Modulações analógicas — II

Comunicações I

Thadeu L. B. Dias

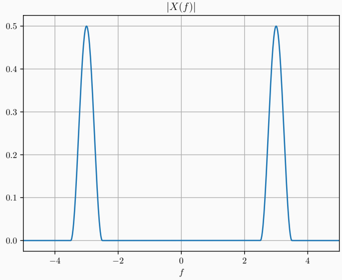
UFRJ

ToC

Recap

Esquemas de modulação DSB

Anteriormente, vimos que com um dispositivo capaz de fazer o produto de dois sinais, o *mixer*, conseguimos implementar um modulador em amplitude DSB-SC.

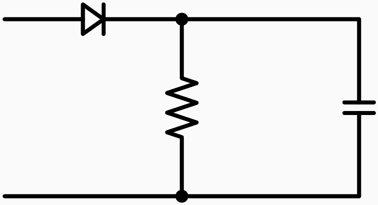


Vimos contudo, que a demodulação DSB-SC requer um receptor *síncrono*, isso é o demodulador deve gerar internamente uma onda de mesmas *frequência* e *fase*, ou a recuperação do sinal é prejudicada:

$$
\begin{aligned}
\hat{m}(t) &= \cos(2\pi f_c + \phi')x(t) \\
&= A_c m(t)\cos(2\pi f_c)\cos(2\pi f_c + \phi') \\
&= \frac{A_c}{2}[m(t)\cos(\phi') + m(t)\cos(4\pi f_c + \phi')]
\end{aligned}
$$

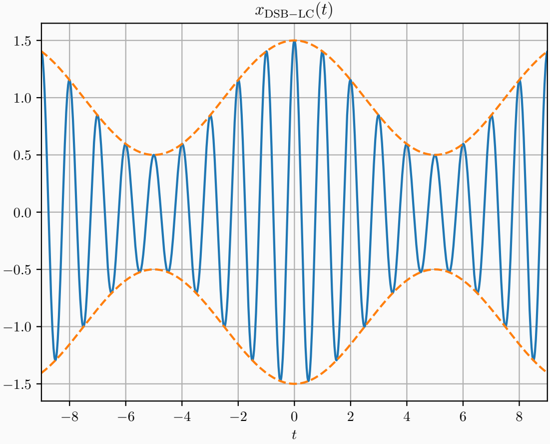
Simplificação do Receptor

Um receptor que funciona sem que se precise do oscilador local sincronizado é baseado no detector de envoltória:



Mas para que esse receptor funcione, precisamos de um *offset* no transmissor.

Somando a portadora no DSB-SC, a envoltória não ‘reflete’:



Mas isso envolve um custo na transmissão, energia é emitida sem carregar informação (a portadora).

Em outras palavras, conseguimos simplificar o receptor ao custo de diminuir a eficiência do transmissor.
No caso, introduzimos uma ineficiência ao introduzir a portadora no DSB-LC.
Existe alguma ineficiência que podemos reduzir no **DSB**-SC?

SSB

Transformada de Fourier de um sinal real

Relembrando a transformada de Fourier de um sinal:

$$M(f) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t)e^{-2\pi j f t}\,\mathrm{d}t.$$

Agora,

$$\begin{aligned} M(-f) &= \int_{-\infty}^{\infty} m(t)e^{-2\pi j(-f)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} m(t)e^{2\pi j f t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} m^*(t)e^{-2\pi j f t}\,\mathrm{d}t\right)^*. \end{aligned}$$

Se $m(t)$ é real, então

$$M(-f) = M^*(f),$$

ou seja, $M(f)$ é *Hermitiana*. Quais as implicações?

Redundância na FT de um sinal real

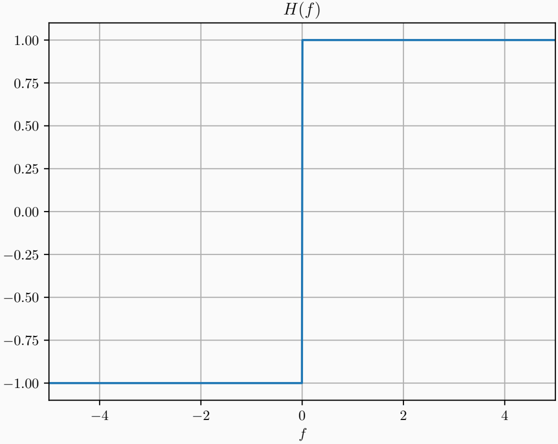
Obtemos a seguinte propriedade:

$$m(t) \in \mathbb{R} \iff M(f) = M^*(-f).$$

Para um sinal real, basta saber metade do espectro para defini-lo completamente.
No DSB, contudo, nós transmitimos as duas metades, duplicando a banda de transmissão.
É possivel desenvolver um esquema que só transmita metade do espectro?

