TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

BÁO CÁO GIẢI TÍCH SỐ

CHỦ ĐỀ 31: PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN GIẢI BÀI TOÁN BIÊN

Giảng viên hướng dẫn:

TS. Hà Thị Ngọc Yến

Sinh viên thực hiện:

Phan Thành Long – MSSV: 20200369

Hà Nội, 01/2022.

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Khoa học là một hành trình không hồi kết, và con người đã luôn bồi đắp và tiếp sức cho nó.

Nhờ có sự phát triển của khoa học, con người đã đạt được nhiều thành tựu quan trọng mang bước tiến lớn cho thế giới. Cùng với sự phát triển vượt bậc của khoa học nói chung là sự phát triển của toán học nói riêng. Toán học giúp cho nhiều lĩnh vực khác phát triển mạnh mẽ như tính toán quỹ đạo, nhiên liệu,… Và rõ ràng, để làm được những điều đó cũng như xử lý các bài toán khác, các nhà khoa học cần sự chính xác rất cao trong việc tính toán.

Trong bài báo cáo này, tôi sẽ trình bày một số phương pháp sai phân để xấp xỉ nghiệm của bài toán biên và bài toán trị riêng.

Bài báo cáo tuy đã được kiểm tra cẩn thận đến từ tác giả nhưng vẫn không thể tránh khỏi những sai sót, rất mong nhận được sự góp ý từ phía bạn đọc. Cảm ơn TS. Hà Thị Ngọc Yến đã giúp đỡ em trong quá trình hoàn thành bài báo cáo này!

A. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

I. Một số kiến thức cần biết

- Định lý Taylor
- Một số kiến thức về đại số tuyến tính như trị riêng, ma trận
- Các phương pháp giải ma trận

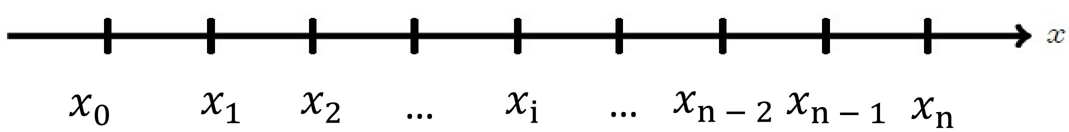
II. Lưới và hàm lưới

Chia đoạn $[a,\ b]$ thành n phần đều nhau bởi cách điểm.

Khi đó ta kí hiệu hai biên $x_0 = a;\ x_n = b,$

Với $h = \frac{b-a}{n},$ n – 1 điểm còn lại được định nghĩa như sau :

$$x_i = x_0 + i * h, \quad i = \overline{1,\ n}$$



Khi đó :

- Các điểm x_i gọi là các **nút của lưới**
- h gọi là **bước của lưới**

B. BÀI TOÁN BIÊN VÀ BÀI TOÁN TRỊ RIÊNG

I. Bài toán biên

1. Phát biểu

Tìm $u(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân :

$$[p(x) * u'(x)]' - q(x)u(x) = -f(x) \quad \text{với} \quad a \leq x \leq b$$

2. Điều kiện

Trong đó, các hàm đề bài phải thỏa mãn các điều kiện sau :

- $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ là những hàm số **liên tục** và **có đạo hàm cấp cần thiết** trên đoạn $[a, b]$
- $p(x) \geq c_1 > 0$
- $q(x) \geq 0$
- Thỏa mãn một trong các **điều kiện biên** :
    - Điều kiện biên tổng quát :

$$\begin{cases} p(a)u'(a) - \sigma_1 u(a) = -\mu_1 \\ p(b)u'(b) - \sigma_2 u(b) = -\mu_2 \end{cases}$$

    - Điều kiện biên loại 1:

$$\begin{cases} u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

    - Điều kiện biên loại 2:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \quad \text{hay} \quad \begin{cases} p(a)u'(a) = -\mu_1 \\ p(b)u'(b) = -\mu_2 \end{cases}$$

    - Điều kiện biên loại 3:

Đây chính là điều kiện biên tổng quát với σ_1 , $\sigma_2 \geq 0$ và $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$

II. Bài toán trị riêng

1. Phát biểu

Tìm λ và hàm $u(x)$ không đồng nhất bằng 0 trên đoạn $[a, b]$ là nghiệm của :

$$\begin{cases} -[p(x) * u'(x)]' - q(x)u(x) = \lambda r(x)u(x) \quad \text{với} \quad a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

2. Điều kiện

Trong đó **:**

- $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ là những hàm số **liên tục** và **có đạo hàm cấp cần thiết** trên đoạn $[a, b]$
- $p(x) \geq c_1 > 0$ với c_1 là hằng số dương
- $q(x) \geq 0, \ r(x) > 0$

C. Ý TƯỞNG VÀ CÁCH GIẢI

I. Ý tưởng

- Nhận xét : Rất khó có phương pháp chung nào để có thể tìm nghiệm chính xác của bài toán, do đó ta sẽ dùng phương pháp sai phân để xấp xỉ hàm số là nghiệm của bài toán với một sai số có thể chấp nhận được. Phương pháp này tuy không thể tìm nghiệm chính xác nhưng nó mang lại tính hiệu quả cao.

II. Thiết lập lược đồ sai phân

Ta chia đoạn [a, b] thành n nút lưới với bước lưới h, từ đây ta sẽ đi thiết lập công thức xấp xỉ các hàm số

1. Xấp xỉ hàm $u'(x)$ tại các nút lưới

Do $u(x)$ có đạo hàm cấp 3 trên đoạn $[a,\ b]$. Theo công thức Taylor ta có :

$$u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) + \left(\frac{h}{2}\right)^2\frac{1}{2!}u''(x_i) + \left(\frac{h}{2}\right)^3\frac{1}{3!}u'''(c_1) \qquad (1)$$

$$u\left(x_i - \frac{h}{2}\right) = u(x_i) - \frac{h}{2}u'(x_i) + \left(\frac{h}{2}\right)^2\frac{1}{2!}u''(x_i) + \left(\frac{h}{2}\right)^3\frac{1}{3!}u'''(c_2) \qquad (2)$$

trong đó : $\begin{cases} c_1 \in \left(x_i, x_i + \frac{h}{2}\right) \\ c_2 \in \left(x_i - \frac{h}{2}, x_i\right) \end{cases}$

Lấy (2) trừ (1) ta có :

$$u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - u\left(x_i - \frac{h}{2}\right) = hu'(x_i) + O(h^3)$$

$$\Longrightarrow u'(x_i) = \frac{u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - u\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h} + O(h^2)$$

Vậy $u'(x_i) \approx \frac{1}{h}(u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - u\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$ với sai số $O(h^2)$

2. Xấp xỉ $[p(x)u'(x)]'$ tại các nút lưới

2.1 Công thức

Ta có :

$$[p(x_i)u'(x_i)]' \approx \frac{1}{h}\left(p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)u'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)u'\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\right)$$

Mặt khác từ công thức xấp xỉ của $u'(x_i)$ cũng có :

$$\begin{cases} u'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \approx \frac{1}{h}\left(u(x_{i+1}) - u(x_i)\right) \\ u'\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \approx \frac{1}{h}\left(u(x_i) - u(x_{i-1})\right) \end{cases}$$

Do đó thay lại vào phương trình ta có :

$$[p(x_i)u'(x_i)]' \approx \frac{1}{h}\left(p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\frac{1}{h}\left(u(x_{i+1}) - u(x_i)\right) - p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\frac{1}{h}\left(u(x_i) - u(x_{i-1})\right)\right)$$

$$\Rightarrow [p(x_i)u'(x_i)]' \approx \frac{1}{h^2}\left(p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)u(x_{i-1}) - \left(p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\right)u(x_i) + p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)u(x_{i+1})\right)$$

