

# คณิตบัญญาทริกเบื้องต้น

ธนະ วัฒนาวารุณ

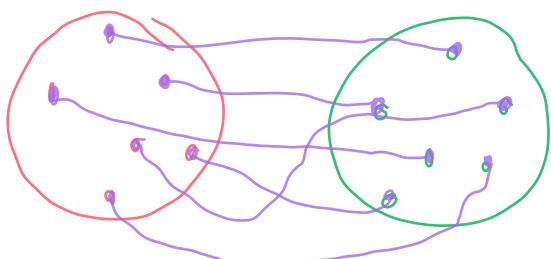
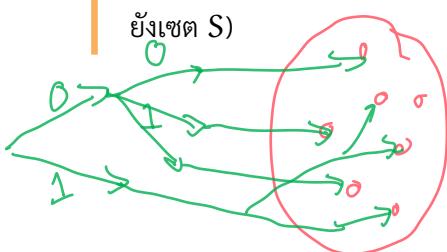
เอกสารนี้ดัดแปลงจากเอกสาร คณิตบัญญาทริกเบื้องต้น ของ อาภาพศ์ จันทร์ทอง

## 1 การนับ

### 1.1 กฎการนับพื้นฐาน

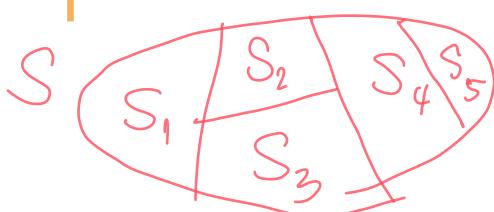
① ห้ามซับซ้อน ② ห้ามซ้ำ

หลักการ 1 (ความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง; Bijection). เราสามารถนับจำนวนสมาชิกของเซต  $S$  โดยให้นับจำนวนสมาชิกของเซต  $T$  แทนได้ เมื่อมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (bijection) จากเซต  $S$  ไปยังเซต  $T$  (หรือจากเซต  $T$  ไปยังเซต  $S$ ) ■



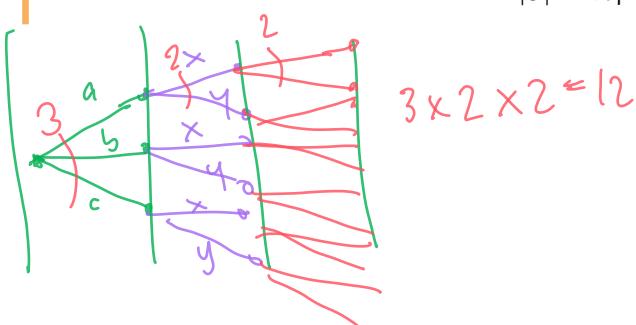
หลักการ 2 (กฎการบวก; Rule of Sum). กำหนดให้เซต  $S$  เป็นเซตจำกัด (finite set) ที่สามารถแบ่งได้เป็นเซต  $S_1, S_2, \dots, S_n$  โดยที่สองเซตใด ๆ ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย แล้ว  $S$  จะมีจำนวนสมาชิกเป็น

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_n|$$

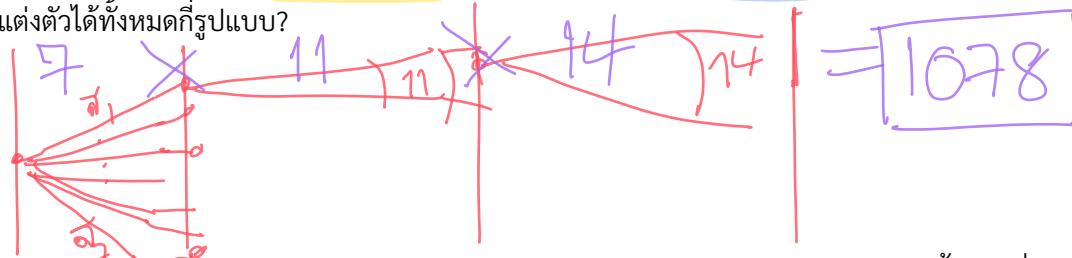


หลักการ 3 (กฎการคูณ; Rule of Product). กำหนดให้เซต  $S$  เป็นเซตจำกัด ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่สร้างได้จากขั้นตอน  $k$  ขั้น ขั้นตอนที่  $i$  (สำหรับ  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) มีตัวเลือกที่เป็นไปได้  $n_i$  รูปแบบ โดยที่จำนวนรูปแบบนี้ไม่ขึ้นกับขั้นตอนก่อนหน้า แล้ว  $S$  จะมีจำนวนสมาชิกเป็น

$$|S| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$



**คำถาม 4.** คุณสมมติเสื้อในตู้เสื้อผ้า 7 ตัว มีกางเกง 5 ตัว มีกระโปรง 6 ตัว และมีหมวก 13 ใบ อยากรู้ว่าหากคุณ  
สมมติการเลือกเสื้อหนึ่งตัว กางเกงหรือกระโปรงหนึ่งตัว และอาจสวมหมวกหนึ่งใบหรือไม่ รวมมากกี่ตัว คุณสม  
จะสามารถแต่งตัวได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ?



**คำถาม 5.** บิตสตริง (bit string) ความยาว  $n$  ตัว (แต่ละตัวประกอบไปด้วยสัญลักษณ์ 0 หรือ 1) มีทั้งหมดกี่สาย?

$$2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$$

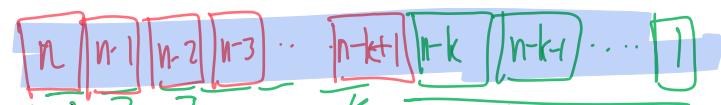
**คำถาม 6.** มีถุงอยู่ทั้งสิ้น 3 ใบซึ่งล้วนบรรจุสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด นอกจากนั้นยังทราบว่าถุงแต่ละใบจะมี  
สิ่งของมากกว่าหนึ่งชิ้น หากเราหยิบสิ่งของจากถุงใบที่หนึ่งและถุงใบที่สองถุงละ 1 ชิ้น จะได้คู่อันดับของสิ่งของ  
ที่หยิบออกมาได้ทั้งหมด 78 รูปแบบ แต่ถ้าหากเราหยิบสิ่งของจากถุงใบที่สองและถุงใบที่สามถุงละ 1 ชิ้น จะได้  
คู่อันดับของสิ่งของที่หยิบออกมาได้ทั้งหมด 143 รูปแบบ และถ้าอยากรายหานายบสิ่งของจากถุงทั้ง 3 ใบถุงละ 1 ชิ้น  
แล้วจะได้ชุดอันดับของสิ่งของที่หยิบออกมาได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ?



$$\begin{aligned} n_1 \cdot n_2 &= 78 \\ n_2 \cdot n_3 &= 143 \\ n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 &= 9 \times 13 \times 11 = 1858 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 &= 6 \\ n_2 &= 13 \\ n_3 &= 11 \end{aligned}$$

## 1.2 การเรียงสับเปลี่ยน



**ทฤษฎีบท 7** (การเรียงสับเปลี่ยน; Permutation). มีวัตถุ  $n$  ชิ้นที่แตกต่างกัน เราจะสามารถเลือกวัตถุ  $k$  ชิ้น นำ  
มาวางเรียงเป็นลำดับได้ทั้งสิ้น  $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$  รูปแบบ

**คำถาม 8.** มีนักเรียน 24 คนรอเข้าแถวตอนรอตักอาหารอย่างสุภาพชนโดยพร้อมเพรียงกันทุกคน อยากรู้ว่า  
จะมีรูปแบบลำดับการยืนของนักเรียนใน列ว่าทั้งหมดกี่รูปแบบ?

