PCM

Comunicações I

Thadeu L. B. Dias

UFRJ

ToC

Recap

Amostragem

Amostragem é o processo de converter um sinal do tipo $m(t)$ para um sinal do tipo

$$m_d(n) = m(nT_s).$$

Vimos como a DTFT de m_d se relaciona com a FT do sinal idealizado

$$m_\delta(t) = m(t) \cdot \sum_k \delta(t - k \cdot T_s).$$

Com essas propriedades, observamos as condições de Nyquist, que possibilitam a inversão da amostragem, retornando ao tempo contínuo sem perda de informação:

1. Sinal $m(t)$ com energia finita, limitado em banda: $W < \infty$.
2. Amostragem com $f_s \geq 2W$.

Quantização

O processo de quantização mapeia de um espaço contínuo (i.e. $\mathbb{R}$) para um espaço discreto (i.e. um alfabeto $\mathcal{D}$).

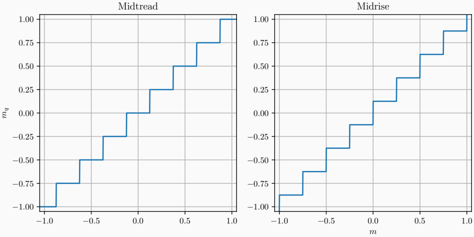


Figure 1: Exemplos de quantizadores.

Naturalmente, essa função de mapeamento não é bijetiva, portanto não é inversível.

Ruído de Quantização

A diferença entre m e sua versão quantizada m_q é o erro de quantização.
Como a natureza do erro é de difícil determinação, modelaremos o erro como uma variável aleatória Q.
Quando o quantizador é uniforme e *fino* o suficiente, a distribuição de Q se aproxima de uma distribuição uniforme

$$Q \sim \mathcal{U}\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right],$$

e sua potência média se torna

$$\bar{P}_Q = \sigma_Q^2 = \frac{1}{3} m_{\max}^2 2^{-2R}.$$

Efeito do ruído de quantização

Avaliamos o nível de degradação do sinal original pela figura de mérito da razão sinal-ruído de quantização

$$\mathrm{SNR}_Q = \frac{P_m}{\sigma_Q^2}. \tag{1}$$

Vimos que há formas de se obter figuras de mérito superiores ao quantizador uniforme de duas formas diferentes:

- Quantizador não-uniforme (Lloyd-max)
- Curva de compressão seguido de quantizador uniforme (Lei-μ)

Transmissão digital — PCM

Transmissão digital

O processo para se transmitir digitalmente um sinal, de maneira simplificada, consiste de 3 etapas:

- Amostragem
- Quantização
- Codificação

Nós já estudamos as duas primeiras etapas, agora focaremos na última.

Codificação

Codificação é a forma de transformar mensagens de um alfabeto finito em uma sequência de símbolos que serão de fato transmitidos. Pela natureza da forma pela qual faremos a transmissão e recepção dos símbolos, os símbolos que são mais práticos de serem usados são símbolos *binários*.
A forma com que símbolos binários, por exemplo, são transmitidos através de um canal pode variar:

- Valor $+V$ ou 0,
- Valor $+V$ ou $-V$,
- etc.,

de forma geral, só precisamos ser capazes de diferenciar duas transmissões diferentes;

Pulse-code Modulation

Apesar de conter modulação no nome, PCM é mais uma técnica de codificação.

É de fato a mais simples das codificações. No caso, indexando cada símbolo do alfabeto de mensagens, podemos diretamente associar cada mensagem por sua representação em algarismos binários:

k	code
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Table 1: PCM para alfabeto de 8 símbolos

Taxa de transmissão de um PCM

Agora, a nossa transmissão está diretamente feita em *bits*. Podemos então medir a taxa de transmissão em função da taxa de bits.

Considerando um alfabeto de N níveis de quantização, uma taxa de amostragem f_s, a taxa de bits/s será

$$R_b = f_s \cdot \log_2(N) \text{ bits/s.} \tag{2}$$

Frequentemente N é escolhido de forma a ser uma potência inteira de 2.
Geralmente, a transmissão a uma taxa de R_b bits/s requer uma banda proporcional a R_b Hz, a depender da forma com que os bits são transmitidos através do canal.

Ruído na recepção do PCM

O modelo de ruído de um receptor digital é o mesmo de um receptor analógico, isso é, há uma parte determinística e uma parte estocástica no sinal a ser medido.

Figure 2: Receptor digital.

Além da amostragem, um ponto fundamental de diferença é a presença do dispositivo de decisão.
Como existem apenas duas mensagens possíveis de ser recebidas, dado o valor medido, o dispositivo de decisão irá estimar a mensagem mais provável de ter sido transmitida.

Exercício 1

Vamos observar a probabilidade de erro de um receptor binário. Suponha que após o filtro de recepção e amostragem, os sinais medidos tem a seguinte forma:

$$X = \begin{cases} +V + N, & \text{se transmitido bit 1} \\ -V + N, & \text{se transmitido bit 0} \end{cases},$$

onde N é uma variável aleatória gaussiana com média zero e variância σ_N^2.