Vậy ta đã xấp xỉ được $[p(\mathrm{x})u'(\mathrm{x})]'$ tại các nút lưới cũng với sai số $O(h^2)$

2.2 Rút gọn

Vậy thay vào phương trình vi phân $[p(x) * u'(x)]' - q(x)u(x) = -f(x)$ ban đầu ta được :

$$\frac{p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2}u(x_{i-1}) - \left(\frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2} + q(x_i)\right)u(x_i) + \frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}{h^2}u(x_{i+1}) = -f(x_i)$$

Để có thể dễ dàng quan sát, ta đặt : $\begin{cases} u_i = u(x_i) \\ d_i = -f(x_i) \\ a_i = \dfrac{p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2} \\ b_i = -\left(\dfrac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2} + q(x_i)\right) \\ c_i = \dfrac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}{h^2} \end{cases}$

khi đó ta viết lại

$$a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i$$

3. Xấp xỉ điều kiện biên

3.1 Công thức

- Với biên x = a, theo định lý Taylor :

$$\begin{cases} p\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = p(a) + \dfrac{h}{2}p'(a) + O(h^2) \\ \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a) + \dfrac{h}{2}u''(a) + O(h^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p\left(a + \frac{h}{2}\right)\frac{u(a+h) - u(a)}{h} = p(a)u'(a) + \frac{h}{2}[p(a)u'(a)]' + O(h^2)$$

Mà lại có

$$[p(a)u'(a)]' = q(a)u(a) - f(a)$$

$$\Rightarrow p(a)u'(a) = p\left(a + \frac{h}{2}\right)\frac{u(a+h) - u(a)}{h} - \frac{h}{2}\big(q(a)u(a) - f(a)\big) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow p(a)u'(a) \approx p\left(a+\frac{h}{2}\right)\frac{u(a+h)-u(a)}{h} \; - \; \frac{h}{2}\big(q(a)u(a)-f(a)\big)$$

Thay lại vào (1) vậy :

$$\frac{p\left(a+\frac{h}{2}\right)}{h}u(a+h)-\left(\sigma_1+\frac{p\left(a+\frac{h}{2}\right)}{h}-\frac{q(a)h}{2}\right)u(a)=-\mu_1-\frac{f(a)h}{2}$$

hay ta có thể viết gọn :

$$\frac{p\left(a+\frac{h}{2}\right)}{h}u_1-\left(\sigma_1+\frac{p\left(a+\frac{h}{2}\right)}{h}-\frac{q(a)h}{2}\right)u_0=-\mu_1-\frac{f(a)h}{2}$$

3.2 Rút gọn công thức

- Lại để dễ dàng quan sát ta đặt $\begin{cases} b_0 = \; -\left(\sigma_1+\frac{p\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h}-\frac{q(x_0)h}{2}\right) \\ c_0 = \frac{p\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h} \\ d_0 = \; -\mu_1-\frac{f(x_0)h}{2} \end{cases}$

ta có

$$b_0u_0+c_0u_1=d_0$$

Làm tương tự với biên b, đặt $\begin{cases} a_n = -\frac{p\left(x_n-\frac{h}{2}\right)}{h} \\ b_n = -\sigma_2+\frac{p\left(x_n-\frac{h}{2}\right)}{h}-\frac{q(b)h}{2} \\ d_n = \; -\mu_2-\frac{f(x_n)h}{2} \end{cases}$

ta sẽ tìm được công thức như sau :

$$a_n u_{n-1} + b_n u_n = d_n$$

III. Phương pháp giải

1. Bài toán biên

a. Bài toán biên loại 1

Dựa vào công thức đã thiết lập ở phần trên, kết hợp với điều kiện biên loại 1

$$\begin{cases} u(x_0) = \alpha \\ u(x_n) = \beta \end{cases}$$

ta có bài toán biên loại 1 tương đương với việc giải hệ phương trình tuyến tính sau :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \quad u_n = \beta \\ a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i \qquad i = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

$$\text{với} \begin{cases} u_i = u(x_i),\ d_i = f(x_i) \\ a_i = \dfrac{p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2} \\ b_i = -\left(\dfrac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2} + q(x_i)\right) \\ c_i = \dfrac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}{h^2} \end{cases}$$

