Modulações em ângulo

Comunicações I

Thadeu L. B. Dias

UFRJ

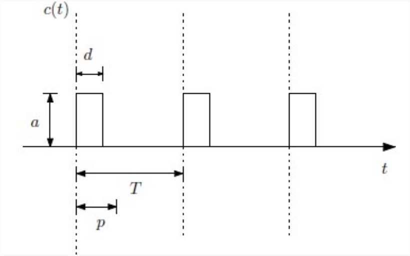
ToC

Intro

Modulação de pulso

Nós vimos no caso de modulação de ondas contínuas, como alterar as propriedades de uma portadora senoidal em função do sinal modulante $m(t)$.

Em alguns casos, no entanto, pode ser desejável utilizar um outro tipo de portadora, por exemplo uma portadora do tipo pulso retangular:



No caso, esse tipo de portadora é, em sua forma básica, definida pela periodização de um sinal finito, que se repete em cada intervalo de tempo T:

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT). \tag{1}$$

Dessa forma, seja qual for a propriedade que iremos alterar em função do sinal modulante, essa propriedade só pode ser alterada a cada período T.

Isso significa que o sinal modulante efetivo não mais será a função contínua $m(t)$, mas algo que se relaciona com a função original em momentos específicos, usados para modular os pulsos, ou seja, algo no sentido

$$m_d(n) = m(nT). \tag{2}$$

Isso significa que o sinal modulante não mais será a versão contínua do sinal desejado, mas sim sua versão *discreta* no tempo!

Isso, agora, nos leva ao seguinte problema: desejamos obter o sinal $m(t)$ no receptor, contudo as mensagens transmitidas são em função de $m_d(n)$ discreto.
Levantamos aqui duas perguntas:

1. Se possuirmos $m_d(n)$ é possível recuperar sua versão contínua $m(t)$?
2. Se sim, quais condições se aplicam para que isso seja possível?

Amostragem

Amostragem

O processo que lida com a conversão tempo contínuo — tempo discreto é a *amostragem*.
O objetivo é obter uma sequencia $m_d(n) = m(nT_s)$ de forma que seja possível se recuperar o $m(t)$ original.

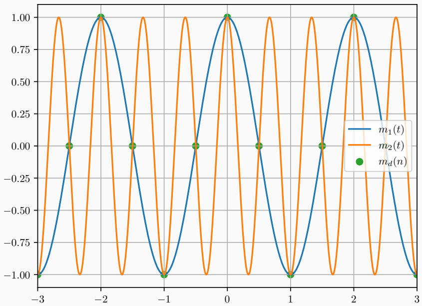
Aqui definiremos um valor importante.

1. T_s, o período de tempo a cada qual 'capturaremos' a função original: *Período de amostragem*
2. $f_s = \frac{1}{T_s}$, o recíproco do período de amostragem: *Taxa de amostragem*

Naturalmente, com períodos de amostragem diferentes, os sinais $m_d(n)$ podem ser significativamente diferentes.

Aliasing — Tempo

Naturalmente, queremos que o processo de amostragem seja reversível, ou seja precisamos que ele seja biunívoco.
Considere a amostragem dos seguintes sinais, usando a mesma taxa de amostragem:



Percebe qual foi o problema?

Amostragem ideal

Em termos de análise, é útil pensar no seguinte sinal:

$$m_\delta(t) = m(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \tag{3}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\delta(t - nT_s) \tag{4}$$

$m_\delta(t)$ é chamado de sinal idealmente amostrado.

Agora, nos lembremos da série de Fourier de um sinal do tipo trem de impulsos:

$$c_k = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{+\frac{T_s}{2}} \sum_n \delta(t - nT_s) e^{-j\frac{2\pi}{T_s}kt} \, \mathrm{d}t \tag{5}$$

