



Xử lý ảnh trên Miền Tần Số

Võ Hoài Việt

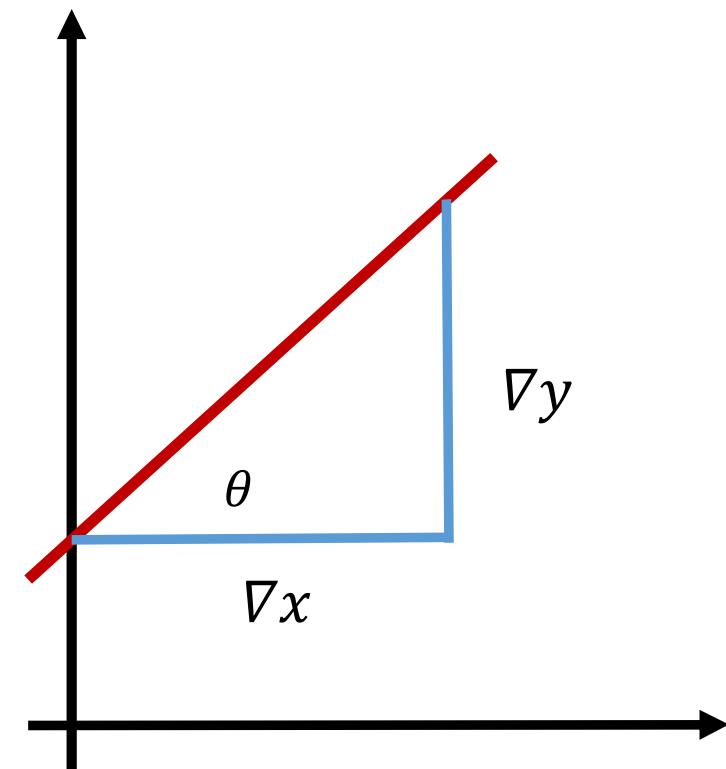
zetgoo.cs@gmail.com

Nội dung

- Kiến thức cơ sở
- Phép biến đổi Fourier?
- Lọc ảnh miền tần số

Kiến thức cơ sở

Biểu diễn hàm



Hàm tuyến tính

$$f(x) = mx + b \quad m = \Delta y / \Delta x$$

Có thể được viết lại

$$f(x) = \tan(\theta) + b$$

Mô tả trực quan của các hàm tuyến tính

- Góc
- Dịch chuyển

Làm thế nào để biểu diễn hàm tổng quát?

Phân tích cơ sở

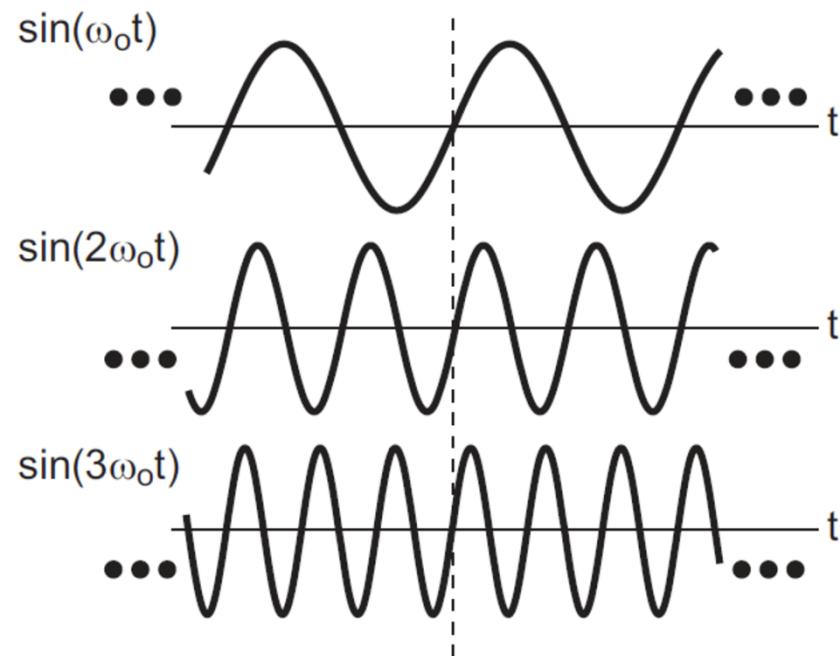
- Viết một hàm như là tổng có trọng số của các hàm cơ sở

$$f(x) = \sum w_i B_i(x)$$

- Tập hàm cơ sở tốt là gì?
- Xác định trọng số như thế nào?

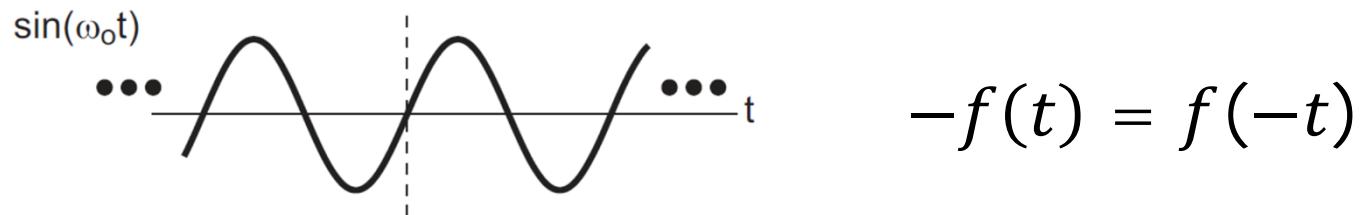
Hàm sóng Sin

- Sử dụng hàm sóng Sin của các tần số khác nhau là các hàm cơ sở?

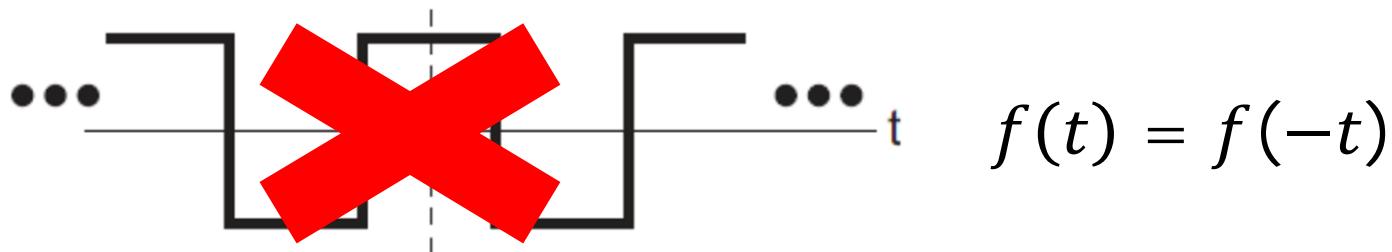


Giới hạn của hàm Sin

- Hàm Sines là hàm lẻ/ bất đối xứng:

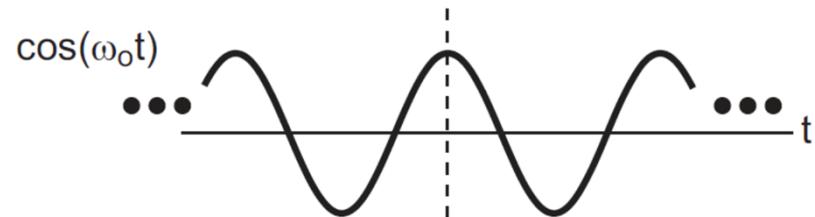


- Hàm Sine không thể tạo các hàm chẵn:



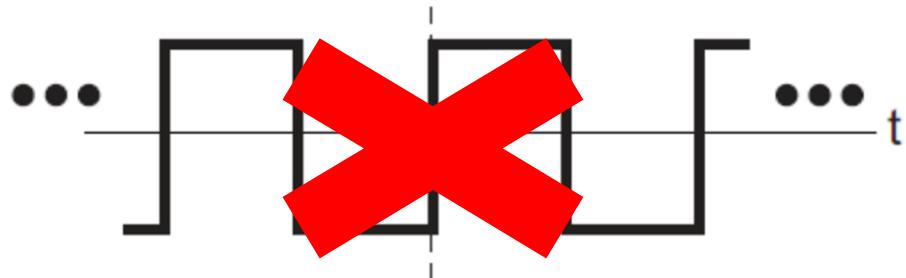
Giới hạn của hàm Cosines

- Cosines là hàm chẵn/ hàm đối xứng:



$$f(t) = f(-t)$$

- Hàm cơ bản Cosine không thể tạo các hàm lẻ:

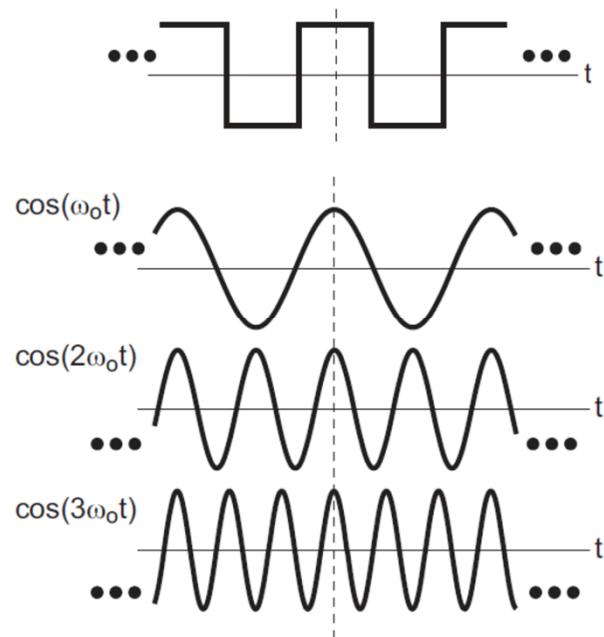


$$-f(t) = f(-t)$$

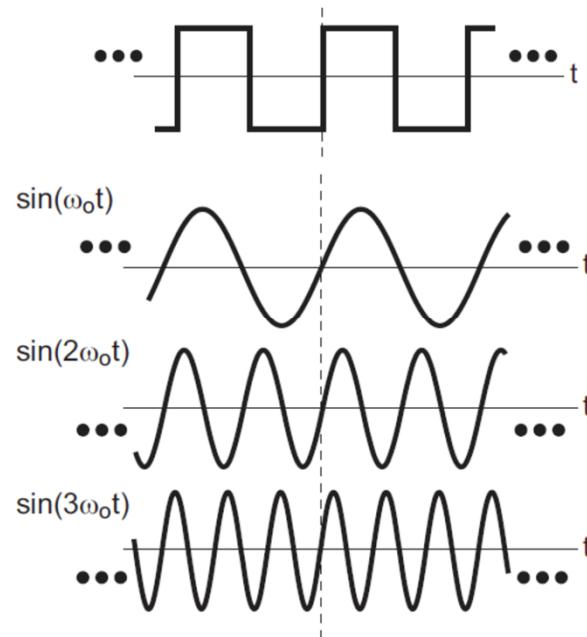
Kết hợp hàm Cosines và Sines

- Cho phép tạo cả hàm chẵn và lẻ với nhiều tổ hợp khác nhau:

Chẵn



Lẻ



Tại sao dùng Sines và Cosines?

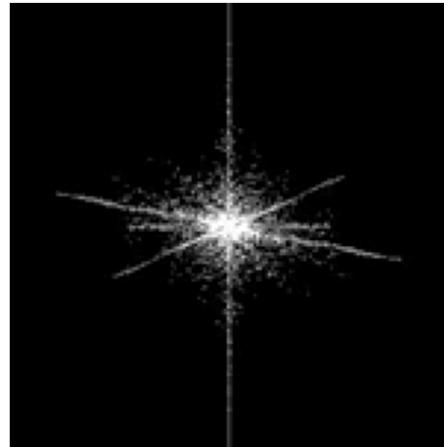
- Biểu diễn hàm bởi tổ hợp của các hàm cơ bản theo các tần số khác nhau
- Mô tả trực quan của tín hiệu/ ảnh
 - Bao nhiêu nội dung tần số cao?
 - Nội dung tần số thấp như thế nào?
- “Ngôn ngữ” của xử lý ảnh:
 - Khử nhiễu bằng cách loại bỏ nội dung tần số cao
 - Giải thích hiện tượng lấy mẫu hoặc nhận thức

Hàm Euler

- Phép tính

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

- j là phần ảo của một số phức

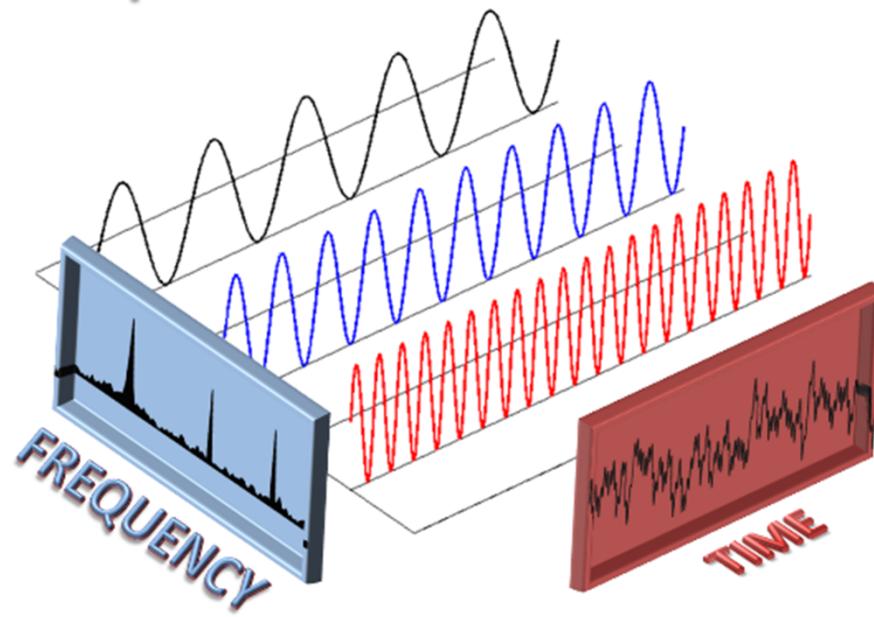


Lý Thuyết Phép Biến Đổi Fourier

Phép biến đổi trong miền tần số

Phép biến đổi Fourier

- **Phép biến đổi** là công cụ tách một dạng sóng (hàm hoặc tín hiệu) thành một biểu diễn thay thế được đặc trưng bởi hàm sines và cosines.



Phép biến đổi Fourier

- Hầu như mọi thứ trên thế giới đều có thể được mô tả thông qua dạng sóng - một hàm của thời gian, không gian hoặc một số biến khác
 - sóng âm, trường điện từ, độ cao của một ngọn đồi so với vị trí, giá cổ phiếu theo thời gian



- Phép biến đổi Fourier cho thấy rằng bất kỳ dạng sóng nào cũng có thể được viết lại dưới dạng tổng của các hàm hình sin

Phép biến đổi Fourier

- Joseph Fourier (1768 – 1830), nhà toán học và vật lý học người Pháp
- *La Théorie Analytique de la Chaleur (The Analytic Theory of Heat)*, 1822
 - Ứng dụng chuỗi Fourier cho bài toán truyền nhiệt và chấn động



https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier

Chuỗi Fourier

- Biểu diễn hàm tuần hoàn $f(t)$ bằng tổng các hàm sinusoidal có tần số và hệ số khác nhau

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$$

- $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} dt$ với $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- T : chu kỳ của hàm f
- Công thức Euler: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$, $j = \sqrt{-1}$

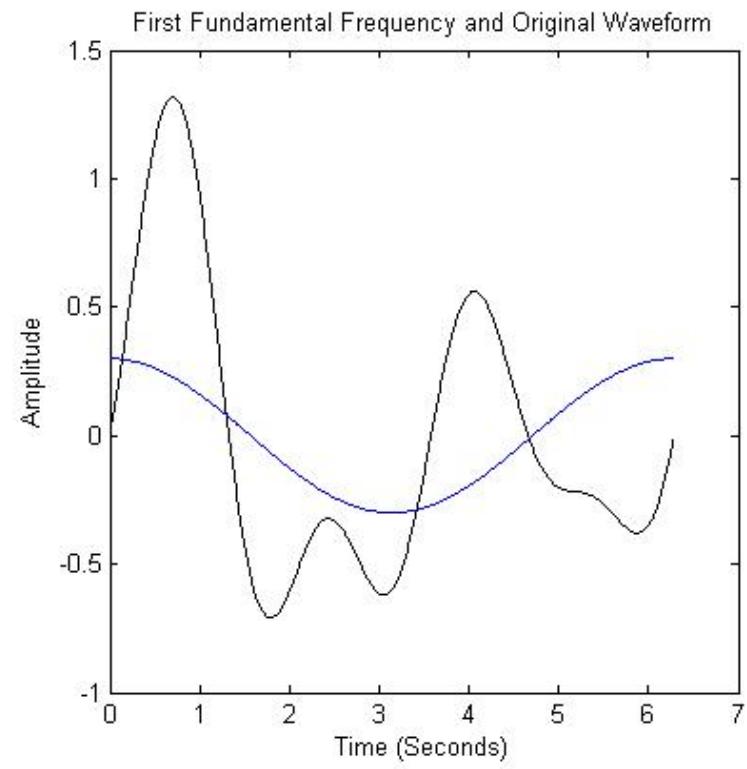
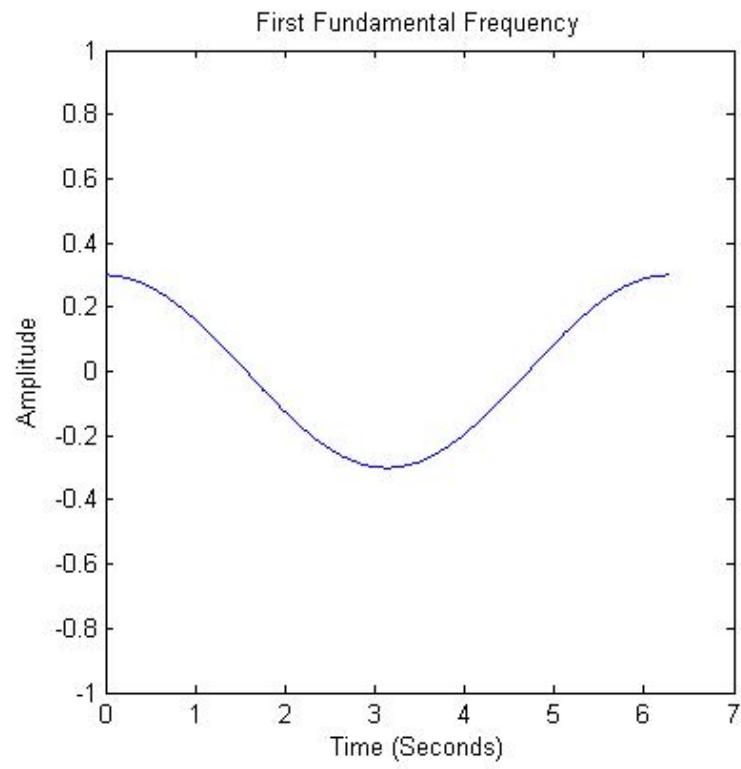
Chuỗi Fourier



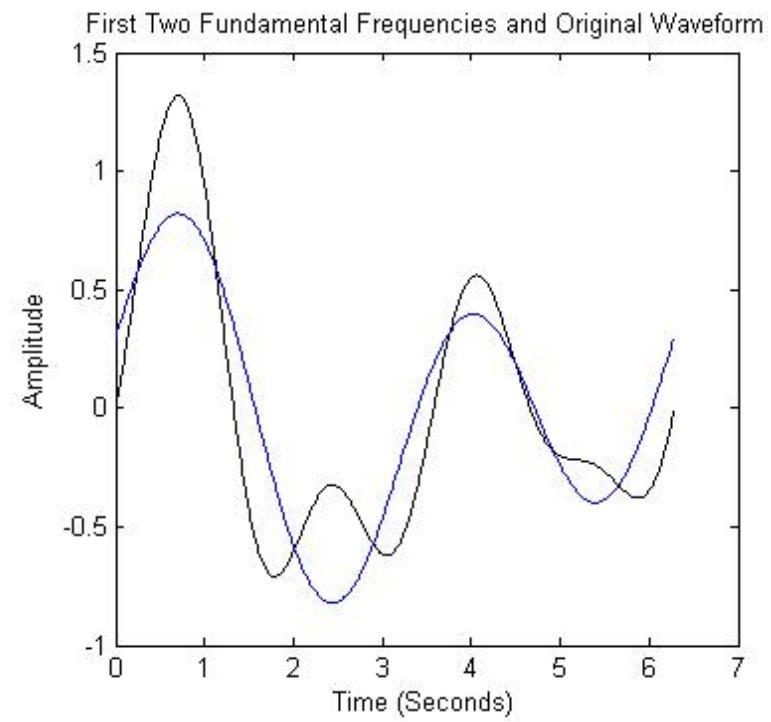
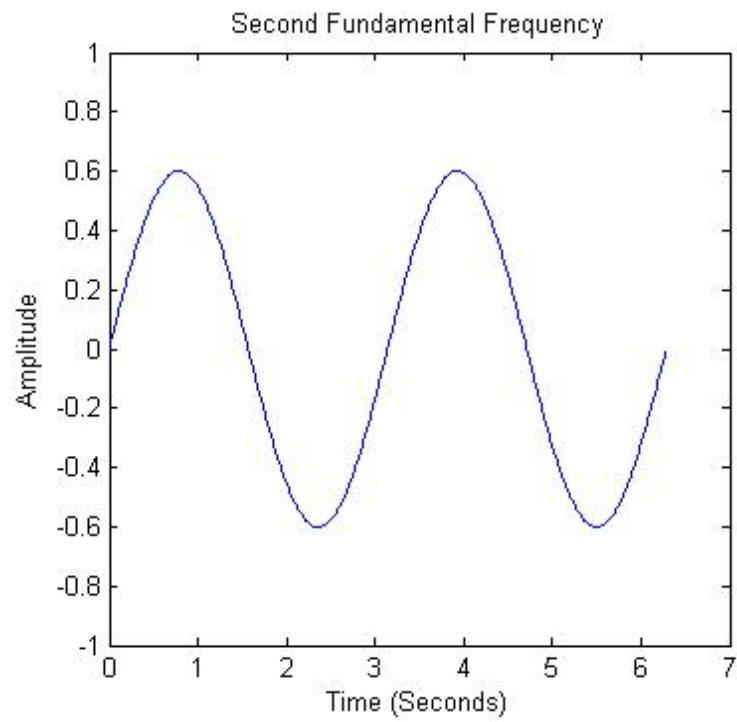
Chuỗi Fourier

- Mở rộng chuỗi Fourier cho hàm $f(t)$ không tuần hoàn và có diện tích dưới đường cong xác định

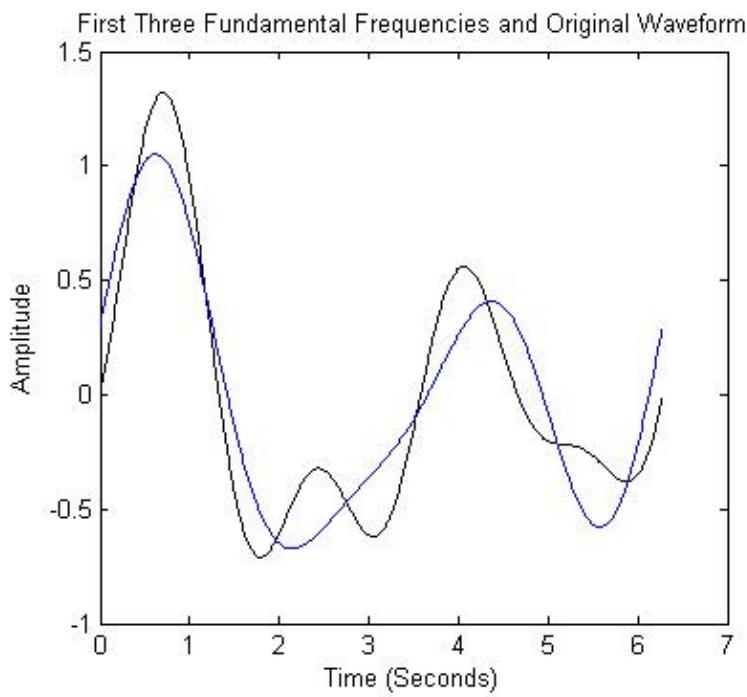
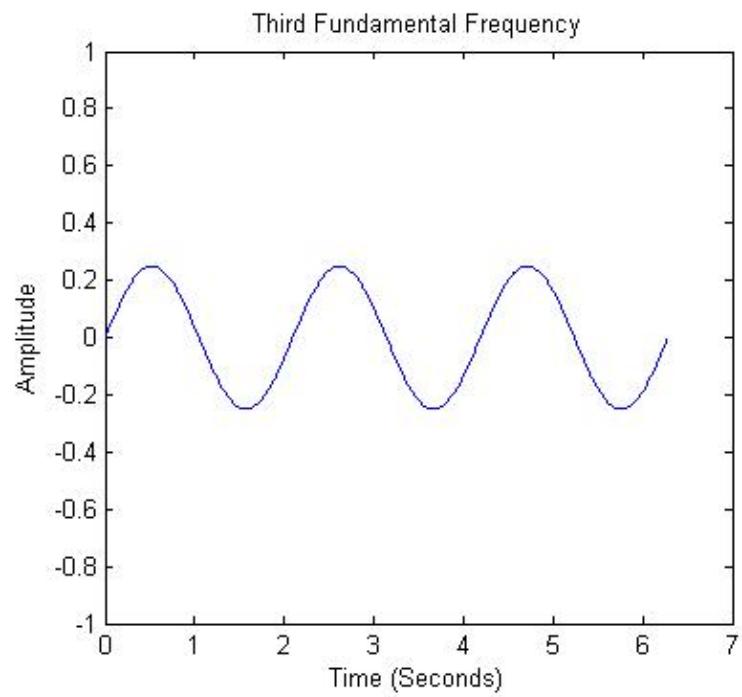
$$\mathcal{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$



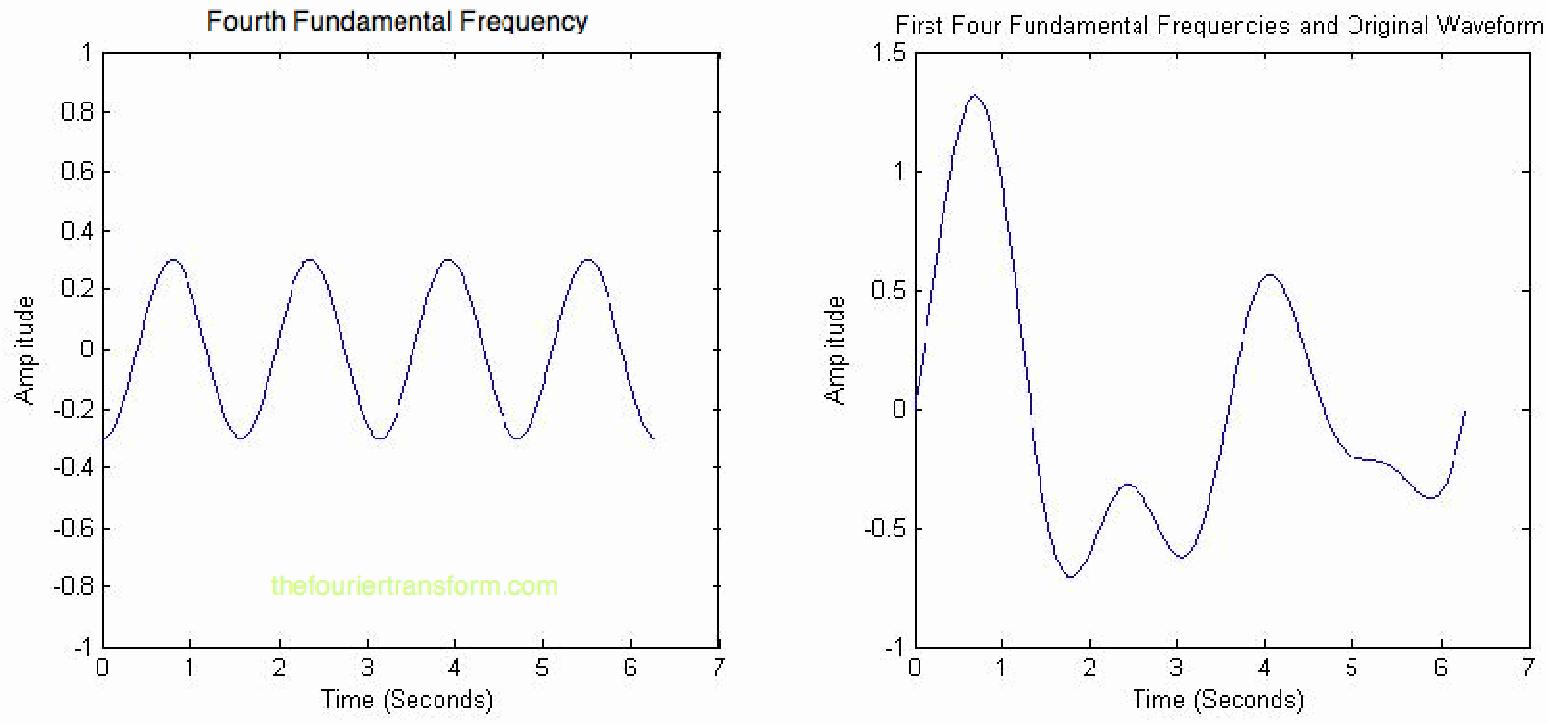
Thành phần đầu tiên là một sóng sinusoidal
có chu kỳ $T_1 = 2\pi$ và độ lớn 0.3



Thành phần thứ hai có chu kỳ $T_2 = T_1/2$



Thành phần thứ ba có chu kỳ $T_3 = T_1/3$

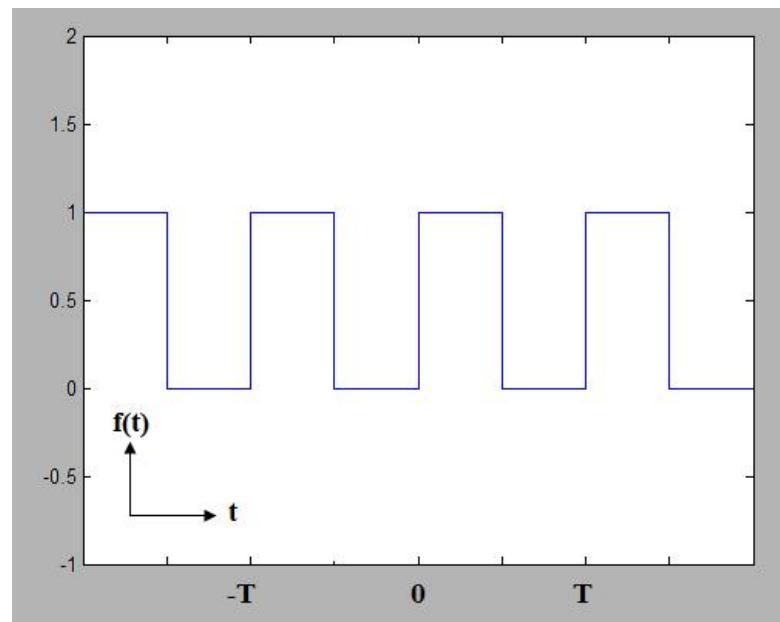


Thành phần thứ tư có chu kỳ $T_4 = T_1/4$

Hàm tuần hoàn

- Hàm f là tuần hoàn với chu kỳ cơ bản T nếu

$$f(t + T) = f(t), \quad \forall t$$



Chuỗi Fourier – Hệ số thực

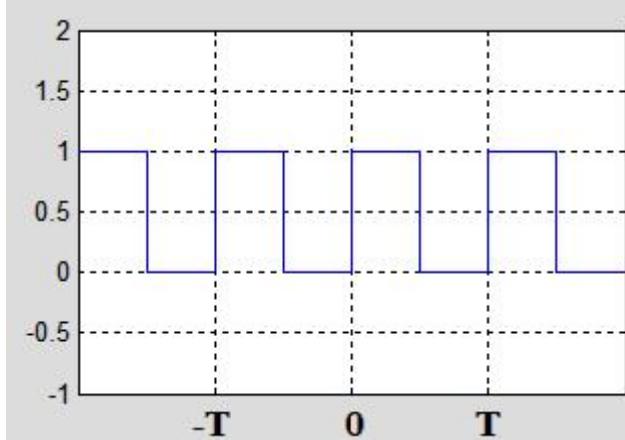
- Chuỗi Fourier với chu kỳ T

$$\begin{aligned} g(t) &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \end{aligned}$$

