Phương pháp toán trong Đồ họa, Xử lý ảnh, Thị giác máy tính

Tuần 2: Phương pháp nhân tử Lagrange

TS. Lý Quốc Ngọc

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

2.PP nhân tử Lagrange

Phát biểu bài toán tối ưu.

Cho trước hàm $f : R^n \to R$ và tập $S \subset R^n$, cần tìm $x \in S$ sao cho đạt f cực tiểu trên S tại x, có nghĩa là

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in S.$$

Hàm mục tiêu f có thể thuộc dạng tuyến tính hoặc phi tuyến.

Tập ràng buộc S thường xuất hiện dưới dạng tập phương trình hoặc bất phương trình hoặc cả hai, thuộc dạng tuyến tính hoặc phi tuyến.

2.PP nhân tử Lagrange

Phát biểu bài toán tối ưu.

Nếu $S = R^n$ thì bài toán thuộc dạng không ràng buộc.

Bài toán tối ưu tổng quát có dạng

$$\min_x f(x) \text{ với điều kiện } g(x) = 0, h(x) \le 0$$

$$f : R^n \to R,\ g : R^n \to R^m,\ h : R^n \to R^k$$

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu cục bộ, tối ưu toàn cục

Hàm f có cực tiểu toàn cục tại x^* nếu

$$f(x^*) \le f(x), \forall x \in S$$

Hàm f có cực tiểu cục bộ tại x^* nếu

$$f(x^*) \le f(x), \ \| x - x^* \| < \varepsilon$$

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu không ràng buộc

Điều kiện cần để x^* là điểm cực trị của $f: R^n \to R$ là

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Điều kiện đủ để x^* là điểm cực tiểu, cực đại, yên ngựa là
Nếu $H_f(x)$ xác định dương $(x^T H_f x > 0)$ thì x^* là điểm cực tiểu.

Nếu $H_f(x)$ xác định âm $(x^T H_f x < 0)$ thì x^* là điểm cực đại.

Nếu $H_f(x)$ không xác định thì x^* là điểm yên ngựa.

$$\{H_f(x)\}_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu không ràng buộc

Vd: $$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + O(h^3),$$

$$f : R \to R$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x+h) = f(x) + \frac{f''(x)}{2}h^2 > f(x)$$

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu không ràng buộc

Vd: $f(x+h) = f(x) + J(x)h + \frac{1}{2}h^T H(x)h + O(\| h \|^3),$

$$f : R^n \to R$$

$$\begin{cases} J(x) = 0 \\ h^T H(x)h > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2}h^T H(x)h > f(x)$$

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu không ràng buộc

Vd:

$$J(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \; \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right],$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots\dots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2} \end{bmatrix}$$

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu ràng buộc

Cực tiểu hàm mục tiêu phi tuyến với ràng buộc đẳng thức phi tuyến

$$\min_{x} f(x), \quad g(x) = 0$$

$f : R^n \to R, \; g : R^n \to R^m, \mathrm{m} \leq \mathrm{n}$

Để x là lời giải của bài toán, cần thỏa

$$-\nabla f(x) = J_g^T(x)\lambda,$$

$J_g(x)$ là ma trận Jacobi của g

λ là vectơ nhân tử Lagrange m chiều

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu ràng buộc

Xét hàm Lagrange $L : R^{n+m} \to R,$

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

$$\nabla L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_x L(x,\lambda) \\ \nabla_\lambda L(x,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + J_g^T(x)\lambda \\ g(x) \end{bmatrix}$$

$$H_L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} B(x,\lambda) & J_g^T(x) \\ J_g(x) & O \end{bmatrix}$$

$$B(x,\lambda) = \nabla_{xx} L(x,\lambda) = H_f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_{g_i}(x)$$

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu ràng buộc

Điểm cực trị của bài toán thỏa

$$\nabla L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_x L(x,\lambda) \\ \nabla_\lambda L(x,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + J_g^T(x)\lambda \\ g(x) \end{bmatrix} = 0$$

Điều kiện đủ để đạt cực tiểu tại x là $B(x,\lambda)$ xác định dương.