Hệ này là ma trận hệ số dạng 3 đường chéo, ta có thể dễ dàng giải tìm ra hàm số xấp xỉ với sai số $O(h^2)$

b. Bài toán biên loại 2 và loại 3

Dựa vào công thức đã thiết lập ở phần trên, kết hợp với điều kiện biên loại 2 và 3

$$\begin{cases} p(a)u'(a) - \sigma_1 u(a) = -\mu_1 \\ p(b)u'(b) - \sigma_2 u(b) = -\mu_2 \end{cases}$$

ta cũng có bài toán biên loại 2 và 3 sẽ tương đương với hệ phương trình tuyến tính sau :

$$\begin{cases} b_0u_0 + c_0u_1 = d_0 \\ a_nu_{n-1} + b_nu_n = d_n \\ a_iu_{i-1} + b_iu_i + c_iu_{i+1} = d_i \qquad i = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

với
$$\begin{cases} b_0 = -\left(\sigma_1 + \frac{p\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h} - \frac{q(x_0)h}{2}\right),\ c_0 = \frac{p\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h}, d_0 = -\mu_1 - \frac{f(x_0)h}{2} \\ a_n = -\frac{p\left(x_n-\frac{h}{2}\right)}{h}, b_n = -\sigma_2 + \frac{p\left(x_n-\frac{h}{2}\right)}{h} - \frac{q(b)h}{2}, d_n = -\mu_2 - \frac{f(x_n)h}{2} \\ u_i = u(x_i),\ d_i = f(x_i) \\ a_i = \frac{p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2}, b_i = -\left(\frac{p\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+p\left(x_i-\frac{h}{2}\right)}{h^2} + q(x_i)\right), c_i = \frac{p\left(x_i+\frac{h}{2}\right)}{h^2} \end{cases}$$

Hệ này là cũng ma trận hệ số dạng 3 đường chéo, ta có thể dễ dàng giải tìm ra hàm số xấp xỉ với sai số $O(h^2)$

2. Bài toán trị riêng

a. Thiết lập công thức

- Thay công thức tìm được ở phần 2 với các nút lưới, ta có :

$$-[p(x_i) * u'(x_i)]' - q(x_i)u(x_i) = \lambda r(x_i)u(x_i) \quad \text{với } i = \overline{1, n-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{h^2}\left(p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)u_{i-1} - \left(p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\right)u_i + p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)u_{i+1}\right) - q(x_i)u_i = \lambda r(x_i)u_i$$

$$\Rightarrow -\frac{p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2r(x_i)}u_{i-1} + \left(\frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2r(x_i)} - \frac{q(x_i)}{r(x_i)} - \lambda\right)u_i - \frac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}{h^2r(x_i)}u_{i+1} = 0$$

Đặt $\begin{cases} a_i = -\dfrac{p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)} \\ b_i = \dfrac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)} - \dfrac{q(x_i)}{r(x_i)} \\ c_i = -\dfrac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)} \end{cases}$

ta có

$$a_i u_{i-1} + (b_i - \lambda) u_i + c_i u_{i+1} = 0$$

b. Phương pháp giải

Vậy kết hợp với điều kiện $u(a) = u(b) = 0$ hay $u_0 = u_n = 0$ ta được

$$\begin{cases} a_i u_{i-1} + (b_i - \lambda) u_i + c_i u_{i+1} = 0 \quad \text{với } i = \overline{1, n-1} \\ u_0 = u_n = 0 \end{cases}$$

trong đó $\begin{cases} a_i = \dfrac{p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)} \\ b_i = -\dfrac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)} - \dfrac{q(x_i)}{r(x_i)} \\ c_i = \dfrac{p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}{h^2 r(x_i)} \end{cases}$