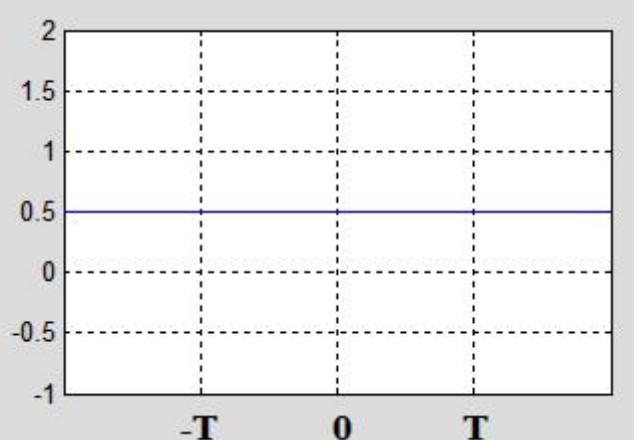
- a_m, b_n : hệ số của chuỗi Fourier

Chuỗi Fourier – Hệ số thực

- Ước lượng với 1 số hạng: $g(t) = a_0$
 - $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$: giá trị trung bình của hàm f



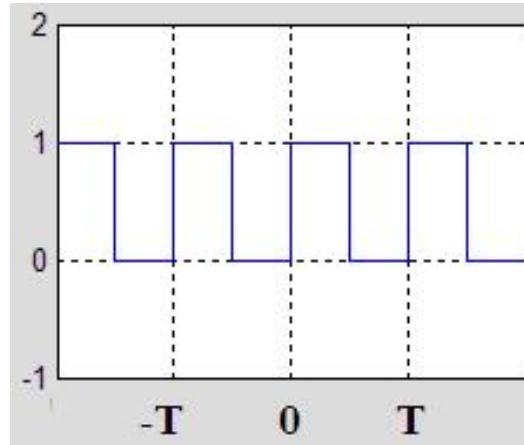
Dạng sóng vuông



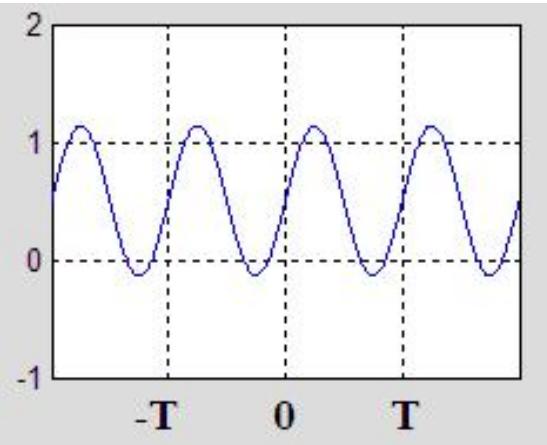
Mở rộng 1 số hạng (hằng)

Chuỗi Fourier – Hệ số thực

- Ước lượng với 2 số hạng: $g(t) = a_0 + b_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$
 - $b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi t/T) dt \quad (b_1 = \frac{2}{\pi})$



Dạng sóng vuông



Mở rộng 2 số hạng

Chuỗi Fourier – Hệ số thực

- Giá trị tối ưu cho a_m và b_n

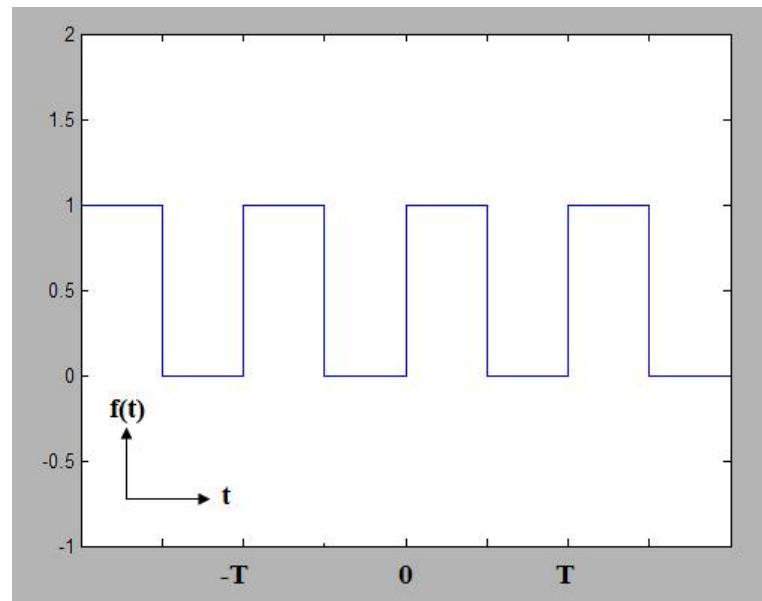
$$\bullet a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

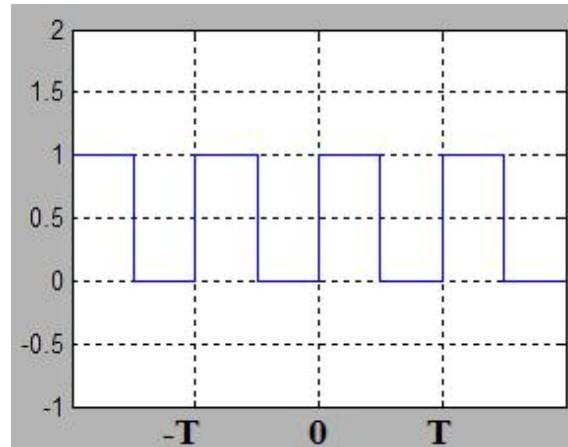
$$\bullet a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi m/T) dt$$

$$\bullet b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi n/T) dt$$

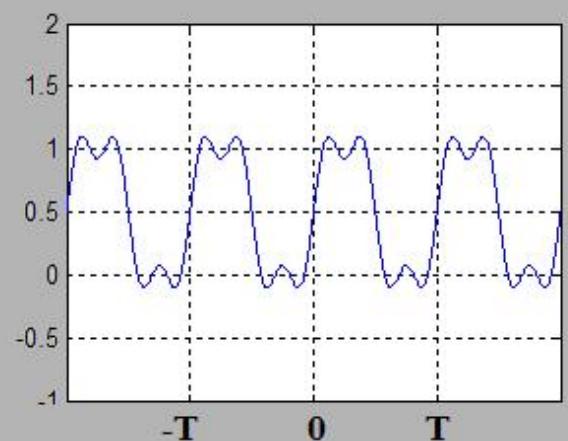
Chuỗi Fourier – Hệ số thực

- $a_0 = \frac{1}{2}$
- $a_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots$
- $b_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi n}, & n lẻ \\ 0, & n chẵn \end{cases}$

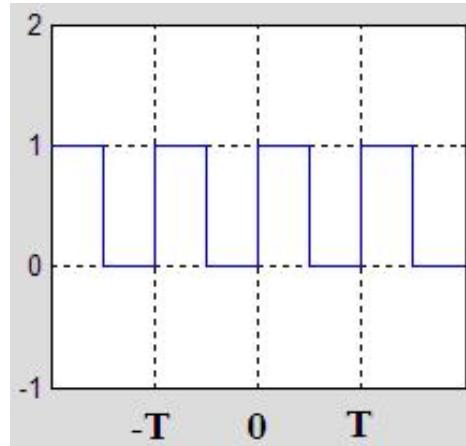




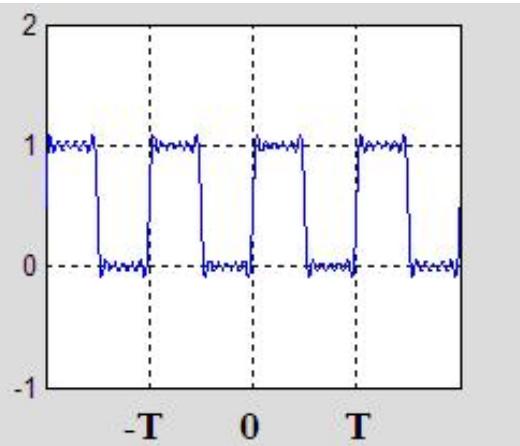
Dạng sóng vuông



Mở rộng 3 số hạng



Dạng sóng vuông



Mở rộng 7 số hạng

Chuỗi Fourier – Hệ số phức

- Chuỗi Fourier với chu kỳ T

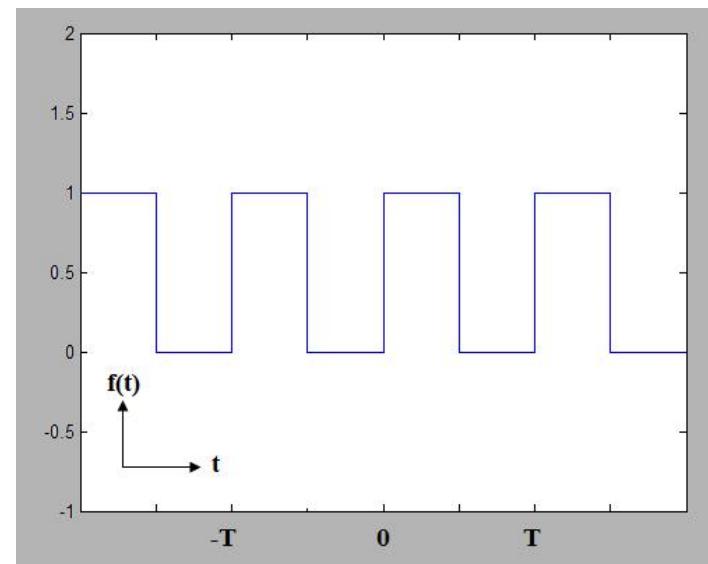
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

$$\bullet c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt \text{ với } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\bullet \text{Công thức Euler: } e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta, \quad j = \sqrt{-1}$$

Chuỗi Fourier – Hệ số phức

- $c_0 = \frac{1}{2}$
- $c_n = \frac{1}{j\pi n}, n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$
- $c_n = 0, n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$



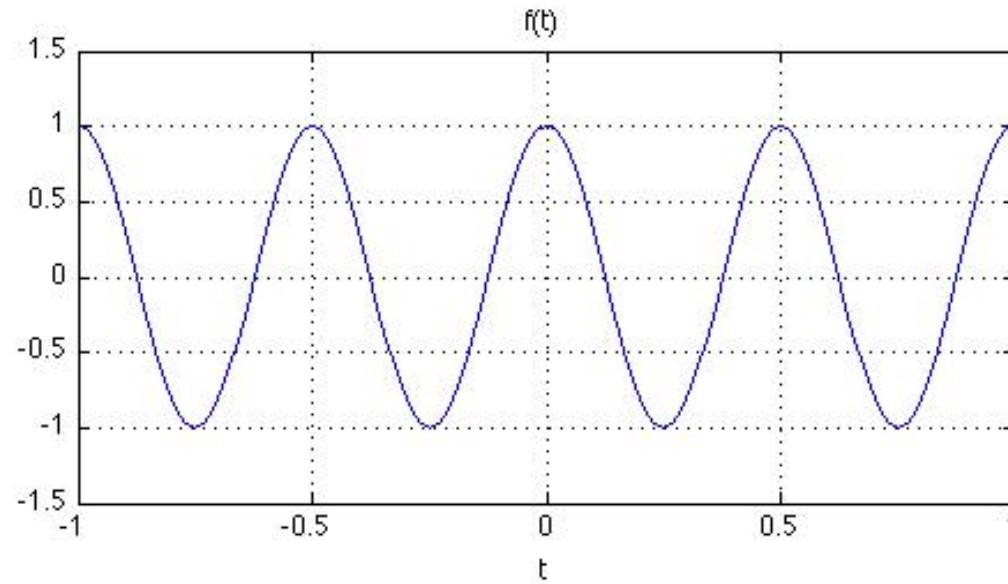
Chuỗi Fourier – Hệ số phức

- Mặc dù hệ số Fourier là số phức, hàm hợp $g(t)$ sẽ hoàn toàn là số thực nếu

$$c_n^* = c_{-n}$$

- Dấu * biểu diễn thành phần hợp phức (complex conjugate)

Chuỗi Fourier – Hệ số phức



$$f(t) = \cos(4\pi t)$$

$$T = 0.5$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} dt = 2 \int_0^{0.5} \cos(4\pi t) e^{ji4\pi nt} dt$$

Hàm cosine được viết lại theo công thức Euler: $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$

$$c_n = \int_0^{0.5} e^{j4\pi t(1-n)} dt + \int_0^{0.5} e^{-j4\pi t(n+1)} dt$$

Xét vế trái:

$$\int_0^{0.5} e^{j4\pi t(1-n)} dt = \frac{e^{j4\pi t(1-n)}}{j4\pi(1-n)} \Big|_0^{0.5} = \frac{e^{j2\pi(1-n)} - 1}{j4\pi(1-n)} = 0, \quad n \neq 1$$

$$c_1 = \int_0^{0.5} e^{j4\pi t(1-1)} dt = \int_0^{0.5} 1 dt = 0.5$$

Phân tích tương tự cho vé phải:

$$\int_0^{0.5} e^{-j4\pi t(n+1)} dt = 0, \quad n \neq -1$$

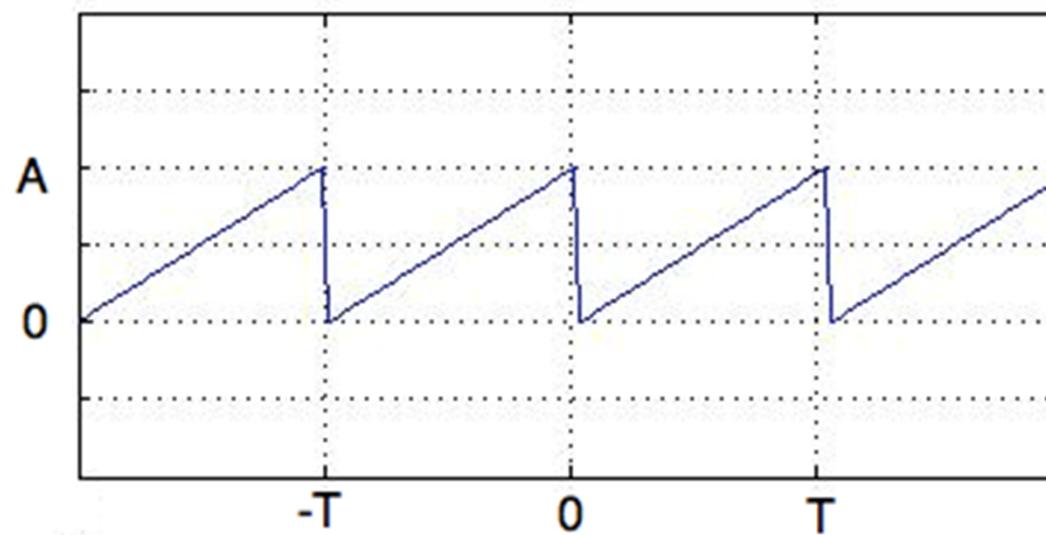
$$c_{-1} = 0.5$$

Mọi hệ số bằng 0 trừ trường hợp $n = 1$ và $n = -1$. Như vậy, chuỗi Fourier là

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}} = c_1 e^{j\frac{2\pi t}{T}} + c_{-1} e^{-j\frac{2\pi t}{T}} \\ &= 0.5(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) \\ &= \cos(4\pi t) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Chuỗi Fourier $g(t)$ thể hiện chính xác hàm cần biểu diễn $f(t)$

Chuỗi Fourier – Hệ số phức



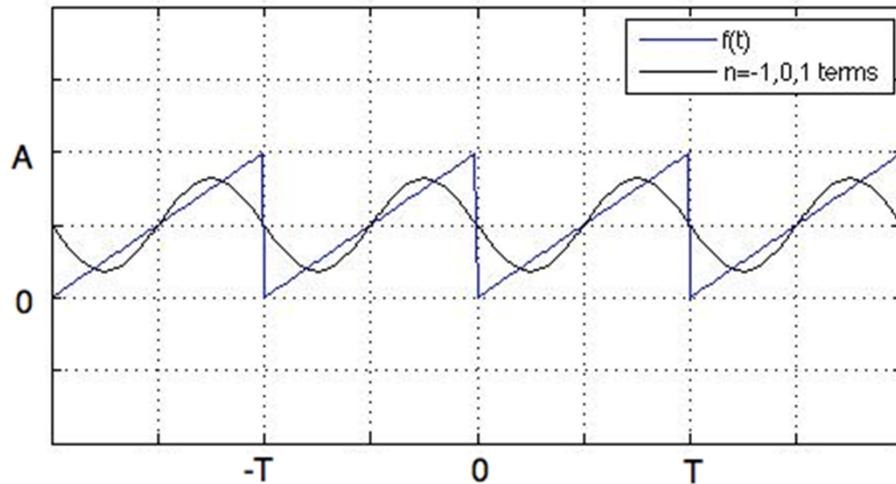
$$f(t) = A \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} dt = \frac{A}{T^2} \int_0^T t e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} dt \\
&= \frac{A}{T^2} \left[\left\{ \frac{tT}{-j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} + \frac{T^2}{(2\pi n)^2} e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} \right\} \right]_0^T
\end{aligned}$$

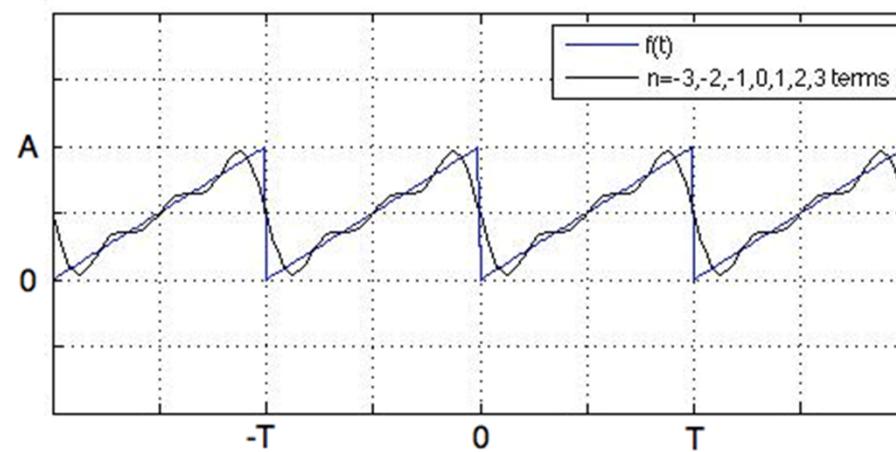
Do $e^{-j2\pi n} = 1$ nên $c_n = \frac{A}{T^2} \left[\frac{T^2}{-j2\pi n} \right] = \frac{jA}{2\pi n}, \quad n \neq 0$

$$c_0 = \frac{A}{2}$$

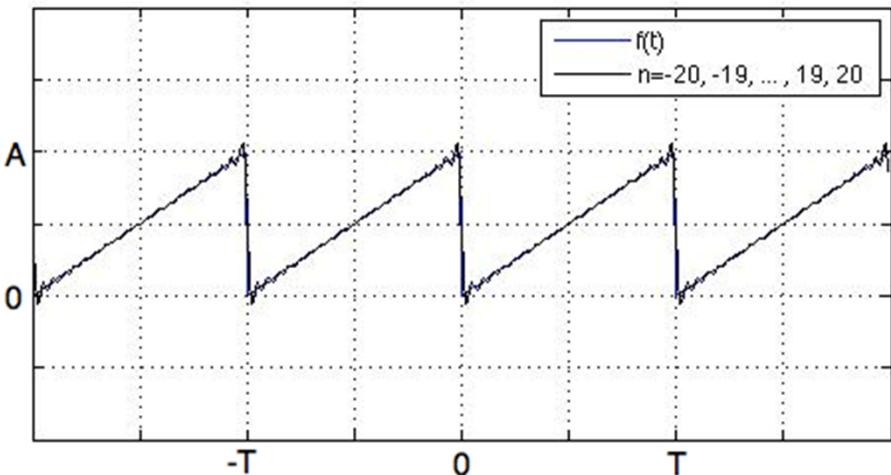
Thế các hệ số c_n vào công thức chuỗi Fourier: $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}$



Hàm số với 3 hệ số Fourier
 $n = -1, 0, 1$

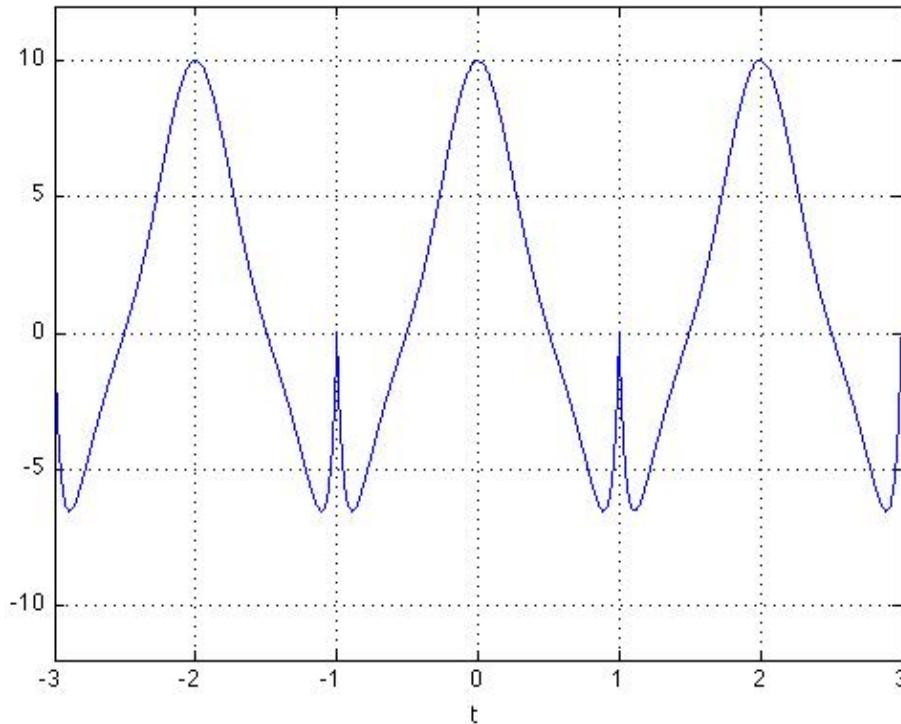


Hàm số với 5 hệ số Fourier
 $n = -2, -1, 0, 1, 2$



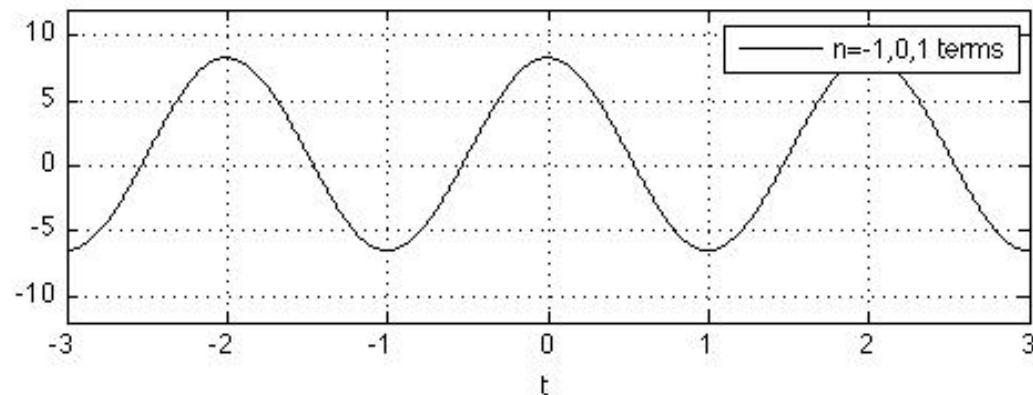
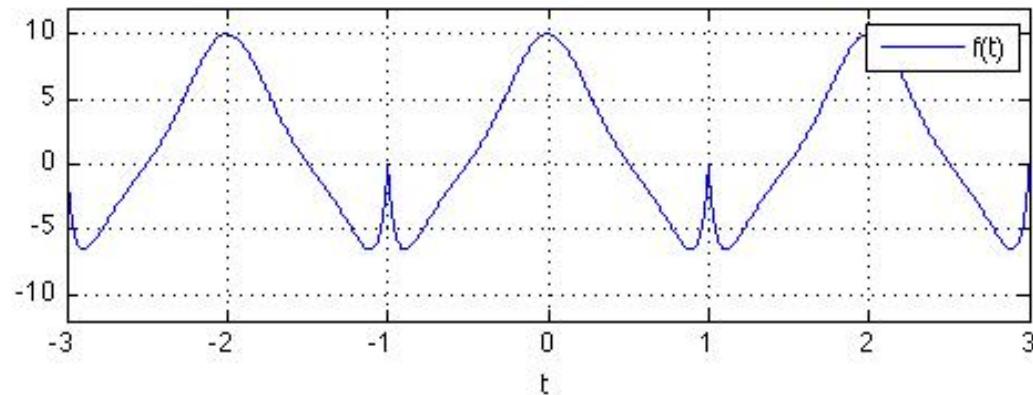
Hàm số với 20 hệ số Fourier
 $n = -20, -19, \dots, 19, 20$

Chuỗi Fourier cho hàm phức



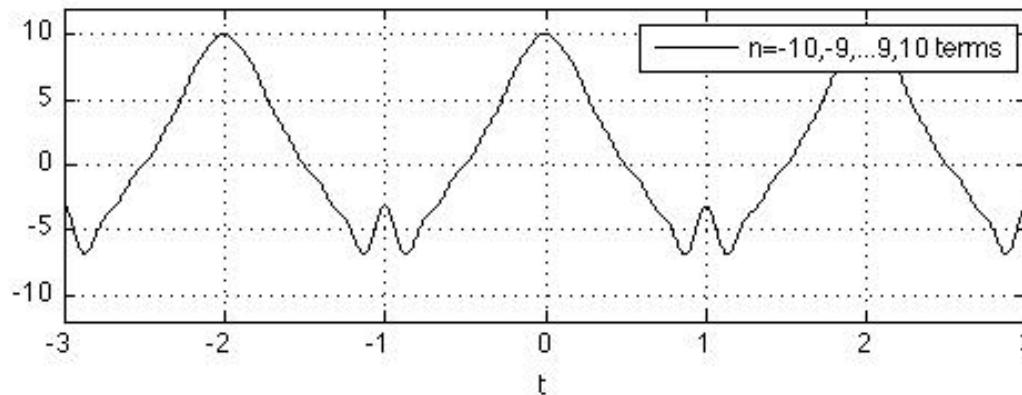
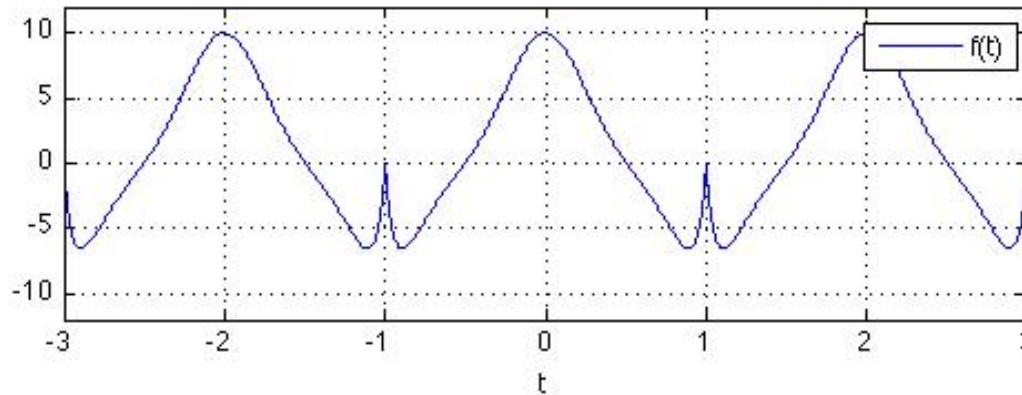
$$f(t) = \frac{(t-1)(t+1)(2t)^4}{\cos(1.4t)} + 10e^{-9t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

Chuỗi Fourier cho hàm phức



Hàm gốc (trên) và chuỗi Fourier với 3 hệ số (dưới)

Chuỗi Fourier cho hàm phức



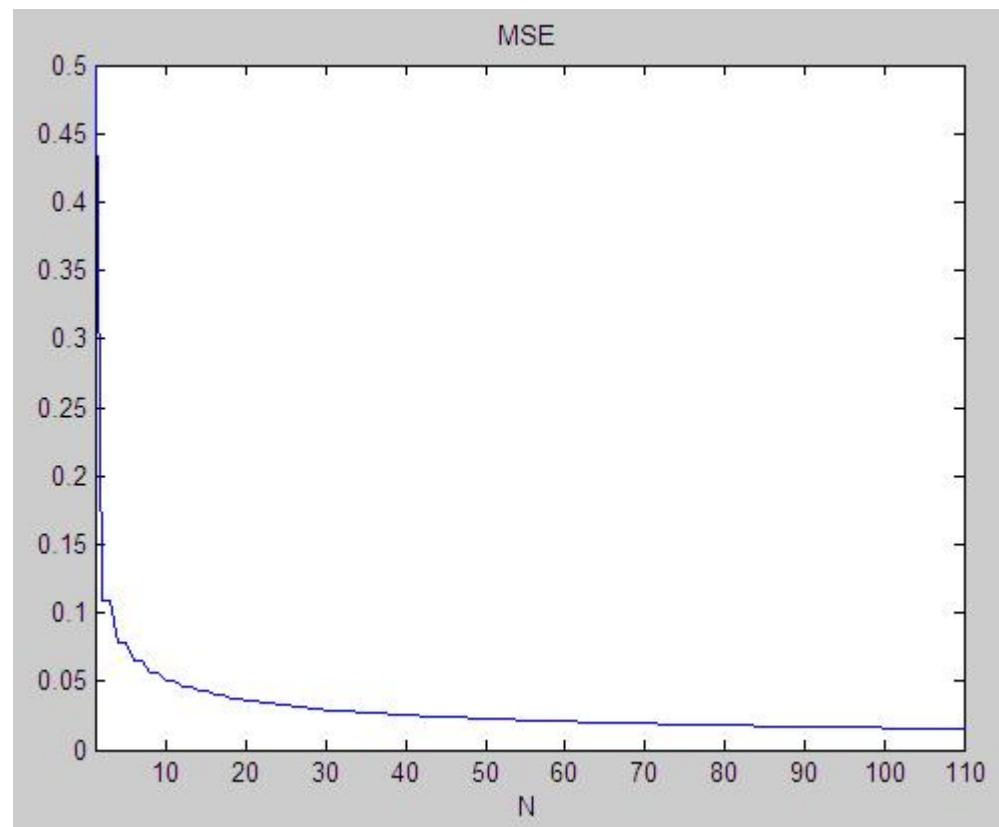
Hàm gốc (trên) và chuỗi Fourier với 21 hệ số (dưới)

Mean Squared Error (MSE)

- Gọi $g_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}}$ là chuỗi Fourier có $2N + 1$ hệ số
- $mse(N) = \|f(t) - g_N(t)\|$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{\int_0^T |f(t) - g_N(t)|^2 dt} \\&= \sqrt{\int_0^T \left| f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}} \right|^2 dt}\end{aligned}$$

Mean Squared Error (MSE)



Biến đổi Fourier liên tục

Biến đổi Fourier thuận

- Biến đổi Fourier thuận của hàm $g(t)$

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

- $G(\mu)$ cho biết năng lượng mà $g(t)$ chứa tại tần số μ , được gọi là **phổ** của g

Biến đổi Fourier nghịch

- Biến đổi Fourier nghịch phục hồi g từ G

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(\mu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu = g(t)$$

