Modulações em ângulo

Comunicações I

Thadeu L. B. Dias

UFRJ

ToC

Recap

Anteriormente, vimos como relacionar o espectro de um sinal contínuo $m(t)$ com sua versão discreta

$$m_d(n) = m(nT_s), \tag{1}$$

onde usamos o artifício do sinal idealmente amostrado

$$m_\delta(t) = m(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT_s). \tag{2}$$

Vimos como a transformada de Fourier de $m_\delta(t)$ se relaciona com a transformada de $m(t)$,

$$M_\delta(f) = f_s \sum_k M(f - kf_s), \tag{3}$$

e com a transformada de fourier de tempo discreto de m_d,

$$M_d(f) = \sum_n m_d(n) e^{-j2\pi f n T_s}. \tag{4}$$

Vimos também como garantir que o sinal original possa ser recuperado sem distorções, com as condições de Nyquist:

$$f_s \geq 2W, \tag{5}$$

onde W é a largura de banda do sinal original.

Modulação de amplitude de Pulso

A forma mais básica de modulação de pulsos é a modulação de amplitude:

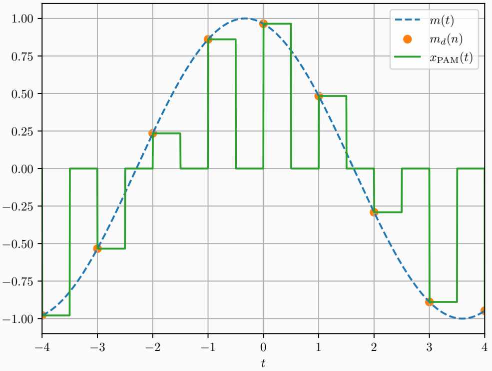


Figura 1: Sinal modulado do tipo PAM.

No caso do PAM, o sinal na saída é um trem de *pulsos* espaçados uniformemente no tempo, com a amplitude de cada pulso sendo proporcional a amostra discreta correspondente, ou seja

$$x_{\mathrm{PAM}}(t) = \sum_n m_d(n)h(t - nT_s), \tag{6}$$

onde $h(t)$ descreve o pulso 'base' no tempo. Geralmente, a taxa de amostragem que gera $m_d(n)$ é a mesma que espaça os pulsos $h(t)$.

Para observarmos o espectro de um sinal PAM, é útil identificarmos a 'desconvolução' de um trem de *pulsos*:

$$\sum_n h(t - nT_s) = h(t) * \sum_n \delta(t - T_s). \tag{7}$$

Isso significa que para um sinal do tipo PAM,

$$\begin{aligned} \sum_n m(nT_s)h(t - nT_s) &= h(t) * \sum_n m(nT_s)\delta(t - T_s), \\ &= h(t) * m_\delta(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Em outras palavras, o PAM é a convolução do sinal idealmente amostrado com um sistema com resposta $h(t)$. Naturalmente, sendo $H(f)$ a resposta em frequência de $h(t)$, então

$$X_{\mathrm{PAM}}(f) = M_\delta(f) H(f)! \tag{9}$$

Além de imediatamente nos fornecer as propriedades de, por exemplo, banda consumida por um sinal PAM, isso nos dá a intuição para entendermos como deve ser feita a ‘demodulação’ de um PAM. Mas como?

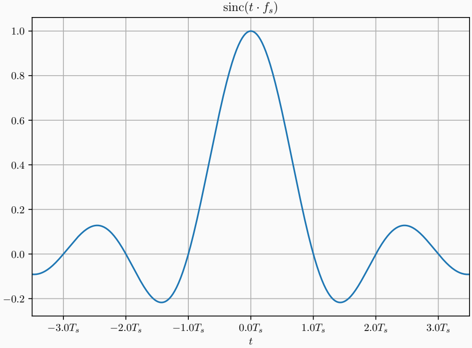
Exemplo 1

Suponha que amostramos adequadamente o sinal $m(t)$ e obtivemos $m_d(n)$, com taxa de amostragem f_s. $m_d(n)$ é então modulado usando um pulso no formato $\mathrm{sinc}(t \cdot f_s)$.

