

Thuật toán ADAMs

Xét bài toán Cauchy:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

$$\text{Với } x \in [x_0, x_n], \quad y(x_0) = y_0, \quad h = \frac{x_n - x_0}{n-1}$$

Lấy tích phân phương trình (1) trên đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ ta có:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \quad (2)$$

1. AB 4 bước (Adam ngoại suy):

1.1. Xây dựng công thức

Sử dụng đa thức nội suy Newton lùi

$$x = x_{n-1} + th$$

$$P_n(t) = f_{n-1} + \nabla_{f_{n-1}} t + \frac{\nabla_{f_{n-1}}^2}{2!} t(t+1) + \dots + \frac{\nabla_{f_{n-1}}^{s-1}}{(s-1)!} t(t+1) \dots (t+s-2)$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} P(x) dx = h \int_0^1 P_n(t) dt$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} P(x) dx = h \left[f_{n-1} \int_0^1 dt + \nabla_{f_{n-1}} \int_0^1 t dt + \frac{\nabla_{f_{n-1}}^2}{2!} \int_0^1 t(t+1) dt + \dots + \frac{\nabla_{f_{n-1}}^{s-1}}{(s-1)!} \int_0^1 t(t+1) \dots (t+s-2) dt \right]$$

Xét công thức AB 4 bước, ta dùng tại sai phân bậc 3

Ta có:

$$y_n = y_{n-1} + h \left[f_{n-1} + \frac{1}{2} \nabla_{f_{n-1}} + \frac{5}{12} \nabla_{f_{n-1}}^2 + \frac{3}{8} \nabla_{f_{n-1}}^3 \right] + o(h^5) \quad (3)$$

Trong đó:

$$\begin{cases} \nabla_{f_{n-1}} = f_{n-1} - f_{n-2} \\ \nabla_{f_{n-1}}^2 = f_{n-1} - 2f_{n-2} + f_{n-3} \\ \nabla_{f_{n-1}}^3 = f_{n-1} - 3f_{n-2} + 3f_{n-3} - f_{n-4} \end{cases}$$

Thay vào Công thức (3) và lấy xấp xỉ ta có:

$$y_n = y_{n-1} + h \left[\frac{55}{24} f_{n-1} - \frac{59}{24} f_{n-2} + \frac{37}{24} f_{n-3} - \frac{9}{24} f_{n-4} \right] \quad (4)$$

1.2. Thuật toán

- Input: x_0, x_n, y_0 , bước h , hàm $f(x, y)$
- Output: Giá trị xấp xỉ của y_i tại điểm x_i Trên khoảng $[x_0, x_n]$

$$\text{Bước 1: } n = 1 + \frac{x_n - x_0}{h}$$

Bước 2: Tính các giá trị y_1, y_2, y_3 bằng công thức RK-4

for $i=1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \\k_2 &= hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_1}{2}\right) \\k_3 &= hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_2}{2}\right) \\k_4 &= hf(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3) \\y_i &= y_{i-1} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

Bước 5: Tính các giá trị từ y_4 đến y_n bằng công thức AB-4

for $i=4, 5, \dots, n$:

$$y_i = y_{i-1} + h \left[\frac{55}{24} f(x_{i-1}, y_{i-1}) - \frac{59}{24} f(x_{i-2}, y_{i-2}) + \frac{37}{24} f(x_{i-3}, y_{i-3}) - \frac{9}{24} f(x_{i-4}, y_{i-4}) \right]$$

Bước 6: Kết thúc. In ra các giá trị.