- $g(t)$ và $G(f)$ tạo thành cặp biến đổi Fourier

$$g \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G$$

Tính chất của biến đổi Fourier

- Tính tuyến tính (linearity)

$$\mathcal{F}\{c_1g(t) + c_2h(t)\} = c_1G(\mu) + c_2H(\mu)$$

- c_1, c_2 : hằng số bất kỳ (số thực hoặc số phức)
- Tính dịch chuyển (shift property)

Nếu dịch chuyển $g(t)$ theo thời gian một lượng hằng số a , hàm sẽ có cùng độ lớn phổ, $G(\mu)$

$$\mathcal{F}\{g(t - a)\} = e^{-j2\pi\mu a}G(\mu)$$

Tính chất của biến đổi Fourier

- Tính tỷ lệ (scaling property)

Nếu lấy tỷ lệ $g(t)$ theo thời gian bằng một hằng số c khác 0, ký hiệu $g(ct)$, biến đổi Fourier sẽ là

$$\mathcal{F}\{g(ct)\} = \frac{\mathbf{G}\left(\frac{\mu}{c}\right)}{|c|}$$

- Tính đạo hàm (derivative property):

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} = j2\pi\mu \cdot \mathbf{G}(\mu)$$

Tính chất của biến đổi Fourier

- Tính chất tích chập (convolution)

Gọi tích chập của $g(t)$ và $h(t)$ theo thời gian là

$$g(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Biến đổi Fourier của tích chập của $g(t)$ và $h(t)$ là

$$\mathcal{F}\{g(t) \star h(t)\} = G(\mu)H(\mu)$$

Tính chất của biến đổi Fourier

- Tính điều biến (modulation property)

Một hàm được gọi là “điều biến” bởi hàm khác nếu nhân chúng với nhau theo thời gian

$$\mathcal{F}\{g(t) h(t)\} = G(\mu) \star H(\mu)$$

- Tính đối ngẫu (Duality)

$$\mathcal{F}\{G(t)\} = g(-\mu)$$

Tính chất của biến đổi Fourier

- Định lý Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\mu)|^2 d\mu$$

- Tích phân của bình phương độ lớn của hàm là năng lượng của hàm
- Năng lượng của $g(t)$ bằng năng lượng chứa trong $G(\mu)$

Phép biến đổi Fourier rời rạc

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Đây là biến đổi Fourier cho tín hiệu chỉ biết tại những điểm lấy mẫu cách nhau chu kỳ T
- Gọi $g(t)$ là tín hiệu gốc ở dạng liên tục. Biến đổi Fourier của $g(t)$ là

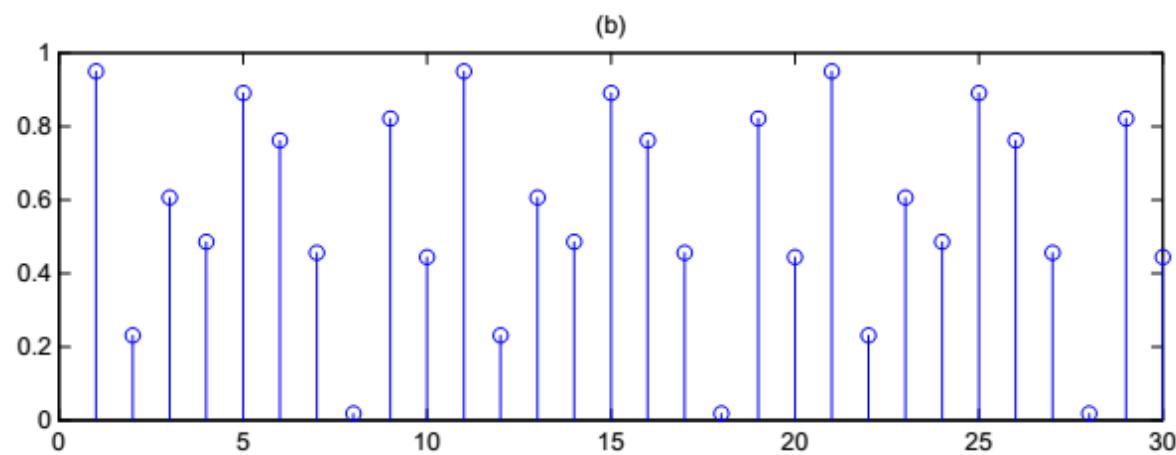
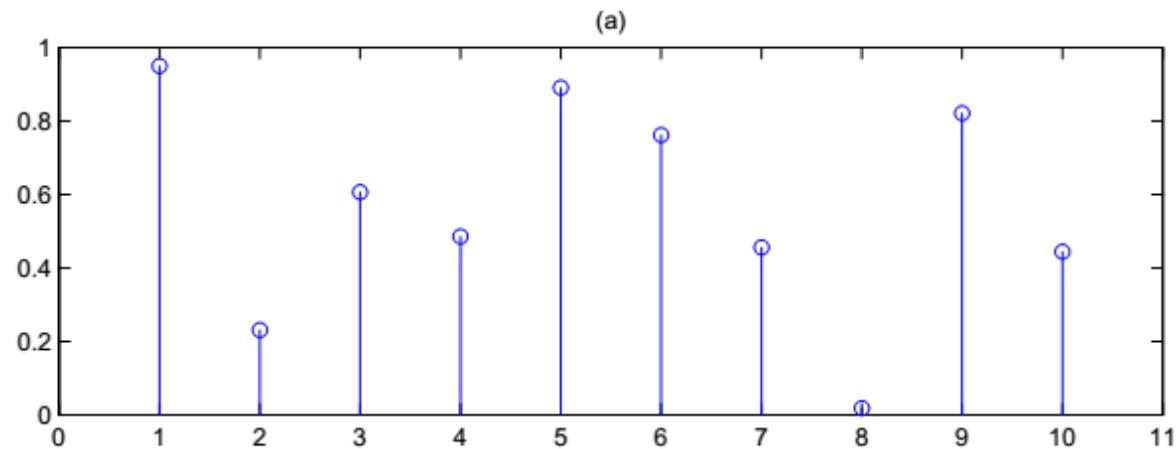
$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi\mu t} dt$$

Biến đổi Fourier rời rạc

- Lấy N mẫu trên $g(t)$: $g_0, g_1, g_2, \dots, g_k, \dots, g_{N-1}$
- Mỗi mẫu g_k là một xung có diện tích g_k
- $G\{\mu\} = \int_0^{(N-1)T} g(t)e^{-j\omega t} dt$, với $\omega = 2\pi\mu$
$$= g_0e^{-j0} + g_1e^{-j\omega T} + \dots + g_ke^{-j\omega kT} + \dots + g_{N-1}e^{-j\omega(N-1)T}$$
$$= \sum_0^{N-1} g_k e^{-j\omega kT}$$

Biến đổi Fourier rời rạc

- Do số lượng điểm dữ liệu đầu vào hữu hạn, DFT xem như dữ liệu có tính tuần hoàn
 - Tức là g_N đến g_{2N-1} cũng giống như g_0 đến g_{N-1}



(a) Chuỗi gồm $N = 10$ mẫu. (b) Tính tuần hoàn hoàn ngầm định trong DFT

Biến đổi Fourier rời rạc

- Phương trình DFT được đánh giá tại tần số cơ bản và điểm điều hòa ($\omega = 0$)
 - $\omega = 0, \frac{2\pi}{NT}, \frac{2\pi}{NT} \times 2, \dots, \frac{2\pi}{NT} \times n, \dots, \frac{2\pi}{NT} \times (N - 1)$
- Như vậy, DFT \mathcal{F}_n của chuỗi g_k là

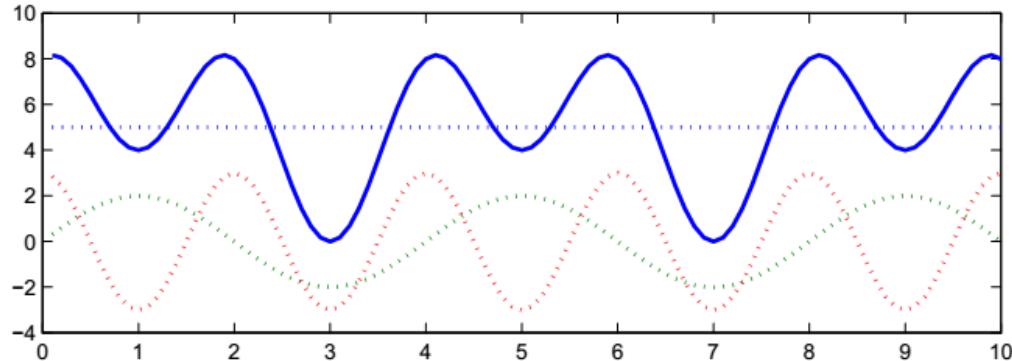
$$\mathcal{F}_n\{g_k(t)\} = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, n = 0, \dots, N-1$$

Biến đổi Fourier rời rạc

- Phương trình DFT viết theo dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & \cdots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \cdots & W^{N-2} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & \cdots & W^{N-3} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & W^{N-1} & W^{N-2} & W^{N-3} & \cdots & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{pmatrix}$$

- $W = e^{-j2\pi/N}$ và $W = W^{2N} etc. = 1$



$$g(t) = 5 + 2 \cos(2\pi t - 90^\circ) + 3 \cos 4\pi t$$

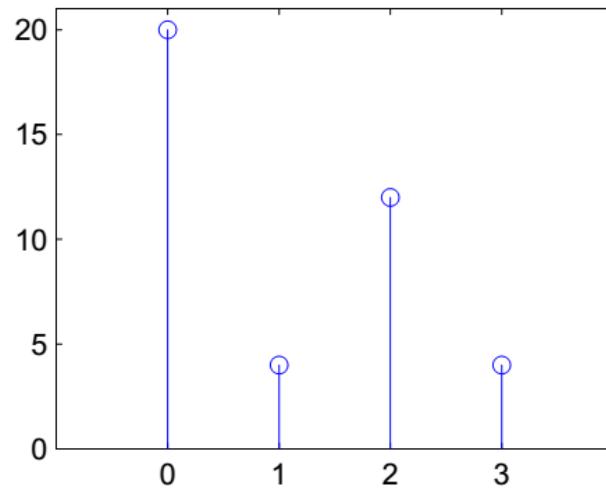
Lấy mẫu $g(t)$ 4 lần/giây từ $t = 0$ đến $t = 3/4$. Đặt $t = kTs = k/4$
Giá trị của các mẫu rời rạc là:

$$g_k = 5 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}k - 90^\circ\right) + 3 \cos \pi k$$

Tức là $g_0 = 8, g_1 = 4, g_2 = 8, g_3 = 0, (N = 4)$

Như vậy, $\mathcal{F}_n\{g(t)\} = \sum_0^3 g_k e^{-j\frac{\pi}{2}nk} = \sum_0^3 g_k (-j)^{nk}$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -i4 \\ 12 \\ i4 \end{pmatrix}$$



Biến đổi Fourier rời rạc

- Biến đổi DFT nghịch của $\mathcal{F}_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

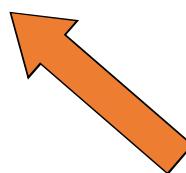
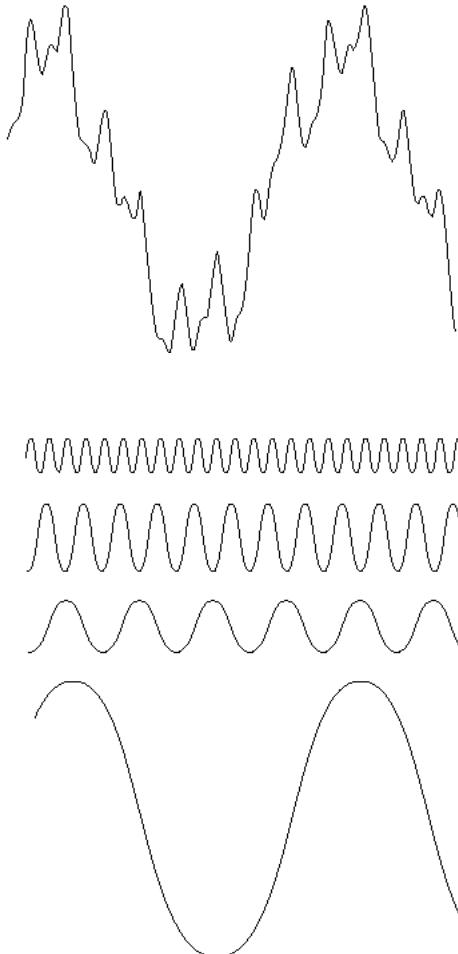
là

$$g_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{F}_n e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

- Ma trận nghịch bằng $1/N$ lần phần bù phức của ma trận gốc (đối xứng)

Liên hệ phép biến đổi Fourier và Ảnh Số

Chuỗi Fourier



Bất kỳ một tín hiệu tuần hoàn có thể
được xem như là **tổng trọng số** của các
tín hiệu sinusoidal với các tần số khác
nhau

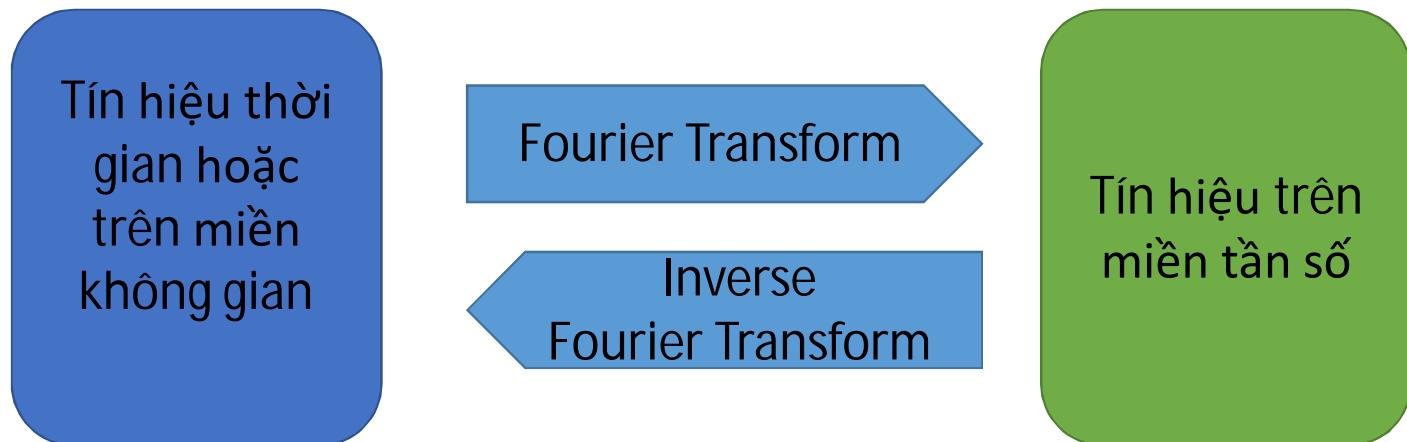


Miền tần số: xem tần số
như là một biến độc lập



Biến đổi Fourier

- Tín hiệu thời gian hoặc trên miền không gian được phân tích thành tần số và ngược lại



Biến đổi Fourier 1 chiều

- Trường hợp liên tục

$$\mathcal{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mu) e^{j2\pi\mu x} d\mu$$

- Trường hợp rời rạc

$$\mathcal{F}_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$
$$f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathcal{F}_m e^{j2\pi mn/M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

Biến đổi Fourier 1 chiều

- $\mathcal{F}(\mu)$ có thể biểu diễn thành

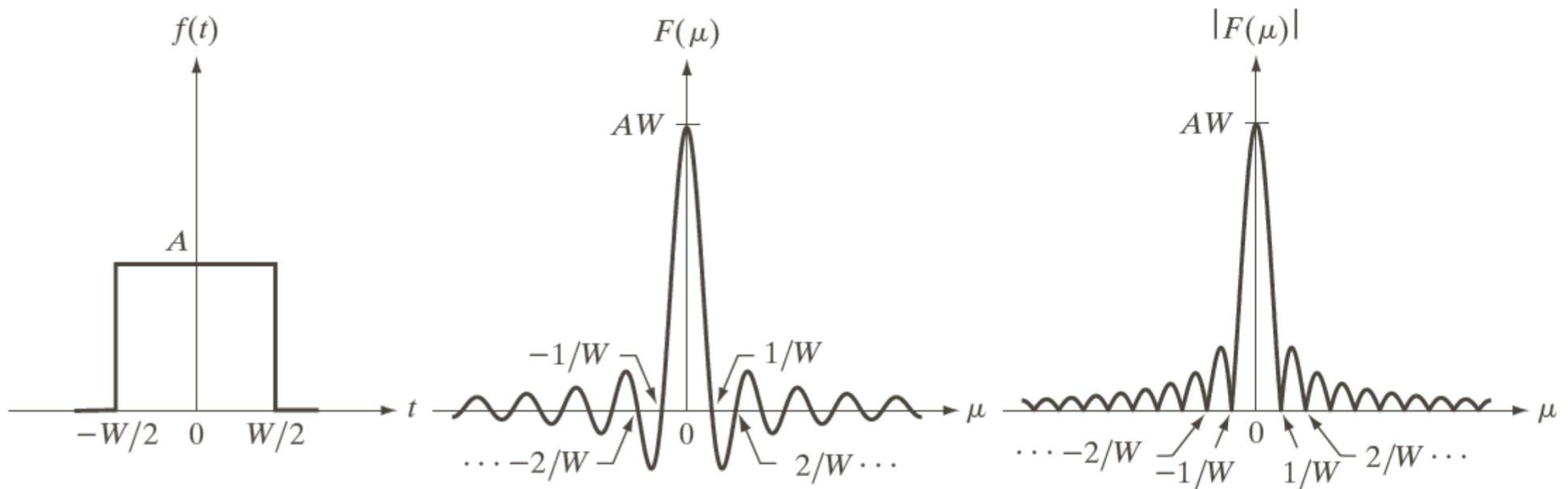
$$c = R(\mu) + jI(\mu)$$

hoặc $\mathcal{F}(\mu) = |\mathcal{F}(\mu)|e^{-j\phi(\mu)}$

- Độ lớn (Magnitude) (Fourier spectrum) $|\mathcal{F}(\mu)| = \sqrt{R(\mu)^2 + I(\mu)^2}$
- Góc lệch pha $\phi(\mu) = \arctan\left(\frac{I(\mu)}{R(\mu)}\right)$

a | b | c

- a. Hàm hộp có chiều rộng W
- b. Biến đổi Fourier của a.
- c. Phổ Fourier của a.



Quan hệ giữa Δt và $\Delta\mu$

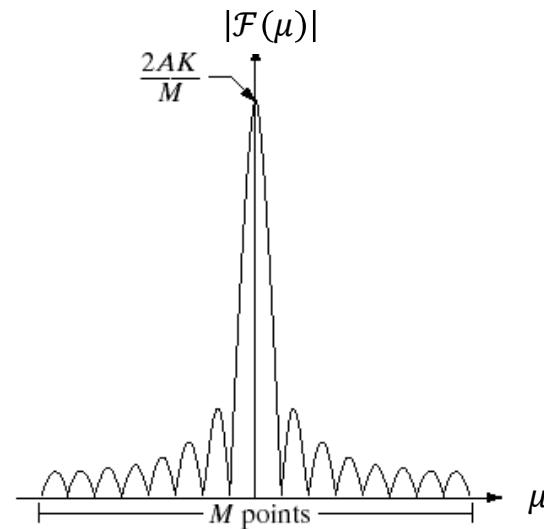
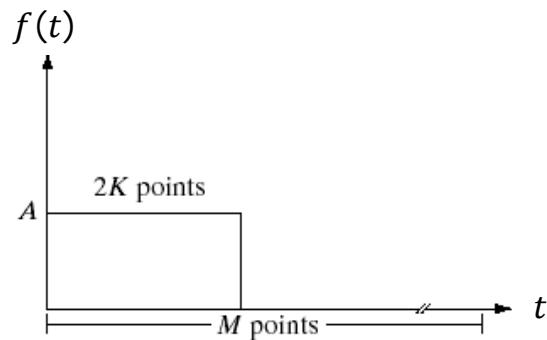
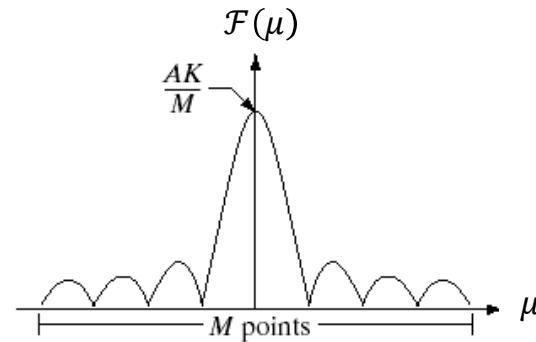
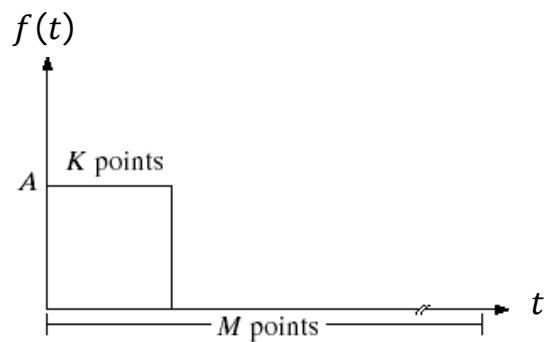
- Cho $f(t)$ với M điểm lấy mẫu
 - Δt : độ phân giải không gian, là khoảng cách giữa các mẫu trong $f(t)$
 - $\Delta\mu$: độ phân giải tần số, là khoảng cách giữa các thành phần tần số trong $\mathcal{F}(\mu)$
- Quan hệ giữa Δt và $\Delta\mu$ là $\Delta\mu = \frac{1}{M\Delta t}$

Quan hệ giữa Δt và $\Delta\mu$: Ví dụ

- Tín hiệu $f(t)$ có chu kỳ lấy mẫu là 0.5 giây, 100 điểm
- Độ phân giải tần số $\Delta\mu = \frac{1}{M\Delta t} = \frac{1}{0.5 \times 100} = 0.02 \text{ Hz}$
- Tức là trong $\mathcal{F}(\mu)$, ta có thể phân biệt hai tần số cách nhau 0.02 Hertz trở lên

a	b
c	d

- a. Hàm rời rạc M điểm (K điểm khác 0)
- b. Phổ Fourier của a.
- c. Hàm rời rạc có gấp đôi số điểm khác 0
- d. Phổ Fourier của b.



Biến đổi Fourier rời rạc 2 chiều

- Cho ảnh $f(x, y)$ có kích thước $M \times N$ pixels
- Biến đổi thuận

$$\mathcal{F}(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

- $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1, \quad v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

Biến đổi Fourier rời rạc 2 chiều

- Cho ảnh $f(x, y)$ có kích thước $M \times N$ pixels
- Biến đổi nghịch

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathcal{F}(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

• $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1, \quad y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

Biến đổi Fourier rời rạc 2 chiều

- $\mathcal{F}(u, v)$ có thể biểu diễn thành

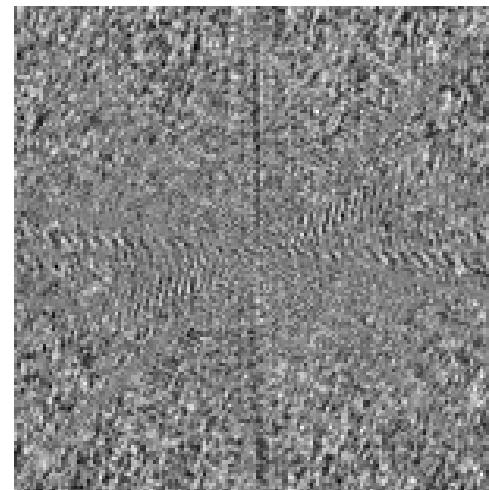
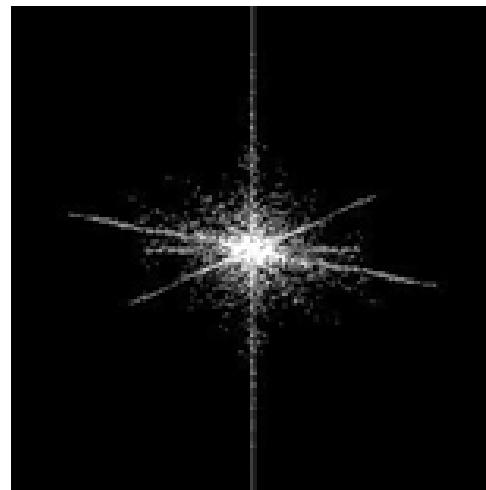
$$\mathcal{F}(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$$

hoặc $\mathcal{F}(u, v) = |\mathcal{F}(u, v)|e^{-j\phi(u, v)}$

- Độ lớn (Magnitude) $|\mathcal{F}(u, v)| = \sqrt{R(u, v)^2 + I(u, v)^2}$
- Góc lệch pha (Phase angle) $\phi(u, v) = \arctan\left(\frac{I(u, v)}{R(u, v)}\right)$

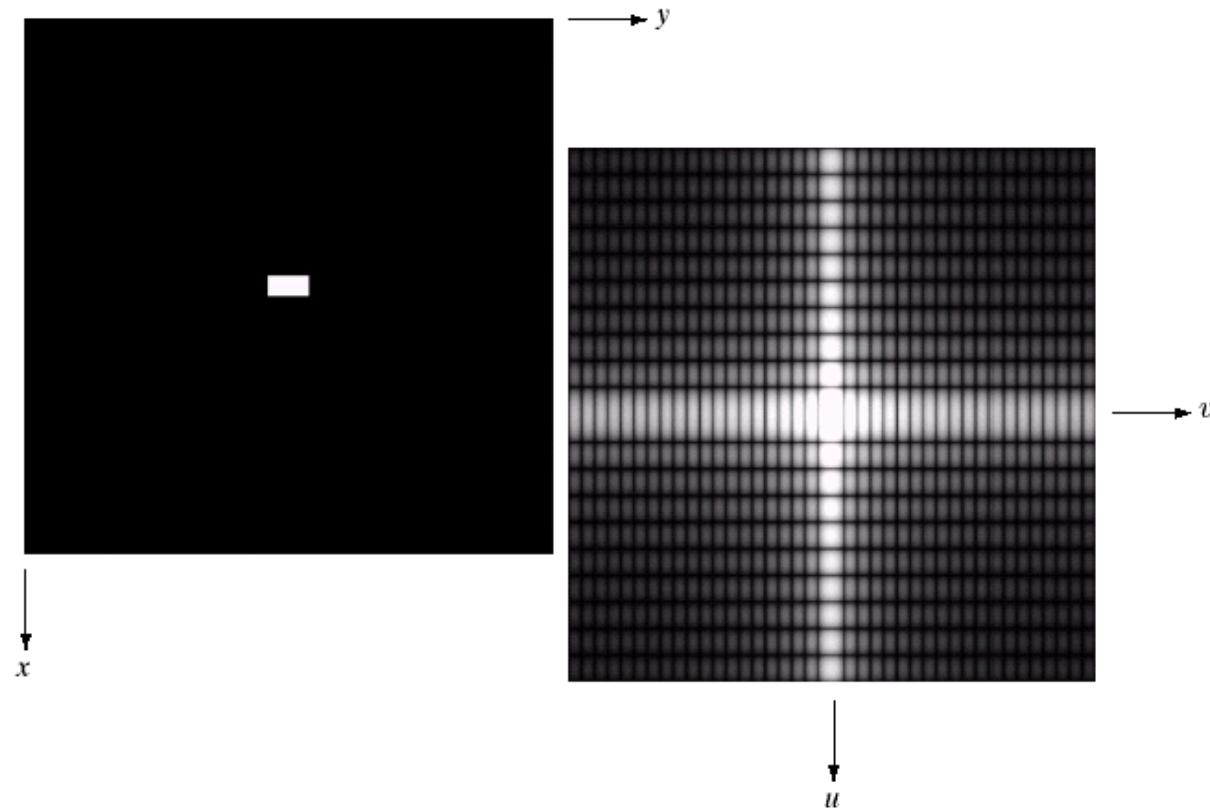
a b c

- a. Ảnh gốc
- b. Phổ Fourier của ảnh a.
- c. Phase angle của ảnh a.



a | b

- a. Ảnh gồm hình chữ nhật trắng 20×40 trên nền đen 512×512
- b. Phổ Fourier sau khi đã dịch chuyển và áp dụng log transformation



Property	Expression(s)
Fourier transform	$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$
Inverse Fourier transform	$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$
Polar representation	$F(u, v) = F(u, v) e^{-j\phi(u, v)}$
Spectrum	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}, \quad R = \text{Real}(F) \text{ and } I = \text{Imag}(F)$
Phase angle	$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
Power spectrum	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
Average value	$\bar{f}(x, y) = F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$
Translation	$f(x, y) e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$
	When $x_0 = u_0 = M/2$ and $y_0 = v_0 = N/2$, then $f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{u+v}$

Conjugate symmetry	$F(u, v) = F^*(-u, -v)$ $ F(u, v) = F(-u, -v) $
Differentiation	$\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} \Leftrightarrow (ju)^n F(u, v)$ $(-jx)^n f(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial^n F(u, v)}{\partial u^n}$
Laplacian	$\nabla^2 f(x, y) \Leftrightarrow -(u^2 + v^2) F(u, v)$
Distributivity	$\Im[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \Im[f_1(x, y)] + \Im[f_2(x, y)]$ $\Im[f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)] \neq \Im[f_1(x, y)] \cdot \Im[f_2(x, y)]$
Scaling	$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v), f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{ ab } F(u/a, v/b)$
Rotation	$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$ $f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$
Periodicity	$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$ $f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N)$
Separability	See Eqs. (4.6-14) and (4.6-15). Separability implies that we can compute the 2-D transform of an image by first computing 1-D transforms along each row of the image, and then computing a 1-D transform along each column of this intermediate result. The reverse, columns and then rows, yields the same result.

