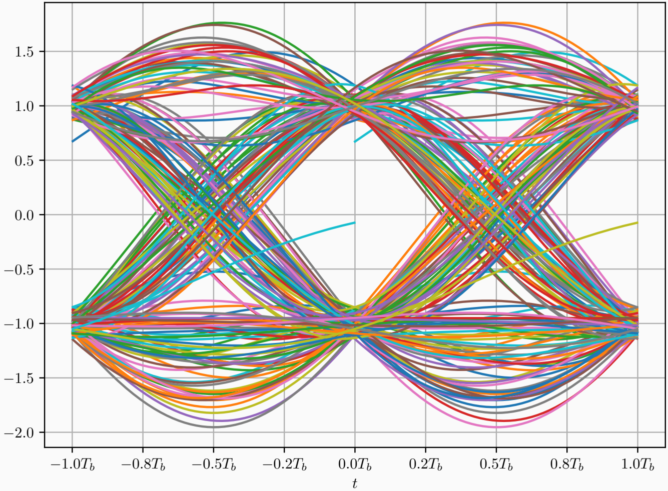

Figure 13: Padrão de olho do sinal recebido.