



TRƯỜNG ĐẠI HỌC  
BÁCH KHOA HÀ NỘI  
HANOI UNIVERSITY  
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# GIẢI TÍCH SỐ

## Phương pháp sai phân giải bài toán biên

Phan Thành Long - 20200369

ONE LOVE. ONE FUTURE.

# 1. Bài toán biên

## a. Bài toán

Tìm  $u(x)$  là nghiệm của phương trình vi phân :

$$[p(x) * u'(x)]' - q(x)u(x) = -f(x) \quad \text{với} \quad a \leq x \leq b$$

Trong đó :

- $p(x), q(x), f(x)$  là những hàm số **liên tục** và **có đạo hàm cấp cần thiết** trên đoạn  $[a, b]$
- $p(x) \geq c_1 > 0$
- $q(x) \geq 0$
- Thỏa mãn một trong các **điều kiện biên**

# 1. Bài toán biên

## b. Điều kiện biên

$$\text{Điều kiện biên tổng quát : } \begin{cases} p(a)u'(a) - \sigma_1 u(a) = -\mu_1 \\ p(b)u'(b) - \sigma_2 u(b) = -\mu_2 \end{cases}$$

- Điều kiện biên loại 1:  $\begin{cases} u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$
- Điều kiện biên loại 2:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  hay  $\begin{cases} p(a)u'(a) = -\mu_1 \\ p(b)u'(b) = -\mu_2 \end{cases}$
- Điều kiện biên loại 3:

Đây chính là điều kiện biên tổng quát với  $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$  và  $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$

# 1. Bài toán biên

## c. Ý tưởng

**Nhận xét :** Khó để tìm nghiệm chính xác của bài toán biên

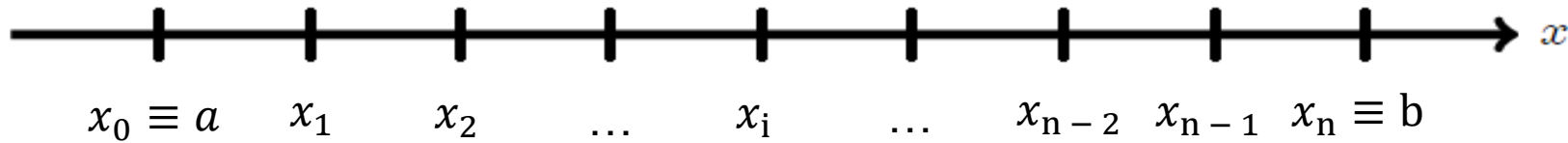
⇒ Do đó ta sẽ dùng sai phân hữu hạn để tìm nghiệm gần đúng của bài toán, xấp xỉ hàm số  $u(x)$

## 2. Giải gần đúng bài toán biên bằng phương pháp sai phân hữu hạn

### a. Lưới và hàm lưới

Chia đoạn  $[a, b]$  thành  $n$  phần đều nhau bởi cách điểm:

$$\begin{cases} x_0 = a; x_n = b \\ h = \frac{b-a}{n} \\ x_i = x_0 + i * h, \quad i = \overline{1, n} \end{cases}$$



- Các điểm  $x_i$  gọi là các **nút của lưới**
- $h$  gọi là **bước của lưới**

## 2. Giải gần đúng bài toán biên bằng phương pháp sai phân hữu hạn

### b. Lược đồ sai phân đối với bài toán biên

Xấp xỉ hàm  $u'(x)$  tại các nút lưới

Do  $u(x)$  có đạo hàm cấp 3 trên đoạn  $[a, b]$ . Theo công thức Taylor ta có :

$$u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{1}{2!}u''(x_i) + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \frac{1}{3!}u'''(c_1) \quad (1)$$

$$u\left(x_i - \frac{h}{2}\right) = u(x_i) - \frac{h}{2}u'(x_i) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{1}{2!}u''(x_i) + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \frac{1}{3!}u'''(c_2) \quad (2)$$

trong đó : 
$$\begin{cases} c_1 \in \left(x_i, x_i + \frac{h}{2}\right) \\ c_2 \in \left(x_i - \frac{h}{2}, x_i\right) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1)  
ta có :

$$u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - u\left(x_i - \frac{h}{2}\right) = hu'(x_i) + O(h^3)$$

$$\Rightarrow u'(x_i) = \frac{u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - u\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h} + O(h^2)$$