Sabendo que a transformada de Fourier da sinc é

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}(t)\} = \Pi(f), \tag{10}$$

qual a transformada de Fourier de $x_{\mathrm{PAM}}(t)$?

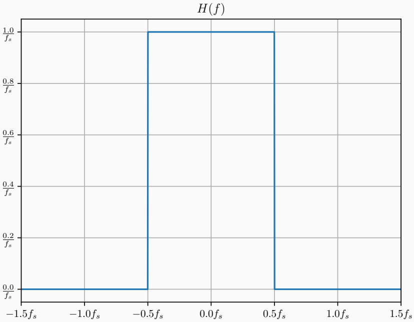


Para uma sinc dilatada no tempo, sua transformada de fourier é

$$\mathcal{F}\{m(aT)\} = \frac{1}{|a|} M\left(\frac{f}{a}\right),$$

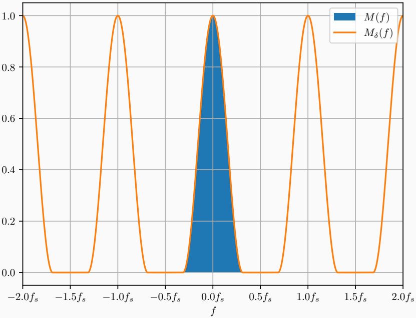
logo, para o nosso pulso,

$$H(f) = \frac{1}{f_s} \Pi\left(\frac{f}{f_s}\right). \tag{11}$$



$M_\delta(f)$ é a versão periodizada de $M(f)$, com período f_s.
Como a amostragem foi *adequada*, então garantimos que não há sobreposição entre as 'cópias' de $M(f)$;

$$M_\delta(f) = f_s \sum_k M(f - kf_s),$$



Finalmente, sabendo que $X_{\mathrm{PAM}}(f) = M_\delta(f)H(f)$, então

$$\begin{aligned} X(f) &= M_\delta(f)H(f) \\ &= [f_s \sum_k M(f - kf_s)][\frac{1}{f_s}\Pi(\frac{f}{f_s})] \\ &= M(f)!!! \end{aligned}$$

Em outras palavras, o PAM com pulso do tipo sinc desfaz a amostragem!

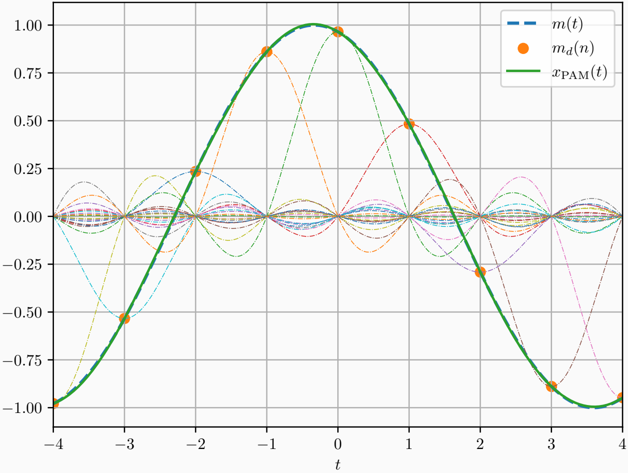


Figura 2: PAM com sinc.

Demodulação PAM

Vimos que a sinc desfaz a amostragem, pois sua transformada de fourier do tipo 'janela' efetivamente remove as cópias em $M_\delta(f)$, retornando ao espectro original;

No caso PAM, não temos o $H(f)$ do tipo janela. Mas como podemos resolver isso?

$$M(f) = M_\delta(f)H(f)\frac{\boldsymbol{f_s\Pi(\frac{f}{f_s})}}{\boldsymbol{H(f)}} \tag{12}$$

Efetivamente, nós usamos um esquema Filtro-Equalizador para a demodulação, onde

- $f_s\Pi(\frac{f}{f_s})$ faz o papel de um FPB
- $\frac{1}{H(f)}$ desfaz as distorções no espectro causadas pelo pulso