24!

$$\frac{24!}{(24-24)!} = \frac{24!}{0!} = \frac{24!}{1}$$

**คำถาม 9.** มีนักเรียน 24 คนรอเข้าแถวตอนรอตักอาหารอย่างสุภาพชนโดยพร้อมเพรียงกันทุกคน แต่ในระหว่างรอ  
อาหารมาระยะนี้ อาจารย์ขออาสาสมัครให้นักเรียน 6 คนไปช่วยยกของให้อาจารย์ด้วยการเลือกอย่างสุ่มอย่างเท่า  
เทียม อยากรู้ว่าจะมีรูปแบบลำดับการยืนของนักเรียนที่เหลือภายนอกใน列จากเดิม 24 คนทั้งหมดกี่รูปแบบ?



$$\frac{24!}{(24-18)!} = \frac{24!}{6!}$$

**คำถาม 10.** มีจำนวนเต็มบวก 5 หลัก (ไม่มีขั้นต้นด้วย 0) ทั้งหมดกี่จำนวนที่สอดคล้องกับเงื่อนไขแต่ละข้อต่อไปนี้?

- (a) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- (b) ไม่มีเลขโดดใด ๆ ที่ซ้ำกันเลย
- (c) ไม่มีเลขโดดที่อยู่ติดกันคู่ใด ๆ ที่ซ้ำกันเลย

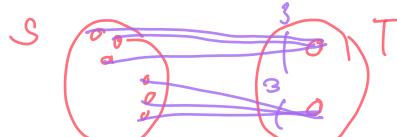
$$(a) \boxed{9} \times \boxed{1} \times \boxed{0} \times \boxed{0} \times \boxed{0} = 90,000$$

$$(b) \boxed{9} \times \boxed{9} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{6} = 9 \times \frac{9!}{5!}$$

$\sim 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.6$

$$(c) \boxed{9} \boxed{9} \boxed{9} \boxed{9} \boxed{9} = 9^5$$

### 1.3 การจัดกลุ่ม



**นิยาม 11.** กำหนดให้มีเซต  $S$  และ  $T$  และฟังก์ชัน  $f : S \rightarrow T$  แล้ว  $f$  จะเป็นความสัมพันธ์แบบ  $k$  ต่อหนึ่งอย่างทั่วถึง ( $k$ -to-1 correspondence) เมื่อสำหรับสมาชิก  $y \in T$  โดยทั่วไปจะมีสมาชิก  $x \in S$  ทั้งสิ้น  $k$  ตัวพอดีที่สอดคล้องกับสมการ  $f(x) = y$  ■

**หลักการ 12** (กฎการหาร; Rule of Division). กำหนดให้  $S$  และ  $T$  เป็นเซตจำกัด และมีฟังก์ชัน  $f : S \rightarrow T$  ที่มีความสัมพันธ์แบบ  $k$  ต่อหนึ่งอย่างทั่วถึงแล้วนั้น จะพบว่า  $|S| = k \cdot |T|$  ■

**ทฤษฎีบท 13** (การจัดกลุ่ม; Combination). มีวัตถุ  $n$  ชิ้นที่แตกต่างกัน เราจะสามารถเลือกวัตถุ  $k$  ชิ้นได้ทั้งสิ้น

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{รูปแบบ} \quad \text{ซึ่งอาจแทนด้วยสัญลักษณ์} \quad \binom{n}{k} \quad \text{ซึ่งอ่านว่า "} n \text{ เลือก } k \text{"}$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์  $\binom{n}{k}$  ข้างต้นมีชื่อเรียกว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial Coefficient) ■

**ทฤษฎีบท 14.** มีวัตถุ  $n$  ชิ้นที่แตกต่างกัน เราจะแบ่งสิ่งของออกให้คนทั้งสิ้น  $k$  คน โดยคนที่หนึ่งจะได้ของ  $n_1$  ชิ้น คนที่สองจะได้ของ  $n_2$  ชิ้น ไปเรื่อยๆ (และกำหนดให้  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ )

เราจะแบ่งสิ่งของทั้งหมดดังกล่าวสอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นได้

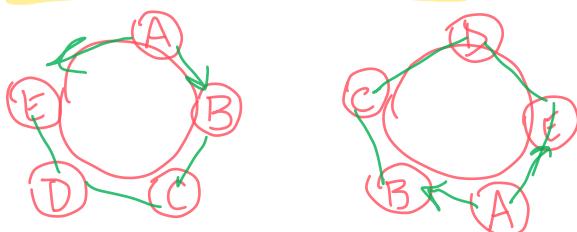
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} \quad \text{วิธี} \quad \text{ซึ่งอาจแทนด้วยสัญลักษณ์} \quad \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$  ข้างต้นเรียกว่าสัมประสิทธิ์เนกนาม (Multinomial Coefficient) ■

**คำถาม 15.** ห้องเรียนทันตะวันมีนักเรียน 25 คน ห้องเรียนกุหลาบมีนักเรียน 15 คน ต้องการคัดเลือกนักเรียนทั้งหมด 20 คน ไปทำกิจกรรมเด่นรำภาคฤดูร้อน โดยเลือกจากแต่ละห้องเรียน ห้องละเท่า ๆ กัน อยากรารบว่าจะคัดเลือกนักเรียนได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ?

$$\binom{25}{10} \binom{15}{10}$$

**คำถาม 16** (การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม). มีนักเรียนทั้งสิ้น 10 คน จะสามารถนั่งล้อมวงทันหน้าเข้าหากันได้กี่รูปแบบ? (กำหนดให้การจัดเรียงรูปแบบการนั่งสองรูปแบบใด ๆ ถือว่าเป็นรูปแบบเดียวกันก็ต่อเมื่อนักเรียนแต่ละคนไม่เพื่อนคนเดิมที่นั่งติดกันทั้งทางด้านซ้ายและขวา แต่หากเพื่อนที่นั่งติดกันทั้งสองข้างดังกล่าวนั่งสลับที่กันจากเดิม ให้ถือว่าเป็นรูปแบบที่แตกต่างจากเดิม)

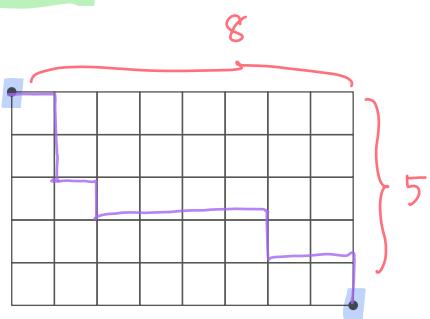
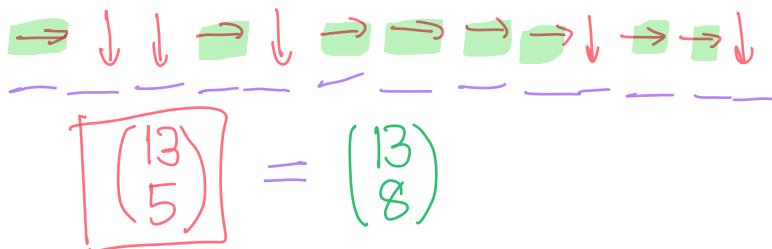


$$\frac{10!}{10} = 9! \cdot \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

**คำถาม 17.** มีนักเรียนทั้งสิ้น 15 คน จะสามารถเลือกนักเรียน 10 คนมานั่งล้อมวงทันหน้าเข้าหากันได้กี่รูปแบบ โดยมีเงื่อนไขเหมือนกับคำถามข้อที่แล้ว?

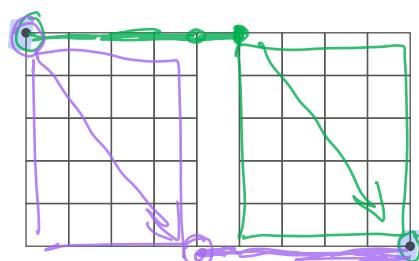
$$\binom{15}{10} 9!$$

**คำถาม 18.** พิจารณาตารางต่อไปนี้ซึ่งมีความกว้าง 8 หน่วยและสูง 5 หน่วย หากต้องการเดินໄต่ตามขอบหรือเส้นตารางจากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวาโดยจะสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย อยากรู้ว่าจะมีเส้นทางระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดดังกล่าวทั้งสิ้นกี่เส้นทาง?

