Análise de Fourier

Comunicações I

Thadeu L. B. Dias

UFRJ

ToC

Intro

Energia de uma função

A energia de uma função do tipo $\mathcal{L}^2\{\mathbb{C}\}$ é definida como

$$\langle m, m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |m(t)|^2 \,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

O teorema de Parseval (t.c.c. teorema da energia de Rayleigh) nos diz que podemos obter a energia através da integração da energia espectral

$$\langle M, M \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |M(f)|^2 \,\mathrm{d}f = \langle m, m \rangle, \tag{2}$$

ou que em outras palavras, a transformada de Fourier é *ortogonal*.

OFF — Ortogonalidade geométrica

Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ é unitária (ortogonal se sobre os reais) se

$$A^{\mathrm{H}} A = A A^{\mathrm{H}} = I. \tag{3}$$

Uma das propriedades de matrizes unitárias é a norma dos vetores transformados é preservada. Por ex, se $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{u}$,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle &= \boldsymbol{v}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{u}^{\mathrm{H}} A^{\mathrm{H}} A \boldsymbol{u} \\ &= \boldsymbol{u}^{\mathrm{H}} I \boldsymbol{u} \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \end{aligned}$$

Infelizmente, nem todas as funções são do tipo $\mathcal{L}^2$. Um exemplo importante é a função cosseno:

$$\begin{aligned}\langle \cos, \cos \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} [0.5 + 0.5\cos(2t)]\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Essa integral não converge ao longo do intervalo infinito, mas converge se delimitarmos um intervalo finito, por ex., $\Delta t = t_1 - t_0$. Isso nos permite introduzir o conceito de potência média:

$$P = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} |m(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau. \tag{4}$$

Naturalmente, a potência média pode depender do intervalo selecionado, mas geralmente podemos selecionar um intervalo que nos dê um resultado interpretável.

Ex. Potência média de um cosseno

Qual a potência média de um cosseno dentro do intervalo $[t_0, t_1]$?

$$
\begin{aligned}
P_m(t_0, t_1) &= \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \cos^2(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} 0.5[1 + \cos(2\tau)]\, \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{t_1 - t_0} 0.5\, [1 + 0.5 \sin(2\tau)]\, |_{t_0}^{t_1} \\
&= 0.5 \frac{\Delta t + 0.5(\sin(2t_1) - \sin(2t_0))}{\Delta t}
\end{aligned}
$$

Se por acaso Δt coincidir com um múltiplo de 2π, nós reencontramos um resultado conhecido...
E quando $\Delta t \to \infty$?

Usamos um limite do tipo sanduíche:

$$P_m = 0.5\frac{\Delta t + 0.5(\sin(2t_1) - \sin(2t_0))}{\Delta t}$$
$$0.5\frac{\Delta t - 1}{\Delta t} \leq 0.5\frac{\Delta t + 0.5(\sin(2t_1) - \sin(2t_0))}{\Delta t} \leq 0.5\frac{\Delta t + 1}{\Delta t}$$

Quando $\Delta t \to \infty$, $P_m \to 0.5$!

Potência de transmissão AM

Potência média de um sinal DSB-SC

Lembrando da forma genérica de um sinal do tipo DSB-SC,

$$x(t) = m(t) \cdot A\cos(2\pi f_c t), \tag{5}$$

qual seria sua potência média?

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} A^2 m^2(\tau)\cos^2(2\pi f_c \tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{A^2}{2}\frac{1}{\Delta_t}\int_{\Delta t} m^2(\tau) + m^2(\tau)\cos(4\pi f_c \tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Observando que $m^2(t)$ é frequentemente muito mais lento que $2f_c$, obtemos o seguinte resultado:

$$P_x = \frac{A^2}{2}P_m. \tag{6}$$

Potência média de um sinal DSB-LC

A forma genérica de um sinal do tipo DSB-LC é dada por

$$x(t) = [1 + \kappa m(t)] \cdot A\cos(2\pi f_c t), \tag{7}$$

porém aqui é mais útil pensar no DSB-LC como

$$x(t) = \kappa x_{\mathrm{DSB-SC}}(t) + A\cos(2\pi f_c t), \tag{8}$$

isso é, o DSB-SC acrescido de uma portadora. Dessa forma, fica claro que

$$P_x = \frac{A^2}{2}[\kappa^2 P_m + 1] \tag{9}$$

Eficiência energética

Aqui vale a pena introduzir um conceito de eficiência energética;
A equação de potência DSB-LC, podemos notar 2 termos, um relativo ao sinal transmitido, e outro relativo à emissão da portadora (que não carrega informação).
A eficiência aqui definida, é a razão entre a potência útil e a potência total, que no caso do DSB-LC é

$$\eta = \frac{\kappa^2 P_m}{\kappa^2 P_m + 1}. \tag{10}$$

Claramente, $\eta \leq 1$, e na prática, estações comerciais operam com $\eta \approx 0.1$.
Esse é o custo da recepção assíncrona!

Injeção de portadora no DSB-SC, VSB e SSB

Rigorosamente, nas modulações com detecção síncrona, não precisamos emitir no transmissor, uma cópia da portadora. Contudo, a detecção deve ser síncrona, o que implica circuito de sincronização, detecção de fase, etc.

Frequentemente, na prática, o transmissor 'ajuda' um pouco o receptor, ao emitir uma *fração* de portadora, servindo como referência, ou *piloto*, para o receptor. Considerando uma injeção de portadora do tipo $B\cos(2\pi f_c t)$, teremos

$$\eta = \frac{2P}{2P + B^2}, \tag{11}$$

onde P é a potência do sinal modulado 'básico'.