Vậy 
$$u'(x_i) \approx \frac{1}{h} \left( u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - u\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \right) \text{ với sai số } O(h^2)$$

## 2. Giải gần đúng bài toán biên bằng phương pháp sai phân hữu hạn

b. Lược đồ sai phân đối với bài toán biên

$$u'(x_i) \approx \frac{1}{h} \left( u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - u\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \right) \quad (*)$$

Xấp xỉ  $[p(x_i)u'(x_i)]'$  dựa vào công thức  $u'(x_i)$  đã tìm được ở trên

$$[p(x_i)u'(x_i)]' \approx \frac{1}{h} \left( p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) u'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - p\left(x_i - \frac{h}{2}\right) u'\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \right)$$

Mặt khác từ (\*) cũng có :

$$\begin{cases} u'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \approx \frac{1}{h} (u(x_{i+1}) - u(x_i)) \\ u'\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \approx \frac{1}{h} (u(x_i) - u(x_{i-1}))) \end{cases}$$

Do đó

$$[p(x_i)u'(x_i)]' \approx \frac{1}{h} \left( p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \frac{1}{h} (u(x_{i+1}) - u(x_i)) - p\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \frac{1}{h} (u(x_i) - u(x_{i-1}))) \right)$$

$$\Rightarrow [p(x_i)u'(x_i)]' \approx \frac{1}{h^2} \left( p\left(x_i - \frac{h}{2}\right) u(x_{i-1}) - \left( p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \right) u(x_i) + p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) u(x_{i+1}) \right)$$

## 2. Giải gần đúng bài toán biên bằng phương pháp sai phân hữu hạn

### b. Lược đồ sai phân đối với bài toán biên

$$[p(x_i)u'(x_i)]' \approx \frac{1}{h^2} \left( p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)u(x_{i-1}) - \left( p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \right)u(x_i) + p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)u(x_{i+1}) \right)$$

Vậy thay vào phương trình vi phân  $[p(x) * u'(x)]' - q(x)u(x) = -f(x)$  ban đầu ta được

$$\frac{p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2}u(x_{i-1}) - \left( \frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2} + q(x_i) \right)u(x_i) + \frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}{h^2}u(x_{i+1}) = -f(x_i)$$

Để có thể dễ dàng quan sát, ta đặt :

$$\begin{cases} u_i = u(x_i) \\ d_i = -f(x_i) \\ a_i = \frac{p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2} \\ b_i = -\left( \frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2} + q(x_i) \right) \\ c_i = \frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}{h^2} \end{cases}$$

khi đó ta viết lại  $a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i$



## 2. Giải gần đúng bài toán biên bằng phương pháp sai phân hữu hạn

### b. Lược đồ sai phân đối với bài toán biên

Bây giờ ta sẽ đi xấp xỉ điều kiện biên 
$$\begin{cases} p(a)u'(a) - \sigma_1 u(a) = -\mu_1 & (1) \\ p(b)u'(b) - \sigma_2 u(b) = -\mu_2 & (2) \end{cases}$$

Với biên  $x = a$ , theo định lý Taylor :

$$\begin{cases} p\left(a + \frac{h}{2}\right) = p(a) + \frac{h}{2}p'(a) + O(h^2) \\ \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a) + \frac{h}{2}u''(a) + O(h^2) \end{cases} \Rightarrow p\left(a + \frac{h}{2}\right) \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = p(a)u'(a) + \frac{h}{2}[p(a)u'(a)]' + O(h^2)$$

$$\text{Mà lại có } [p(a)u'(a)]' = q(a)u(a) - f(a) \Rightarrow p(a)u'(a) = p\left(a + \frac{h}{2}\right) \frac{u(a+h)-u(a)}{h} - \frac{h}{2}(q(a)u(a) - f(a)) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow p(a)u'(a) \approx p\left(a + \frac{h}{2}\right) \frac{u(a+h)-u(a)}{h} - \frac{h}{2}(q(a)u(a) - f(a))$$