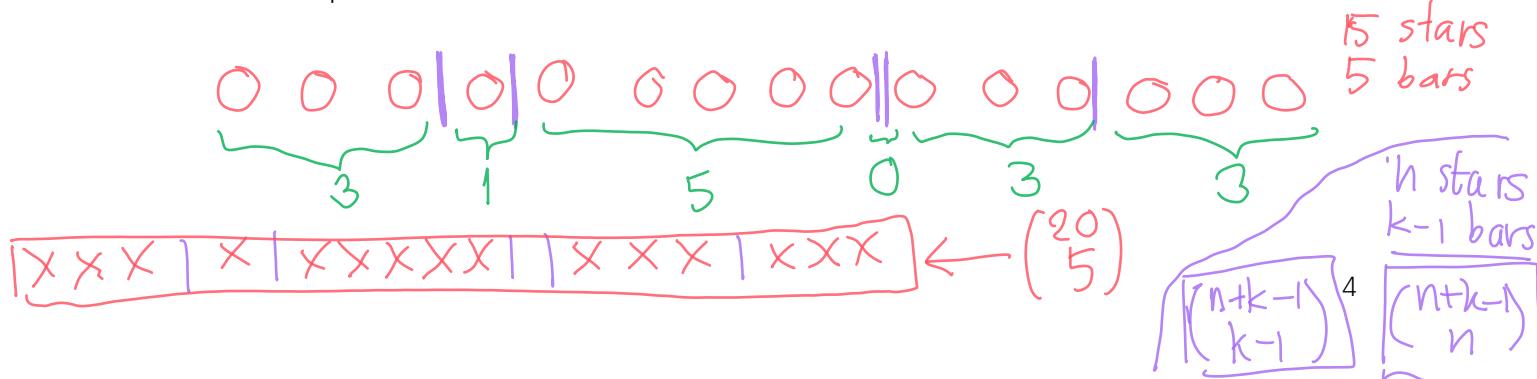


**คำถาม 19.** พิจารณาตารางต่อไปนี้ซึ่งมีความกว้าง 9 หน่วยและสูง 5 หน่วย หากต้องการเดินໄต่ตามขอบหรือเส้นตารางจากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวาโดยจะสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย อยากรู้ว่าจะมีเส้นทางระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดดังกล่าวทั้งสิ้นกี่เส้นทาง?

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow \\ \hline & & & & & & \\ \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}} & + & \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}} & = & \boxed{2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}} \end{array}$$



**คำถาม 20 (Stars and Bars Technique).** มีลูก gwadras เดียวกันอยู่  $n$  เม็ด ต้องการแจกจ่ายให้เพื่อน  $k$  คน โดยแจกจ่ายให้ครบทุกเม็ด จะทำได้กี่วิธี?



คำถาม 21. กำหนดให้  $s$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และจงหาจำนวนคำตอบ  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ของสมการ  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$  ที่  $x_1, x_2, \dots, x_n$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ  $\stackrel{n=5}{}$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

$$(5, 2, 3, 0, 2)$$

$$(4, 1, 1, 1, 2, 4)$$

$$(1, 1, 1, 2, 4, 4)$$

$S$  stars  
 $n-1$  bars

$$\binom{s+n-1}{n-1}$$

$$\binom{s+n-1}{s}$$

#### 1.4 โจทย์ระคน 1

คำถาม 22. บิตสตริงความยาว  $n$  ที่มีสัญลักษณ์ 1 เพียงสองตัวพอดีมีทั้งหมดกี่สาย?

-----

$$\binom{n}{2}$$

คำถาม 23. บิตสตริงความยาว  $n$  ที่มีจำนวนสัญลักษณ์ 1 เป็นจำนวนคู่ มีทั้งหมดกี่สาย?

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$$

$$\frac{0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} \frac{0 \ 0 \ 1 \ 0}{2 \times 2 \times 2 \times 1} = 2^{n-1}$$

คำถาม 24. สตริงที่ได้จากการจัดเรียงอักษรในสตริง S00000SUS มีทั้งหมดกี่สาย?

$$\binom{9}{3,5,1} = \frac{9!}{3!5!1!} = \boxed{504}$$

คำถาม 25. มีลูกกรดรสเดียวกันอยู่ 15 เม็ด ต้องการแจกจ่ายให้เพื่อน 6 คน โดยแจกจ่ายให้ครบทุกเม็ด และแต่ละคนจะต้องได้ลูกอมอย่างน้อย 1 เม็ด จะทำได้กี่วิธี?

9 เม็ด 10 ก 6 ภ 9 6

$$\frac{14 \ 13 \ 12 \ 11 \ 10}{120}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{5} \text{ stars bars} = \binom{14}{5} = \binom{14}{9} = \boxed{2002}$$

คำถาม 26. กำหนดให้มีเซตของจุดบนวงกลมทั้งสิ้น  $n$  จุด (กำหนดให้  $n \geq 6$ ) จะสามารถเลือกลากเส้นเชื่อมเพื่อสร้างสามเหลี่ยมสองรูปจากเซตของจุดดังกล่าวได้ทั้งสิ้นกี่วิธี โดยสามเหลี่ยมทั้งสองรูปจะต้องไม่ตัดกัน และสามเหลี่ยมแต่ละรูปจะต้องมีพื้นที่มากกว่าศูนย์?

$$\begin{aligned} & \binom{n}{6} \cdot 3 \\ & + \binom{n}{5} \cdot 5 \\ & + \binom{n}{4} \cdot 2 \end{aligned}$$

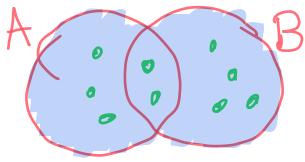
# (PIE)

## 1.5 หลักการเพิ่มเข้า-ลบออก

### Principle of Inclusion-Exclusion

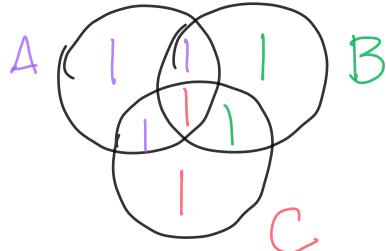
หลักการ 27 (หลักการเพิ่มเข้า-ลบออก; Inclusion-Exclusion Principle). กำหนดให้มีเซตจำกัด  $A$  และ  $B$  แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต  $A \cup B$  จะมีค่าเป็น

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



กำหนดให้มีเซตจำกัด  $A, B, C$  และจำนวนสมาชิกของเซต  $A \cup B \cup C$  จะมีค่าเป็น

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



คำถาม 28. กำหนดให้เซต  $S = \{1, \dots, 200\}$  จะมีจำนวนในเซตที่หารด้วย 3 หรือ 5 หรือ 7 ลงตัว?