A transformada de Hilbert

Uma das maneiras de deduplicar o espectro envolve um filtro que 'cancele' uma das metades do sinal. Por ex. um filtro com a seguinte resposta em frequência $H(f) = \mathrm{sign}(f)$:



Composição com o filtro H

Vale aqui, dividir o espectro de um sinal genérico real $M(f)$ em $M_+(f)$ e $M_-(f)$:

$$M_+(f) = \begin{cases} M(f), f \geq 0, \\ 0, f < 0 \end{cases},$$

$$M_-(f) = \begin{cases} M(f), f \leq 0, \\ 0, f > 0 \end{cases}$$

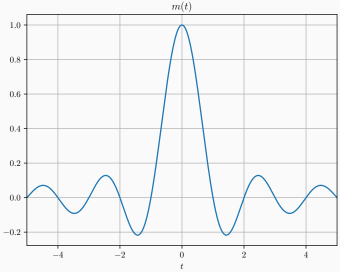
Com isso,

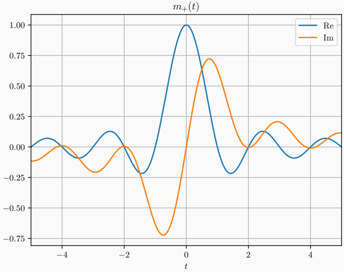
$$\begin{aligned} M(f) + H(f)M(f) &= (M_+(f) + M_-(f)) + (M_+(f) - X_-(f)) \\ &= 2M_+(f). \end{aligned}$$

Qual o fenômeno vamos observar nesse sinal?

Sinal analítico

O sinal resultante não é hermitiano, portanto ele não é real. Observe um exemplo:





De fato, nem mesmo a resposta ao impulso de $H(f)$ é real!
Vamos investigar mais.

Transformada de Hilbert

Podemos observar que a parte real de $x_+(t)$ é, na verdade, o próprio $x(t)$! Dessa forma, podemos reescrever

$$x_+(t) = x(t) - j\tilde{x}(t).$$

Agora,

$$\begin{aligned} M_+(f) &= M(f) + H(f)M(f), \\ x(t) &= x(t) - j\tilde{x}(t), \end{aligned}$$

ou seja,

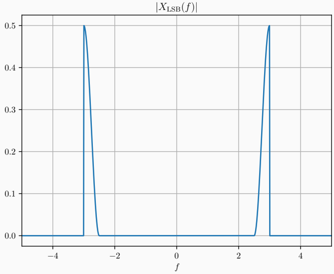
$$\tilde{X}(f) = -j\text{sign}(f)M(f)$$

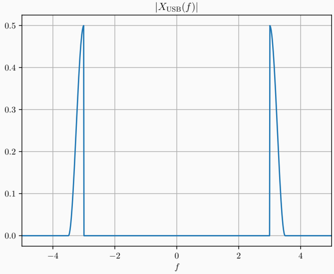
O operador que realiza a transformação para $\tilde{x}(t)$ tem resposta em frequência $-j\text{sign}(f)$, e é rotineiramente denominado *transformada de Hilbert*.

Seu efeito é deslocar todas as frequências por $-\frac{\pi}{2}$.

No sentido de modulação

Voltamos à modulação.
O objetivo é transmitir apenas uma das bandas laterais, contudo o sinal resultante *deve* ser real!
Como deve ser o formato do espectro então?





Vamos aproveitar o fato de que

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_c t)\} = \frac{1}{2}(\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c))$$

e

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_c t)\} = \frac{-j}{2}(\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c))$$

Modulando $m(t)$ por um cosseno e $\tilde{m}(t)$ por um seno:

$$\mathcal{F}\{x_i(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t)\} = \frac{1}{2}(M(f - f_c) + M(f + f_c))$$
$$\mathcal{F}\{x_q(t) = \tilde{m}(t)\sin(2\pi f_c t)\} = \frac{-j}{2}(\tilde{M}(f - f_c) - \tilde{M}(f + f_c))$$

Expandindo os termos:

$$\mathcal{F}\{x_i(t)\} = \frac{1}{2}(M_-(f-f_c) + M_+(f-f_c) + M_-(f+f_c) + M_+(f+f_c))$$
$$\mathcal{F}\{x_q(t)\} = \frac{1}{2}(-M_-(f-f_c) + M_+(f-f_c) + M_-(f+f_c) - M_+(f+f_c)).$$

Agora fica simples,

$$\mathcal{F}\{x_i(t) + x_q(t)\} = (M_+(f-f_c) + M_+(f+f_c)), \quad \text{Upper sideband}$$
$$\mathcal{F}\{x_i(q) - x_q(t)\} = (M_-(f-f_c) + M_+(f+f_c)), \quad \text{Lower sideband.}$$

Resumo

Se formos capazes de obter $\tilde{m}(t)$, então através do seguinte esquema, podemos transmitir apenas uma banda lateral:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{i(t)+q(t)\} &= (M_{+}(f-f_c)+M_{+}(f+f_c)), \quad \text{Upper sideband} \\
\mathcal{F}\{i(t)-q(t)\} &= (M_{-}(f-f_c)+M_{+}(f+f_c)), \quad \text{Lower sideband.}
\end{aligned}$$

Demodulação

Talvez surpreendentemente, a demodulação do sinal SSB é idêntica à demodulação DSB-SC.
Relembrando da demodulação síncrona:

$$
\begin{aligned}
\hat{m}(t) &= \cos(2\pi f_c)[i(t) + q(t)] \\
&= \cos(2\pi f_c)[m(t)\cos(2\pi f_c) + \tilde{m}(t)\sin(2\pi f_c)]
\end{aligned}
$$

Já vimos como se comporta o primeiro termo (associado ao cosseno).
Como se comporta o segundo?
Dica:

$$
\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))
$$

Fantasmas do passado

Nós temos que ser capazes de obter $\tilde{m}(t)$ para implementar o SSB dessa forma.
Isso está associado à transformada de Hilbert de $m(t)$, com resposta $-j\text{sign}(f)$.

Qual a resposta ao impulso desse sistema?

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$