Thay lại vào (1) vậy :  $\frac{p(a+\frac{h}{2})}{h}u(a+h) - \left(\sigma_1 + \frac{p(a+\frac{h}{2})}{h} - \frac{q(a)h}{2}\right)u(a) = -\mu_1 - \frac{f(a)h}{2}$  hay ta có thể viết gọn :

$$\frac{p(a+\frac{h}{2})}{h}u_1 - \left(\sigma_1 + \frac{p(a+\frac{h}{2})}{h} - \frac{q(a)h}{2}\right)u_0 = -\mu_1 - \frac{f(a)h}{2}$$

## 2. Giải gần đúng bài toán biên bằng phương pháp sai phân hữu hạn

### b. Lược đồ sai phân đối với bài toán biên

Bây giờ ta sẽ đi xấp xỉ điều kiện biên  $\begin{cases} p(a)u'(a) - \sigma_1 u(a) = -\mu_1 & (1) \\ p(b)u'(b) - \sigma_2 u(b) = -\mu_2 & (2) \end{cases}$

$$\frac{p\left(a + \frac{h}{2}\right)}{h} u_1 - \left( \sigma_1 + \frac{p\left(a + \frac{h}{2}\right)}{h} - \frac{q(a)h}{2} \right) u_0 = -\mu_1 - \frac{f(a)h}{2}$$

Lại để dễ dàng quan sát ta đặt  $\begin{cases} b_0 = -\left( \sigma_1 + \frac{p\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h} - \frac{q(x_0)h}{2} \right) \\ c_0 = \frac{p\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h} \\ d_0 = -\mu_1 - \frac{f(x_0)h}{2} \end{cases}$  ta có  $b_0 u_0 + c_0 u_1 = d_0$

Làm tương tự với biên b, có  $\begin{cases} a_n = -\frac{p\left(x_n - \frac{h}{2}\right)}{h} \\ b_n = -\sigma_2 + \frac{p\left(x_n - \frac{h}{2}\right)}{h} - \frac{q(b)h}{2} \\ d_n = -\mu_2 - \frac{f(x_n)h}{2} \end{cases}$  ta có  $a_n u_{n-1} + b_n u_n = d_n$

## 2. Giải gần đúng bài toán biên bằng phương pháp sai phân hữu hạn

### c. Phương pháp giải

Bài toán biên loại (1) 
$$\begin{cases} u(x_0) = \alpha \\ u(x_n) = \beta \end{cases}$$

Thay công thức tìm được ở b vào bài toán biên loại (1), ta được :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, u_n = \beta \\ a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1}$$

với 
$$\begin{cases} u_i = u(x_i), d_i = f(x_i) \\ a_i = \frac{p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2} \\ b_i = - \left( \frac{p(x_i + \frac{h}{2}) + p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2} + q(x_i) \right) \\ c_i = \frac{p(x_i + \frac{h}{2})}{h^2} \end{cases}$$

Hệ này là ma trận hệ số dạng 3 đường chéo, ta có thể dễ dàng giải tìm ra hàm số xấp xỉ với sai số  $O(h^2)$

## 2. Giải gần đúng bài toán biên bằng phương pháp sai phân hữu hạn

### c. Phương pháp giải

**Bài toán biên loại (2)(3)** 
$$\begin{cases} p(a)u'(a) - \sigma_1 u(a) = -\mu_1 \\ p(b)u'(b) - \sigma_2 u(b) = -\mu_2 \end{cases}$$