$$= \frac{1}{T_s} = f_s, \tag{6}$$

ou seja, o sinal do tipo trem de impulsos tem a série de Fourier

$$\mathrm{comb}(t) = f_s \sum_k e^{j2\pi f_s k t}, \tag{7}$$

cuja transformada de Fourier é

$$\mathcal{F}\{\mathrm{comb}(t)\} = f_s \sum_k \delta(f - f_s k), \tag{8}$$

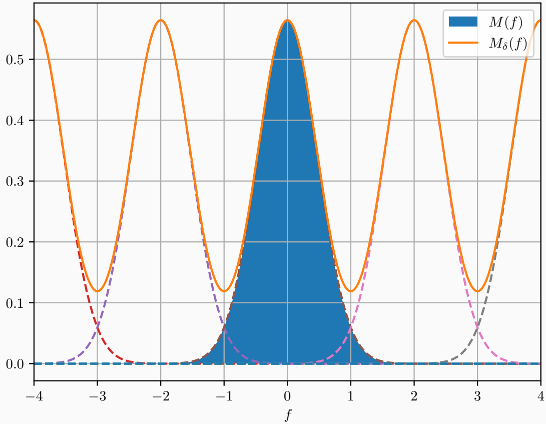
que também é um trem de impulsos!

Usando a propriedade do produto no tempo, a transformada de Fourier de m_δ, é

$$\begin{aligned} M_\delta(f) &= \mathcal{F}\{m(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\} \\ &= M(f) * f_s \sum_k \delta(f - f_s k) \\ &= f_s \sum_k M(f - f_s k) \end{aligned} \tag{9}$$

Espectro periódico

Em outras palavras, a transformada de Fourier de $m_\delta(t)$ é uma versão escalada e periodizada de $M(f)$, com período de repetição f_s!



Conexão DTFT

Para entender o espectro de m_δ, usamos anteriormente a propriedade da multiplicação por um trem de impulsos. m_δ, no entanto possui a outra definição equivalente:

$$m_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\delta(t - nT_s). \tag{10}$$

Aqui podemos aplicar diretamente a transformada de Fourier. Lembrando que

$$\mathcal{F}\{\delta(t - nT_s)\} = e^{-j2\pi f n T_s}, \tag{11}$$

então

$$\mathcal{F}\{m_\delta(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_d(n) e^{-j2\pi f n T_s}. \tag{12}$$

Essa relação é a *Transformada de Fourier de Tempo Discreto*!

Critério de Nyquist

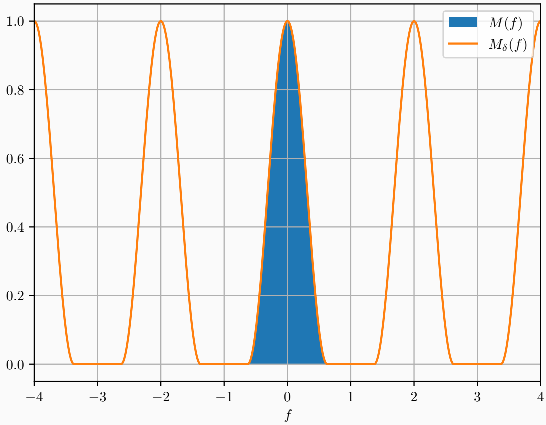
Retornando ao espectro $M_\delta(f) = f_s \sum_k M(f - f_s k)$.
Nós desejamos que o processo de amostragem seja reversível, isso equivale a que seja possível recuperar $M(f)$ de $M_\delta(f)$.

Vamos agora supor duas condições no processo de amostragem:

- O sinal $M(f)$ é limitado em banda, ou seja $M(f) = 0$ se $|f| > W$ para algum $W > 0$.
- A taxa de amostragem f_s é pelo menos $\frac{1}{2W}$.

O que observaremos?

A transformada de $M_\delta(f)$ é proporcional a $M(f)$ no intervalo $-f_s \leq f < f_s$!



Recuperar o sinal original é simples. Como?

Teorema da amostragem

Teorema da amostragem
Um sinal de energia finita e limitado em banda, sem componentes em frequência superiores a W Hertz, é completamente descrito ao se especificar seu valor em instantes de tempo separados por $\frac{1}{2W}$ segundos.

Para um sinal desta classe, a taxa de amostragem $f_s = \frac{1}{2W}$, é denominada a *Taxa de Nyquist*.

Ex. 1

Deseja se amostrar um sinal do tipo cossenoidal com a seguinte forma:

$$m(t) = \cos(2\pi f_m t + \phi), \tag{13}$$

com $-\pi \leq \phi < \pi$.

1. Descreva $m(t)$ supondo uma amostragem com taxa f_m. Qual sua transformada de Fourier?
2. O mesmo, porém com taxa de amostragem $2f_m$?
3. Qual efeito se observa quando $\phi = 0$? E quando $\phi = \frac{\pi}{2}$?