Phương pháp toán trong Đồ họa, Xử lý ảnh, Thị giác máy tính

Tuần 1: Không gian metric

Tiến sĩ Lý Quốc Ngọc

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

1.Không gian metric

Định nghĩa 1. (*Không gian metric*)

Không gian metric (X,d) là không gian X được trang bị hàm giá trị thực d, d: XxX→R, dùng đo khoảng cách giữa các cặp điểm x và y trong X, thỏa các tiên đề sau:

$$(i)\ 0 < d(x,y) < \infty\ \forall x,y \in X, x \neq y$$

$$(ii)\ d(x,x) = 0\ \forall x \in X$$

$$(iii)\ d(x,y) = d(y,x)\ \forall x,y \in X$$

$$(iv)\ d(x,y) < d(x,z) + d(z,y)\ \forall x,y,z \in X$$

hàm d được gọi là metric.

1.Không gian metric

Vd:

$$d_2(x,y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_1 - y_1)^2]^{1/2} (\textit{Euclidean metric})$$

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| (\text{Manhattan metric})$$

$(R^2, d_2), (R^2, d_1)$ là các không gian metric.

1.Không gian metric

Định nghĩa 2. (*dãy Cauchy*)

Dãy các điểm $\{x_n\}$ trong không gian metric (X,d) được gọi là dãy Cauchy nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ sao cho}$$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \;\; \forall n, m > N$$

.

1.Không gian metric

Định nghĩa 3. (*dãy hội tụ*)

Dãy các điểm $\{x_n\}$ trong không gian metric (X,d) được gọi là hội tụ đến điểm $x \in X$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ sao cho}$$

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n > N$$

$x \in X$ mà dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến được gọi là giới hạn của dãy

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

1.Không gian metric

Định lý 1. (*dãy hội tụ và dãy Cauchy*)

Dãy các điểm $\{x_n\}$ trong không gian metric (X,d) được gọi là hội tụ đến điểm $x \in X$ thì dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy :

Định nghĩa 4. (*không gian metric đầy đủ*)

Không gian metric (X,d) được gọi là đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy $\{x_n\}$trong X là dãy hội tụ và có điểm giới hạn $x \in X$.

1.Không gian metric

Vd:

(R, Euclidean metric) là không gian metric đầy đủ.

(R^2, Euclidean metric) là không gian metric đầy đủ.

1.Không gian metric

Định nghĩa 5. (*điểm giới hạn của tập con $S \subset X$*)

Giả sử $S \subset X$ là tập con của không gian metric (X,d). Điểm x $\in$ X được gọi là điểm giới hạn của S nếu:

Tồn tại dãy $\{x_n\}$ ($x_n \in S \backslash \{x\}$) sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$).

Định nghĩa 6. (tập đóng)

Giả sử $S \subset X$ là tập con của không gian metric (X,d).

Bao đóng của S ký hiệu bởi $\overline{S} = S \cup \{\text{limit point of S}\}$

S đóng nếu nó chứa tất cả các điểm giới hạn, có nghĩa là

$$S = \overline{S}$$

1.Không gian metric

Định nghĩa 7. (*tập Compact*)

Giả sử $S \subset X$ là tập con của không gian metric (X,d). S là tập Compact nếu:

Mọi dãy $\{x_n\}$ trong S chứa dãy con có giới hạn trong S.

Định nghĩa 8. (tập bị chặn)

Giả sử $S \subset X$ là tập con của không gian metric (X,d). S là tập bị chặn nếu:

Tồn tại a $\in$ X và số R >0 sao cho

$$d(a,x) < R \quad \forall x \in S$$

1.Không gian metric

Định nghĩa 9. (*tập bị chặn toàn phần*)

Giả sử $S \subset X$ là tập con của không gian metric (X,d). S là tập bị chặn toàn phần nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset S,$$

$$\forall x \in S, d(x, y_i) < \varepsilon, y_i \in \{y_1, y_2, ..., y_n\}.$$

$$\{y_1, y_2, ..., y_n\} : \varepsilon - net$$

•

1.Không gian metric

Định lý 2 . (*tính Compact, đóng, bị chặn toàn phần*)
Giả sử $S \subset X$ là tập con của không gian metric (X,d). S là tập Compact nếu và chỉ nếu S đóng và bị chặn toàn phần.