$$A = 3 \text{ ลงตัว}$$

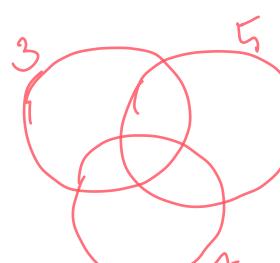
$$\left[ \frac{200}{3} \right] = 66 \text{ ตัว}$$

$$B = 5 \text{ ลงตัว}$$

$$\left[ \frac{200}{5} \right] = 40 \text{ ตัว}$$

$$C = 7 \text{ ลงตัว}$$

$$\left[ \frac{200}{7} \right] = 28 \text{ ตัว}$$



$$A \cap B \cap C \left[ \frac{200}{15} \right] = 13$$

$$A \cap C \left[ \frac{200}{21} \right] = 9$$

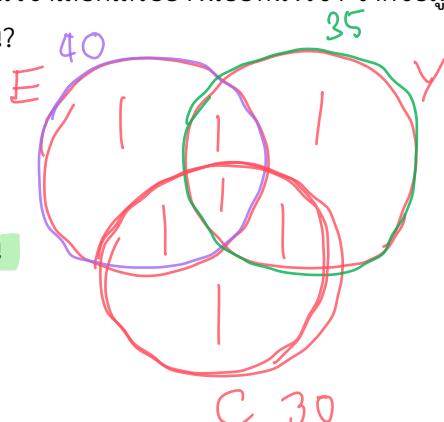
$$B \cap C \left[ \frac{200}{35} \right] = 5$$

$$A \cap B \cap C \left[ \frac{200}{105} \right] = 1$$

$$66 + 40 + 28 - 13 - 9 - 5 + 1 = 108$$

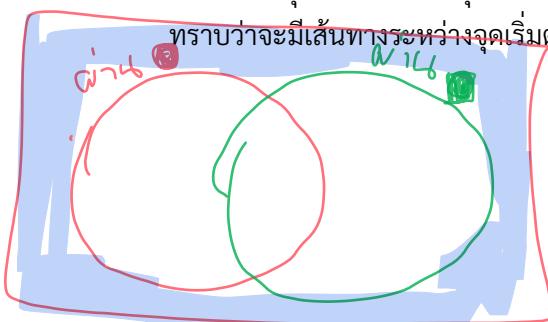
คำถาม 29. มีนักเรียนอยู่กลุ่มนี้ แต่ละคนเลือกลงทะเบียนเรียนวิชาเลือกเสรีอย่างน้อยหนึ่งวิชา จากข้อมูลสถิติ ของการลงทะเบียนดังต่อไปนี้ จะสรุปได้ว่านักเรียนในกลุ่มนี้กี่คน?

- มีนักเรียนลงทะเบียนวิชาอีสปอร์ต 40 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนวิชาภาษาอังกฤษ 35 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนวิชาเทรดคริปโตฯ 30 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนอย่างน้อยสองวิชาจากข้างต้น 25 คน
- มีนักเรียนลงทะเบียนทั้งสามวิชาข้างต้น 20 คน

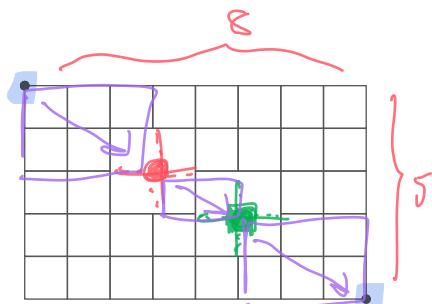


$$40 + 35 + 30 - 25 - 20 = 60$$

คำถาม 30. พิจารณาตารางต่อไปนี้ซึ่งมีความกว้าง 8 หน่วยและสูง 5 หน่วย หากต้องการเดินໄต่ตามขอบหรือเส้นตารางจากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวาโดยจะสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย อยากรู้ว่าจะมีเส้นทางระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดดังกล่าวทั้งสิ้นกี่เส้นทาง?

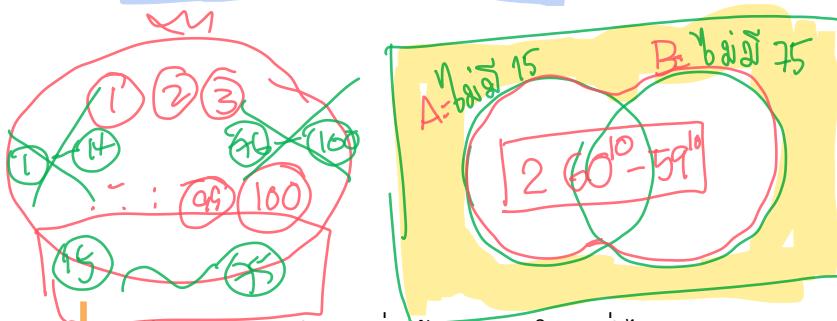


$$\begin{aligned} &\text{จุด } (0,0) \\ &\text{จุด } (1,0) : (5)(8) \\ &\text{จุด } (2,0) : (5)(3)(8) \\ &\text{จุด } (3,0) : (5)(3)(5)(8) \\ &\text{จุด } (4,0) : (5)(3)(5)(2)(8) \end{aligned}$$



$$\binom{13}{5} - 2 \cdot \binom{5}{2} \binom{8}{3} + \binom{5}{2} \binom{3}{1} \binom{5}{2}$$

**คำถาม 31.** สมมติว่ามีถุงอยู่ใบหนึ่ง บรรจุลูกบอล 100 ลูกที่มีหมายเลขกำกับจาก 1 ถึง 100 อย่างละหนึ่งลูกพอดี เราจะจับลูกบอลจากถุงใบนี้ครั้งละหนึ่งลูก เป็นจำนวน 10 ครั้ง โดยหลังจากที่หยิบลูกบอลเสร็จแต่ละครั้ง เราจะใส่ลูกบอลกลับลงไปในถุงด้วย อยากทราบว่าเราจะจับลูกบอลได้กี่วิธี โดยที่ลูกบอลที่มีค่าน้ำหนักที่สุดและน้อยที่สุดในการจับทั้ง 10 ครั้งคือ 75 และ 15 ตามลำดับ?



**หลักการ 32** (หลักการเพิ่มเข้า-ลบออกในรูปทั่วไป; Generalized Inclusion-Exclusion Principle). กำหนดให้มีเซตจำกัด  $S_1, S_2, \dots, S_n$  แล้วจำนวนสมาชิกของเซต  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$  จะมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| &= |S_1| + |S_2| + \dots + |S_n| \\ &\quad - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - \dots - |S_{n-1} \cap S_n| \\ &\quad + |S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + \dots + |S_{n-2} \cap S_{n-1} \cap S_n| \\ &\quad - \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} |S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n| \end{aligned}$$

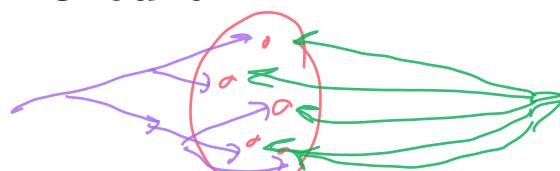
■

**ข้อสังเกต 33.** สังเกตว่ากฎการบวกในหัวข้อที่ 2 เป็นเพียงกรณีพิเศษของหลักการเพิ่มเข้า-ลบออก เพราะว่าส่วนร่วมของเซตอย่างน้อยสองเซตขึ้นไปจะเป็นเชตว่างซึ่งมีขนาดเท่ากับศูนย์

■

## 2 เอกลักษณ์การนับและการกระจายทวินาม

### 2.1 หลักการนับสองทาง



หลักการนับสองทาง คือเครื่องมือในการพิสูจน์ความสมมูลกันของนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ 2 นิพจน์ ด้วยการแสดงวิธีการนับสิ่งของอย่างเดียวกันด้วย 2 วิธีที่แตกต่างกัน

**หลักการ 34** (หลักการนับสองทาง; Principle of Counting Two Ways). สองวิธีที่ใช้นับเซตเดียวกัน ย่อมให้ค่าอ同มาเท่ากัน

■

**คำถาม 35.** จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก  $n$  และ  $k$  ใด ๆ ซึ่ง  $0 \leq k \leq n$  แล้วเอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

พื้นฐานนี้ได้ถูกพิสูจน์โดยวิธีที่ 1 คือ การนับวิธีที่เลือก  $k$  คนจาก  $n$  คน  
วิธีที่ 2 คือ การนับวิธีที่เลือก  $n-k$  คนจาก  $n$  คน ซึ่ง  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

$$\text{ดังนั้น } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

คำถาม 36. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก  $n$  ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

พื้นฐาน ปีต่อรอง ยิ่ง  $n$ .