2. AM 4 bước (Adam nội suy):

2.1. Xây dựng công thức

Sử dụng đa thức nội suy Newton lùi

$$x = x_n + th$$

$$P_n(t) = f_n + \nabla_{f_n} t + \frac{\nabla_{f_n}^2}{2!} t(t+1) + \dots + \frac{\nabla_{f_n}^s}{s!} t(t+1) \dots (t+s-1)$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} P(x) dx = h \int_{-1}^0 P_n(t) dt$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} P(x) dx = h \left[f_n \int_{-1}^0 dt + \nabla_{f_n} \int_{-1}^0 t dt + \frac{\nabla_{f_n}^2}{2!} \int_{-1}^0 t(t+1) dt + \dots + \frac{\nabla_{f_n}^s}{s!} \int_{-1}^0 t(t+1) \dots (t+s-1) dt \right]$$

Xét công thức AM 4 bước, ta dừng tại sai phân bậc 3.

Ta có:

$$y_n = y_{n-1} + h \left[f_n - \frac{1}{2} \nabla_{f_n} - \frac{1}{12} \nabla_{f_n}^2 - \frac{1}{24} \nabla_{f_n}^3 \right] + o(h^5) \quad (5)$$

Trong đó:

$$\begin{cases} \nabla_{f_n} = f_n - f_{n-1} \\ \nabla_{f_n}^2 = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \\ \nabla_{f_n}^3 = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3} \end{cases}$$

Thay vào công thức (5) và lấy xấp xỉ ta có:

$$y_n = y_{n-1} + h \left[\frac{9}{24} f_n + \frac{19}{24} f_{n-1} - \frac{5}{24} f_{n-2} + \frac{1}{24} f_{n-3} \right] \quad (6)$$

2.2. Thuật toán

- Input: $x_0, x_n, y_0, \text{bước } h, \text{hàm } f(x, y)$
- Output: Giá trị xấp xỉ của y_i tại điểm x_i Trên khoảng $[x_0, x_n]$

Bước 1: $n = 1 + \frac{x_n - x_0}{h}$

Bước 2: Tính các giá trị y_1, \dots, y_n bằng công thức RK-4 để tính giá trị $f(x_i, y_i)$ thay vào công thức (6)

for $i=1, 2, \dots, n$:

$$k_1 = hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$k_2 = hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3)$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Bước 5: Tính các giá trị từ y_4 đến y_n bằng công thức AM-4

for $i=4, 5, \dots, n$:

$$y_i = y_{i-1} + h \left[\frac{9}{24}f(x_i, y_i) + \frac{19}{24}f(x_{i-1}, y_{i-1}) - \frac{5}{24}f(x_{i-2}, y_{i-2}) + \frac{1}{24}f(x_{i-3}, y_{i-3}) \right]$$

Bước 6: Kết thúc. In ra các giá trị.

3. AB-AM 4 bước

- Input: $x_0, x_n, y_0, \text{bước } h, \text{hàm } f(x, y)$
- Output: Giá trị xấp xỉ của y_i tại điểm x_i Trên khoảng $[x_0, x_n]$

Bước 1: $n = 1 + \frac{x_n - x_0}{h}$

Bước 2: Tính các giá trị y_1, y_2, y_3 bằng công thức RK-4

for $i=1, 2, 3$:

$$k_1 = hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$k_2 = hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3)$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Bước 5: Tính các giá trị từ y_4 đến y_n bằng công thức AB-AM 4

for $i=4, 5, \dots, n$:

$$py_i = y_{i-1} + h \left[\frac{55}{24} f(x_{i-1}, y_{i-1}) - \frac{59}{24} f(x_{i-2}, y_{i-2}) + \frac{37}{24} f(x_{i-3}, y_{i-3}) - \frac{9}{24} f(x_{i-4}, y_{i-4}) \right]$$

(Giá trị y_i dự báo)

$$y_i = y_{i-1} + h \left[\frac{9}{24} f(x_i, py_i) + \frac{19}{24} f(x_{i-1}, y_{i-1}) - \frac{5}{24} f(x_{i-2}, y_{i-2}) + \frac{1}{24} f(x_{i-3}, y_{i-3}) \right]$$

(Giá trị y_i hiệu chỉnh)

Bước 6: Kết thúc. In ra các giá trị.