Định nghĩa 9. (tập mở)
Giả sử $S \subset X$ là tập con của không gian metric (X,d). S là tập mở nếu:

$$\forall x \in S, \exists \varepsilon > 0 \text{ sao cho}$$
$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\} \subset S.$$

1.Không gian metric

Định nghĩa 10. (Tập biên)

Giả sử $S \subset X$ là tập con của không gian metric (X,d). Điểm x $\in$ S là điểm biên của S nếu:

$\forall \varepsilon > 0$ sao cho $B(x, \varepsilon)$ chứa điểm trong X\S và điểm trong S. Tập các điểm biên của S được gọi là biên của S: ∂S

Định nghĩa 11. (miền trong)

Giả sử $S \subset X$ là tập con của không gian metric (X,d). Điểm x $\in$ S là điểm trong của S nếu:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ sao cho } B(x, \varepsilon) \subset S.$$

Tập các điểm trong của S được gọi là miền trong của S: S^o

1.Không gian metric

BT:

S là tập con đóng của không gian metric. CM: $\partial S \subset S$

S là tập con mở của không gian metric. CM: $\partial S \cap S = \varnothing$

S là tập con mở của không gian metric. CM: $S = S^o$

S là tập con đóng của không gian metric. CM: $S = S^o \cup \partial S$

.

1.Không gian metric

Định nghĩa 12. (Tập liên thông)

Không gian metric (X,d) được gọi là liên thông nếu hai tập con duy nhất đồng thời có tính đóng và mở là X và $\varnothing$

Tập con $S \subset X$ được gọi là liên thông nếu không gian metric (X,d) liên thông.

Định nghĩa 13. (Tập thông tuyến)

Giả sử $S \subset X$ là tập con của không gian metric (X,d). S được gọi là thông tuyến nếu:

Với mỗi cặp điểm x, y trong S, tồn tại hàm liên tục f:[0,1]->S từ không gian metric ([0,1], Euclidean) vào (S,d), sao cho f(0)=x và f(1)=y. Hàm f được gọi là một tuyến từ x đến y trong S.

2.Không gian metric Hausdorff

Định nghĩa 1. (*Không gian Hausdorff*)

Giả (X,d) là không gian metric đầy đủ, H(X) biểu thị không gian gồm các phần tử là các tập con Compact khác rỗng của X.

Định nghĩa 2. (*Độ đo trong không gian Hausdorff*)

Giả (X,d) là không gian metric đầy đủ. A, B $\in$ H(X).

Metric giữa A, B trong H(X) được xác định như sau

$$h(A,B) = Max\{d(A,B), d(B,A)\}$$

trong đó

$$d(A,B) = Max\{d(x,B) : x \in A\}$$

$$d(x,B) = Min\{d(x,y) : y \in B\}$$

2.Không gian metric Hausdorff

Định lý 1. (*tính đầy đủ của Không gian Hausdorff*)

Giả (X,d) là không gian metric đầy đủ, khi đó (H(X),h(d)) là không gian metric đầy đủ.

Nếu là $\{A_n \in H(X)\}$ dãy Cauchy thì

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \in H(X)$$

$$A = \{x \in X : \exists \, dãy \; Cauchy \; \{x_n \in A_n\} \to x\}$$

3. Ánh xạ co

Định nghĩa 1. (*ánh xạ co*)

Phép biến đổi f:X→X trên không gian metric (X,d) được gọi là ánh xạ co nếu:

$$\exists s, 0 \le s < 1 \; sao \; cho$$

$$d(f(x), f(y)) \le s.d(x, y) \forall x, y \in X.$$

s được gọi là hệ số co của *f*

3. Ánh xạ co

Định lý 1. (*ánh xạ co*)

Giả sử $f : X \to X$ là ánh xạ co trên không gian metric đầy đủ(X, d). Tồn tại duy nhất điểm bất động $x_f \in X$và $\forall x \in X$, dãy $\{f^{on}(x)\} \to x_f, \forall x \in X$.

$$\lim_{n\to\infty} f^{on}(x) = x_f, \forall x \in X.$$

3. Ánh xạ co

Định lý 2. (xấp xỉ điểm bất động)

Giả sử $f : X \to X$ là ánh xạ co trên không gian metric đầy đủ (X, d) với hệ số co s