Nhận xét : Đây là hệ đại số tuyến tính thuần gồm n + 1 ẩn, để hệ này tồn tại nghiệm không đồng thời bằng 0 thì định thức của hệ phải bằng 0, hay nói cách khác λ sẽ là trị riêng của hệ đại số tuyến tính sau :

$$\begin{cases} a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = 0 \quad \text{với } i = \overline{1, n-1} \\ u_0 = u_n = 0 \end{cases}$$

Giải đa thức đặc trưng ta sẽ tìm được λ là giá trị riêng xấp xỉ của bài toán

Thay lại λ vào hệ ta sẽ tìm được hàm riêng xấp xỉ $u(x)$.

D. THUẬT TOÁN VÀ VÍ DỤ

I. Thuật toán

1. Bài toán biên

1.1 Thuật toán

a. Bài toán biên loại 1 :

Input : p(x), f(x), q(x), a, b, α, β

Chọn n là số nút của lưới

h = (b - a)/(n - 1) là bước của lưới

Xây dựng ma trận hệ số 3 đường chéo dựa

vào công thức đã tìm được.

Giải ma trận

b. Bài toán biên loại 2 :

Input : p(x), f(x), q(x), a, b, σ_1, σ_2, μ_1, μ_2

Chọn n là số nút của lưới

h = (b - a)/(n - 1) là bước của lưới

Xây dựng ma trận hệ số 3 đường chéo dựa vào công thức đã

tìm được.