Property	Expression(s)
Computation of the inverse Fourier transform using a forward transform algorithm	$\frac{1}{MN} f^*(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$ <p>This equation indicates that inputting the function $F^*(u, v)$ into an algorithm designed to compute the forward transform (right side of the preceding equation) yields $f^*(x, y)/MN$. Taking the complex conjugate and multiplying this result by MN gives the desired inverse.</p>
Convolution [†]	$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$
Correlation [†]	$f(x, y) \circ h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n)h(x + m, y + n)$
Convolution theorem [†]	$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v);$ $f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$
Correlation theorem [†]	$f(x, y) \circ h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v)H(u, v);$ $f^*(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ H(u, v)$

Some useful FT pairs:

$$\text{Impulse} \quad \delta(x, y) \Leftrightarrow 1$$

$$\text{Gaussian} \quad A\sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)} \Leftrightarrow Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}$$

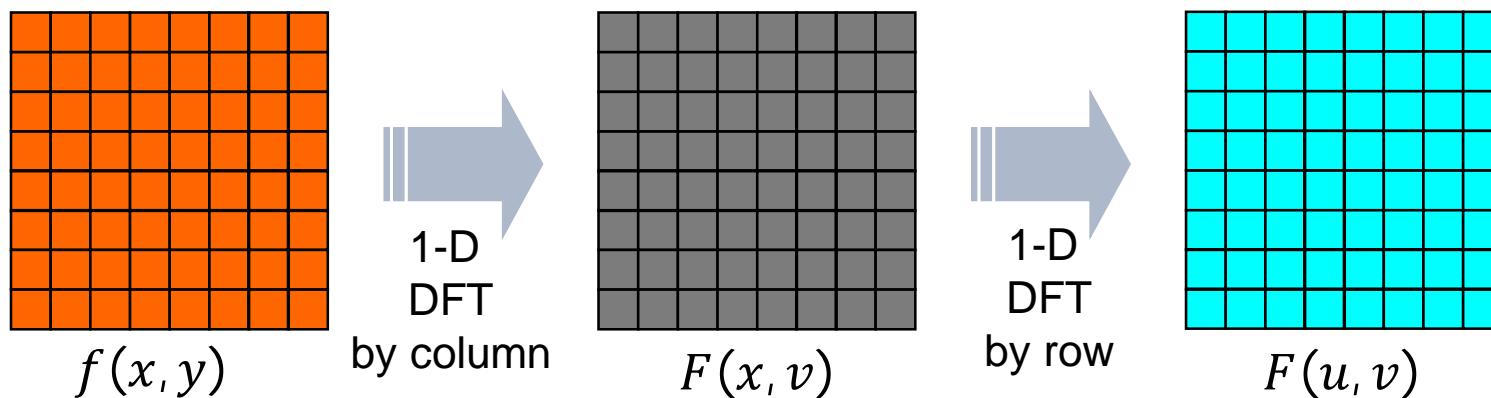
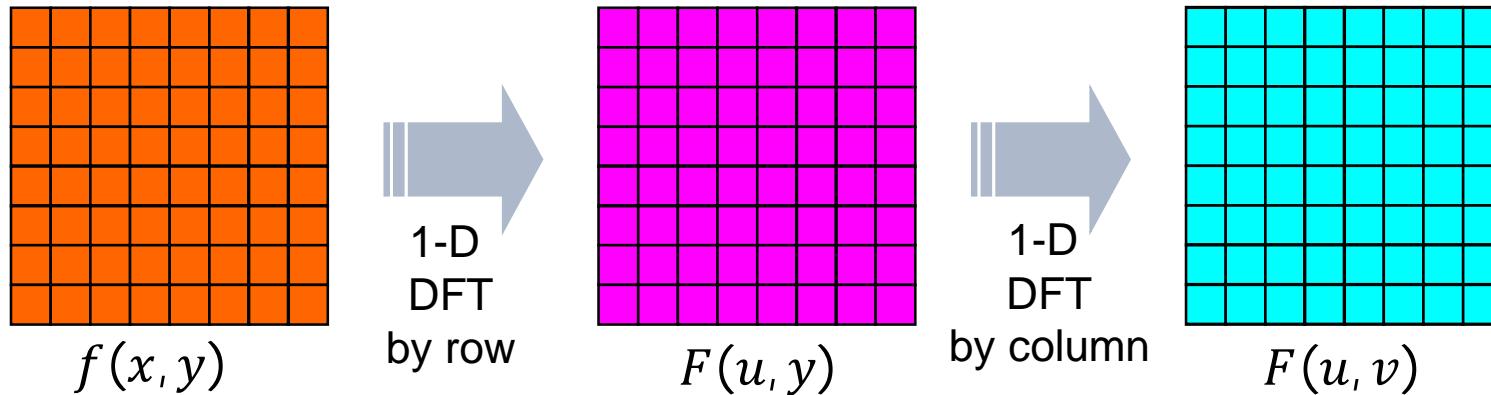
$$\text{Rectangle} \quad \text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-j\pi(ua+vb)}$$

$$\text{Cosine} \quad \cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(u + u_0, v + v_0) + \delta(u - u_0, v - v_0)]$$

$$\text{Sine} \quad \sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow j \frac{1}{2} [\delta(u + u_0, v + v_0) - \delta(u - u_0, v - v_0)]$$

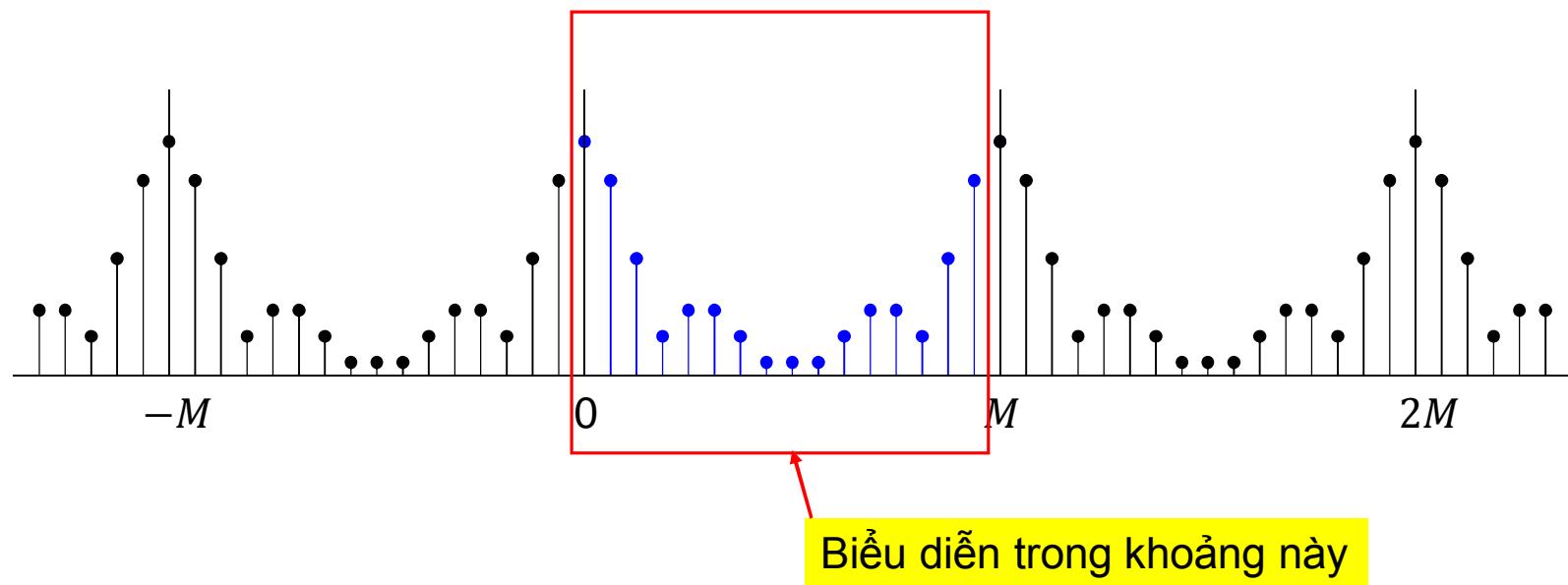
[†] Assumes that functions have been extended by zero padding.

Thực hiện 2D-DFT với 1D-DFT

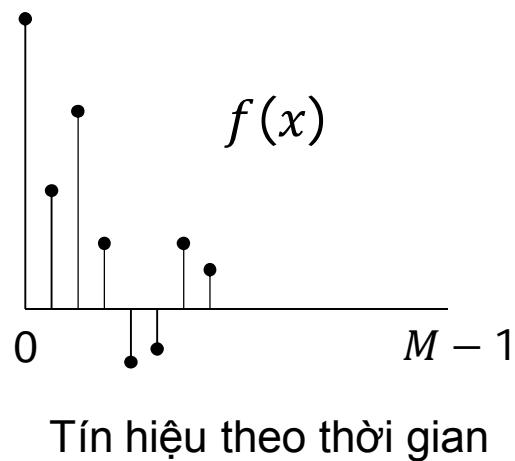


Tính tuần hoàn của 1D-DFT

- DFT lặp lại chính nó với chu kỳ M điểm nhưng ta thường chỉ biểu diễn DFT với $n = 0, \dots, M - 1$

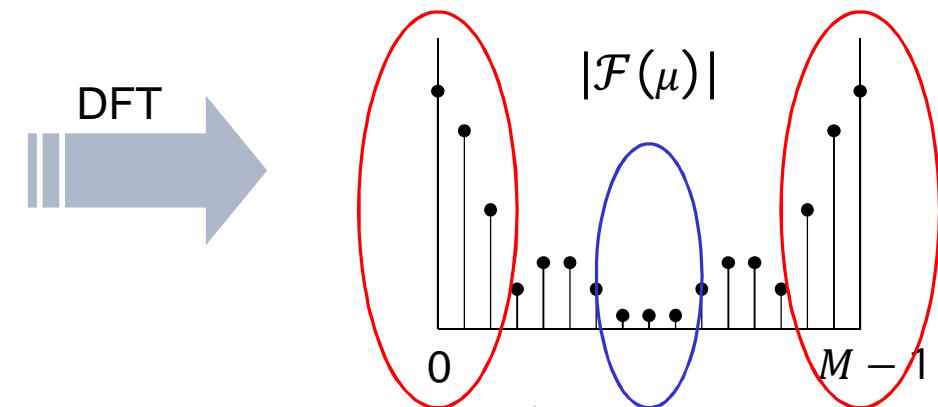


Biểu diễn 1D-DFT

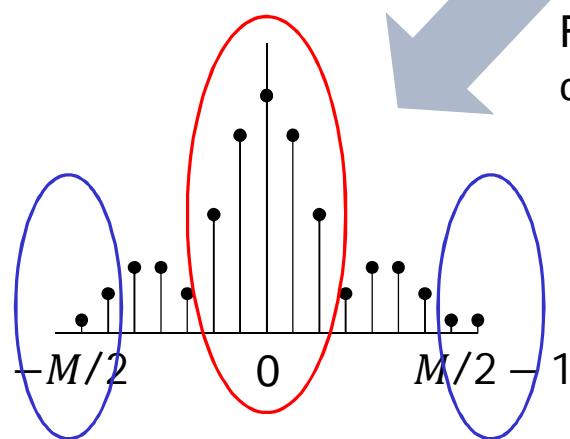


DFT

Đồ thị $|\mathcal{F}(\mu)|$ có vùng tần số thấp ở hai
biên và vùng tần số cao ở giữa



FFT Shift đưa tâm
của đồ thị về 0

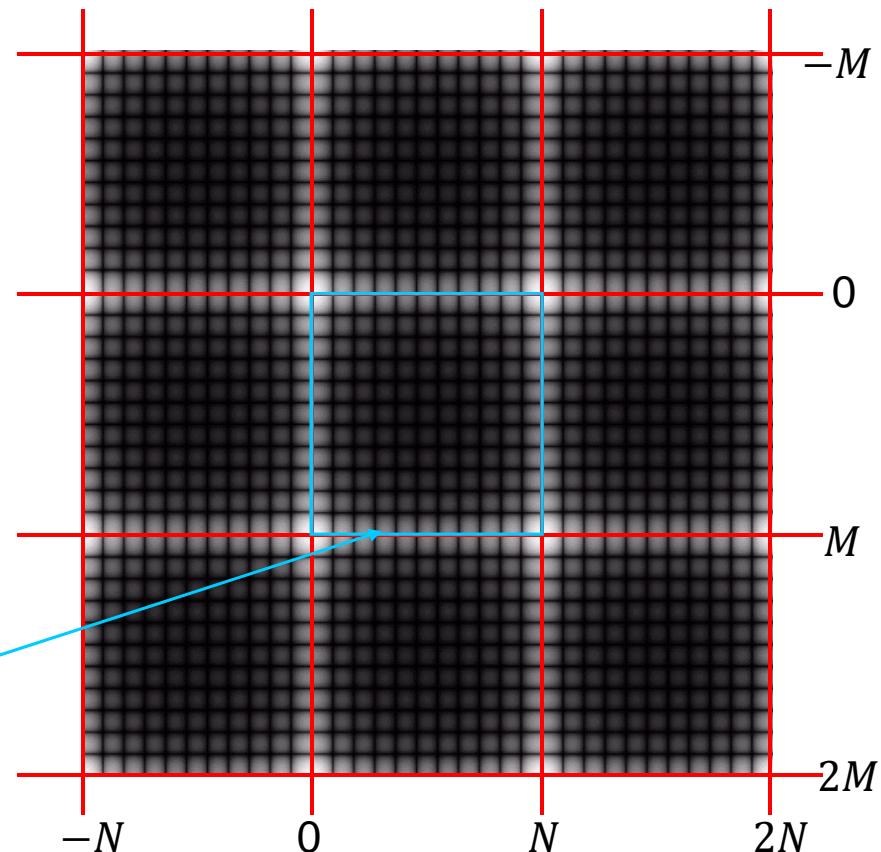


- Vùng tần số cao
- Vùng tần số thấp

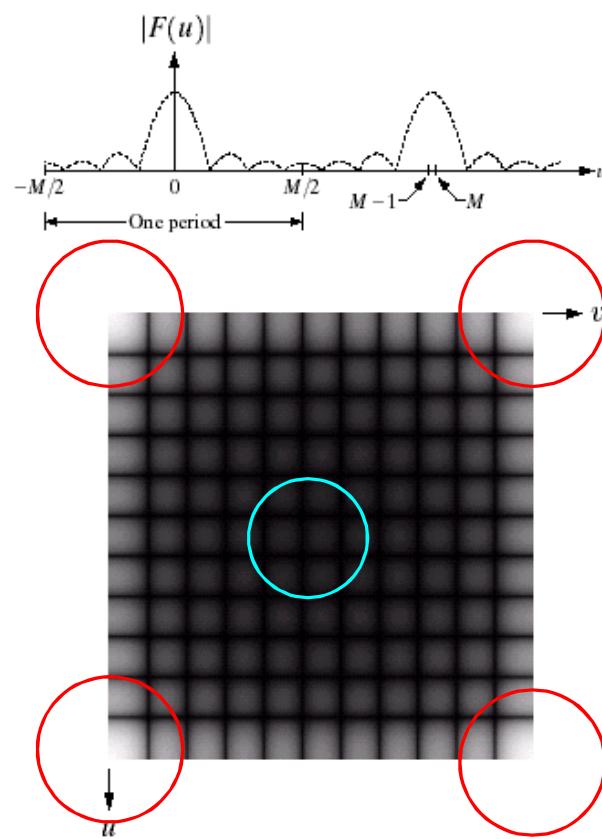
Tính tuần hoàn của 2D-DFT

- Cho ảnh có kích thước $M \times N$ pixels
- 2D-DFT lặp lại với chu kỳ M điểm trên trục x và N điểm trên trục y

Biểu diễn trong
khoảng này

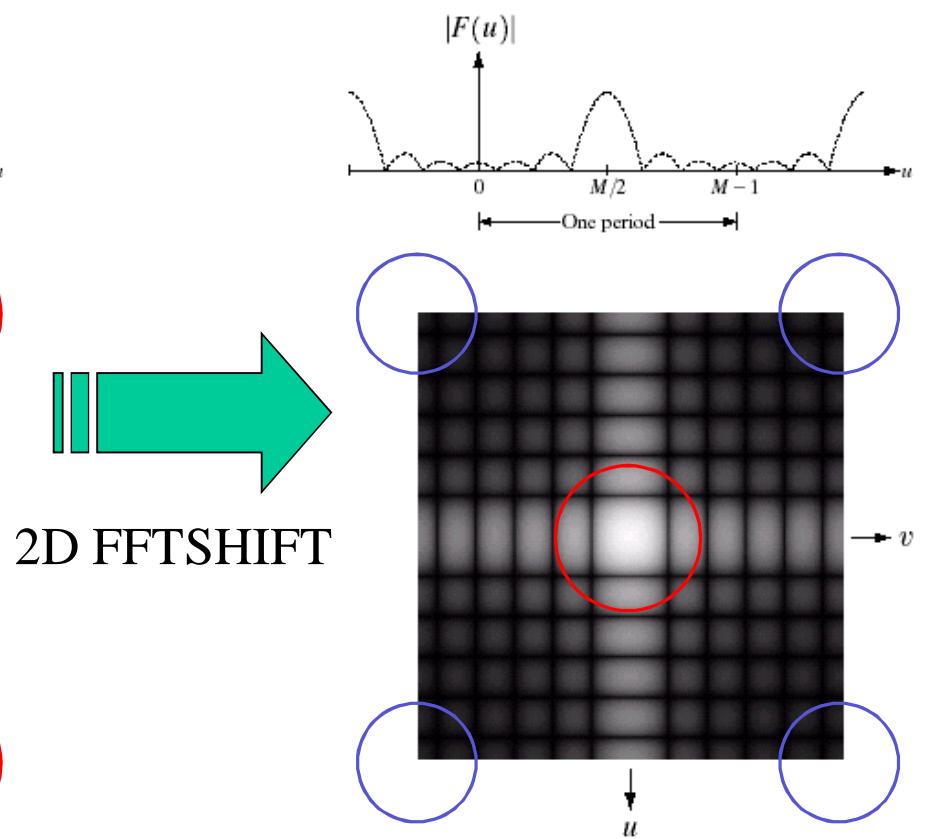


Biểu diễn 2D-DFT



Ảnh $\mathcal{F}(u, v)$ có vùng tần số thấp ở các góc và vùng tần số cao ở tâm

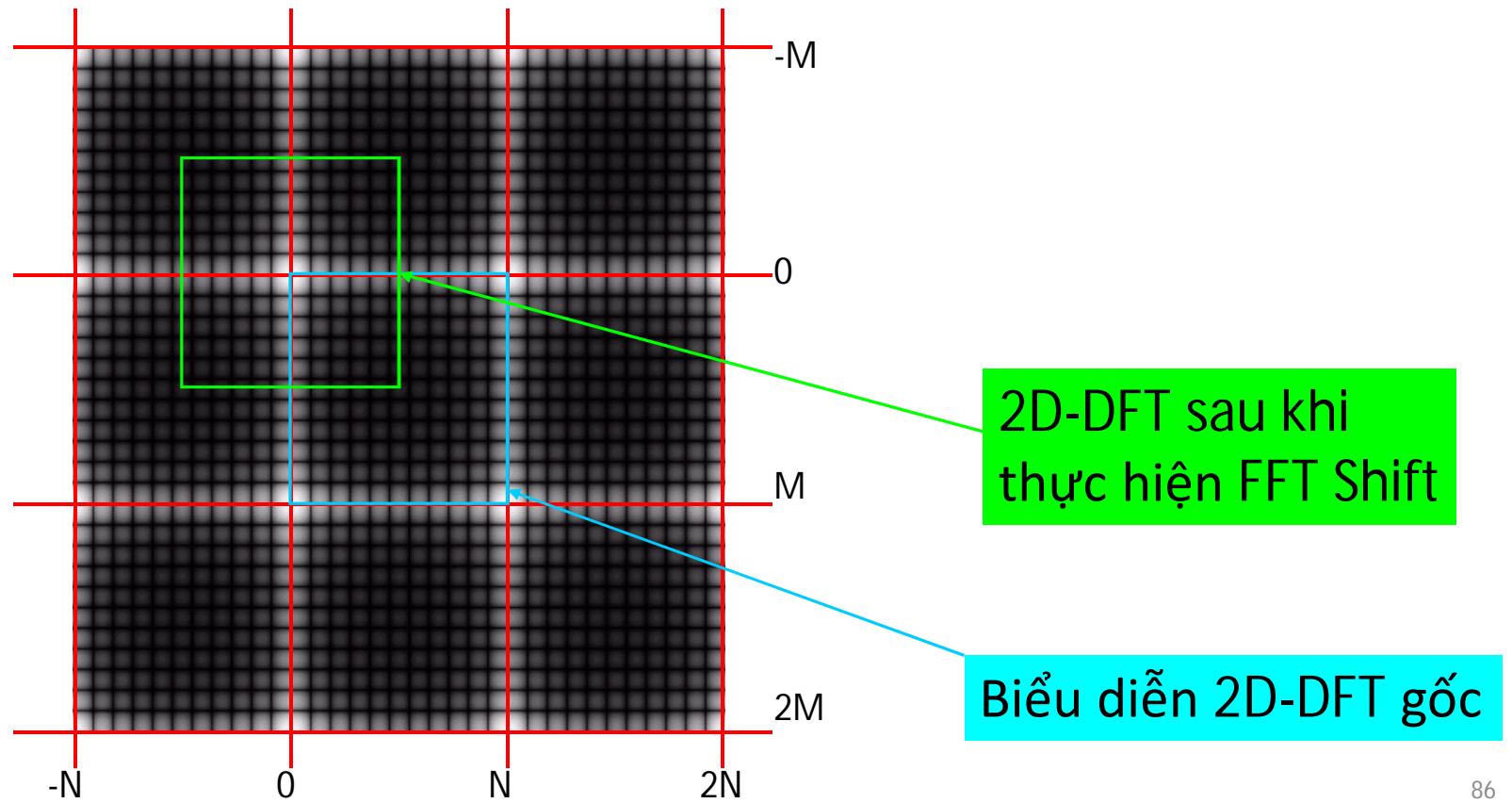
○ Vùng tần số thấp ○ Vùng tần số cao



2D FFTSHIFT

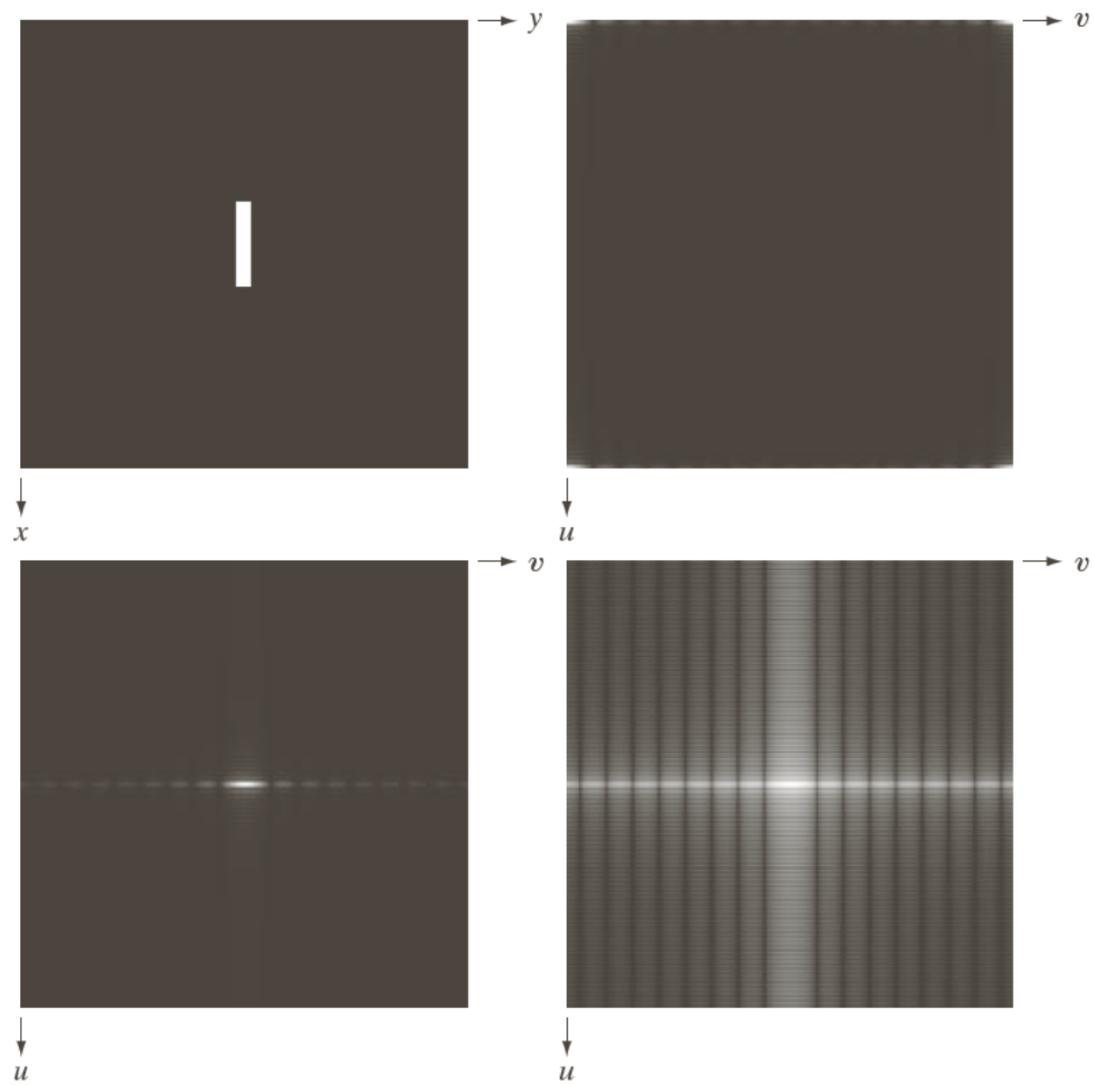
FFT Shift đưa tần số 0 của $\mathcal{F}(u, v)$ về tâm ảnh

Biểu diễn 2D-DFT



a	b
c	d

- a. Ảnh gốc
- b. Phổ có 4 góc sáng
- c. Phổ đã dịch về trung tâm
- d. Tăng cường chi tiết trong phổ bằng log transformation



Tăng cường ảnh trên Miền tần số

Tính chất của miền tần số

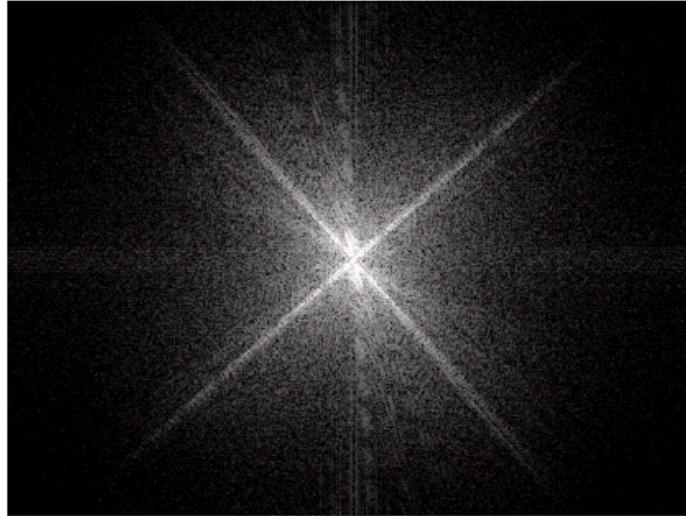
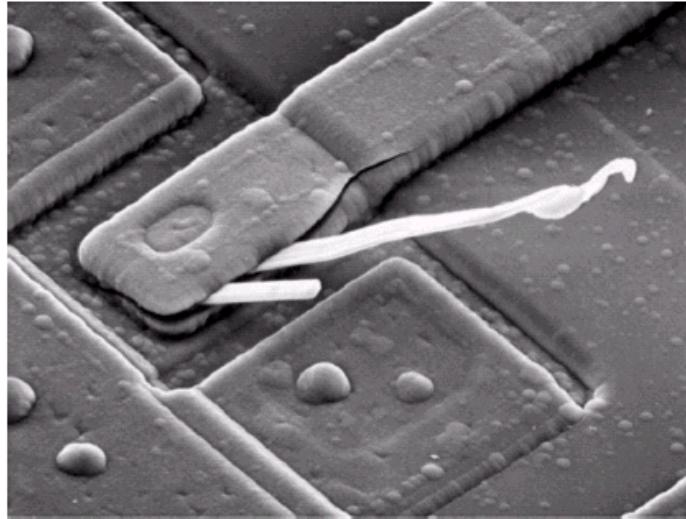
- Tần số trong biến đổi Fourier liên hệ trực tiếp đến tỷ lệ biến đổi cường độ trong ảnh
 - Tần số tại trung tâm ($u = v = 0$) thay đổi chậm nhất, tỷ lệ với cường độ trung bình của ảnh
 - Càng đi xa tâm, tần số càng cao, tương ứng với sự thay đổi cường độ ngày càng tăng trong ảnh
 - Ví dụ: tường, sàn nhà → cạnh của đối tượng, nhiễu

Tính chất của miền tần số

- Thành phần cơ bản của biến đổi Fourier đối với việc phân tích thị giác
 - **Magnitude (Fourier spectrum)**: cho biết tính chất tổng quan của ảnh gốc
 - **Phase angle**: thay đổi trên trường này gây biến đổi mạnh về cảm nhận thị giác

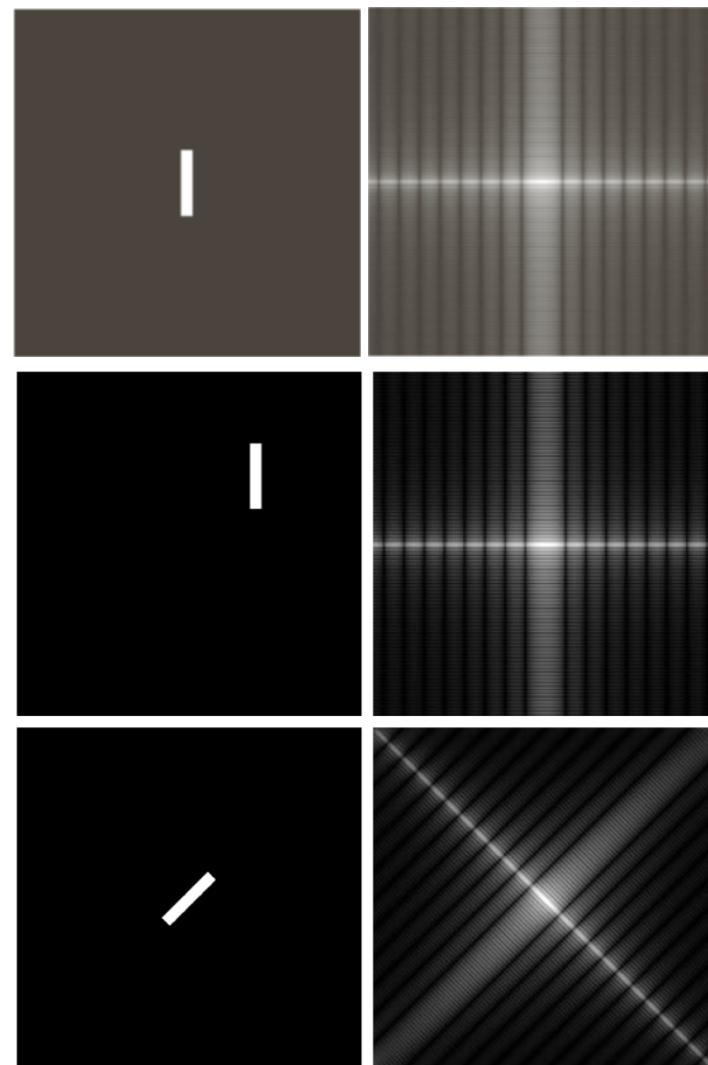
a | b

- a. Ảnh SEM của mạch tích hợp bị hỏng
- b. Phổ Fourier của a.



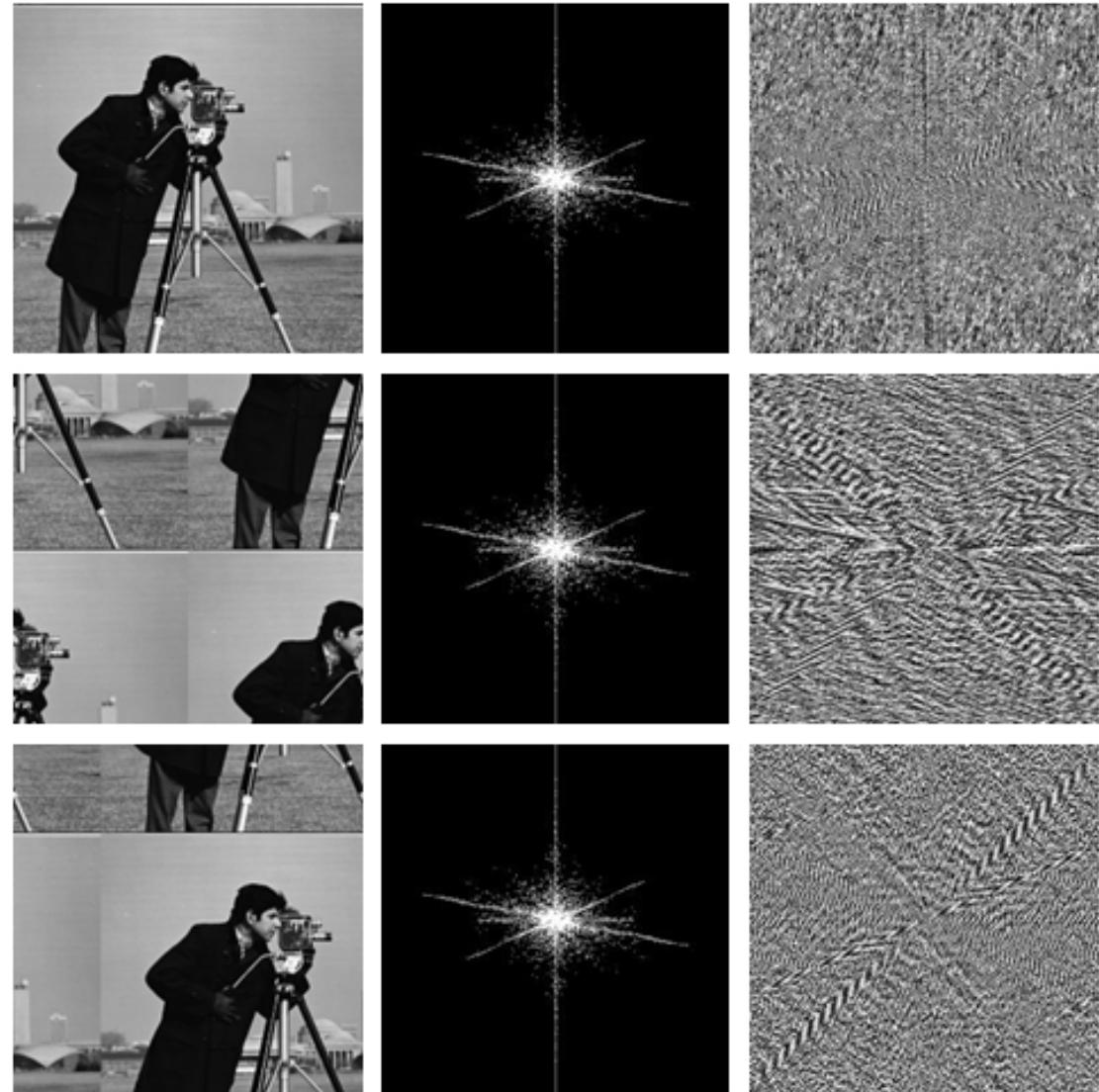
a	b
c	d
e	f

- a. Ảnh gốc
- b. Phổ Fourier của a.
- c. Hình chữ nhật trong a. dịch chuyển
- d. Phổ Fourier của c.
- e. Hình chữ nhật trong a. xoay
- f. Phổ Fourier của e.