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu ràng buộc

Vd: cực tiểu hàm dạng toàn phương

$$f(x) = 0.5x_1^2 + 2.5x_2^2$$

Với ràng buộc

$$g(x) = x_1 - x_2 - 1 = 0$$

Hàm Lagrange được xác định bởi

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) = 0.5x_1^2 + 2.5x_2^2 + \lambda(x_1 - x_2 - 1)$$

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu ràng buộc

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix} \quad và \quad J_g(x) = [1 \quad -1]$$

$$\nabla_x L(x,\lambda) = \nabla f(x) + J_g^T(x)\lambda = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu ràng buộc

Điểm cực trị là nghiệm của hệ phương trình

$$x_1 + \lambda = 0,$$
$$5x_2 - \lambda = 0,$$
$$x_1 - x_2 = 1,$$

Dưới dạng ma trận, ta có

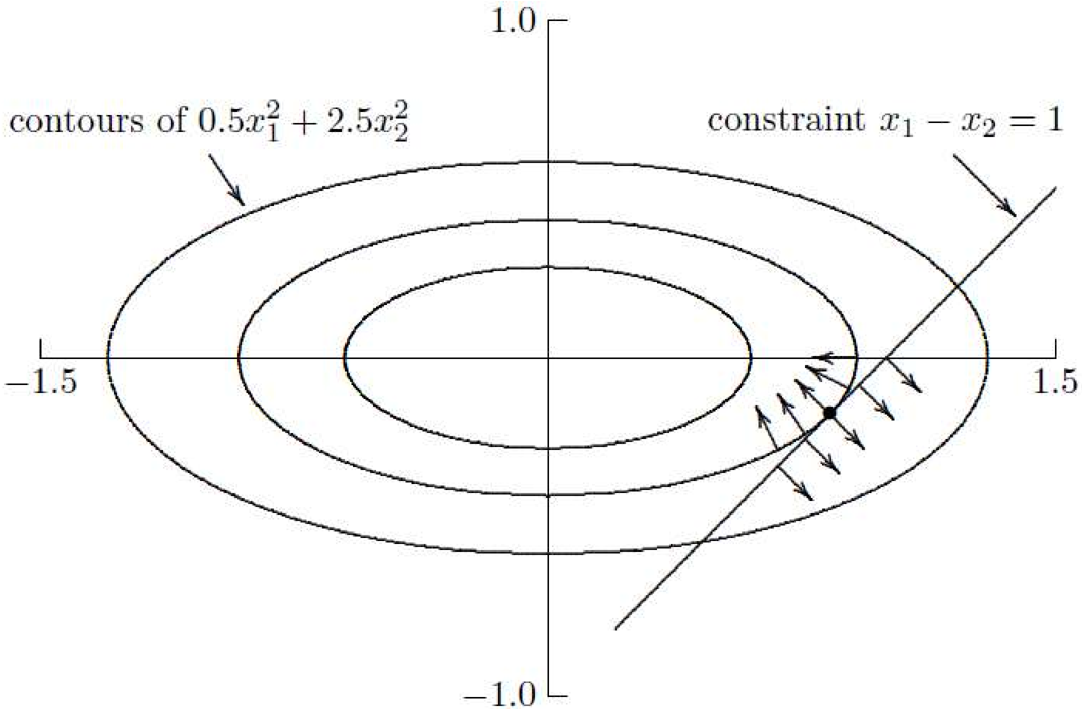
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu ràng buộc

Giải hệ phương trình trên, ta được nghiệm

$$x_1 = 0.833,\ x_2 = -0.167,\ \lambda = -0.833$$



2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu ràng buộc

Vd: cực tiểu hàm dạng toàn phương

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

Với ràng buộc

$$g(x,y)=x+y=10$$

Hàm Lagrange được xác định bởi

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-10)$$

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu ràng buộc

Vd: cực tiểu hàm dạng toàn phương

Điều kiện cần để đạt cực trị

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0 \Rightarrow -\frac{\lambda}{2}.2 = 10 \Leftrightarrow \lambda = -10$$

Điểm dừng là (5;5;-10)

2.PP nhân tử Lagrange

Tối ưu ràng buộc

Điều kiện đủ để đạt cực tiểu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = 2(dx^2 + dy^2) > 0$$

$$f_{\min} = f(5,5) = 5^2 + 5^2 = 25$$