อธิบาย 1 ให้แต่ละ  $n$  ตัว มี  $2$  ตัวเลือก  $\times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$

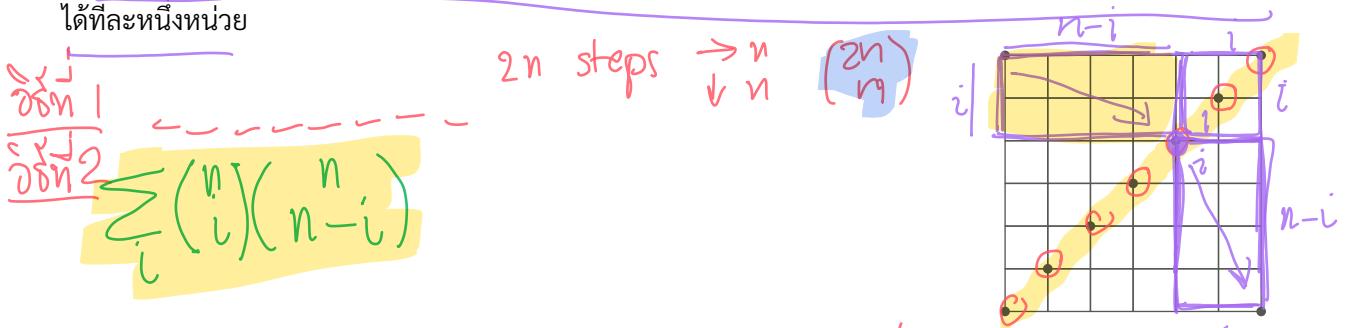
อธิบาย 2 ยิ่ง  $n$  มาก มากขึ้น  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$

คำถาม 37. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก  $n$  ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

$$\binom{8}{4} = \binom{4}{0}4 + \binom{4}{1}3 + \binom{4}{2}2 + \binom{4}{3}1 + \binom{4}{4}0$$

คำใบ้ หนึ่งในวิธีพิสูจน์เอกลักษณ์ข้างต้นคือการนับเส้นทางที่ไปตามขอบหรือเส้นตารางขนาด  $n \times n$  จากจุดบนซ้ายไปยังจุดล่างขวา (ดังรูปข้างล่าง สำหรับกรณีตัวอย่าง  $n = 6$ ) โดยสามารถเดินลงด้านล่างหรือเดินไปทางขวาได้เท่าที่เหลือหน่วย



เบอร์ 1	monomial	$2x^7$
เบอร์ 2	bi nomial	$x+y$
เบอร์ 3	polynomial	$x^3 + 3x^2 + 4x - 9$

## 2.2 ทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบท 38 (ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)). ในการกระจายทวินาม  $(x+y)^n$  นั้นจะประกอบไปด้วยพจน์  $x^{n-k}y^k$  ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์เป็น  $\binom{n}{k}$  (สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

สังเกตว่าสัมประสิทธิ์ของพจน์  $\binom{n}{k}$  ในแต่ละพจน์จะสอดคล้องกับจำนวนวิธีที่จะเลือกตัวแปร  $y$  จำนวน  $k$  ตัวจากคู่ของ  $x+y$  ทั้งหมด  $n$  คู่ได้กี่วิธี

คำถาม 39. จะมีวิธีพิสูจน์เอกลักษณ์ที่ปรากฏในคำถามที่ 36 (ดังที่แสดงข้างล่าง) โดยใช้ทฤษฎีบททวินามได้อย่างไร?

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ปัญหานี้ set  $x=1, y=1$   $\blacksquare$

คำถาม 40. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวกคู่  $n$  ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^{n-1}$$

และสำหรับจำนวนเต็มบวกคู่  $n$  ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} = 2^{n-1}$$

95 แบบที่ 2  
 set  $x=1, y=-1$

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots +$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots$$

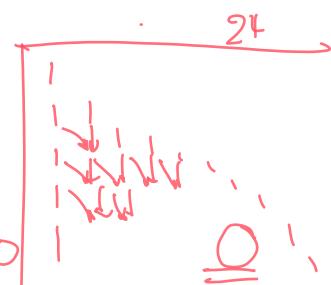
$$\frac{2^n}{2^n} = \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots \right]$$

$$2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots$$

## 2.3 สามเหลี่ยมปาสคาล

พิจารณาสามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal's Triangle) ดังรูปต่อไปนี้ โดยที่จำนวนที่ปรากฏในแถวที่  $i$  (เมื่อ  $i \geq 0$ ) คือ สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในการกระจายทวินาม

$\binom{0}{0}$							1					
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						1	1				
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					1	2	1			
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				1	3	3	1		
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			1	4	6	4	1	
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		1	5	10	10	5	1

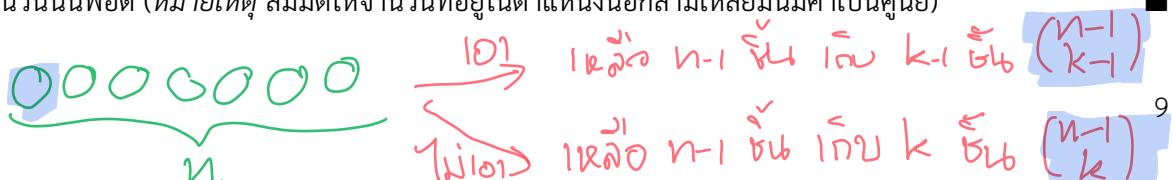


สังเกตว่าสามเหลี่ยมปาสคาลมีความสมมาตรในแนวแกนตั้ง และมีค่าขอบซ้ายและขวาของทุกแถวเป็น 1

ทฤษฎีบท 41. กำหนดให้  $n, k$  เป็นจำนวนเต็มโดยที่  $n \geq 1$  และ  $0 \leq k \leq n$  แล้วเอกลักษณ์ต่อไปนี้เป็นจริง

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือค่าของจำนวนในสามเหลี่ยมปาสคาลจะเท่ากับผลรวมของจำนวนสองจำนวนที่อยู่ติดกันเหนือจำนวนนั้นพอดี (หมายเหตุ สมมติให้จำนวนที่อยู่ในตำแหน่งนอกสามเหลี่ยมมีค่าเป็นศูนย์) ■



คำถาม 42. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้นโดยใช้ทฤษฎีบทที่ 13

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)(n-k-1)!} \left[ \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right] = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

คำถาม 43. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มไม่ติดลบ  $n$  และ  $k$  ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

$P(k)$  จริง  $\Rightarrow P(k+1)$  จริง

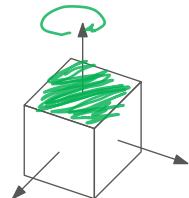
Case  $k > 0$   $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} + \binom{n+(k+1)}{k+1} = \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+(k+1)}{k+1}$

Case  $k=0$   $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$

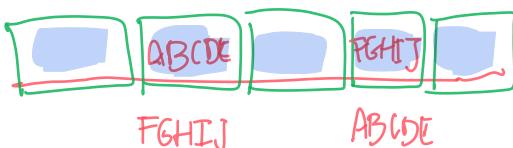
## 2.4 โจทย์ระคน 2

คำถาม 44. ลูกเต๋าหนึ่งลูก มี 6 หน้าที่แตกต่างกัน จะสามารถนำมาระบุในปริภูมิสามมิติ (3-Dimensional Space) โดยที่จุดศูนย์กลางของลูกเต๋าอยู่ที่จุดกำเนิด  $(0, 0, 0)$  และทุกหน้ามีรีนาบที่ตั้งฉากกับแกน  $x$ ,  $y$ , หรือ  $z$  ได้ทั้งหมด กี่รูปแบบ?