Giải ma trận

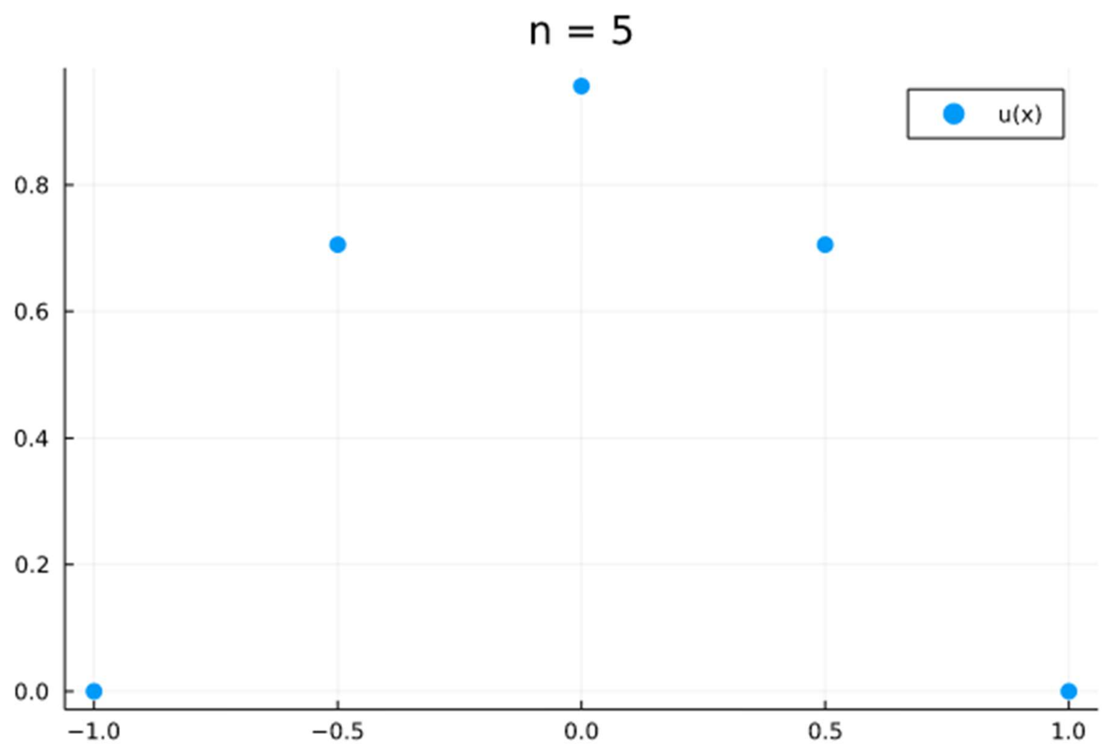
1.2 Ví dụ

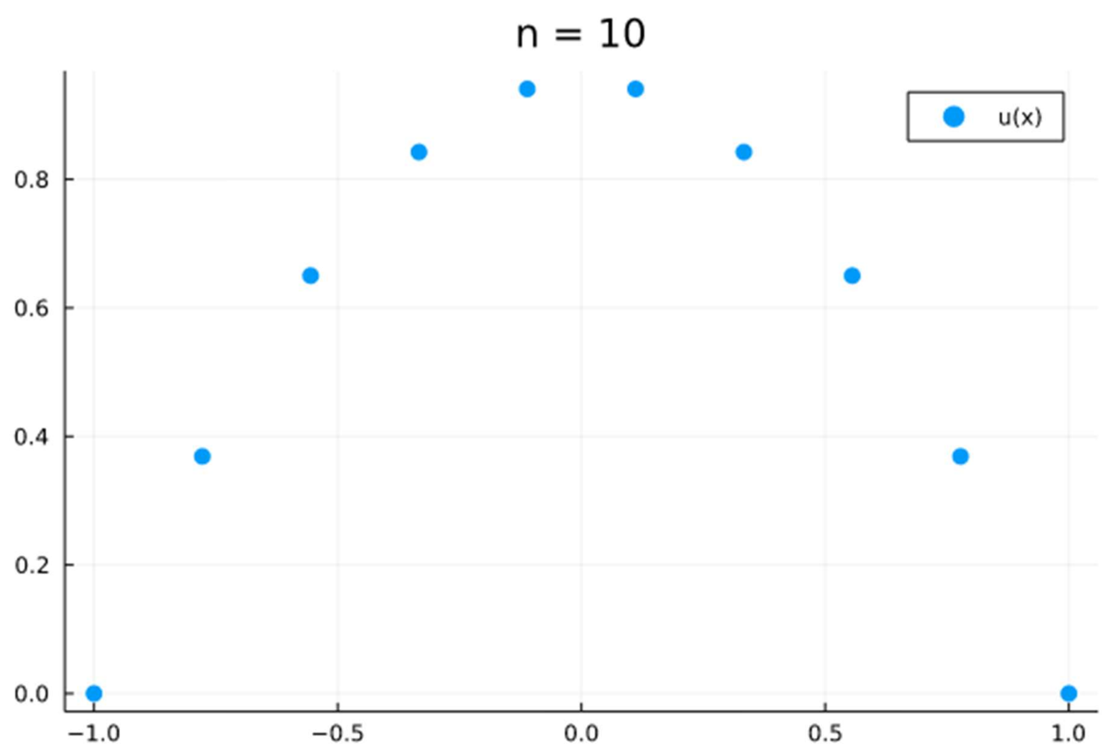
<u>Ví dụ 1 :</u>

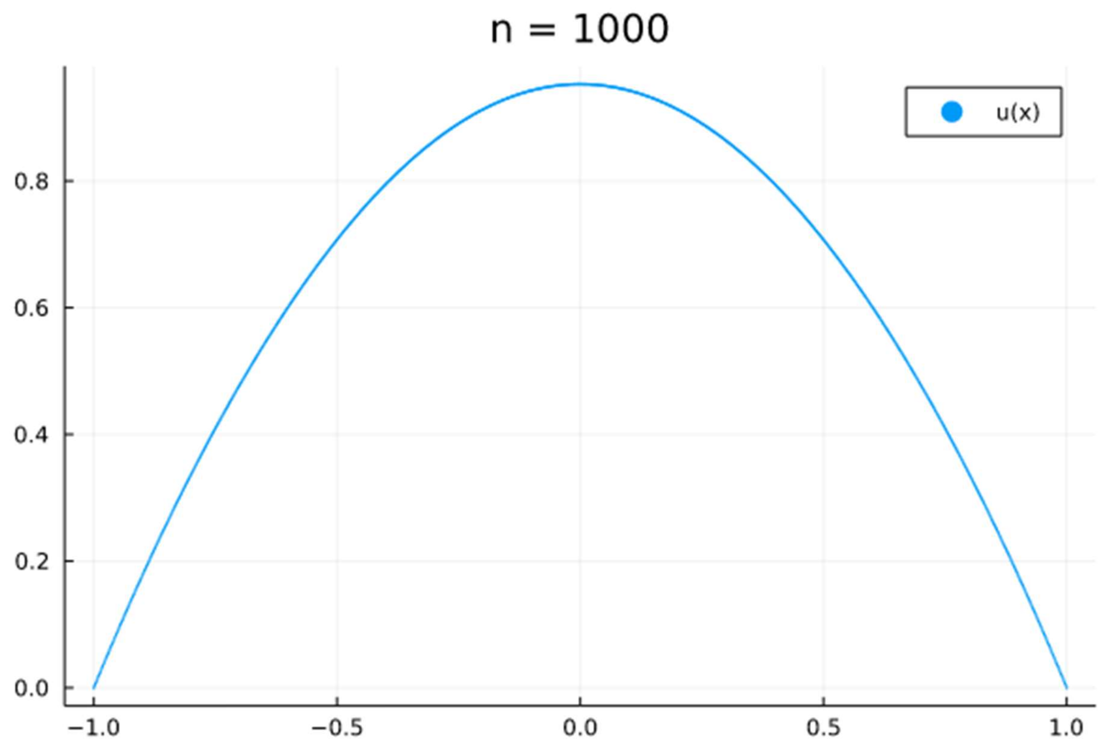
Xét bài toán biên loại 1 :

$$\begin{cases} y'' - x^2 y = -2 \\ \quad -1 < x < 1 \\ y(-1) = y(1) = 0 \end{cases}$$

- Khi đó ta thấy $p(x) = 1, q(x) = x^2, f(x) = 2, a = -1, b = 1$. Ta sẽ khảo sát đồ thị thu được với các giá trị của n như sau :







Nhận xét :

Ta thấy với n càng lớn, đồ thị thu đường càng dày và càng sát với nghiệm thu được.