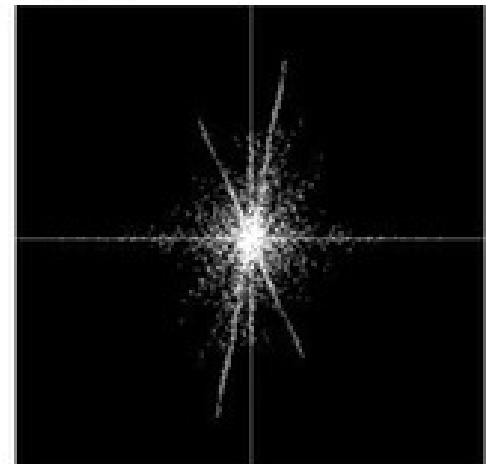
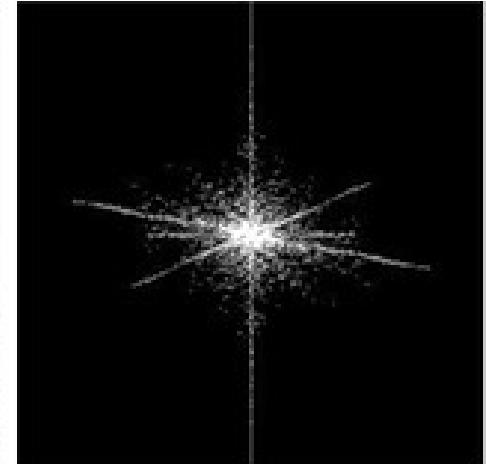
a	d	g
b	e	h
c	f	i

- a. Ảnh gốc
- b. Ảnh a. dịch chuyển 128
dòng và 128 cột
- c. Ảnh a. dịch chuyển 64
dòng và 64 cột
- d – f Phổ Fourier của a – c
- g – i Phase angle của a – c



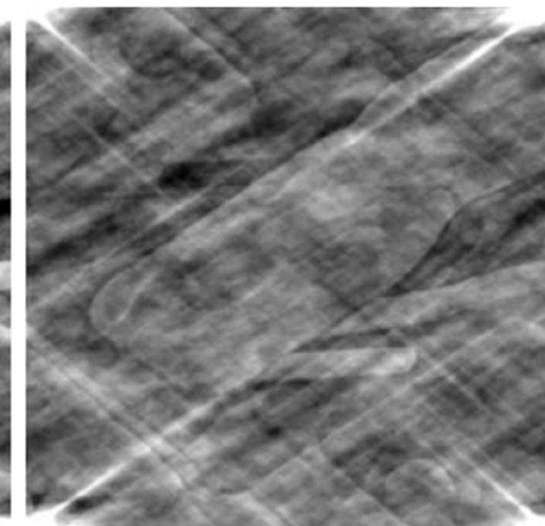
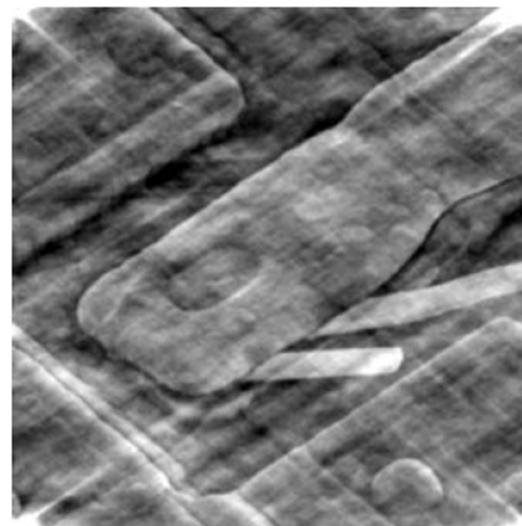
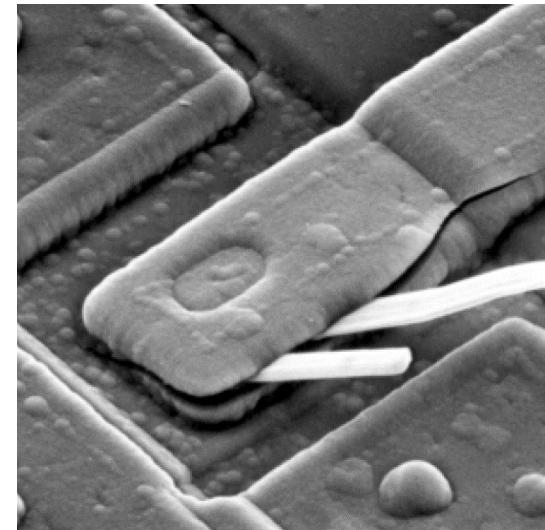
a b
c d

- a. Ảnh gốc
- b. Phổ Fourier của a.
- c. Ảnh gốc xoay 90⁰
- d. Phổ Fourier của b.



a
b c

- a. Ảnh gốc
b. Kết quả khi nhân phase angle với 0.5 rồi tính IDFT
c. Kết quả khi nhân phase angle với 0.25 rồi tính IDFT
Phổ Fourier không thay đổi trong hai trường hợp

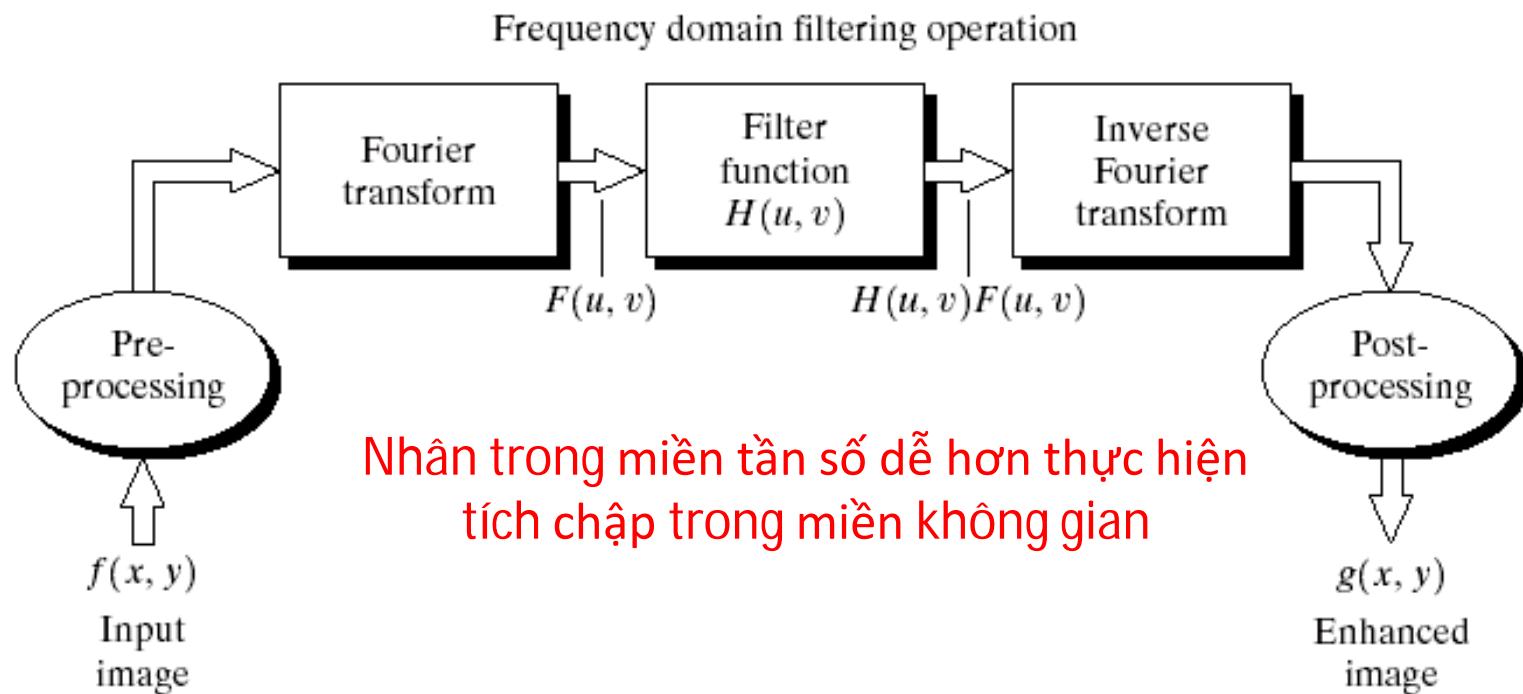


Căn bản về lọc trên miền tần số

- Qui trình lọc trên miền tần số dựa trên **tính chất tích chập (convolution) của biến đổi Fourier**

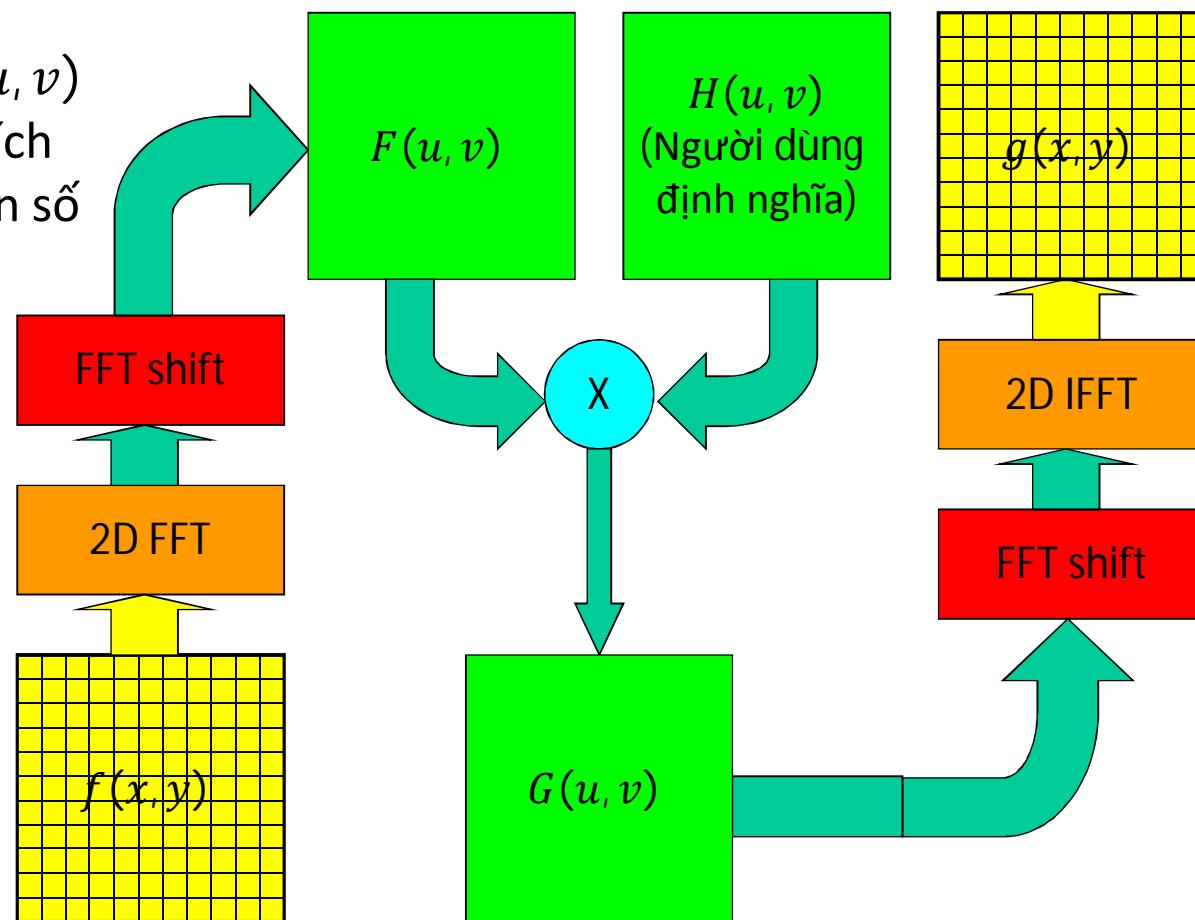
$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) \star h(x, y) \\ &\Updownarrow \\ F(u, v)H(u, v) &= G(u, v) \end{aligned}$$

Căn bản về lọc trên miền tần số



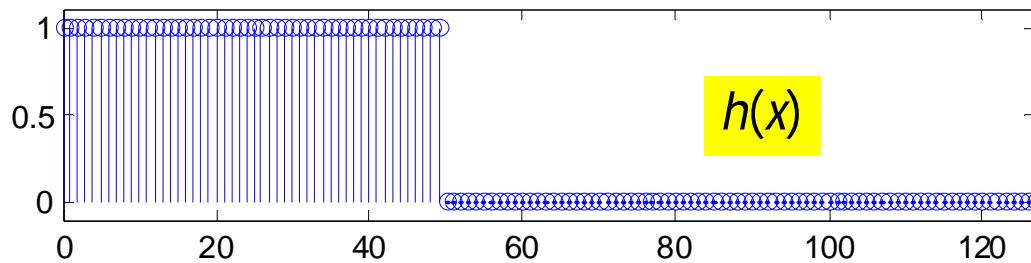
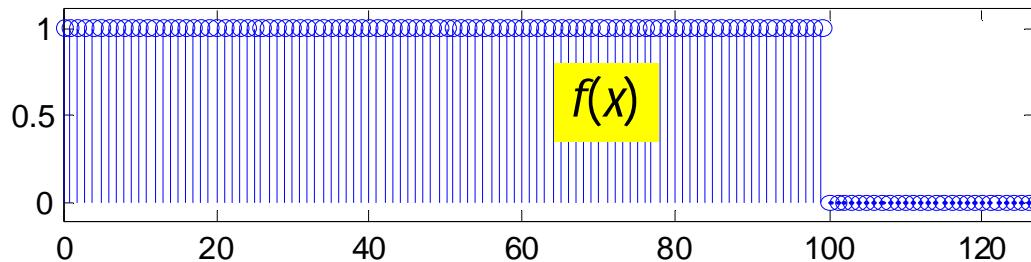
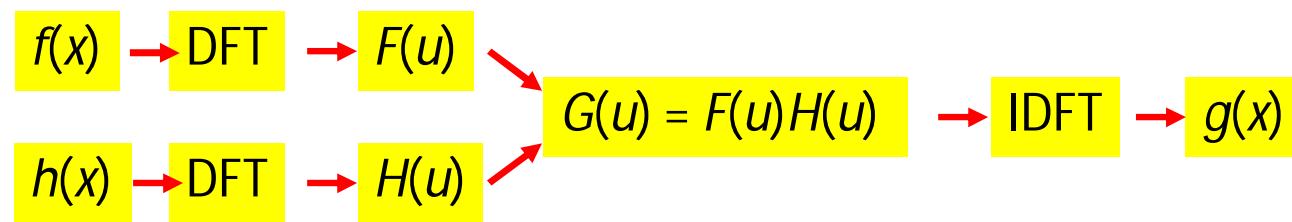
Lọc trên miền tần số với 2D-FFT

$F(u, v)$ và $H(u, v)$
phải có cùng kích
thước và có tần số
0 tại tâm

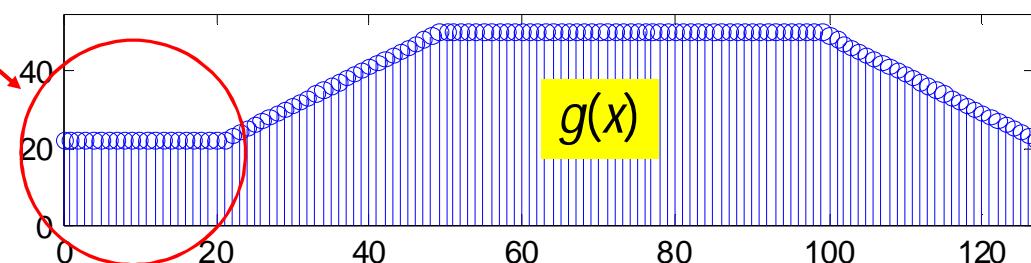


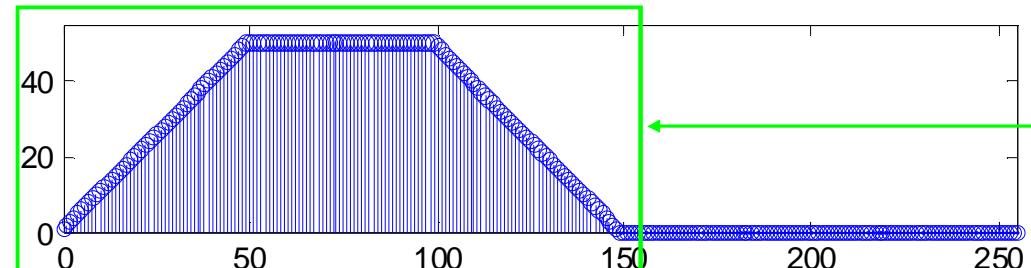
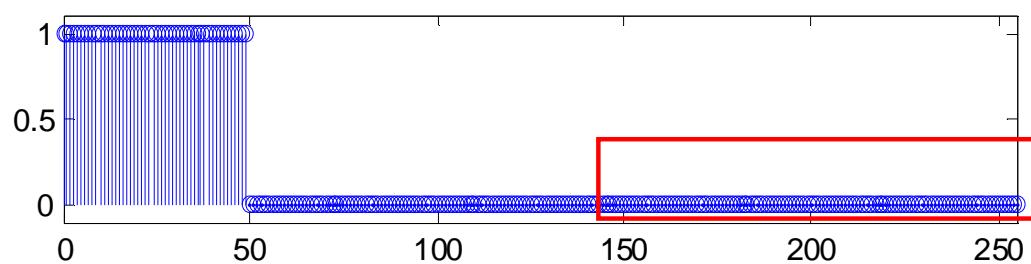
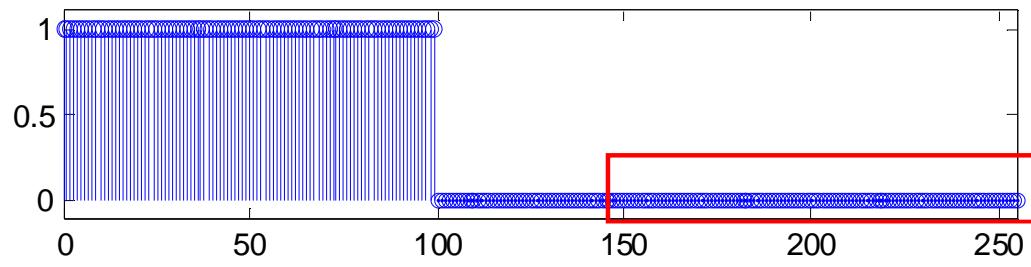
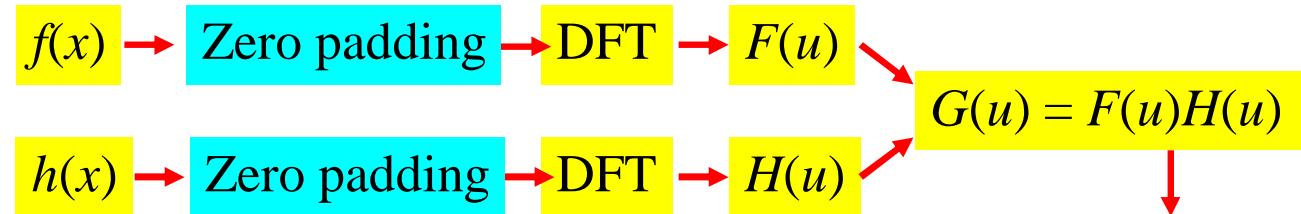
Phép nhân trên miền tần số

- Phép nhân hai DFT của hai tín hiệu tương đương với thực hiện tích chập vòng
 - Khi tích chập hai hàm tuần hoàn thì phép tích chập cũng có tính tuần hoàn
 - Hai chu kỳ gần nhau xen vào nhau gây ra hiện tượng **wraparound error**



“Wrap around” effect





Concatenation

$g(x)$

Nối 0s
trước DFT

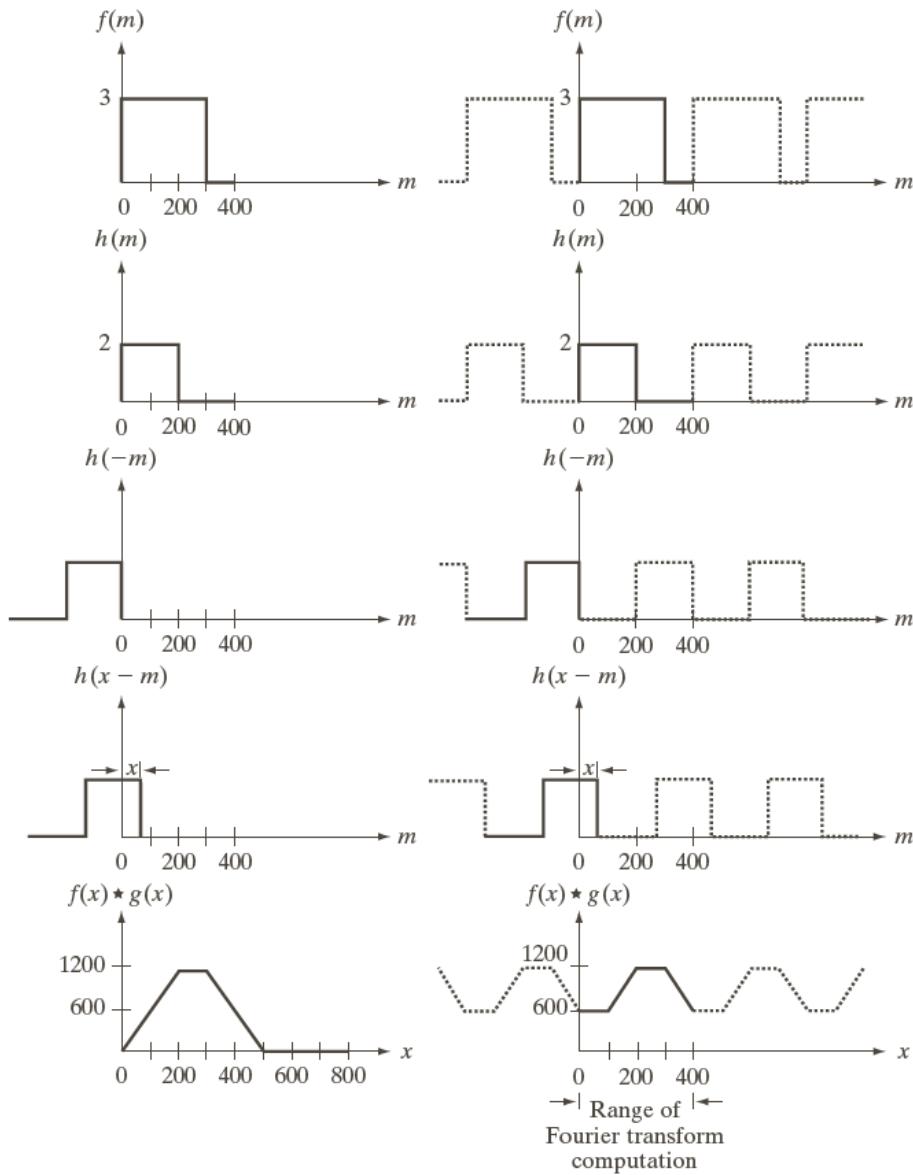
Chỉ giữ phần này

a	f
b	g
c	h
d	i
e	j

Cột trái: tích chập của hai hàm rời rạc sử dụng cách trên miền không gian. Hình e. là kết quả đúng

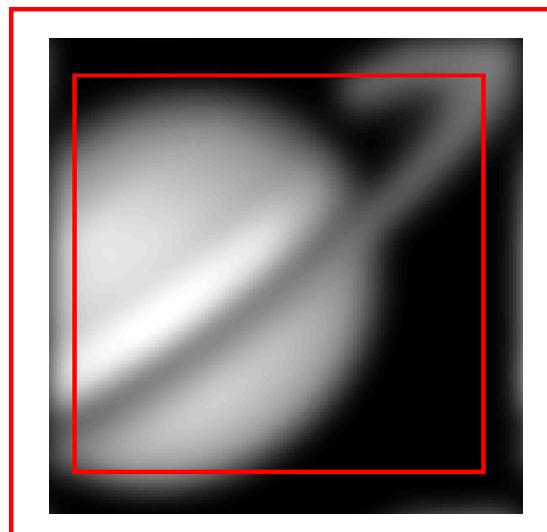
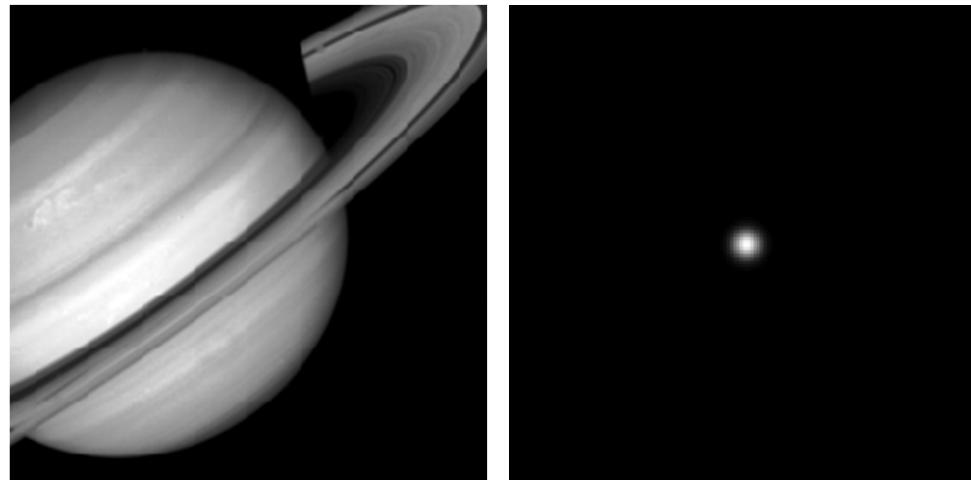
Cột phải: tích chập của hai hàm giống như ở cột trái, nhưng có xét tính tuần hoàn. Trong hình j., để ý cách dữ liệu thuộc chu kỳ liên kề nhau tạo wraparound error.