Thay công thức tìm được ở b vào bài toán biên loại (3), ta được:

$$\begin{cases} b_0 u_0 + c_0 u_1 = d_0 \\ a_n u_{n-1} + b_n u_n = d_n \\ a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i \quad i = \overline{1, n-1} \end{cases} \quad \text{với} \quad \begin{cases} b_0 = -\left(\sigma_1 + \frac{p(x_0 + \frac{h}{2})}{h} - \frac{q(x_0)h}{2}\right), c_0 = \frac{p(x_0 + \frac{h}{2})}{h}, d_0 = -\mu_1 - \frac{f(x_0)h}{2} \\ a_n = -\frac{p(x_n - \frac{h}{2})}{h}, b_n = -\sigma_2 + \frac{p(x_n - \frac{h}{2})}{h} - \frac{q(b)h}{2}, d_n = -\mu_2 - \frac{f(x_n)h}{2} \\ u_i = u(x_i), d_i = f(x_i) \\ a_i = \frac{p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2}, b_i = -\left(\frac{p(x_i + \frac{h}{2}) + p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2} + q(x_i)\right), c_i = \frac{p(x_i + \frac{h}{2})}{h^2} \end{cases}$$

Hệ này là cũng là ma trận hệ số dạng 3 đường chéo, ta có thể dễ dàng giải tìm ra hàm số xấp xỉ với sai số  $O(h^2)$

## 3. Bài toán trị riêng

### a. Bài toán

Tìm  $\lambda$  và hàm  $u(x)$  không đồng nhất bằng 0 trên đoạn  $[a, b]$  là nghiệm của :

$$\begin{cases} -[p(x) * u'(x)]' - q(x)u(x) = \lambda r(x)u(x) & \text{với } a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Trong đó :

- $p(x), q(x), r(x)$  là những hàm số **liên tục** và **có đạo hàm cấp cần thiết** trên đoạn  $[a, b]$
- $p(x) \geq c_1 > 0$  với  $c_1$  là hằng số dương
- $q(x) \geq 0, r(x) > 0$

### 3. Bài toán trị riêng

#### b. Thiết lập công thức

Ta làm tương tự như bài toán biên, chia thành các nút lưới và thiết lập công thức, ta được :

$$- [p(x_i) * u'(x_i)]' - q(x_i)u(x_i) = \lambda r(x_i)u(x_i) \quad \text{với } i = \overline{1, n-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{h^2} \left( p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)u_{i-1} - \left( p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \right)u_i + p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)u_{i+1} \right) - q(x_i)u_i = \lambda r(x_i)u_i$$

$$\Rightarrow -\frac{p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)}u_{i-1} + \left( \frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)} - \frac{q(x_i)}{r(x_i)} - \lambda \right)u_i - \frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)}u_{i+1} = 0$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a_i = -\frac{p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)} \\ b_i = \frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)} - \frac{q(x_i)}{r(x_i)} \\ c_i = -\frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)} \end{cases} \quad \text{ta có } \boxed{a_i u_{i-1} + (b_i - \lambda)u_i + c_i u_{i+1} = 0}$$

### 3. Bài toán trị riêng

#### c. Phương pháp giải

Vậy kết hợp với điều kiện  $u(a) = u(b) = 0$  hay  $u_0 = u_n = 0$  ta được

$$\begin{cases} a_i u_{i-1} + (b_i - \lambda) u_i + c_i u_{i+1} = 0 & \text{với } i = \overline{1, n-1} \\ u_0 = u_n = 0 \end{cases} \quad \text{trong đó} \quad \begin{cases} a_i = \frac{p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2 r(x_i)} \\ b_i = -\frac{p(x_i + \frac{h}{2}) + p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2 r(x_i)} - \frac{q(x_i)}{r(x_i)} \\ c_i = \frac{p(x_i + \frac{h}{2})}{h^2 r(x_i)} \end{cases}$$

Đây là hệ đại số tuyến tính thuần gồm  $n + 1$  ẩn, để hệ này tồn tại nghiệm không đồng thời bằng 0 thì định thức của hệ phải bằng 0, hay nói cách khác  $\lambda$  sẽ là trị riêng của hệ đại số tuyến tính sau :

$$\begin{cases} a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = 0 & \text{với } i = \overline{1, n-1} \\ u_0 = u_n = 0 \end{cases}$$

Giải đa thức đặc trưng ta sẽ tìm được  $\lambda$  là giá trị riêng xấp xỉ của bài toán

Thay lại  $\lambda$  vào hệ ta sẽ tìm được hàm riêng xấp xỉ  $u(x)$ .