Điểm bất động x_f được xấp xỉ bởi biểu thức sau:

$$d(f^{on}(x), x_f) \le \frac{s^n}{1-s} d(x, f(x), \forall x \in X.$$

3. Ánh xạ co

Định lý 3. (xấp xỉ điểm gốc bởi điểm bất động)

Giả sử $f: X \rightarrow X$ là ánh xạ co trên không gian metric đầy đủ (X, d) với hệ số co s, điểm bất động $x_f \in X$

$$d(x, x_f) \leq \frac{s}{1-s} d(x, f(x)), \forall x \in X.$$

3. Ánh xạ co

Bổ đề 1. (*ánh xạ co*)

Giả sử phép biến đổi w:X$\rightarrow$X là ánh xạ co trên không gian metric (X,d) với hệ số co s, thì ánh xạ w:H(X)$\rightarrow$H(X) được xác định bởi $w(B) = \{w(x) : x \in B, \forall x \in X\}$,

Là ánh xạ co trên (H(X),h(d)) với hệ số co s.

3. Ánh xạ co

Bổ đề 2. (*dãy ánh xạ co*)

Giả sử (X,d) là không gian metric.

Giả sử dãy $\{w_n, n = 1,2,...,N\}$ là dãy các ánh xạ co trên không gian (H(X),h(d)) (với hệ số co tương ứng s_n).

W:H(X) $\rightarrow$ H(X) được xác định bởi

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup ... w_N(B)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B), B \in H(X)$$

W là ánh xạ co với hệ số co $s = Max\{s_n : n = 1,2,...,N\}$

3. Ánh xạ co

Định lý 4. (*tập bất động trong không gian Hausdorff*)

Giả sử dãy $\{w_n, n = 1,2,...,N\}$ là dãy các ánh xạ co với hệ số co s. Phép biến đổi W:H(X)→H(X) được xác định bởi

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B), B \in H(X)$$

là ánh xạ co trên không gian metric đầy đủ (H(X),h(d))với hệ số co s. Và tồn tại duy nhất tập bất động $A \in H(X)$, thỏa

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A),$$

$$A = \lim_{n\to\infty} W^{on}(B), B \in H(X)$$

3. Ánh xạ co

Định lý 5. (*xấp xỉ tập bất động trong không gian Hausdorff*)

Giả sử dãy $\{w_n, n = 1,2,...,N\}$ là dãy các ánh xạ co với hệ số co s. Phép biến đổi $W : H(X) \to H(X)$ được xác định bởi

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B), B \in H(X)$$

A là tập bất động của W, được xấp xỉ bởi

$$h(W^{on}(B), A) \le \frac{s^n}{1-s} h(B, W(B)), \forall B \in H(X)$$

3. Ánh xạ co

Định lý 6. (*xấp xỉ tập gốc bởi tập bất động*)

Giả sử là O tập con của $H(X)$.

Giả sử dãy $\{w_n, n = 1,2,...,N\}$ là dãy các ánh xạ co với hệ số co s. Phép biến đổi $W : H(X) \to H(X)$ được xác định bởi

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B), B \in H(X)$$

A là tập bất động của W,

$$h(O, A) \le \frac{s}{1-s} h(O, W(O))$$

3. Ánh xạ co

Vd: Tạo hình Fractal dựa vào hệ hàm lặp IFS

Khảo sát hệ $\{R^2, w_n : n = 1,2,...,N\}$

$$w_i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix} = A_i x + t_i$$

p_i được liên kết với w_i

$$p_i \approx \frac{|\det \mathrm{A_i}|}{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} |\det \mathrm{A_i}|} = \frac{|a_i d_i - b_i c_i|}{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} |a_i d_i - b_i c_i|}, i = 1,2,...,N$$

3. Ánh xạ co

IFS cho tam giác Sierpinski

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.5	0	0	0.5	1	1	0.33
2	0.5	0	0	0.5	1	50	0.33
3	0.5	0	0	0.5	50	50	0.34

3. Ánh xạ co

IFS cho hình Fractal vuông

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.5	0	0	0.5	1	1	0.25
2	0.5	0	0	0.5	50	1	0.25
3	0.5	0	0	0.5	1	50	0.25
4	0.5	0	0	0.5	50	50	0.25