บล๊อก  
หกเหลี่ยม  
 $\frac{6!}{4!2!} = 90$



คำถาม 45. กำหนดให้มีนักเรียน 25 คน ที่มีวันเกิดแตกต่างกันทั้งหมด ต้องการแบ่งนักเรียนเหล่านี้ออกเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละ 5 คน จากนั้นแต่ละกลุ่มจะต้องเลือกคนที่อายุน้อยที่สุดเป็นหัวหน้ากลุ่ม อยากรู้ว่าจะมีวิธีการแบ่งกลุ่มนักเรียนเหล่านี้ และเลือกหัวหน้ากลุ่มตามเงื่อนไขข้างต้นได้กี่กรณี?



$$\frac{25!}{5!5!5!5!5!5!}$$

คำถาม 46. กำหนดให้เซต  $S = \{1, 2, \dots, 12\}$  จงหาจำนวนสับเซตของเซต  $S$  ดังกล่าวที่มีสมาชิก 4 ตัวโดยที่มีจำนวนคู่และจำนวนคี่อยู่อย่างน้อยอย่างละหนึ่งจำนวน



สับเซตห้ามซ้ำ

คู่ คี่ คู่ คี่  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$   $\binom{6}{4}$

คู่ คี่ คู่ คี่  $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$   $\binom{6}{4}$

คู่ คี่ คู่ คี่ / ตัว

$\binom{12}{4}$

$\binom{6}{4}$

$\binom{6}{4}$

$\binom{6}{4}$

$$\binom{12}{4} - 2 \cdot \binom{6}{4}$$

คำถาม 47. จงหาจำนวนคำตอบของชุดอันดับ  $(x_1, x_2, x_3) \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}^3$  ที่สอดคล้องกับสมการ  $x_1 + x_2 + x_3 = 20$

$$\begin{matrix} 20 \text{ stars} \\ 2 \text{ bars} \\ \boxed{\binom{22}{2}} \end{matrix}$$



- $x_1 \geq 11$
- $x_2 \geq 11$
- $x_3 \geq 11$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

$$\begin{matrix} 9 \text{ stars} \\ 2 \text{ bars} \\ \binom{11}{2} \\ \binom{11}{2} \\ \binom{11}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} & \binom{22}{2} - 3 \cdot \binom{11}{2} \\ & = \boxed{166} \end{aligned}$$

คำถาม 48. จงพิสูจน์ว่า

$$\binom{2n}{n} = 2 \binom{2n-1}{n-1}$$

นับ คณ. วิธี นับ 2n ชิ้น เลื่อน ท ชิ้น.  
วิธีที่ 1 นับ กอง (2n) ชิ้น  
วิธีที่ 2 เขยูกองมาเรียง (2n)

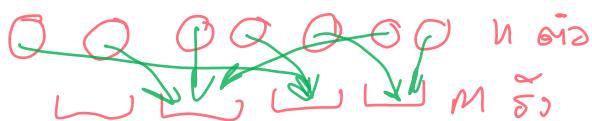
$$\sum_k \binom{k}{l} \binom{n}{k} = \binom{n}{l} 2^{n-l}$$

$$\begin{aligned} & \text{นับ } \sum_k \binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} 2^{n-l} \\ & \text{นับ } \sum_k \binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} 2^{n-l} \end{aligned}$$

คำถาม 49. จงพิสูจน์ว่า

คำให้ นับวิธีการคัดผู้เข้าแข่งขัน โดยมีการคัดสองรอบ  
 รอบที่ 1 ห้องคิดล็อก ต่อ k คน  $\binom{n}{k} \binom{k}{l}$   
 รอบที่ 2 ห้อง  $\sum_k \binom{n}{k} \binom{k}{l}$   
 รอบที่ 1 ห้อง  $\binom{n}{l} 2^{n-l}$   
 รอบที่ 2 ห้อง  $\binom{n}{l} 2^{n-l}$

### 3 หลักรังนกพิราบ



หลักการ 50 (หลักรังนกพิราบ; Pigeonhole Principle). หากเรามีนกพิราบ  $n$  ตัว โดยที่นกแต่ละตัวจะอาศัยอยู่ในรังนกหนึ่งรังจากทั้งหมด  $m$  รังโดยที่  $n > m$  และจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกพิราบอย่างน้อย 2 ตัว ■

หลักการ 51 (หลักรังนกพิราบในรูปทั่วไป; Generalized Pigeonhole Principle). หากเรามีนกพิราบอยู่ทั้งหมด  $n$  ตัว โดยที่นกแต่ละตัวจะอาศัยอยู่ในรังนกหนึ่งรังจากทั้งหมด  $m$  แล้วจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกพิราบอย่างน้อย  $\lceil n/m \rceil$  ตัว ■

$$\lceil 10/3 \rceil = 4$$



แบบ

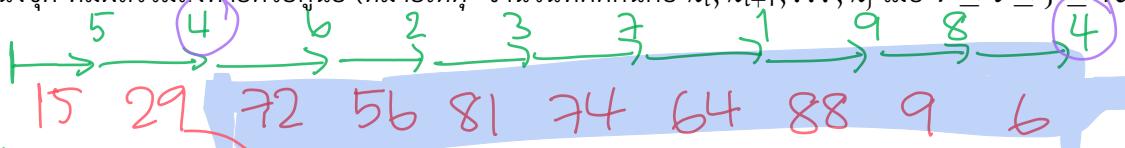
$n$  ตัว  
 $m$  รัง

คำถาม 52. ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลบรรจุอยู่ 6 สี สีละ 100 ลูก จงหาจำนวนลูกบอลที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ที่คุณหนึ่งจะต้องล้วงออกมากจากถุงดังกล่าว จึงจะรับประกันว่ามีลูกบอลสีหนึ่งอย่างน้อย 50 ลูก

$$\left\lceil \frac{295}{6} \right\rceil = \left\lceil \frac{49}{6} \right\rceil = 50$$

$$(49) (49) (49) (49) (49) (49) + 1 = \frac{49 \times 6}{6} + \left\lceil \frac{294}{6} \right\rceil = \left\lceil \frac{49}{6} \right\rceil = 49$$

คำถาม 53. กำหนดให้  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  เป็นลำดับของจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่าจะมีจำนวนที่อยู่ติดกันอย่างน้อยหกตัวที่มีผลรวมลงท้ายด้วยศูนย์ (หมายเหตุ จำนวนที่ติดกันคือ  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_j$  เมื่อ  $1 \leq i \leq j \leq 10$ )



กรณี 1 มีเลขลงท้าย 0.

กรณี 2 ไม่มีเลขลงท้าย 0.