Để tạo kết quả đúng, hàm phải được nối 0s

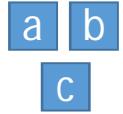


a b
c

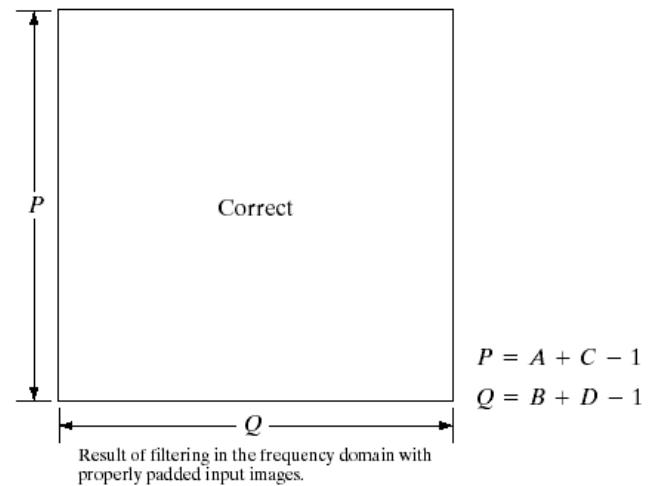
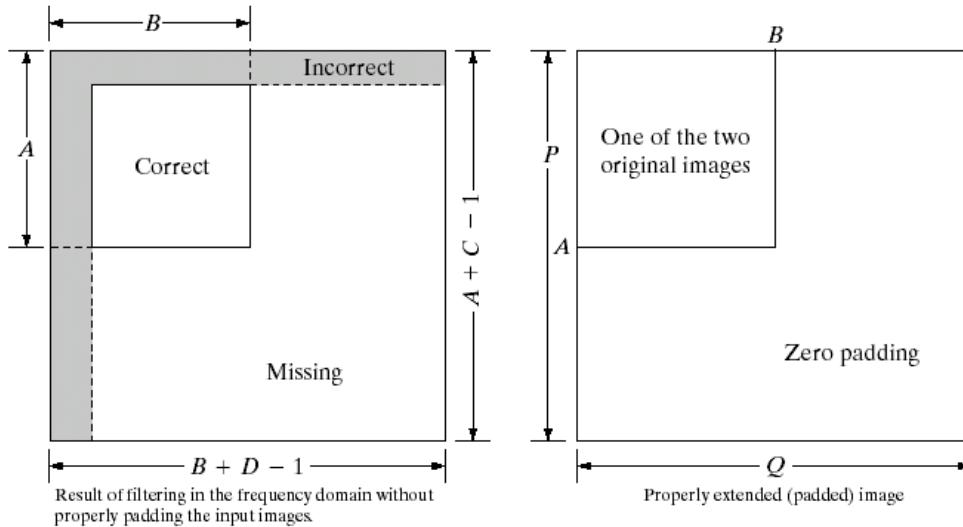
- a. Ảnh gốc
- b. Bộ lọc Gaussian lowpass
 $H(u, v)$ với $D_0 = 5$
- c. Ảnh sau khi lọc (sử dụng convolution vòng)

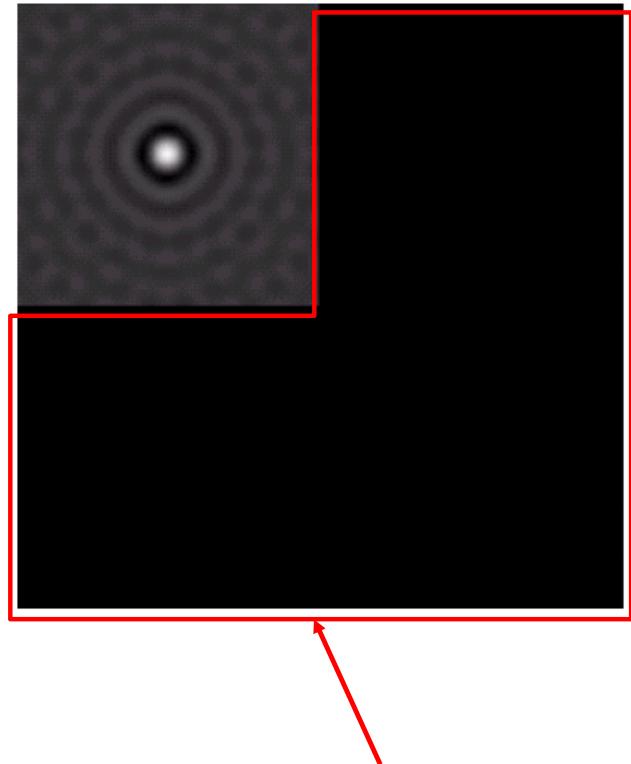


Vùng bị sai
tại mép ảnh

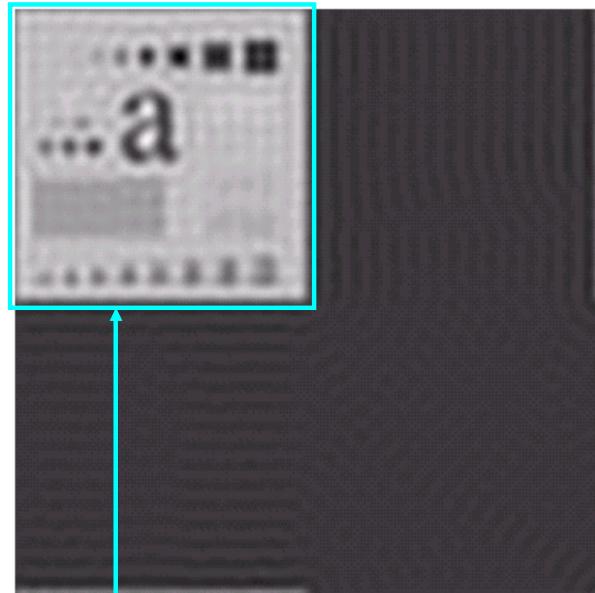


- a. Kết quả tích chập 2D không có nối 0s
- b. Cách nối 0s đúng
- c. Kết quả tích chập đúng





Vùng zero padding trong
không gian của ảnh mặt nạ
(bộ lọc ideal lowpass)



Ảnh sau khi lọc

Chỉ giữ phần này

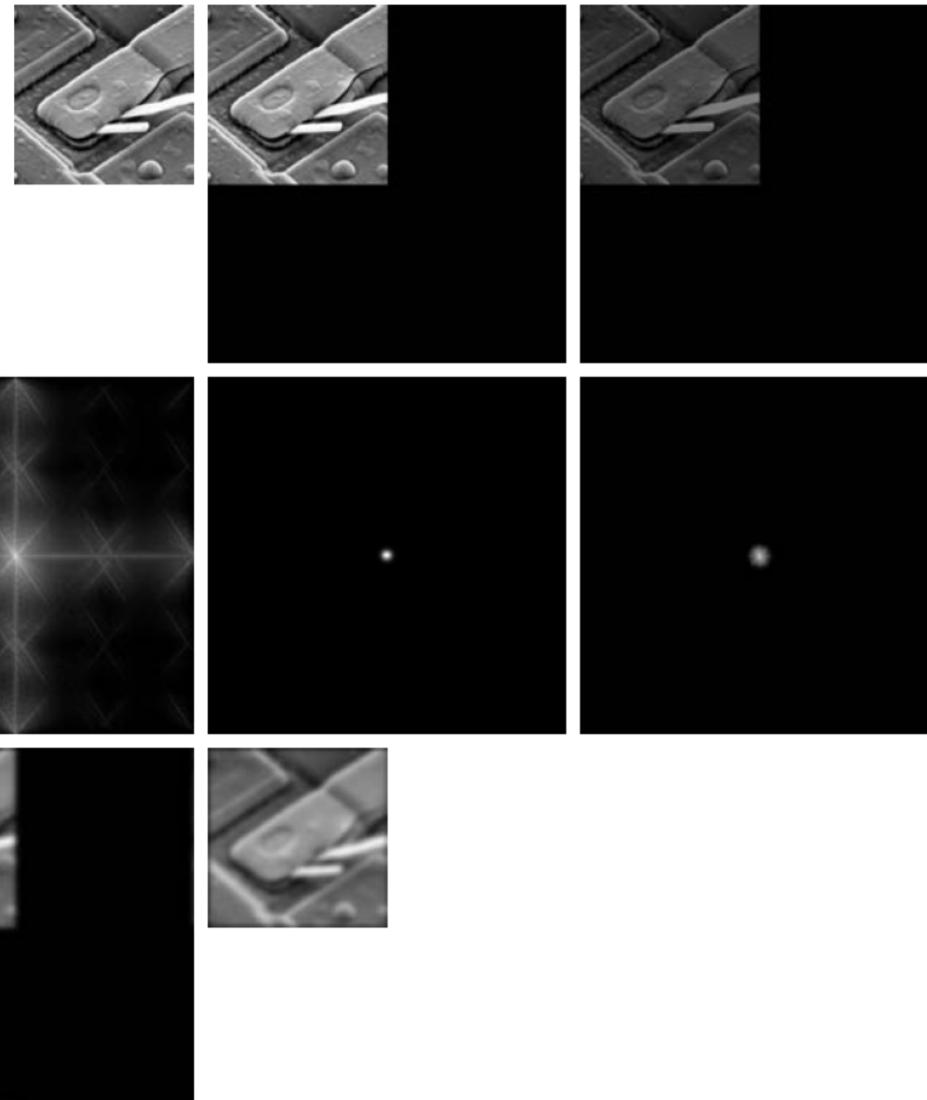
1. Given an input image $f(x, y)$ of size $M \times N$, obtain the padding parameters P and Q from Eqs. (4.6-31) and (4.6-32). Typically, we select $P = 2M$ and $Q = 2N$.
2. Form a padded image, $f_p(x, y)$, of size $P \times Q$ by appending the necessary number of zeros to $f(x, y)$.
3. Multiply $f_p(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ to center its transform.
4. Compute the DFT, $F(u, v)$, of the image from step 3.
5. Generate a real, symmetric filter function, $H(u, v)$, of size $P \times Q$ with center at coordinates $(P/2, Q/2)$.[†] Form the product $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$ using array multiplication; that is, $G(i, k) = H(i, k)F(i, k)$.
6. Obtain the processed image:

$$g_p(x, y) = \{\text{real}[\mathfrak{J}^{-1}[G(u, v)]]\}(-1)^{x+y}$$

where the real part is selected in order to ignore parasitic complex components resulting from computational inaccuracies, and the subscript p indicates that we are dealing with padded arrays.

7. Obtain the final processed result, $g(x, y)$, by extracting the $M \times N$ region from the top, left quadrant of $g_p(x, y)$.

a	b	c
d	e	f
g	h	



- a. Ảnh f kích thước $M \times N$
- b. Ảnh đã nối Os f_p kích thước $P \times Q$
- c. Kết quả nhân f_p với $(-1)^{x+y}$
- d. Phổ \mathcal{F}_p
- e. Bộ lọc Gaussian lowpass trung tâm H , kích thước $P \times Q$
- f. Phổ của tích $H\mathcal{F}_p$
- g. g_p , tích của $(-1)^{x+y}$ và phần thực của IDFT của $H\mathcal{F}_p$
- h. Kết quả cuối cùng, chỉ lấy M dòng và N cột đầu tiên của g_p

Một vài dạng bộ lọc tiêu biếu

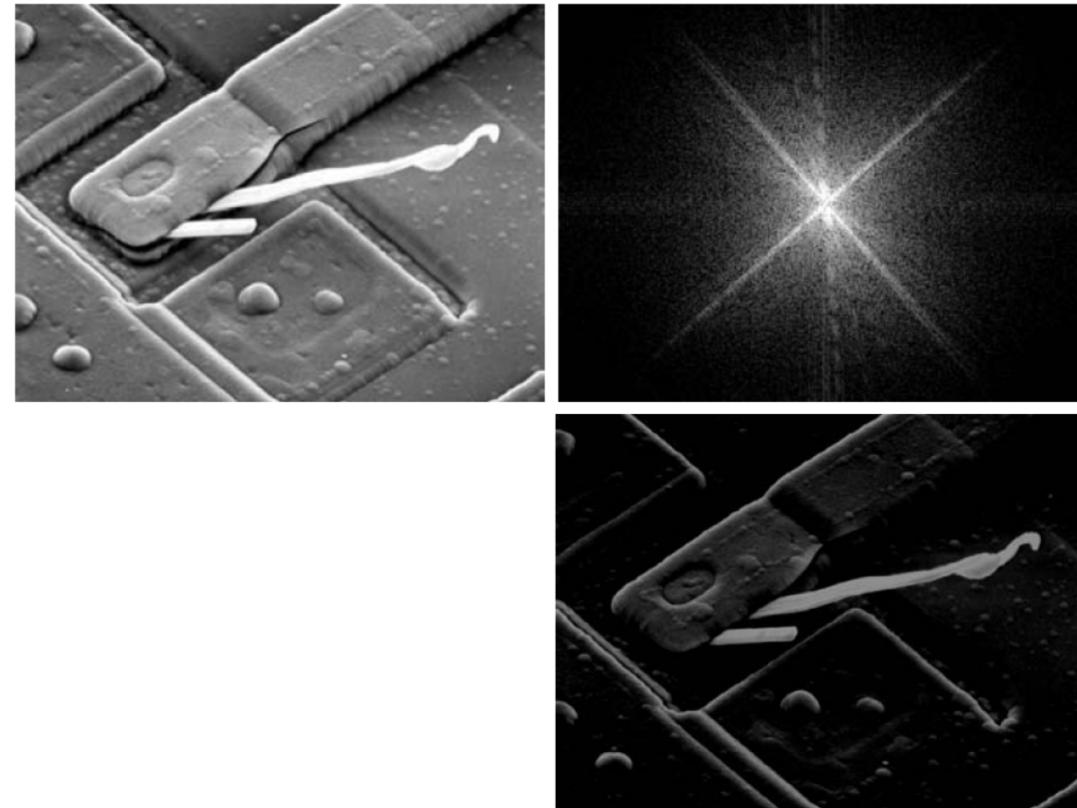
- **Bộ lọc notch** đặt $F(0, 0) = 0$ để loại bỏ thành phần tần số zero

- Tần số zero = cường độ trung bình của ảnh

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } (u, v) = (\frac{M}{2}, \frac{N}{2}) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Bộ lọc notch có thể làm việc trực tiếp với DFT không qua phép nối 0s

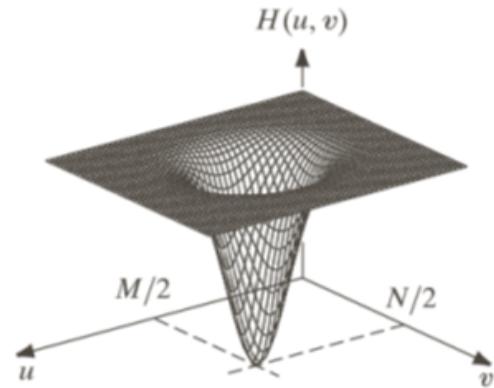
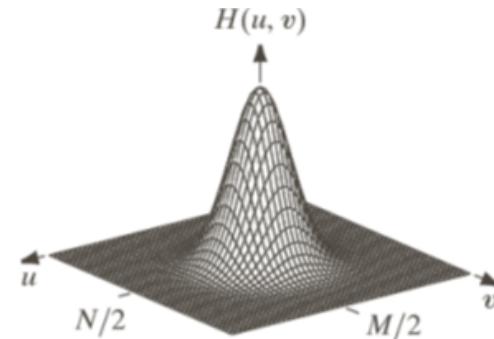
a b
c



- a. Ảnh gốc
- b. Phổ Fourier của a.
- c. Ảnh sau khi lọc bằng bộ lọc notch

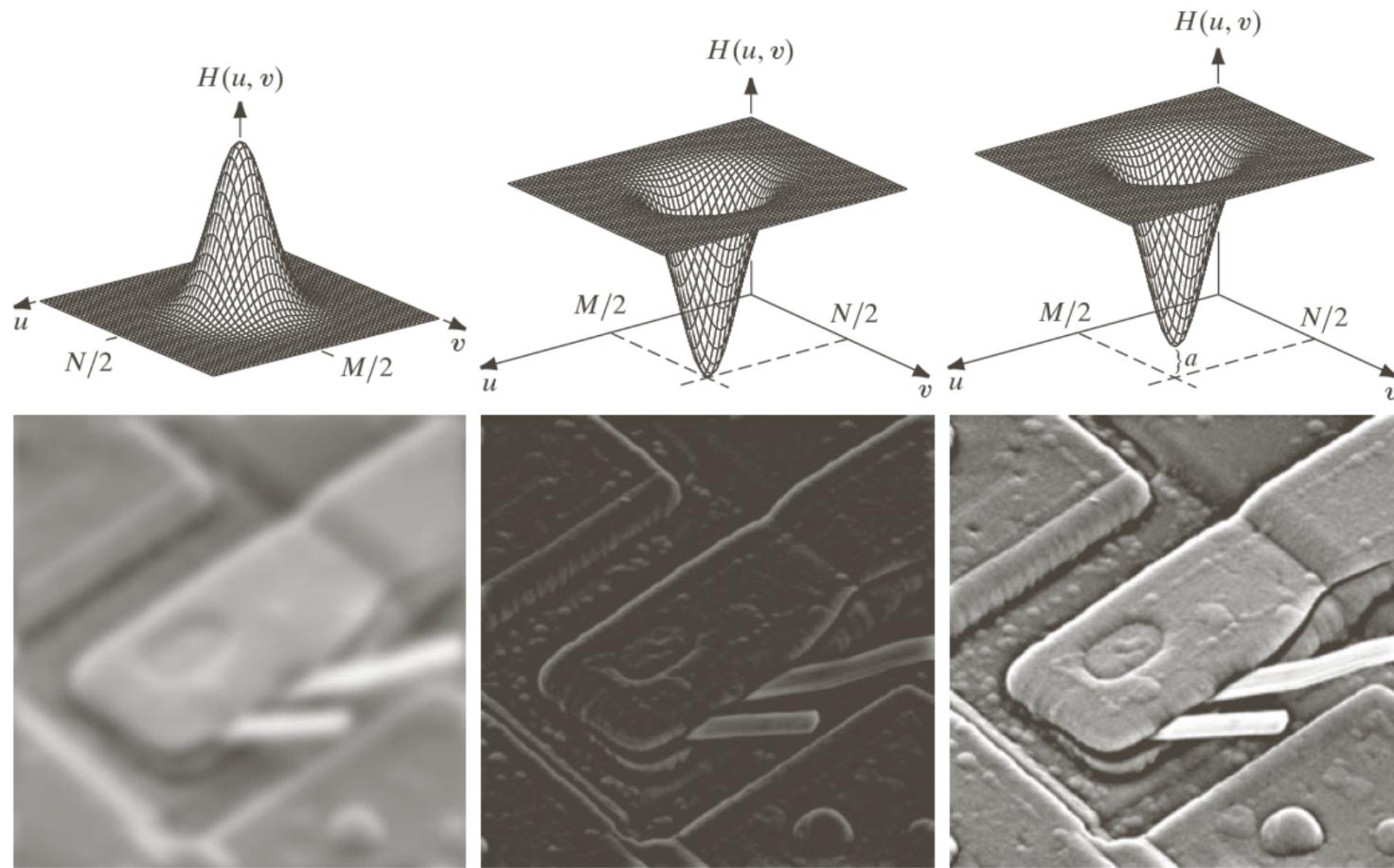
Một vài dạng bộ lọc tiêu biểu

- Bộ lọc lowpass làm yếu tần số cao trong khi **cho qua tần số thấp**, tạo hiệu ứng ảnh nhòe
- Bộ lọc highpass làm yếu tần số thấp trong khi **cho qua tần số cao**, tăng cường độ sắc nét cho chi tiết nhưng gây giảm độ tương phản



a	b	c
d	e	f

Dòng trên: các bộ lọc tần số
 Dòng dưới: ảnh áp dụng các bộ lọc tương ứng
 Sử dụng $\alpha = 0.85$ trong c. để thu được f.



Lọc không gian và lọc tần số

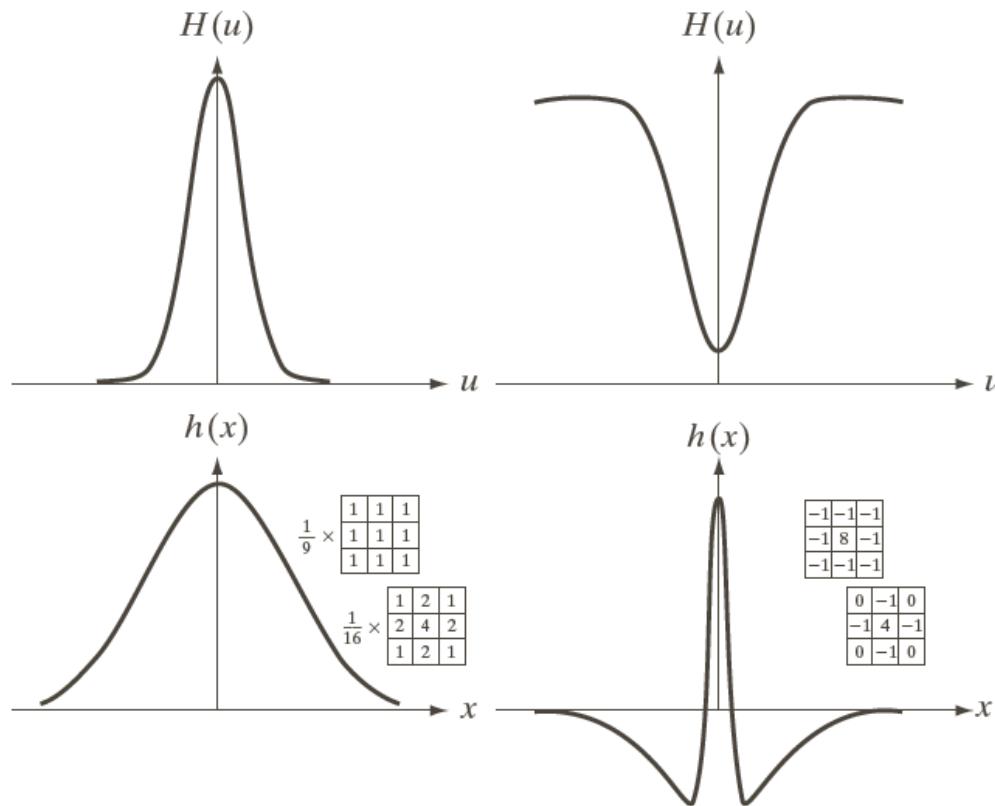
- Mỗi liên hệ giữa lọc không gian và lọc tần số là **định lý tích chập**

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

- Bộ lọc tần số càng hẹp thì càng làm yếu tần số thấp, tăng hiệu ứng nhòe \Leftrightarrow Bộ lọc không gian lớn hơn

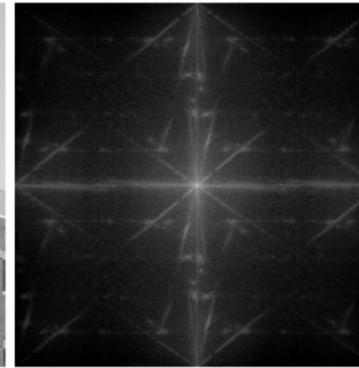
a	c
b	d

- a. Bộ lọc Gaussian lowpass 1D trên miền tần số
 - b. Bộ lọc lowpass trên miền không gian tương ứng với a.
 - c. Bộ lọc Gaussian highpass trên miền tần số
 - d. Bộ lọc highpass trên miền không gian tương ứng với b
- Mặt nạ 2D là bộ lọc trên miền không gian

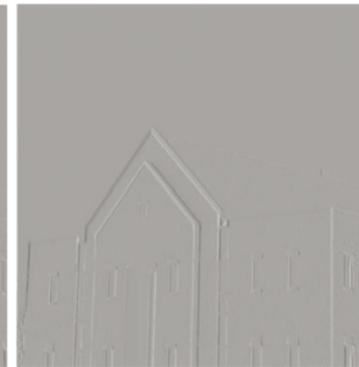
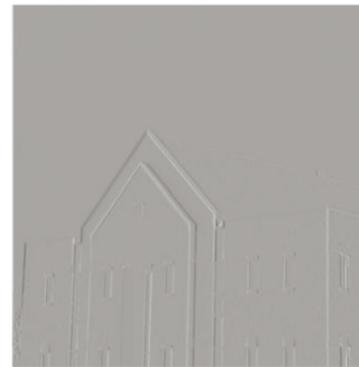
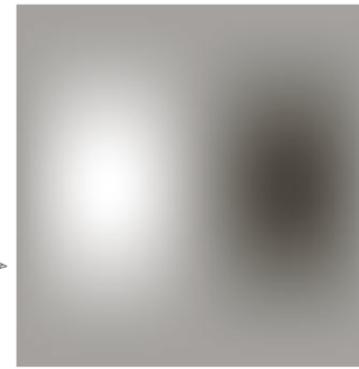
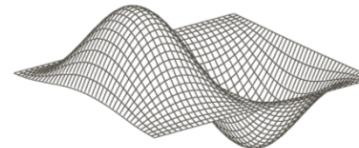


a	b
c	d
e	f

- a. Ảnh gốc
- b. Phổ Fourier của a.
- c. Mặt nạ không gian và bộ lọc tần số tương ứng
- d. Biểu diễn bộ lọc ở dạng ảnh
- e. Kết quả lọc ảnh a. trên miền tần số với bộ lọc d.
- f. Kết quả lọc ảnh a. bằng bộ lọc không gian tương ứng của d.



-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1



Bộ lọc tần số thấp (lowpass filters)

Lọc ảnh trong miền tần số

Bộ lọc tần số thấp (lowpass filters)

- Bộ lọc $H(u, v)$ trên miền tần số có tính chất sau
 - Là hàm rời rạc có kích thước $P \times Q$ (sau khi nối 0s)
 - $u = 0, 1, 2, \dots, P - 1, v = 0, 1, 2, \dots, Q - 1$
 - Tâm nằm tại thành phần tần số zero (zero-phase-shift) và đối xứng xuyên tâm (radially symmetric)
- Thao tác lọc với $H(u, v)$ tuân theo quy trình lọc trên miền tần số gồm 7 bước

1. Given an input image $f(x, y)$ of size $M \times N$, obtain the padding parameters P and Q from Eqs. (4.6-31) and (4.6-32). Typically, we select $P = 2M$ and $Q = 2N$.
2. Form a padded image, $f_p(x, y)$, of size $P \times Q$ by appending the necessary number of zeros to $f(x, y)$.
3. Multiply $f_p(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ to center its transform.
4. Compute the DFT, $F(u, v)$, of the image from step 3.
5. Generate a real, symmetric filter function, $H(u, v)$, of size $P \times Q$ with center at coordinates $(P/2, Q/2)$.[†] Form the product $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$ using array multiplication; that is, $G(i, k) = H(i, k)F(i, k)$.
6. Obtain the processed image:

$$g_p(x, y) = \{\text{real}[\mathfrak{J}^{-1}[G(u, v)]]\}(-1)^{x+y}$$

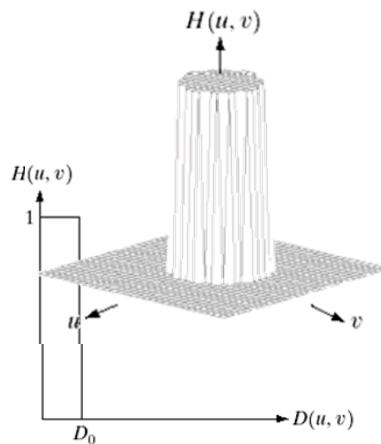
where the real part is selected in order to ignore parasitic complex components resulting from computational inaccuracies, and the subscript p indicates that we are dealing with padded arrays.

7. Obtain the final processed result, $g(x, y)$, by extracting the $M \times N$ region from the top, left quadrant of $g_p(x, y)$.

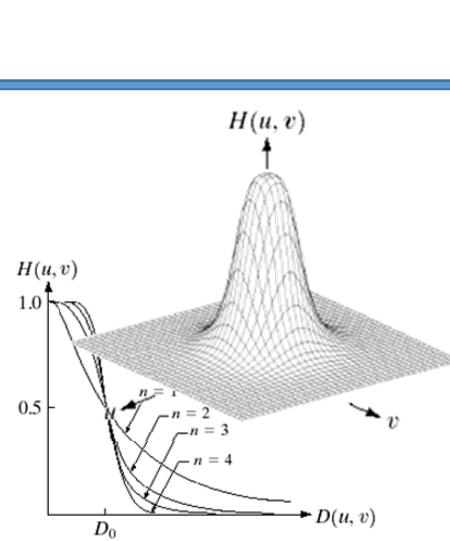
Bộ lọc tần số thấp

- Tạo ứng trơ (nhòa) trên miền tần số bằng cách **làm yếu tần số cao**

Rất sắc nét

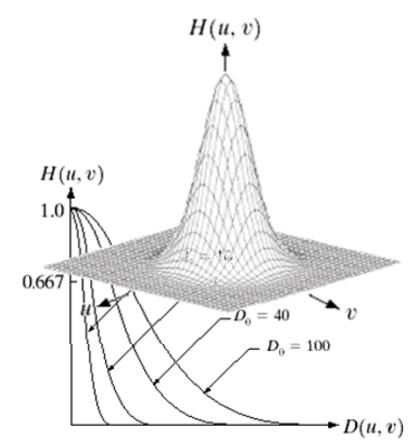


Ideal lowpass filter



Butterworth lowpass filter

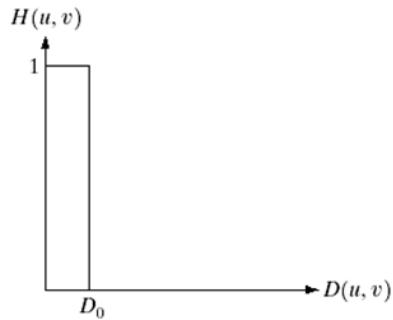
Rất trơ



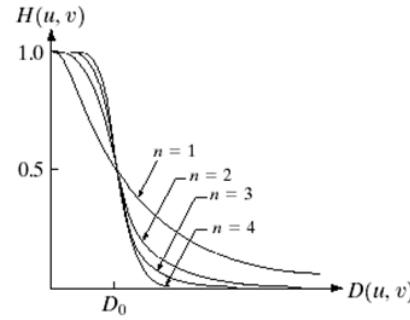
Gaussian lowpass filter

Cut-off frequency D_0

- Cut-off frequency D_0 là điểm đánh dấu sự thay đổi của $H(u, v)$ từ 0 đến 1 (hoặc ngược lại)
 - Thay đổi có thể là đột ngột (ILPF) hoặc dần dần (BLPF và GLPF)



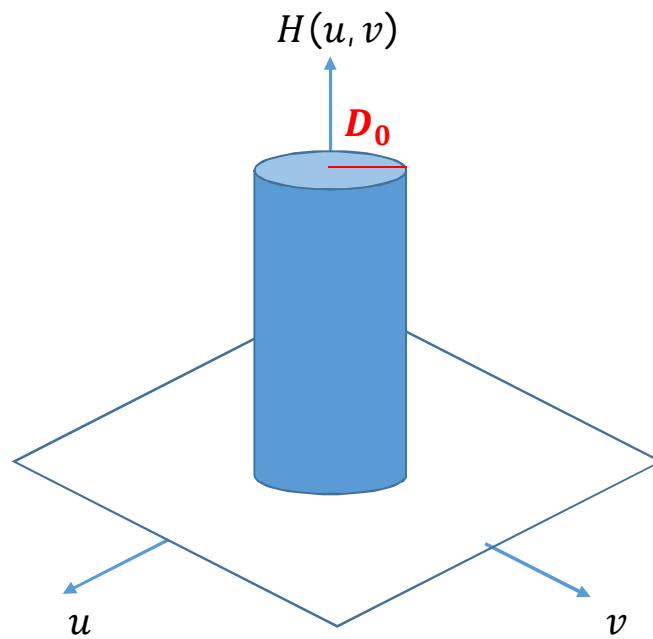
Ideal lowpass filter



Butterworth lowpass filter

Cut-off frequency D_0

- D_0 là hằng số dương, xác định đường tròn có tâm tại thành phần tần số zero và bán kính D_0



Khoảng cách $D(u, v)$

- $D(u, v)$ là khoảng cách giữa một điểm (u, v) trong miền tần số và tâm của vùng tần số hình chữ nhật $P \times Q$

$$D(u, v) = \left[\left(u - \frac{P}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Ideal lowpass filter (ILPF)

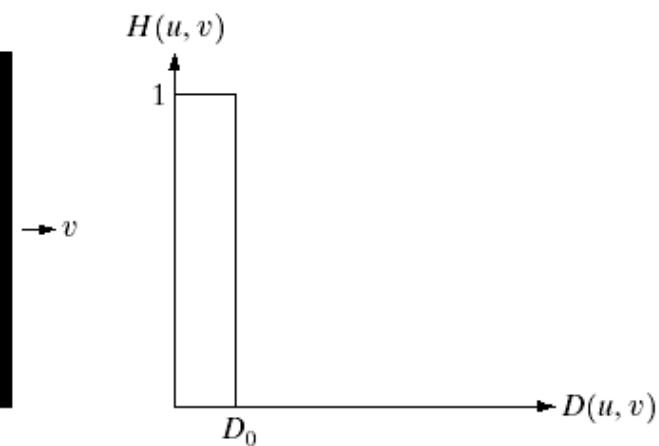
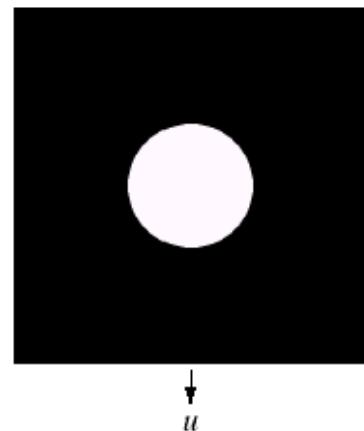
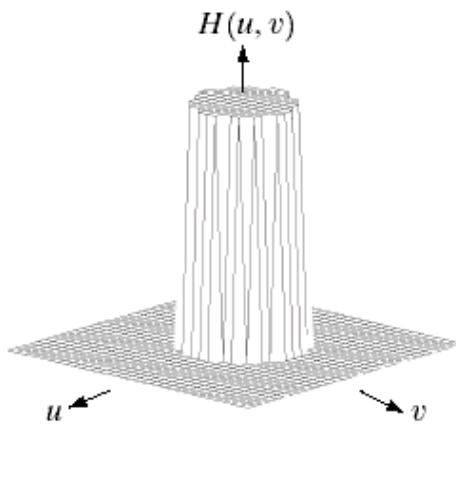
- ILPF cho qua (không làm yếu) các tần số nằm trong đường tròn bán kính D_0 và đặt về 0 cho mọi tần số nằm ngoài đường tròn

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- Mạch điện tử không thể nhận biết cách đặt ngưỡng đột ngột của ILPF, chỉ giả lập được trên máy tính

a | b | c

- a. Đồ thị phối cảnh của hàm chuyển ILPF
- b. Bộ lọc được biểu diễn thành ảnh
- c. Mặt cắt xuyên tâm của bộ lọc

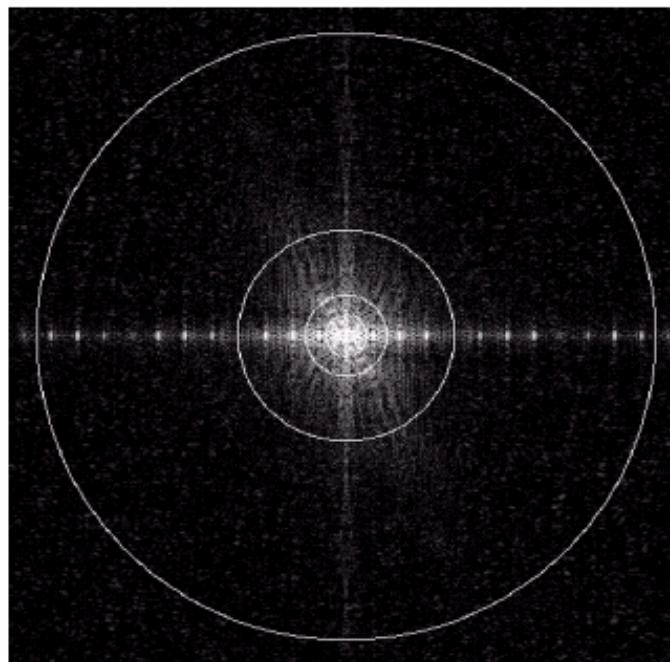
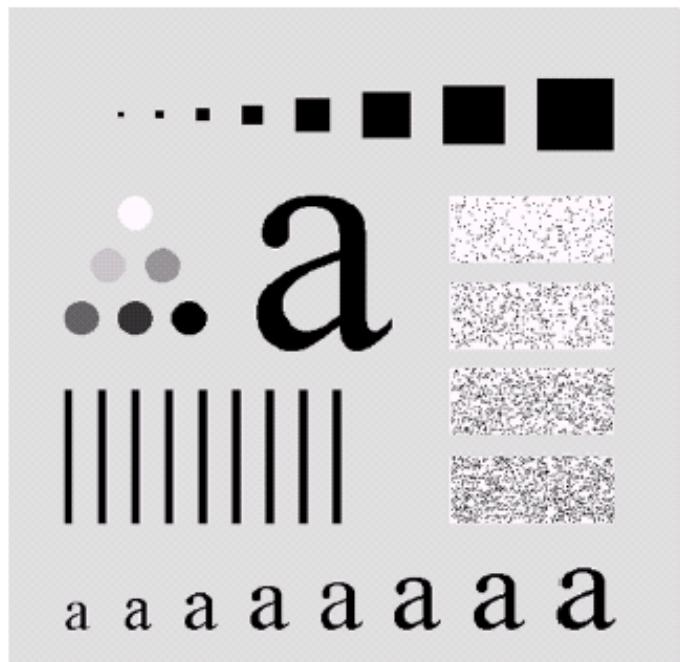


a | b

a. Ảnh có kích thước 500×500 pixels

b. Phổ Fourier của a.