3. Ánh xạ co

IFS cho lá dương xỉ

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.5	0.	0	0.16	0	1	0.01
2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
4	-0.15	0.28	0.28	0.24	0	0.44	0.07

3. Ánh xạ co

Giải thuật lặp tuần tự

Giả sử $\{X; w_1, w_2, ...w_N\}$ là hệ hàm lặp IFS, $A_0 \subset R^2$

Tính $A_n = W^{on}(A)$ tuần tự bởi

$$A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{N} w_j(A_n), \quad n = 1,2,...$$

Dãy $\{A_n\}$ hội tụ đến ảnh tụ A của IFS trong không gian metric Hausdorff

3. Ánh xạ co

Giải thuật lặp tuần tự

1. Khởi động mảng s[M,M], t[M,M]
2. Khởi gán các giá trị của các ánh xạ co

```
a[1]=0.5;b[1]=0;c[1]=0;d[1]=0.5;e[1]=1;f[1]=1
a[2]=0.5;b[2]=0;c[2]=0;d[2]=0.5;e[2]=50;f[2]=1
a[3]=0.5;b[3]=0;c[3]=0;d[3]=0.5;e[3]=50;f[3]=50
```

```
3. Lấp đầy mảng t[M.M] bởi A(0)
4. Repeat
5. For i=1 to M  /tác động W vào A(n) để tạo ra A(n+1) trong s[i,j]/
6.       For j=1 to M
7.            If t[i,j]=1 then
8.               s[a[1]*i+b[1]*j+e[1], c[1]*i+d[1]*j+f[1]]=1
9.               s[a[2]*i+b[2]*j+e[2], c[2]*i+d[2]*j+f[2]]=1
10.              s[a[3]*i+b[3]*j+e[3], c[3]*i+d[3]*j+f[3]]=1
11.           End if
12.      End /for j/
13. End  /for i/
```

3. Ánh xạ co

Giải thuật lặp tuần tự

```
For i=1 to M
        For j=1 to M
              t[i,j]=s[i,j]  /Gán A(n+1) vào mảng t[i,j]/
              s[i,j] =0      /Khởi động mảng s[i,j] về 0/
              If t[i,j]=1 then
                  setpixel(i,j)  /Vẽ A(n+1)/
              End if
        End /for j/
End  /for i/
Until A(n+1)=W(A(n+1)
```

3. Ánh xạ co

Giải thuật lặp ngẫu nhiên

Giả sử $\{X; w_1, w_2, ... w_N\}$ là hệ hàm lặp IFS, với xác suất $p_i > 0$ ứng với $w_i > 0, \sum p_i = 1$.

Chọn $x_0 \in X$, xác định liên tiếp các x_n như sau:

$$x_n \in \{w_1(x_{n-1}), w_2(x_{n-1}), ... w_N(x_{n-1})\}, n = 1,2,3,...$$

Xác suất để $x_n = w_i(x_{n-1})$ là p_i

Dãy $\{x_n\}$ được xây dựng như trên hội tụ về ảnh tụ của IFS.

3. Ánh xạ co

Giải thuật lặp ngẫu nhiên

```
1. Khởi động mảng s[M,M], t[M,M]
2. Khởi gán các giá trị của các ánh xạ co
       a[1]=0.5;b[1]=0;c[1]=0;d[1]=0.5;e[1]=1;f[1]=1
       a[2]=0.5;b[2]=0;c[2]=0;d[2]=0.5;e[2]=50;f[2]=1
       a[3]=0.5;b[3]=0;c[3]=0;d[3]=0.5;e[3]=50;f[3]=50
3. x=0;y=0;numits=N              /Khởi động giá trị đầu và số lần lặp/
4. For n=1 to numits             /Lặp ngẫu nhiên/
5.      k=int(3*rnd-0.0001)+1  /Chọn một trong các số 1,2,3/
6.      newx=a[k]*x+b[k]*y+e[k];
7.      newy=c[k]*x+d[k]*y+f[k];
8.      x= newx ;
9.      y=newy;
10.     setpixel(x,y);
11. End /for  n/
```

3. Ánh xạ co

Vd: Nén ảnh dựa vào kỹ thuật Fractal

Ảnh gốc là O

Ảnh nén là $\{w_n\}$

Ảnh giải nén lý tưởng là A

Ảnh giải nén thực tế là $W(B)$