$\sum_{i=1}^k x_i$  ชุดผลบวก  $x_1 + x_2 + \dots + x_i$  มีลงท้าย 0 ตาม  
ไม่มีลงท้าย 0  
 $\Rightarrow$  pigeonhole มีจำนวนลงท้าย 0

คำถาม 54. กำหนดให้  $H : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{256}$  เป็นฟังก์ชันแฮช (hash function) ชนิดหนึ่งที่รับจำนวนเต็มไม่ติดลบเข้าไปหนึ่งจำนวน และจะย่อโยกมาเป็นบิตสตริงความยาว 256 และจะพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนเต็ม  $k \geq 1$  ใด ๆ จะมีจำนวนเต็ม  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{N}$  ที่ แตกต่างกันทั้งหมด ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$H(x_1) = H(x_2) = \dots = H(x_k)$$

## 4 ลำดับและความสัมพันธ์เวียนเกิด

### 4.1 ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

นิยาม 55 (ลำดับเลขคณิต; Arithmetic Sequence). ลำดับเลขคณิตคือลำดับ  $a_0, a_1, a_2, \dots$  ซึ่งนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation)  $a_i = a_{i-1} + c$  สำหรับ  $i \geq 1$  และค่าคงตัว  $c$

$$\begin{cases} 21, 20, 19, \dots \\ 15, 18, 21, 24 \\ 7, 8, 9 \end{cases} \quad a_i = \begin{cases} a_{i-1} - 1 & i > 0 \\ 21 & i = 0 \end{cases}$$

นิยาม 56 (ลำดับเรขาคณิต; Geometric Sequence). ลำดับเรขาคณิตคือลำดับ  $a_0, a_1, a_2, \dots$  ซึ่งนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด  $a_i = r a_{i-1}$  สำหรับ  $i \geq 1$  และค่าคงตัว  $r \neq 0$

$$\begin{cases} 7, 14, 28, 56 \\ 10, 40, 160, \dots \\ 50, 10, 2, \dots \end{cases} \quad a_i = \begin{cases} 2a_{i-1} & i > 0 \\ 7 & i = 0 \end{cases}$$

## 4.2 ลำดับพีโบนัชชี

**นิยาม 57** (ลำดับพีโบนัชชี; Fibonacci Sequence). ลำดับพีโบนัชชีคือลำดับ  $F_0, F_1, F_2, \dots$  ซึ่งนิยามด้วยความสัมพันธ์เรียบง่าย  $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$  สำหรับ  $i \geq 2$  และมีขั้นฐานคือ  $F_0 = 0, F_1 = 1$

จำนวน 40 จำนวนแรกของลำดับพีโบนัชชีคือ

$0, 1, 1, 2, 3,$   
 $5, 8, 13, 21, 34,$   
 $\boxed{5}, 89, 144, 233, 377,$   
 $610, 987, 1597, 2584, 4181,$   
 $6765, 10946, 17711, 28657, 46368,$   
 $75025, 121393, 196418, 317811, 514229,$   
 $832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887,$   
 $9227465, 14930352, 24157817, 39088169, 63245986, \dots$

33  
54

**คำถาม 58.** จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มไม่ติดลบ  $n$  ใด ๆ เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้ถูกต้อง

(a) •  $F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$

(b) •  $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$

การบ่น

$p(n)$  เป็นจริง

$\xrightarrow{\text{want}}$   $p(n+1)$  เป็นจริง

$\frac{\text{Case } n \geq 1}{F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1}}$   
 $= F_{n+3} - 1$  โดยเหตุผล  
 ก้าวเดียวไปถัดฟีโบนัชชี

Case  
 $n=0$

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 0 && \text{โดยเป็นกรณีพิเศษ} \\
 &= 0 + 1 - 1 && \text{ดำเนินการ} \\
 &= F_0 + F_1 - 1 && \text{นิทาน ลำดับพีโบนัชชี} \\
 &= F_2 - 1 && \text{นิทาน}
 \end{aligned}$$

**คำถาม 59.** บิดสตริงความยาว  $n$  ตัวที่ไม่มีเลขโดด 1 สองตัวใด ๆ อยู่ติดกันเลย มีทั้งสิ้นกี่สาย?  $= a_n$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	$0$	$n-1$	$a_0 = 1$ $a_1 = 2$
$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$	$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \dots$	$1 \quad 0 \quad \dots \quad n-2 \quad \dots$	$F_{n+2}$
$F_n$	$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \dots$		
$a_n$	$1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \dots$		

คำถาม 60. พื้นที่ขนาด  $1 \times n$  หน่วย มีกระเบื้องขนาด  $1 \times 1$  หน่วย และกระเบื้องขนาด  $1 \times 2$  หน่วย สามารถใช้กระเบื้องปูจน์เติมพื้นที่ได้กี่วิธี



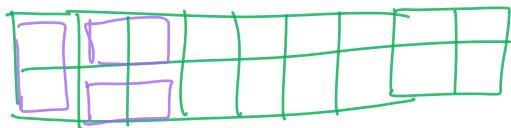
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$[F_{n+1}]$$

คำถาม 61. พื้นที่ขนาด  $2 \times n$  หน่วย มีกระเบื้องขนาด  $1 \times 2$  หน่วย สามารถใช้กระเบื้องปูจน์เติมพื้นที่ได้กี่วิธี



$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$[F_{n+1}]$$

ปัญหา 62 (การค้นหาจำนวนพีโบนัชชีลำดับที่  $n$ ). กำหนดให้จำนวนเต็ม  $n \in \mathbb{N}$  เป็นข้อมูลนำเข้า เราต้องการหาค่าของสมาชิกลำดับพีโบนัชชี  $F_n$  อย่างรวดเร็ว ซึ่งการทำได้หลายวิธี เช่น

- วิธีแก้สมการลักษณะเฉพาะ เราสามารถหารูปปิดของสมาชิกลำดับพีโบนัชชี  $F_n$  ได้ด้วยการแก้สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) จากความสัมพันธ์เวียนเกิดตามที่ปรากฏในนิยามที่ 57

สุดท้ายแล้วเราจะได้คำตอบของ  $F_n$  ที่เป็นรูปปิดดังนี้

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

$$\begin{matrix} 2^0 \\ 2^1 \\ 2^2 \\ 2^4 \\ 2^8 \\ 2^{16} \\ 2^{32} \\ 2^{64} \\ 2^{128} \end{matrix}$$

- วิธียกกำลังในรูปฟังก์ชันเชิงเส้น เราจะเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับพีโบนัชชีในรูปแบบการคูณของเมตริกซ์กับเวกเตอร์ (matrix–vector multiplication) ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นแบบหนึ่งได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i-1} \\ F_{i-2} \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } i \geq 2$$

ฉะนั้นเราสามารถหา  $\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$  ได้จากการคูณเมตริกซ์ซ้ำ ๆ กันหลายครั้ง จึงได้จากการดังข้างล่างนี้

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \\ F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } n \geq 0$$

ซึ่งการคำนวณการยกกำลังสามารถกระทำได้อย่างรวดเร็วโดยใช้เทคนิคการแบ่งแยกแล้วเอาชนะ (divide and conquer) หรือจะใช้การยกกำลังด้วยการหากำลังสอง (exponentiation by repeated squaring) ได้

$$\begin{aligned} A^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^1 &= A \\ A^2 &= \\ A^4 &= \\ A^8 &= \end{aligned}$$

ทั้งสองวิธีข้างต้นจะใช้เวลาประมาณเป็น  $O(k)$  เมื่อ  $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$  คือจำนวนหลักของค่า  $n$  ในรูปฐานสอง เมื่อสมมติให้กระบวนการทางพีชคณิตพื้นฐาน (เข่นบวก ลบ คูณ และ หาร) ใช้เวลาคงที่

## 5 การนับที่ซับซ้อนขึ้น

### 5.1 การเรียงสับเปลี่ยนแบบไม่อយู่ก์เดิม

ทฤษฎีบท 63 (การเรียงสับเปลี่ยนแบบไม่อယู่ก์เดิม; Derangement). มีวัตถุ  $n$  ชิ้นที่แตกต่างกัน คือ  $x_1, \dots, x_n$  และเราสามารถนำวัตถุทั้ง  $n$  ชิ้น นำมาวางเรียงเป็นลำดับ  $n$  ตำแหน่ง โดยที่ไม่มีวัตถุ  $x_i$  อยู่ในตำแหน่งที่  $i$  ได้  $D_n$  รูปแบบ แล้ว