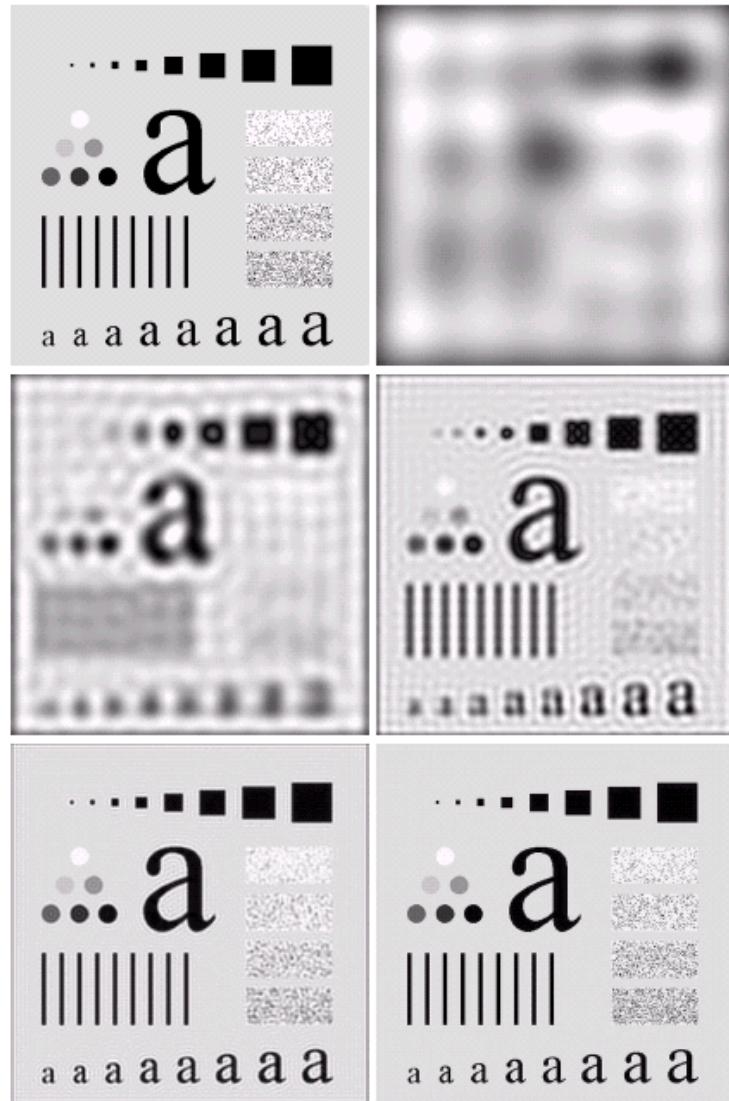
Các đường tròn đặt lên phổ có bán kính lần lượt là 5, 15, 30, 80, 230, chứa lần lượt 92.0, 94.6, 96.4, 98.0 và 99.5% năng lượng ảnh



a	b
c	d
e	f

a. Ảnh gốc

b – f Kết quả của ILPF với cut-off frequency tại bán kính 5, 15, 30, 80, và 230. Năng lượng bị lọc bỏ lần lượt là 8, 5.4, 3.6, 2 và 0.5% tổng năng lượng

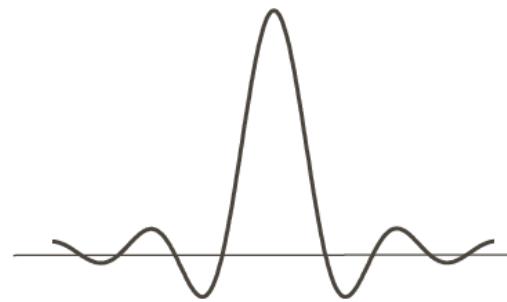
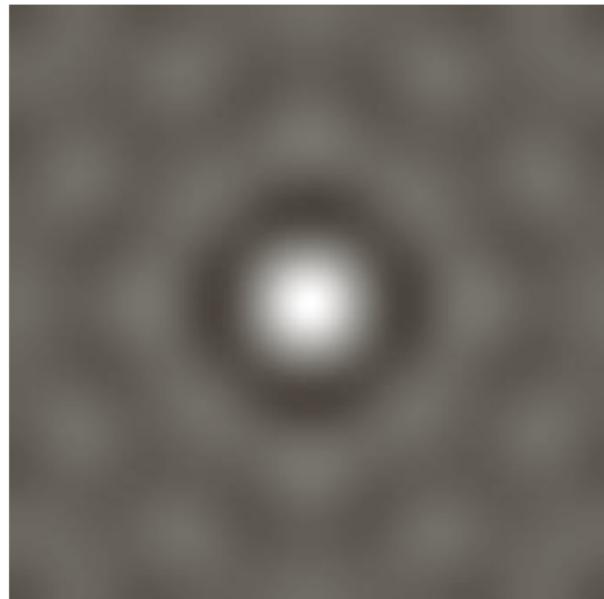


Hiện tượng “ringing”

- Mặt cắt của $H(u, v)$ trong miền tần số có dạng hàm hộp $\Rightarrow h(x, y)$ trong miền không gian có dạng hàm sinc
- Tích chập hàm sinc với mỗi điểm ảnh sẽ cho bản sao của sinc tại vị trí tương ứng
 - Thùy chỉnh của sinc gây hiệu ứng nhòe
 - Các thùy nhỏ hơn là nguyên nhân của “ringing”

a | b

- a. Biểu diễn trên miền không gian của một ILPF có bán kính 5 và kích thước 1000×1000
- b. Lát cắt cường độ của một đường thẳng nằm ngang đi qua tâm ảnh



Butterworth lowpass filter (BLPF)

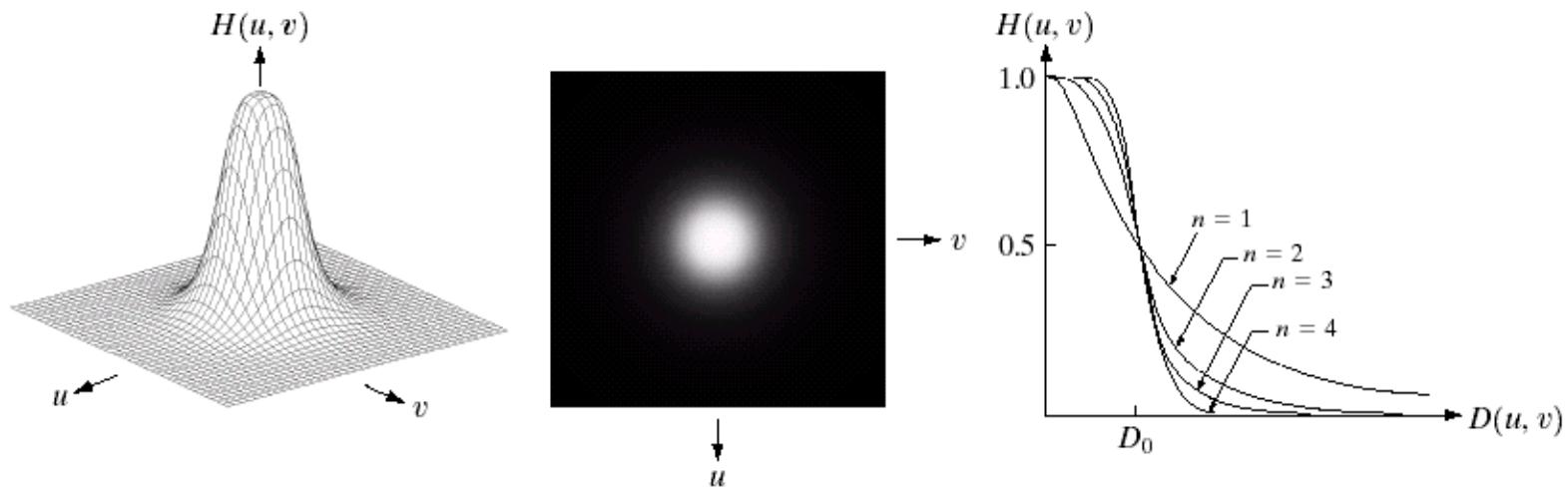
- Hàm chuyển của BLPF bậc n với cut-off frequency D_0

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

- Bậc 1: không xảy ra “ringing”
- Bậc 2: có “ringing” nhưng khó cảm nhận được
- Bậc >2 : “Ringing” ngày càng nghiêm trọng hơn

a b c

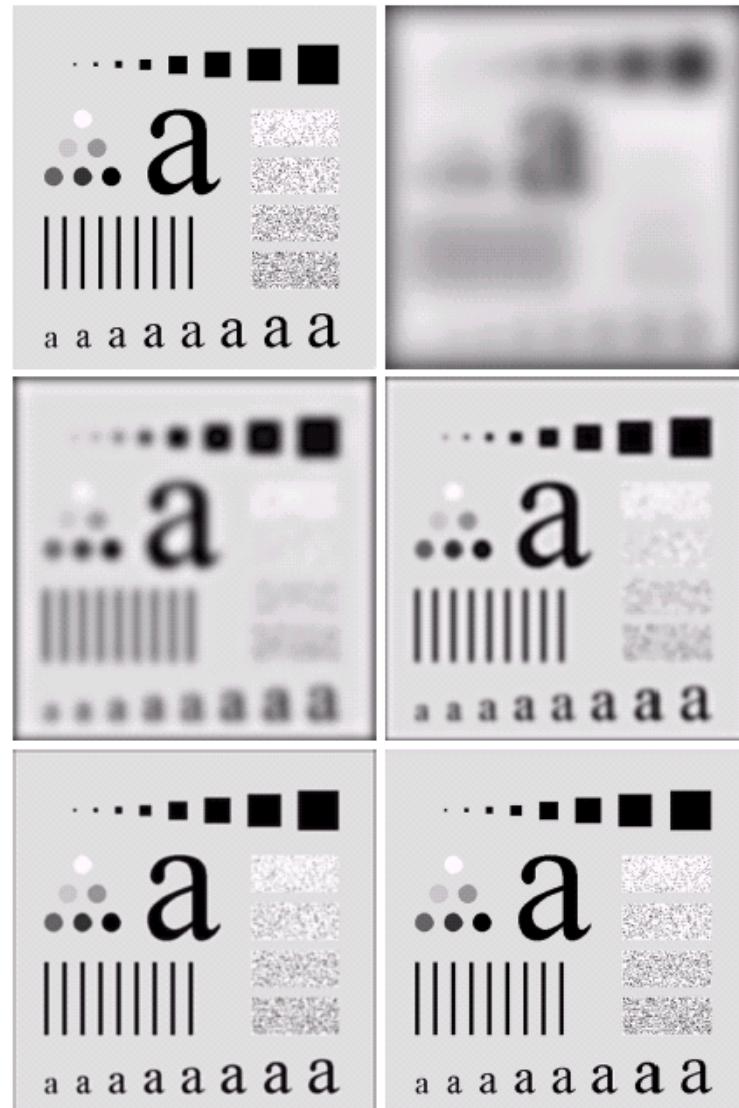
- a. Đồ thị phối cảnh của hàm chuyển BLPF
- b. Bộ lọc được biểu diễn thành ảnh
- c. Mặt cắt xuyên tâm của bộ lọc với bậc 1 đến 4



a	b
c	d
e	f

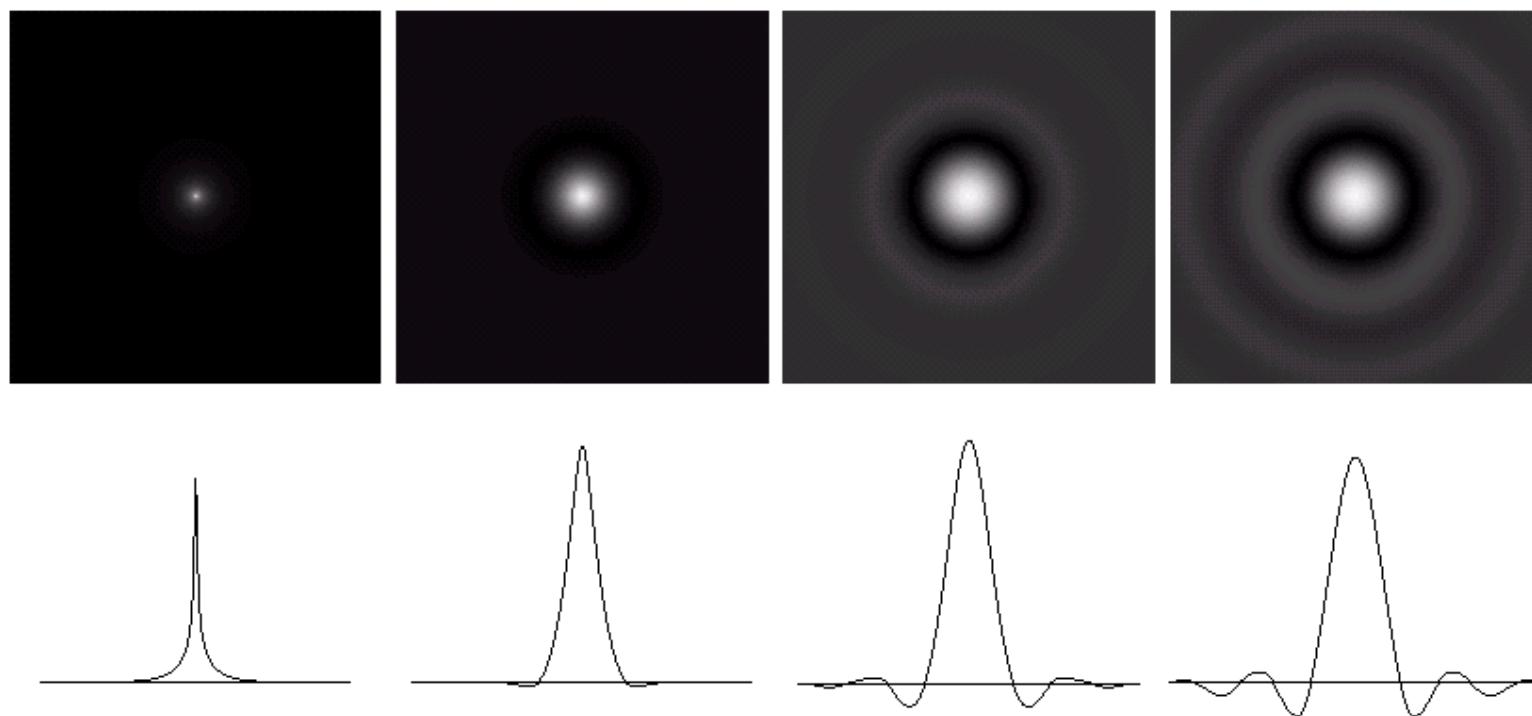
a. Ảnh gốc

b – f Kết quả của BLPF ($n = 2$) với cut-off frequency tại bán kính 5, 15, 30, 80, và 230.



a | b | c | d

a – d Biểu diễn không gian của BLPF bậc 1, 2, 5, và 20 và lát cắt cường độ đi qua tâm bộ lọc (kích thước 1000×1000 và cut-off frequency là 5)
Chú ý hiệu ứng ringing tăng dần theo bậc n



Gaussian lowpass filter (GLPF)

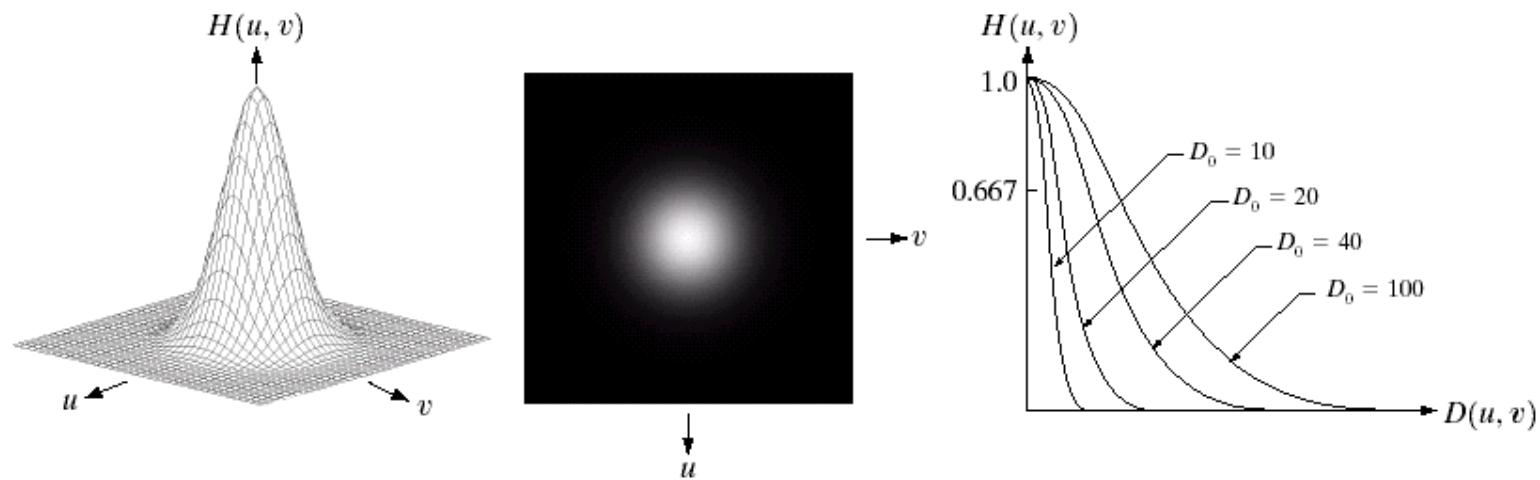
- Hàm chuyển của GLPF với cut-off frequency D_0

$$H(u, v) = e^{-\frac{D(u,v)^2}{2D_0^2}}$$

- Biến đổi Fourier nghịch của GLPF cũng là một hàm Gaussian
⇒ không xảy ra “ringing”

a | b | c

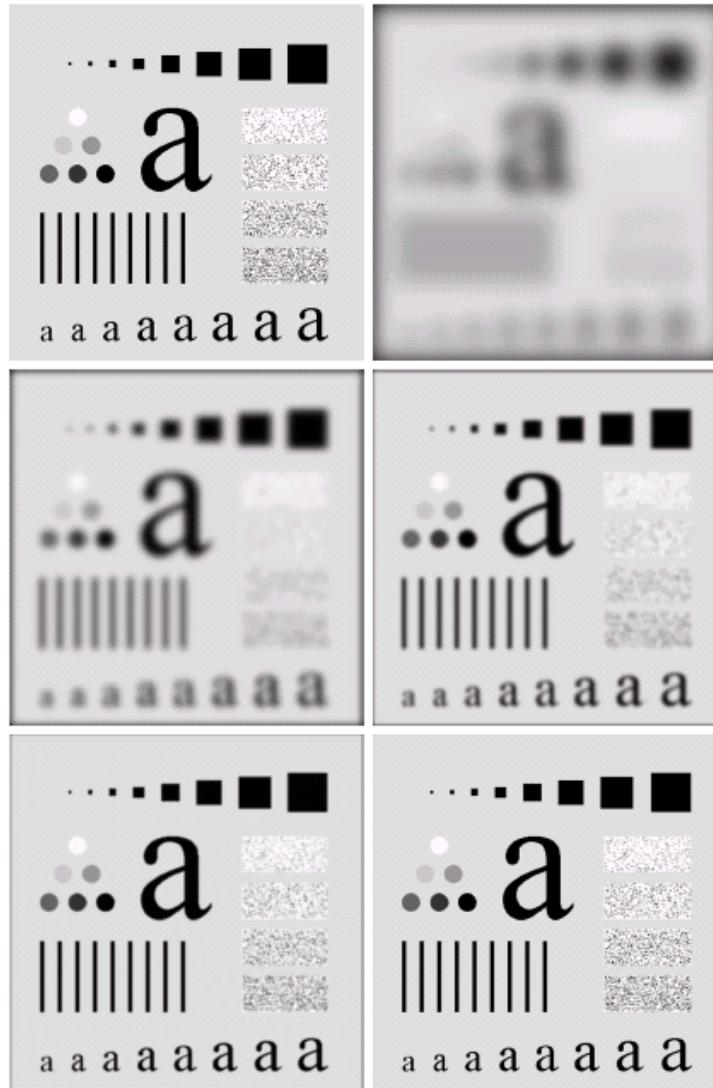
- a. Đồ thị phối cảnh của hàm chuyển GLPF
- b. Bộ lọc được biểu diễn thành ảnh
- c. Mặt cắt xuyên tâm của bộ lọc với các D_0 khác nhau



a	b
c	d
e	f

a. Ảnh gốc

b – f Kết quả của GLPF với cut-off frequency tại bán kính 5, 15, 30, 80, và 230.



Tổng hợp các bộ lọc tần số thấp

Bộ lọc	Công thức
Ideal lowpass filter (ILPF)	$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$
Butterworth lowpass filter (BLPF)	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$
Gaussian lowpass filter (GLPF)	$H(u, v) = e^{-D(u, v)^2/2D_0^2}$

* D_0 : cut-off frequency, n : bậc của bộ lọc Butterworth

Ví dụ về lowpass filtering

- Lowpass filtering trên miền tần số được sử dụng trong nhiều ứng dụng thực tiễn
 - Nhận thức của máy: nhận dạng chữ
 - Công nghiệp in ấn và xuất bản
 - Xử lý ảnh trên không và ảnh vệ tinh

a b

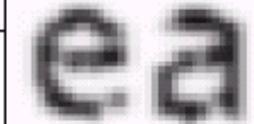
- a. Văn bản có độ phân giải kém (chú ý các chữ cái bị đứt gãy trong khung phóng to)
- b. Kết quả lọc bằng GLPF (các đoạn đứt gãy đã được nối liền)

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



ea

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



ea

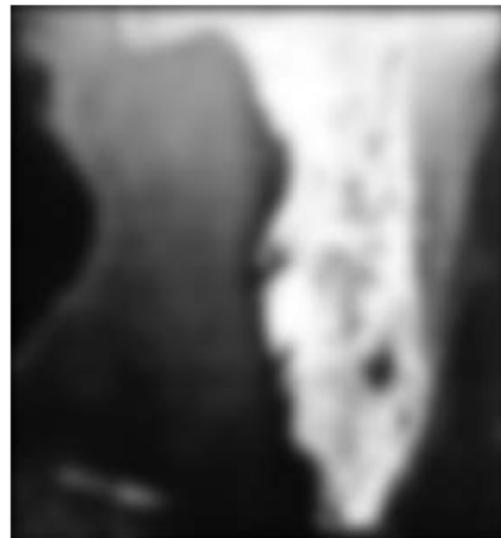
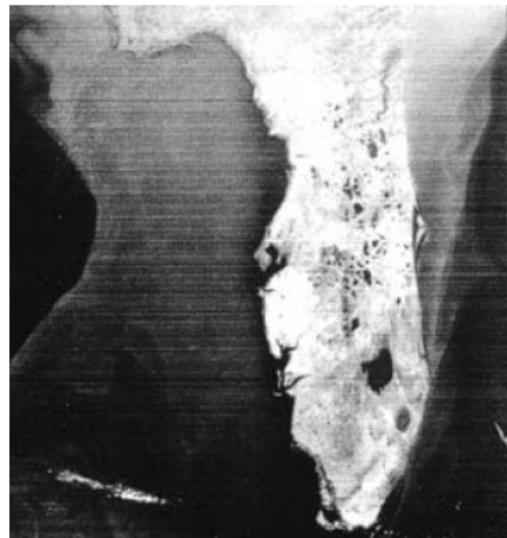
a | b | c

- a. Ảnh gốc (1028×732 pixels)
- b. Kết quả lọc bằng GLPF với $D_0 = 100$
- c. Kết quả lọc bằng GLPF với $D_0 = 80$
- d. Chú ý sự giảm các nếp nhăn trong ảnh b. và c. so với a.



a | b | c

- a. Ảnh gốc thấy rõ các đường quét
- b. Kết quả lọc bằng GLPF với $D_0 = 50$
- c. Kết quả lọc bằng GLPF với $D_0 = 20$

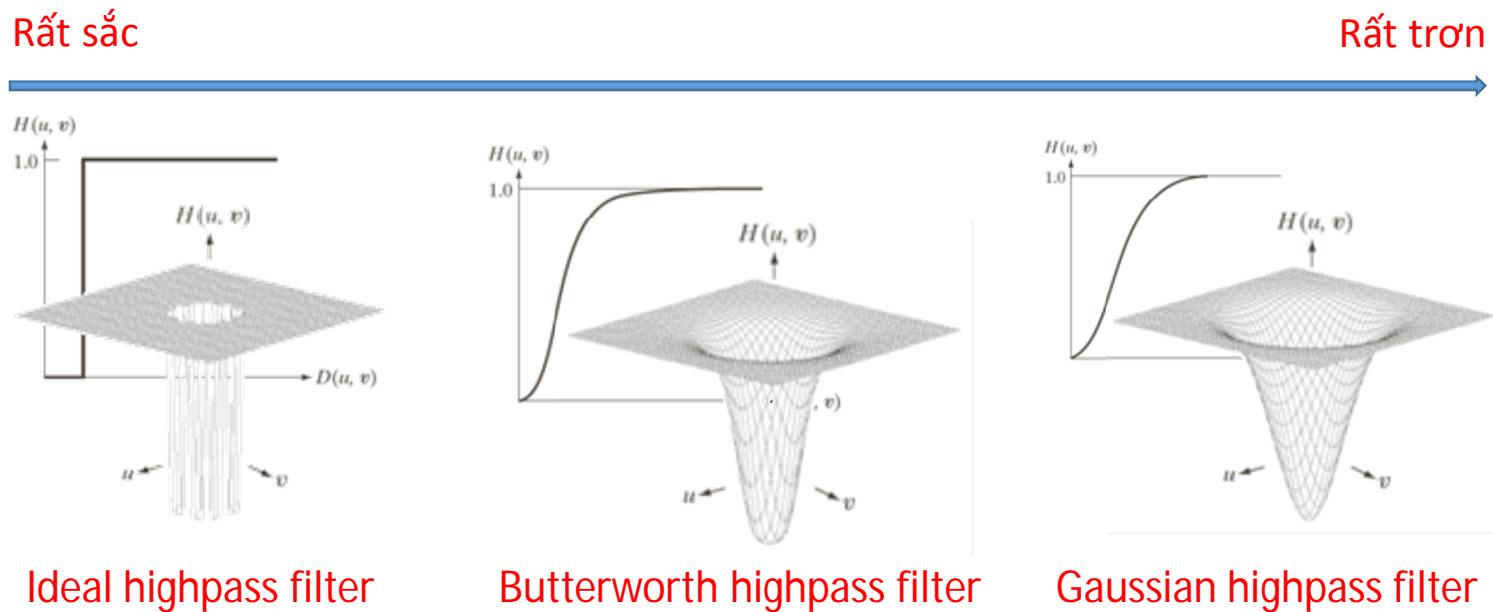


Bộ lọc tần số cao (highpass filters)

Lọc ảnh trong miền tần số

Bộ lọc tần số cao

- Tạo hiệu ứng chi tiết sắc nét trên miền tần số bằng cách làm **yếu tần số thấp**



Ideal highpass filter

Butterworth highpass filter

Gaussian highpass filter

Liên hệ với bộ lọc tần số thấp

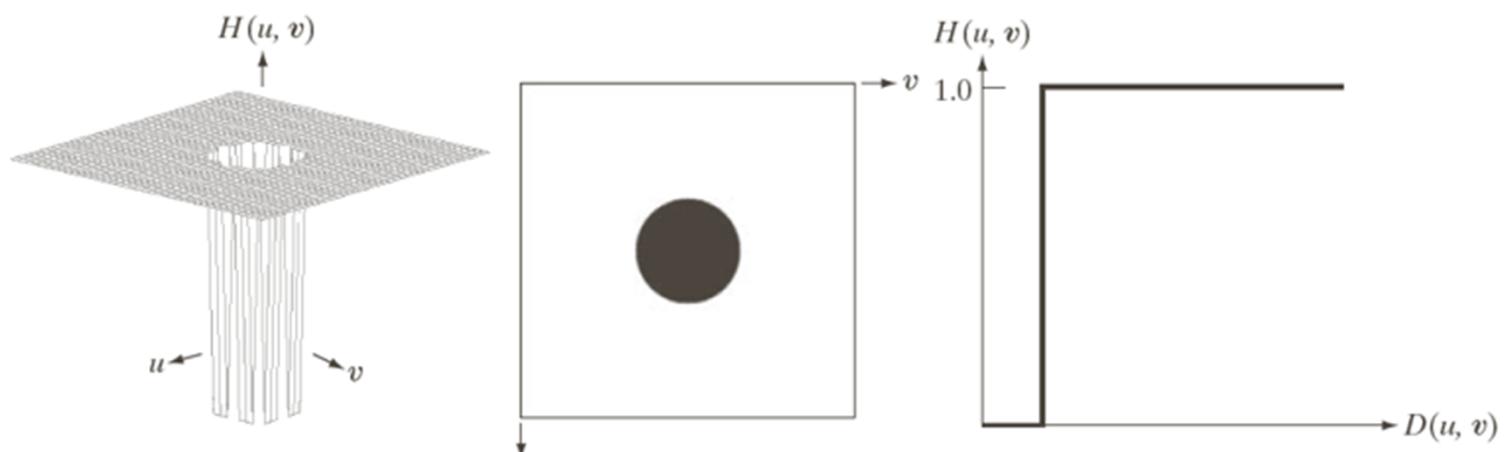
- Công thức liên hệ giữa bộ lọc tần số cao và bộ lọc tần số thấp là