Se a probabilidade de um bit 1 ser transmitido é dado por P_1, responda o seguinte:

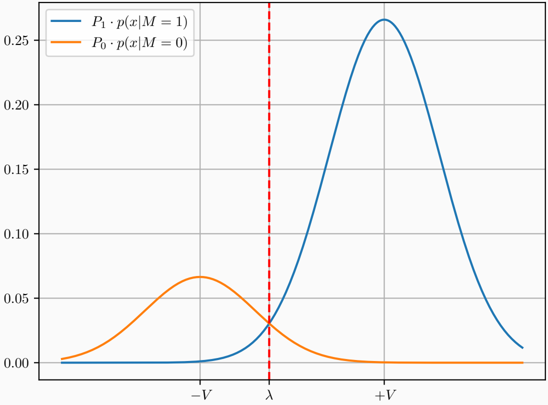
1. Qual o limiar λ ótimo para um decisor MAP?
2. Qual a probabilidade de erro de bits para esse sistema?

O estimador irá decidir pelo bit 0 quando $P\{M = 0|x\} > P\{M = 1|x\}$, e pelo bit 1 quando o converso. Usando o teorema de Bayes, podemos escrever essa condição pelas distribuições de transição:

$$P\{M = 0|X\} > P\{M = 1|X\}$$
$$\frac{p(x|M = 0)P\{M = 0\}}{p(x)} > \frac{p(x|M = 1)P\{M = 1\}}{p(x)}$$
$$p(x|M = 0)P\{M = 0\} > p(x|M = 1)P\{M = 1\}$$

Ou seja, basta comparar as duas densidades escaladas pelas probabilidades de transmissão (a priori).

Visualmente, teremos o seguinte:



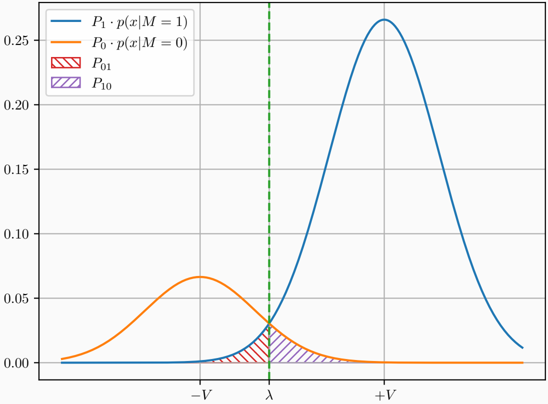
O ponto de decisão ótimo é justamente quando as duas probabilidades são iguais!

$$
\begin{aligned}
P_0 \cdot p(\lambda | M = 0) &= P_1 \cdot p(\lambda | M = 1) \\
\log(P_0) + C - 0.5 \frac{(\lambda + V)^2}{\sigma_N^2} &= \log(P_1) + C - 0.5 \frac{(\lambda - V)^2}{\sigma_N^2} \\
2\sigma_N^2 \log\left(\frac{P_0}{P_1}\right) &= [\lambda^2 + 2\lambda V + V^2] - [\lambda^2 - 2\lambda V + V^2] \\
\frac{\sigma_N^2 \log\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}{2V} &= \lambda
\end{aligned}
$$

Qual a probabilidade de erro?

$$P_e = P\{\hat{M} = 0 | M = 1\} P\{M = 1\} + P\{\hat{M} = 1 | M = 0\} P\{M = 0\}.$$

Visualmente,



Para o primeiro erro,

$$P_{01} = P_1 \cdot \int_{-\infty}^{\lambda} p(x|M = 1)\,\mathrm{d}x$$

e para o segundo,

$$P_{10} = P_0 \cdot \int_{\lambda}^{+\infty} p(x|M = 0)\,\mathrm{d}x$$

Em função de erfc

Usualmente, escrevemos probabilidades de gaussianas em termos da função erfc:

$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z.$$

Para o caso P_{01},

$$z = \frac{x - V}{\sigma_N}$$

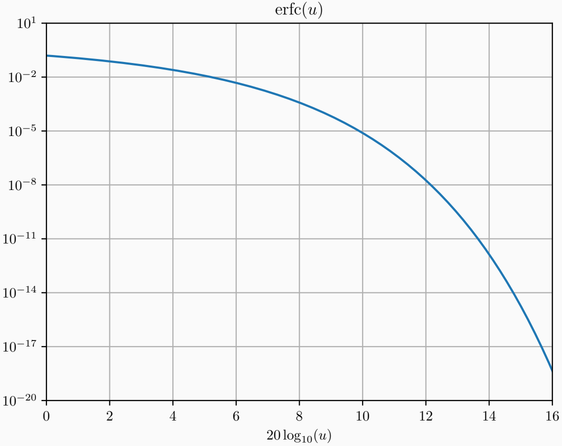
$$P_{01} = P_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\lambda - V}{\sigma_N}} \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$P_{01} = \frac{P_1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{V - \lambda}{\sigma_N}\right).$$

Análogamente, para P_{10},

$$P_{10} = \frac{P_0}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{V + \lambda}{\sigma_N}\right)$$

Comportamento erfc



Exemplo taxa de bits

Suponha que a probabilidade de erro de bit seja 10^{-9}, com uma taxa de 64 kbps. Qual a probabilidade de se ter 1 ou mais erros ao longo de 1 segundo?

$$P = 1 - (1 - P_e)^{64 \times 10^3} \approx 0.000064 = 0.0064\%!!!$$