$$D_n = n! - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} D_{n-k}$$

เมื่อ  $n \geq 1$  โดยที่  $D_0 = 1$  และ

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

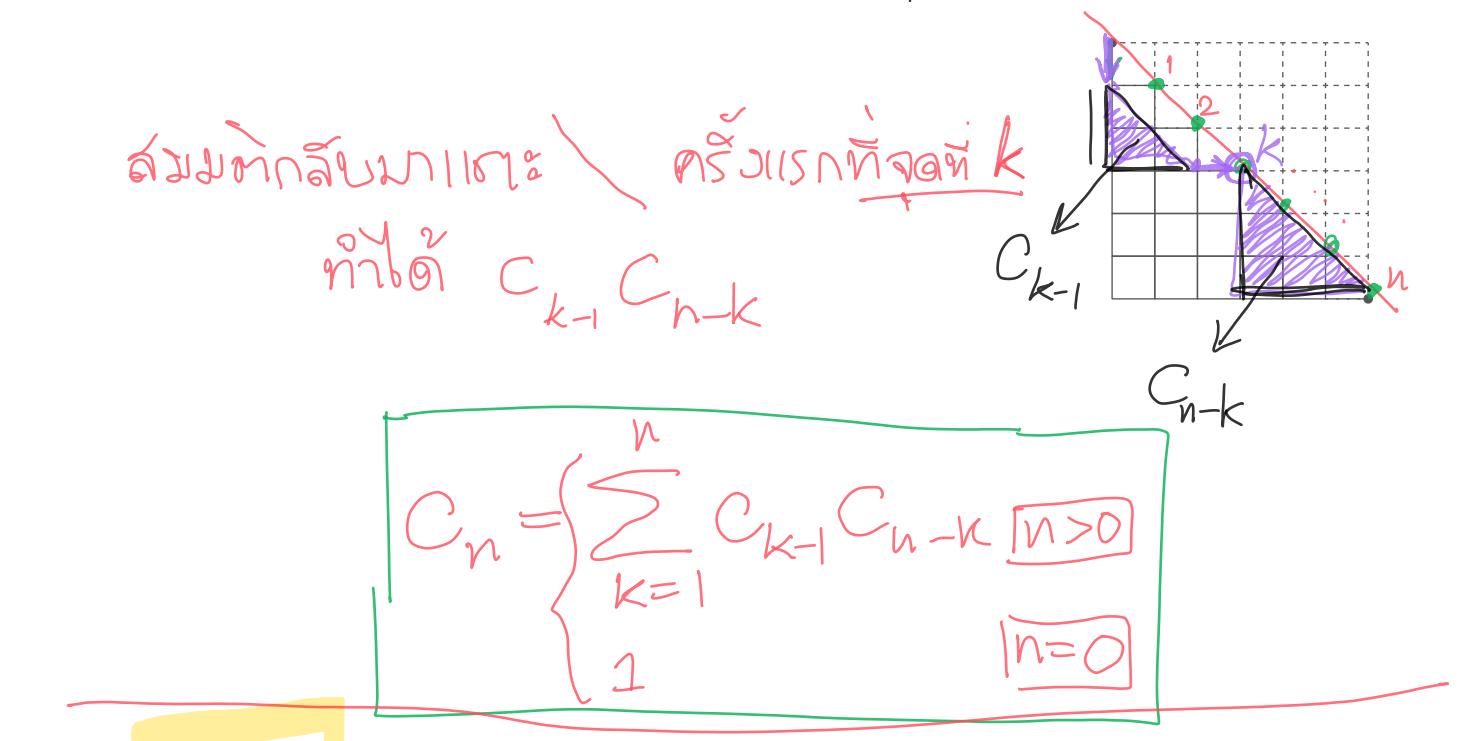
เมื่อ  $n \geq 2$  โดยที่  $D_0 = 1$  และ  $D_1 = 0$

■

## 5.2 จำนวนกatalan

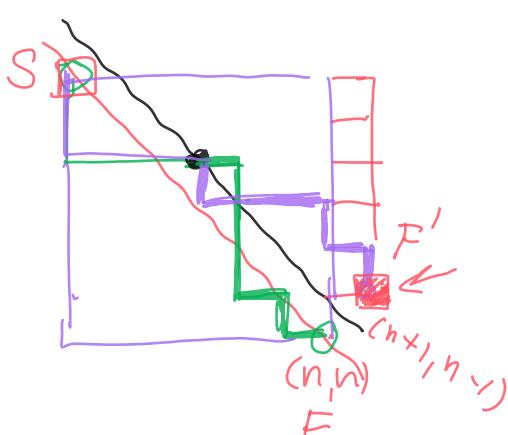
จำนวนกatalan (Catalan numbers) เป็นจำนวนที่พบรูปแบบนี้ในปัญหาการนับเชิงคอมบินาטורิก เช่น ปัญหาการเขียนสตริงของวงเล็บ  $n$  คู่ที่จับคู่กันได้อย่างลงตัวและสมบูรณ์ (กล่าวคือวงเล็บเปิดต้องมาก่อนวงเล็บของคู่เดียวกัน และคู่วงเล็บที่เปิดที่หลังจะต้องปิดก่อน) ยังมีปัญหาการนับอื่น ๆ อีกมากมายที่มีความสัมพันธ์แบบ bijection กับปัญหาดังกล่าว เช่นปัญหาต่อไปนี้

**คำถาม 64.** พิจารณาปัญหาดังต่อไปนี้ กำหนดให้มีตารางขนาด  $n \times n$  โดยที่เส้นและขอบตารางในฝั่งครึ่งบนขวาของตารางเป็นเส้นประ และที่เหลือแสดงเป็นเส้นทิบ (ดังรูปตัวอย่างข้างล่างสำหรับกรณี  $n = 6$ ) เรายังต้องการเดินจากจุดบนซ้ายสุดของตารางไปยังจุดล่างขวาสุด โดยสามารถเดินลงล่างหรือไปทางขวาได้ทีละหนึ่งหน่วย และห้ามไม่ให้เดินโดยใช้เส้นประที่กำหนดไว้ จงหาจำนวนเส้นทางระหว่างสองจุดที่กำหนดให้  $= C_n$



$$C_n = \underbrace{((\underline{\quad}) (\underline{\quad}))}_{2n}$$

$$C_{k-1} \quad \begin{matrix} 2k-2 \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2n-2k \\ 2k \end{matrix} \quad C_{n-k}$$



$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

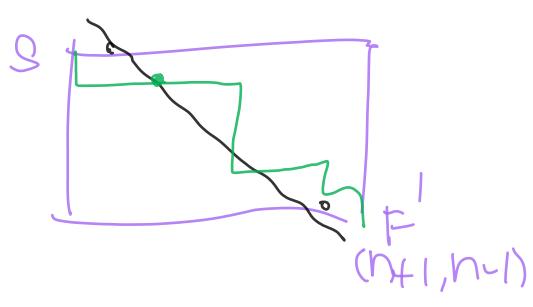
[ $S \rightarrow F$  ผ่านจุด]

$$= [S \rightarrow F']$$

$$= \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$$= \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \binom{2n}{n}$$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$



## หัวข้อเพิ่มเติม

หัวข้อดังต่อไปนี้เกี่ยวข้องกับการนับ แต่ไม่ได้ครอบคลุมอยู่ในหลักสูตรโอลิมปิกวิชาการคอมพิวเตอร์

- สเตอร์ลิงชนิดที่หนึ่งและสอง (Stirling numbers of first and second kind)
- การนับ 12 กระบวนการท่าของโรตา (Rota's twelvefold way)
- การแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิดด้วยการแก้สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation)
- การนับด้วยการใช้ฟังก์ชันกำเนิด (generating function)
- ทฤษฎีการนับของเบรินไซด์ (Burnside's counting theorem หรือ Cauchy–Frobenius lemma)

## เอกสารอ้างอิง

- [LLM10] Eric Lehman, F Thomson Leighton, and Albert R Meyer. Mathematics for Computer Science, 2010. Revised Tuesday 6th June 2018.
- [LPV00] László Lovász, János Pál, and Katalin Vesztergombi. Discrete Maths: Elementary and Beyond, 2000.
- [Wes15] Douglas West. Combinatorial Mathematics: Fall 2015 Edition, 2015.