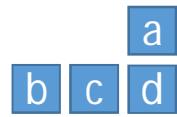
$$H_{HP}(u, v) = 1 - H_{LP}(u, v)$$

- $H_{LP}(u, v)$: hàm chuyển của bộ lọc lowpass
- Những tần số nào mà bộ lọc tần số thấp làm yếu sẽ được bộ lọc tần số cao cho qua, và ngược lại

a | b | c

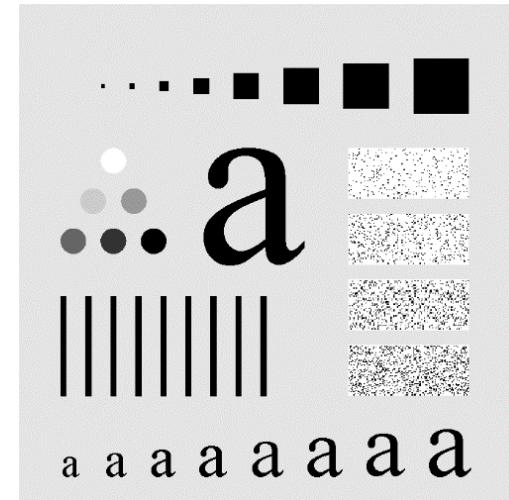
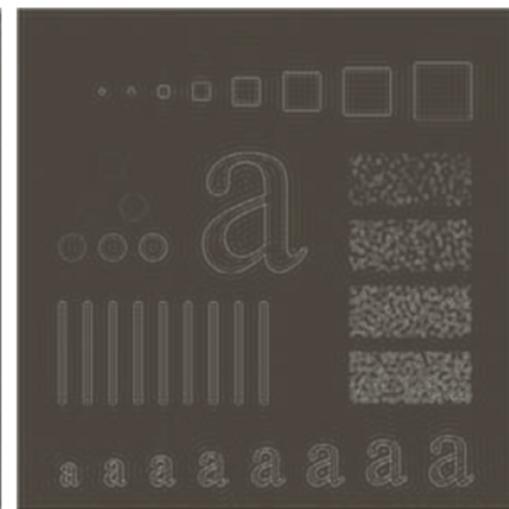
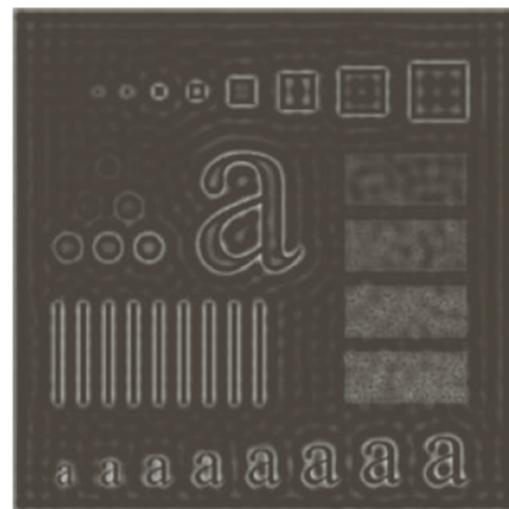
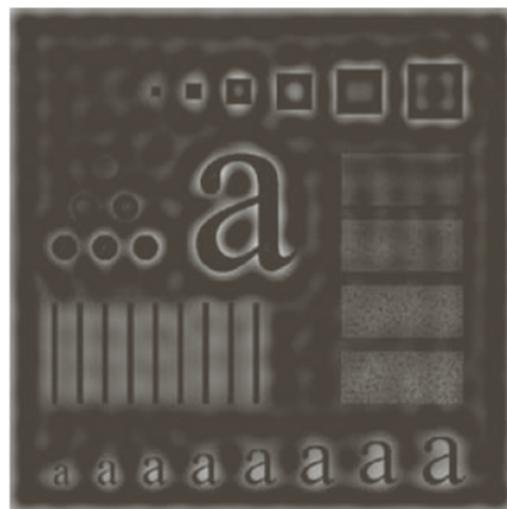
- a. Đồ thị phối cảnh của hàm chuyển IHPF
- b. Bộ lọc được biểu diễn thành ảnh
- c. Mặt cắt xuyên tâm của bộ lọc





a. Ảnh gốc

b – d Kết quả lọc highpass trên a. sử dụng IHPF với $D_0 = 30, 60$ và 160



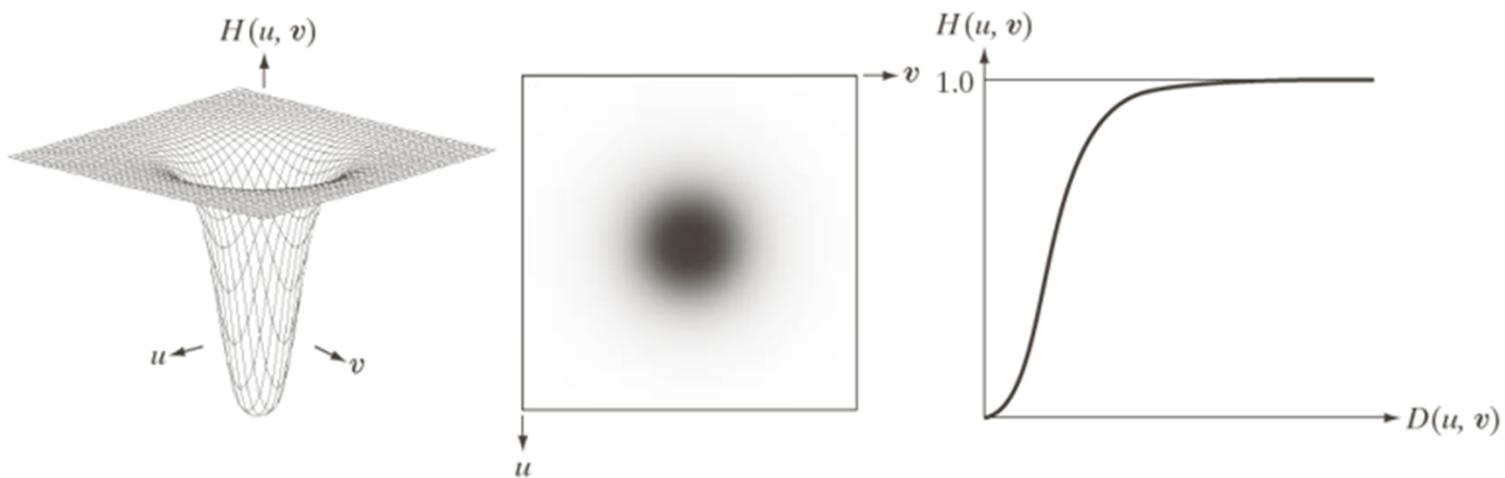
Butterworth highpass filter (BHPF)

- Hàm chuyển của BLPF bậc n với cut-off frequency D_0

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

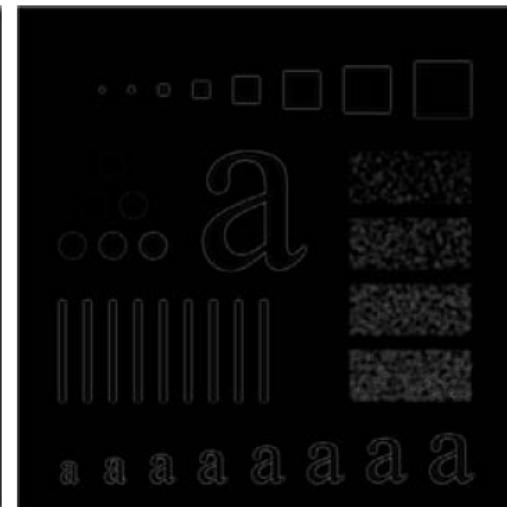
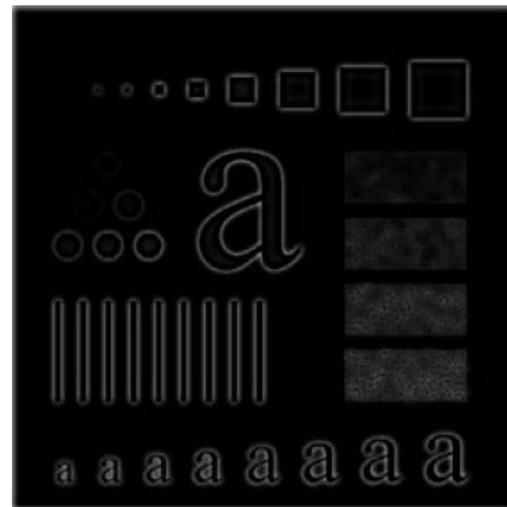
a | b | c

- a. Đồ thị phối cảnh của hàm chuyển BLPF
- b. Bộ lọc được biểu diễn thành ảnh
- c. Mặt cắt xuyên tâm của bộ lọc



a | b | c

Kết quả lọc highpass sử dụng BHPF ($n = 2$) với $D_0 = 30, 60$ và 160
Ảnh đầu ra của BHPF mượt hơn so với ảnh đầu ra của IHPF



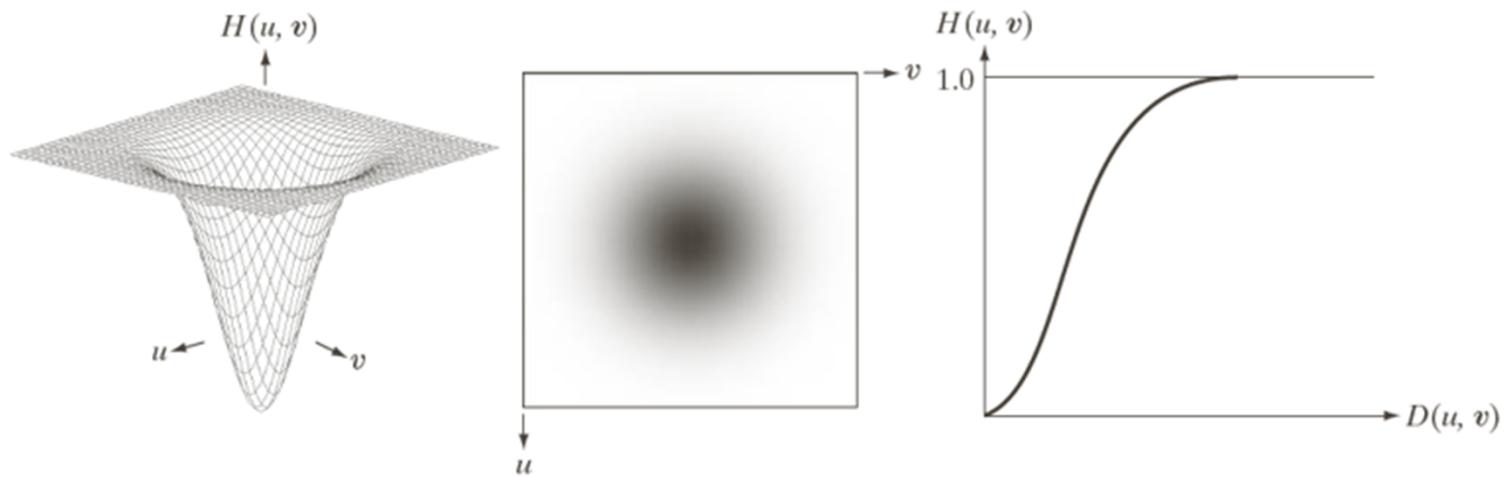
Gaussian highpass filter (GHPF)

- Hàm chuyển của GHPF với cut-off frequency D_0

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D(u, v)^2}{2D_0^2}}$$

a b c

- a. Đồ thị phối cảnh của hàm chuyển GHPF
- b. Bộ lọc được biểu diễn thành ảnh
- c. Mặt cắt xuyên tâm của bộ lọc



a b c

Kết quả lọc highpass sử dụng GHPF với $D_0 = 30, 60$ và 160



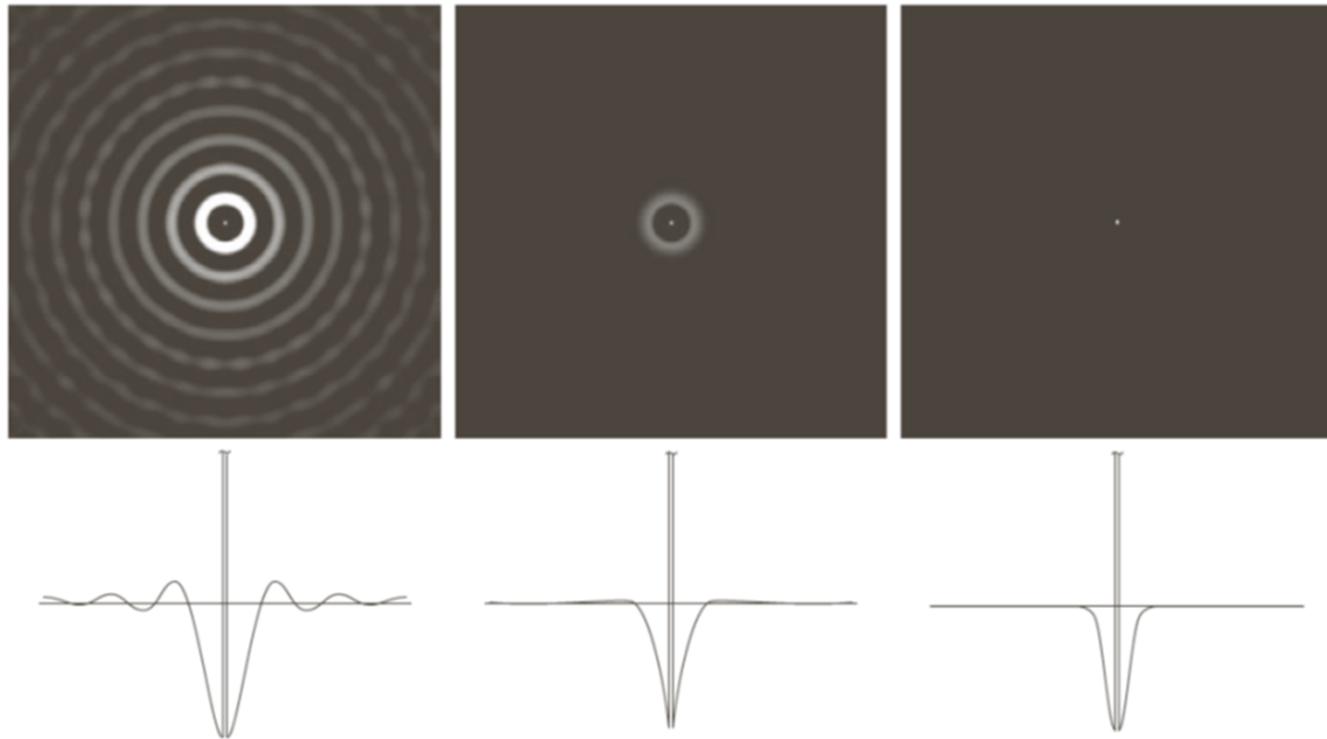
Tổng hợp các bộ lọc tầng số cao

Bộ lọc	Công thức
Ideal high filter (IHPF)	$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$
Butterworth highpass filter (BHPF)	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$
Gaussian highpass filter (GHPF)	$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D(u,v)^2}{2D_0^2}}$

* D_0 : cut-off frequency, n : bậc của bộ lọc Butterworth

a | b | c

Biểu diễn không gian của bộ lọc (a) IHPF, (b) BHPF, và (c) GHPF, cùng với lát cắt cường độ qua tâm của mỗi bộ lọc



Laplacian trong miền tần số

Laplacian trong miền tần số

- Laplacian có thể được triển khai trong miền tần số bằng bộ lọc có dạng

$$H(u, v) = -4\pi^2 D^2(u, v)$$

- Ảnh Laplacian $\nabla^2 f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)F(u, v)\}$

Laplacian trong miền tần số

- Tăng cường ảnh trong miền không gian

$$\mathbf{g(x, y) = f(x, y) + c \nabla^2 f(x, y)}$$

- Chọn $c = -1$ vì $H(u, v)$ âm
- Miền giá trị của $\nabla^2 f(x, y)$ có thể gấp nhiều lần so với $f(x, y) \Rightarrow$ chuẩn hóa $f(x, y)$ về $[0, 1]$ trước khi tính DFT và $\nabla^2 f(x, y)$ về $[-1, 1]$

Laplacian trong miền tần số

- Tăng cường ảnh trong miền tần số

$$\begin{aligned}g(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(u, v) - H(u, v)F(u, v)\} \\&= \mathcal{F}^{-1}\{[1 - H(u, v)]F(u, v)\} \\&= \mathcal{F}^{-1}\{[1 + 4\pi^2 D^2(u, v)]F(u, v)\}\end{aligned}$$

- Cũng gặp phải vấn đề miền giá trị
- Không được chọn phổ biến như thao tác trên miền không gian vì khó xác định hệ số chuẩn hóa

a | b

- a. Ảnh gốc bị nhòe
- b. Ảnh tăng cường sử dụng Laplacian trong miền tần số



Qui trình unsharp masking

1. Làm nhòe ảnh gốc $f(x, y)$ thành $f_{LP}(x, y)$

$$f_{LP}(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{lp}(u, v)F(u, v)\}$$

- $H_{lp}(u, v)$: bộ lọc lowpass trong miền tần số

2. Trừ ảnh nhòe từ ảnh gốc (hiệu số gọi là mask)

$$g_{mask}(x, y) = f(x, y) - f_{LP}(x, y)$$

3. Cộng mask và ảnh gốc

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{mask}(x, y)$$

- $k = 1$: unsharp masking, $k > 1$: highboost filtering

Qui trình unsharp masking

- Biểu diễn công thức tạo $g(x, y)$ theo khái niệm trong miền tần số

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{[1 + k * (1 - H_{LP}(u, v))]F(u, v)\}$$

High-frequency-emphasis filtering

- Công thức tính $g(x, y)$ sử dụng bộ lọc highpass $H_{HP}(x, y)$
$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{[1 + k * H_{LP}(u, v)]F(u, v)\}$$

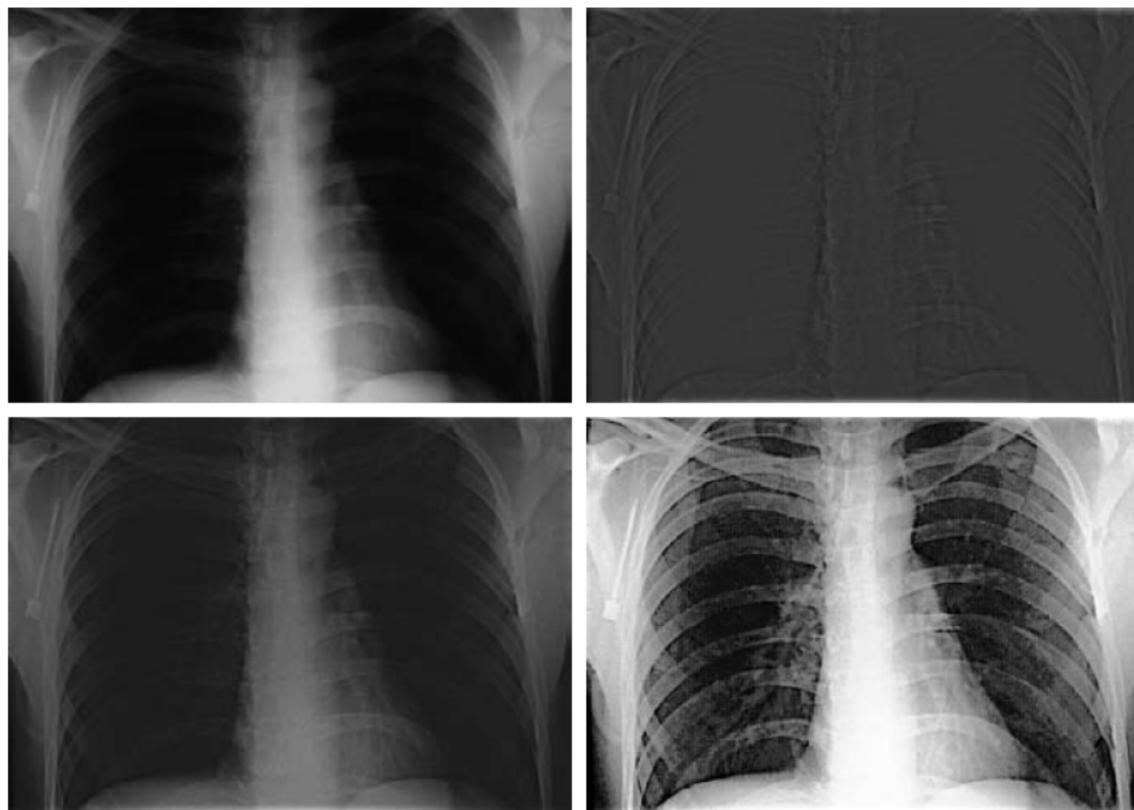
- Công thức tổng quát

$$\mathbf{g(x, y)} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{[k_1 + k_2 * H_{HP}(u, v)]F(u, v)}$$

- k_1 là hằng số điều khiển giá trị offset tính từ gốc
- k_2 là hằng số điều khiển độ đóng góp của tần số cao

a b
c d

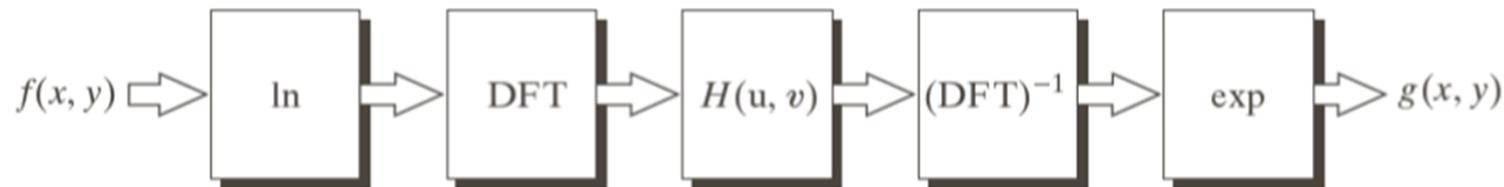
- a. Ảnh X-quang ngực
- b. Kết quả highpass filtering với bộ lọc Gaussian
- c. Kết quả của high-frequency-empahsic filer với cùng bộ lọc
- d. Kết quả áp dụng cân bằng histogram trên c.



Lọc homomorphic

Lọc homomorphic

- Làm yếu sự đóng góp của tần số thấp **đồng thời** nhấn mạnh sự đóng góp của tần số cao



Lọc homomorphic

- Ảnh $f(x, y)$ được phân tích thành hai thành phần *illumination* $i(x, y)$ và *reflectance* $r(x, y)$

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

- Giả sử ta định nghĩa $z(x, y) = \ln f(x, y)$

Thì $\mathcal{F}\{z(x, y)\} = \mathcal{F}\{\ln f(x, y)\}$

- Đặt $F_i(x, y) = \mathcal{F}\{\ln i(x, y)\}, F_r(x, y) = \mathcal{F}\{\ln r(x, y)\}$
 $Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$

Lọc homomorphic

- Lọc $Z(u, v)$ bằng bộ lọc $H(u, v)$ sao cho

$$\begin{aligned} S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v) \end{aligned}$$

- Ảnh đã lọc trong miền không gian là

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}\{S(u, v)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\} + \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\} \end{aligned}$$

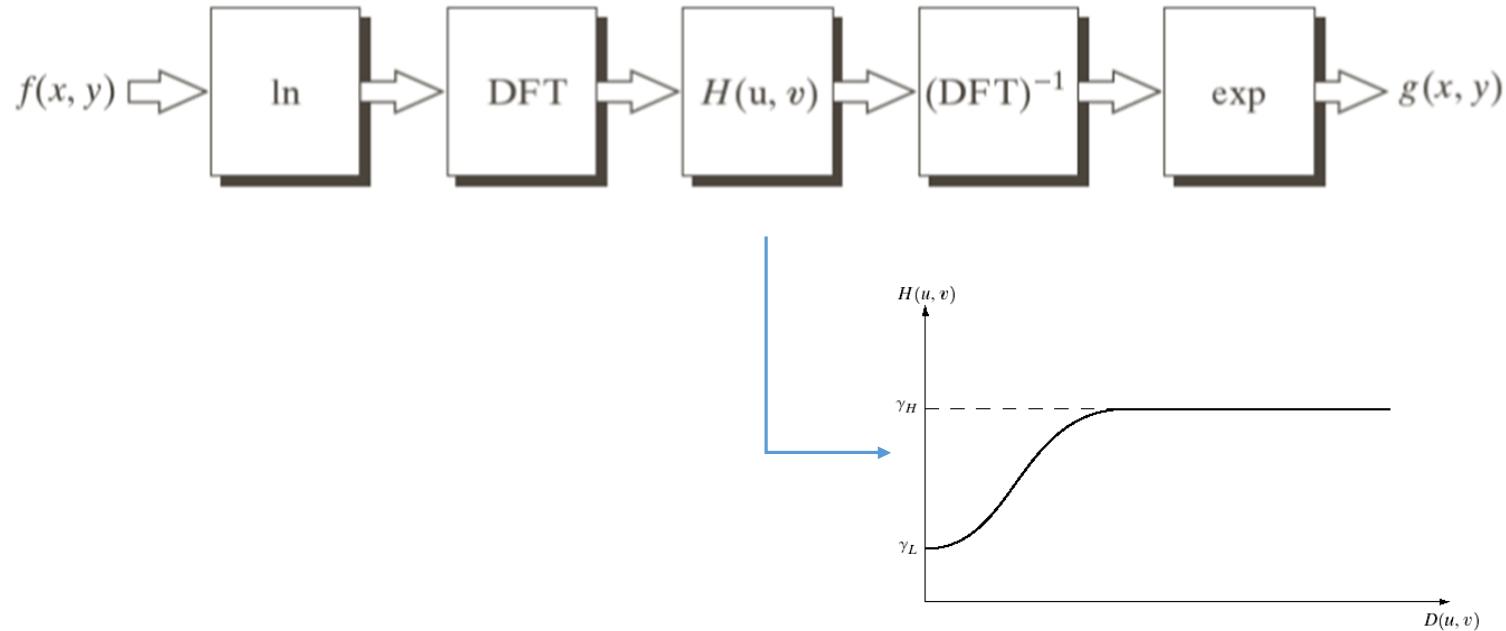
- Đặt $i' = \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\}$, $r' = \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\}$
 $s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y)$

Lọc homomorphic

- Ảnh đầu ra

$$g(x, y) = e^{s(x, y)} = e^{i'(x, y)r'(x, y)} e^{r'(x, y)} = i_0(x, y)r_0(x, y)$$

- $i_0(x, y)$: thành phần *illumination* của ảnh đầu ra
- $r_0(x, y)$: thành phần *reflectance* của ảnh đầu ra



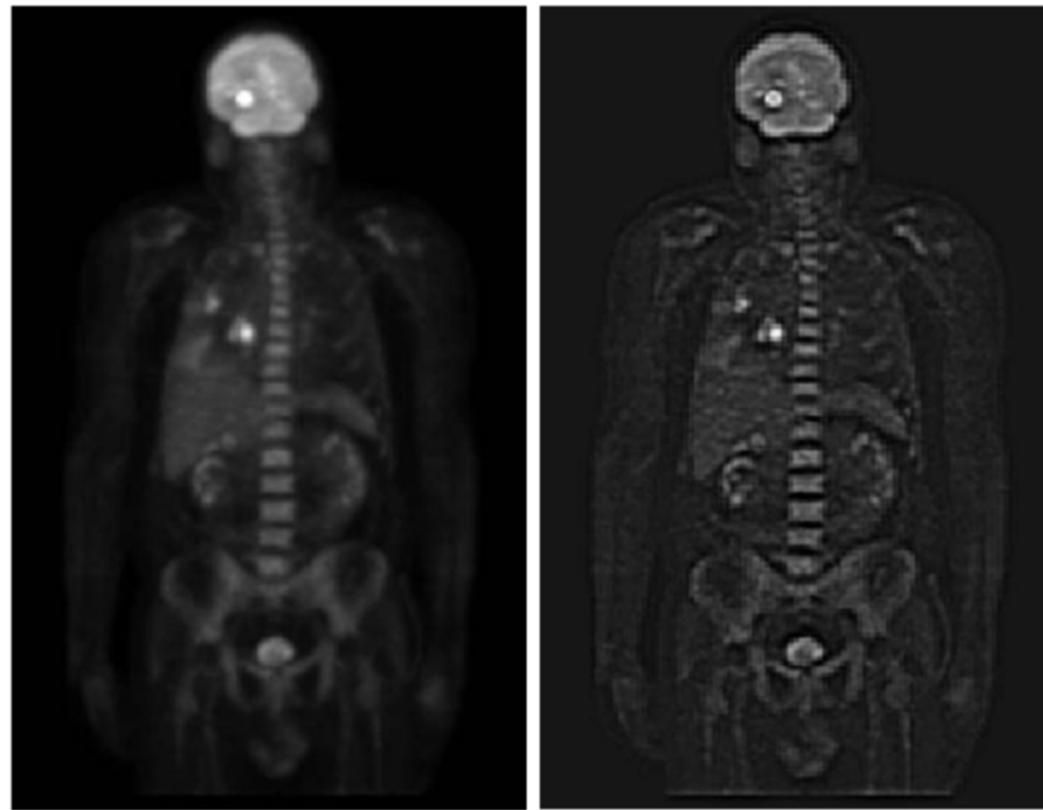
Đường biến thiên có thể được ước lượng bằng cách chỉnh sửa bộ lọc Gaussian highpass

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[1 - e^{-c \left[\frac{D^2(u, v)}{D_0^2} \right]} \right] + \gamma_L$$

Khi $\gamma_L < 1$ và $\gamma_H > 1$: làm yếu sự đóng góp của tần số thấp (illumination) và tăng cường sự đóng góp của tần số cao (reflectance) \Rightarrow đồng thời nén dynamic range và tăng cường độ tương phản

a | b

- a. Ảnh PET của cơ thể người
b. Tăng cường ảnh bằng homomorphic filtering



Nâng cao chất lượng ảnh

Xử lý ảnh và Video số

Nâng cao chất lượng ảnh

- Xử lý ảnh đầu vào để ảnh đầu ra “**nhìn tốt hơn**” (visually better) ảnh đầu vào cho một ứng dụng cụ thể.
- Nâng cao chất lượng ảnh có thể thực hiện:
 - Miền không gian: thao tác trên ảnh gốc
$$g(m, n) = T[f(m, n)]$$
 - Miền tần số: thao tác trên DFT của ảnh gốc
$$G(u, v) = T[F(u, v)]$$
với $F(u, v) = F[f(m, n)]$ và $G(u, v) = F[g(m, n)]$

Nâng cao chất lượng ảnh



- Thao tác lược đồ ảnh
 - Thao tác trên ảnh xám
 - Thao tác trên ảnh màu
 - ...
- Bộ lọc làm trơn ảnh
 - Thao tác trên đạo hàm ảnh
 - Thao tác trên lược đồ
 - ...
- Lọc thông tần số thấp
 - Lọc thông tần số cao
 - Thao tác trên lược đồ
 - ...

Vấn đề của DFT

Xử lý ảnh trong miền tần số

Vấn đề khó khăn của DFT

$$\mathcal{F}_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

- Việc đánh giá cần N^2 phép nhân và $N(N - 1)$ phép cộng trên số phức
- Bài toán thực tế thường chọn $N \geq 256 \Rightarrow$ gấp phải vấn đề lớn về tốc độ tính toán

Fast Fourier Transform (FFT)

- 1805 – Gauss đề ra phương pháp nội suy quỹ đạo của tiểu hành tinh Pallas và Juno
- 1805 – 1965 Vài phiên bản FFT khác ra đời
 - 1932 Yates, Interaction algorithm cho Hadamard and Walsh transforms
 - 1942 Danielson và Lanczos, tính DFT cho dữ liệu tinh thể học, tận dụng tính chu kỳ thay vì tính đối xứng
- 1965 – Cooley and Turkey, tính DFT khi N đa hợp và thường là mũ của 2

Fast Fourier Transform (FFT)

- FFT tính DFT nhanh hơn với độ phức tạp $\Theta(N \log N)$ (so với $O(N^2)$)
- Nhiều thuật toán FFT còn cho độ lỗi thấp hơn đánh giá DFT trực tiếp
- Ví dụ:

	Đánh giá DFT trực tiếp	Cooley – Tukey (1965)
Phép nhân	N^2	$N/2\log_2(N)$
Phép cộng	$N(N - 1)$	$N\log_2(N)$

Tài liệu tham khảo

- Slide Xử Lý ảnh, Nguyễn Ngọc Thảo
- Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods, "Digital Image Processing", 3rd edition, 2008. Chapter 4
- gear.kku.ac.th/~nawapak/178353/Chapter04.ppt
- http://www.sci.utah.edu/~gerig/CS6640-F2012/Materials/CS6640_F2012_Fourier.pdf



ZetGoo