Aplicações do PAM

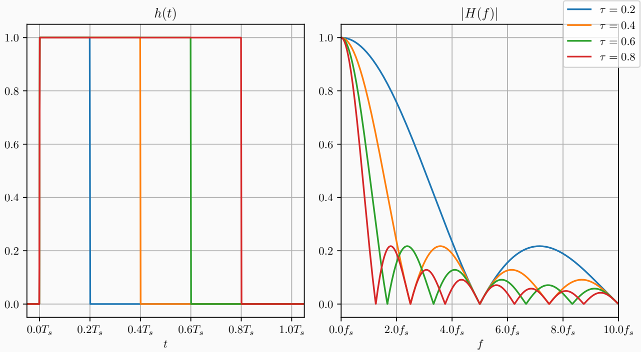
Vimos como fazer a modulação e demodulação PAM, incluindo sua natureza relacionada à inversão da amostragem.
Contudo, à primeira vista, parece que não há muita utilidade em se usar o PAM.

Por exemplo, o PAM com pulso do tipo sinc é idêntico a se transmitir o sinal original diretamente.

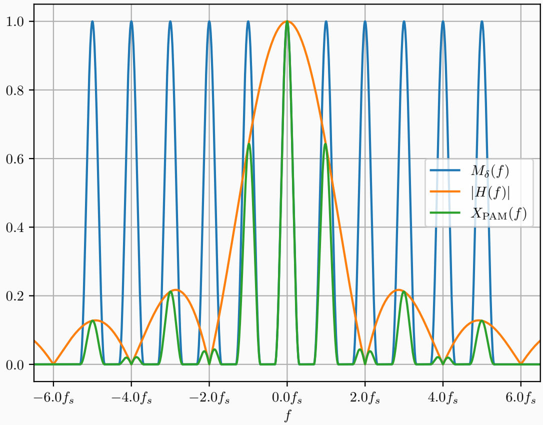
Formato espectro PAM pulso retangular

Vamos ver o espectro de um pulso retangular de comprimento variável, τ:

$$|H(f)| \propto |\text{sinc}(f\tau)|$$



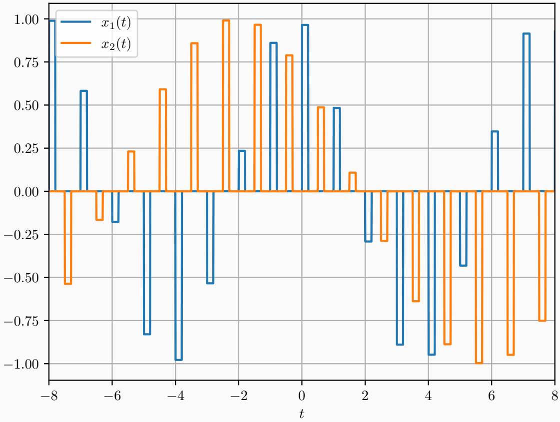
Para o exemplo anterior, isso significa que o espectro do sinal modulado terá as cópias do sinal impulsivo,



aumentando *muito* a banda ocupada pelo sinal originalmente... Qual a vantagem de se usar um pulso curto então?

Time-Domain Multiplexing

Os pulsos curtos significam que podemos enviar mais de uma amostra por intervalo!!! Se, na transmissão, deslocarmos os pulsos de cada mensagem independentes, teremos algo como na figura abaixo:



Se no receptor nós ‘chavearmos’ nos momentos corretos para cada mensagem, nós implementamos um *multiplexer* para sinais analógicos.

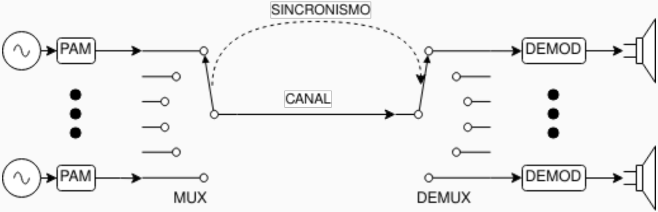


Figura 3: Multiplexação no domínio do tempo para sinais analógicos.