## 4. Thuật toán

### a. Bài toán biên

#### Bài toán biên loại 1

Input :  $p(x)$ ,  $f(x)$ ,  $q(x)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$

Chọn  $n$  là số nút của lưới

$h = (b - a)/(n - 1)$  là bước của lưới

Xây dựng ma trận hệ số 3 đường chéo dựa vào công thức đã tìm được.

Giải ma trận

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, u_n = \beta \\ a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i \quad i = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

$$\text{với } \begin{cases} u_i = u(x_i), d_i = f(x_i) \\ a_i = \frac{p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2} \\ b_i = - \left( \frac{p(x_i + \frac{h}{2}) + p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2} + q(x_i) \right) \\ c_i = \frac{p(x_i + \frac{h}{2})}{h^2} \end{cases}$$



## 4. Thuật toán

### a. Bài toán biên

#### Bài toán biên loại 2 và 3

Input :  $p(x)$ ,  $f(x)$ ,  $q(x)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$

Chọn  $n$  là số nút của lưới

$h = (b - a)/(n - 1)$  là bước của lưới

Xây dựng ma trận hệ số 3 đường chéo dựa vào công thức đã tìm được.

Giải ma trận

$$\begin{cases} b_0 u_0 + c_0 u_1 = d_0 \\ a_n u_{n-1} + b_n u_n = d_n \\ a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i \quad i = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

với

$$\begin{cases} b_0 = -\left(\sigma_1 + \frac{p(x_0 + \frac{h}{2})}{h} - \frac{q(x_0)h}{2}\right), c_0 = \frac{p(x_0 + \frac{h}{2})}{h}, d_0 = -\mu_1 - \frac{f(x_0)h}{2} \\ a_n = -\frac{p(x_n - \frac{h}{2})}{h}, b_n = -\sigma_2 + \frac{p(x_n - \frac{h}{2})}{h} - \frac{q(b)h}{2}, d_n = -\mu_2 - \frac{f(x_n)h}{2} \\ u_i = u(x_i), d_i = f(x_i) \\ a_i = \frac{p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2}, b_i = -\left(\frac{p(x_i + \frac{h}{2}) + p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2} + q(x_i)\right), c_i = \frac{p(x_i + \frac{h}{2})}{h^2} \end{cases}$$

## 4. Thuật toán

### b. Bài toán trị riêng

Input :  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$

Chọn  $n$  là số nút của lưới

$h = (b - a)/(n - 1)$  là bước của lưới

Xây dựng ma dựa vào công thức đã tìm được.

Giải ma trận

$$\begin{cases} a_i u_{i-1} + (b_i - \lambda) u_i + c_i u_{i+1} = 0 & \text{với } i = \overline{1, n-1} \\ u_0 = u_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{trong đó } \begin{cases} a_i = \frac{p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2 r(x_i)} \\ b_i = -\frac{p(x_i + \frac{h}{2}) + p(x_i - \frac{h}{2})}{h^2 r(x_i)} - \frac{q(x_i)}{r(x_i)} \\ c_i = \frac{p(x_i + \frac{h}{2})}{h^2 r(x_i)} \end{cases}$$

## 5. Đánh giá thuật toán

### Ưu điểm :

- Thuật toán đơn giản, dễ cài đặt
- Tính hiệu quả cao trong hầu hết các trường hợp

### Nhược điểm :

- Thuật toán chỉ có thể xấp xỉ chứ không thể tìm chính xác hàm số
- Khi khoảng  $[a, b]$  lớn, dẫn đến sai số lớn, hàm tìm được có thể không còn chính xác

A large graphic on the left side of the slide. It features a dark blue background with a circular pattern of red dots of varying sizes, creating a sense of depth and movement. The word "HUST" is centered within this pattern in a white, bold, sans-serif font.

# HUST

# THANK YOU !