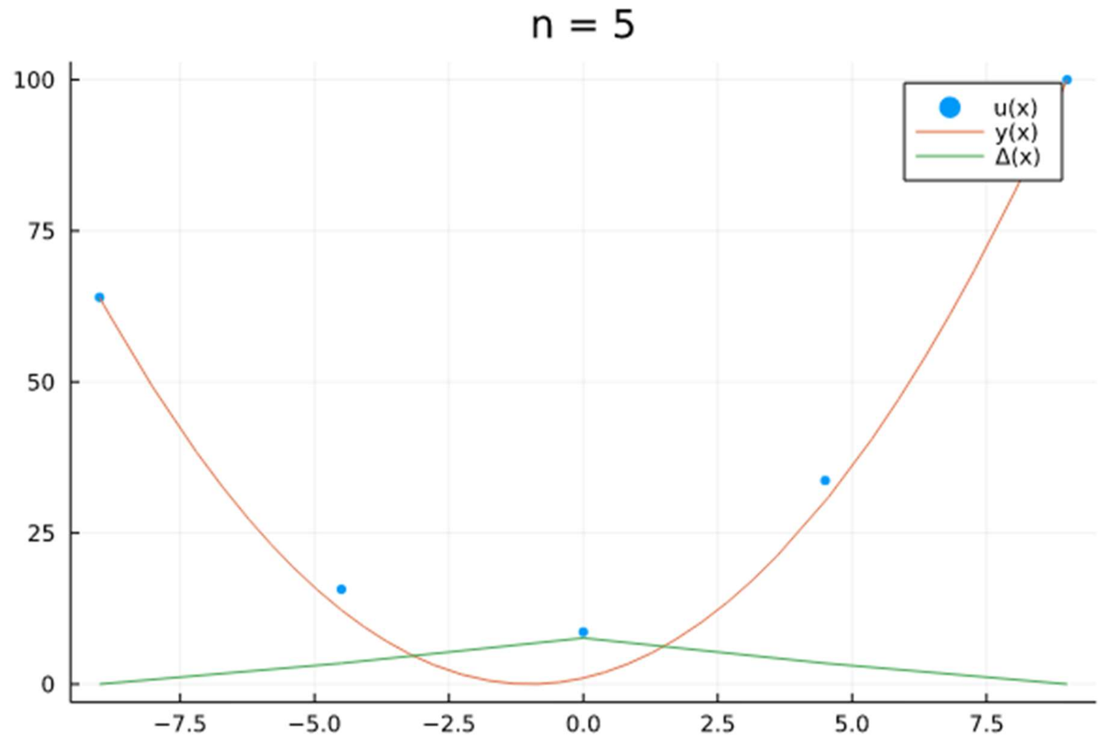
<u>Ví dụ 2:</u>

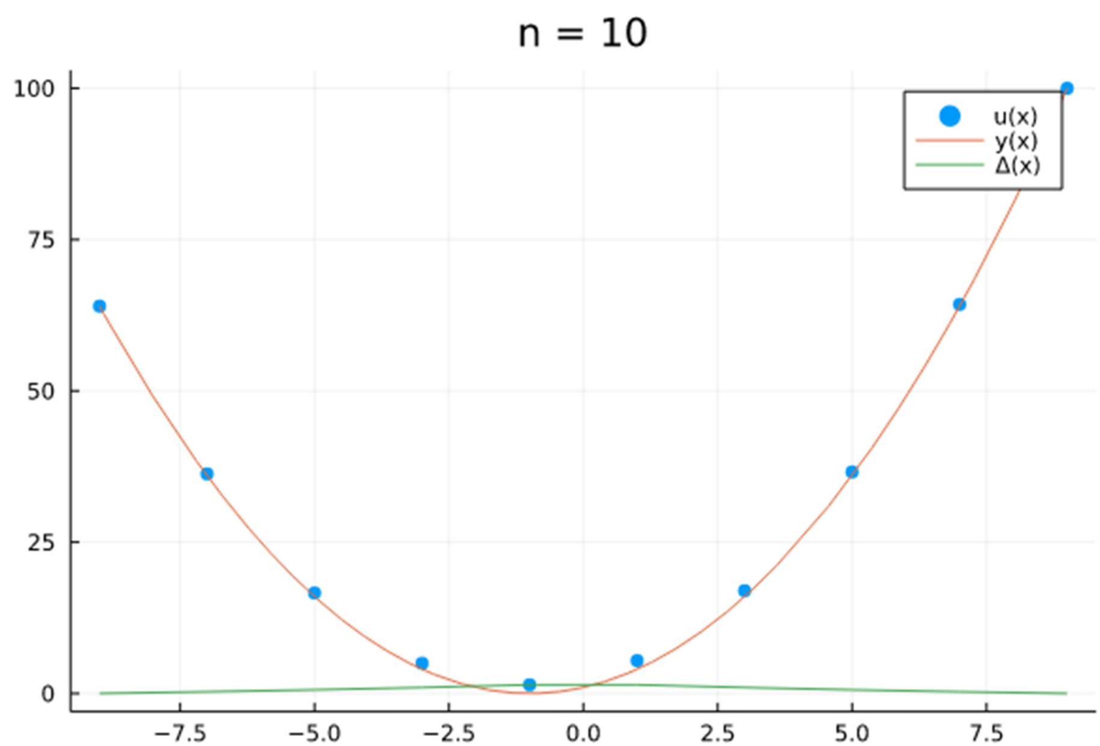
Ở ví dụ này ta sẽ chọn trước $y(x) = x^2 + 2x + 1$, sau đó ta sẽ khảo sát hàm tìm được với hàm số ta đã chọn.

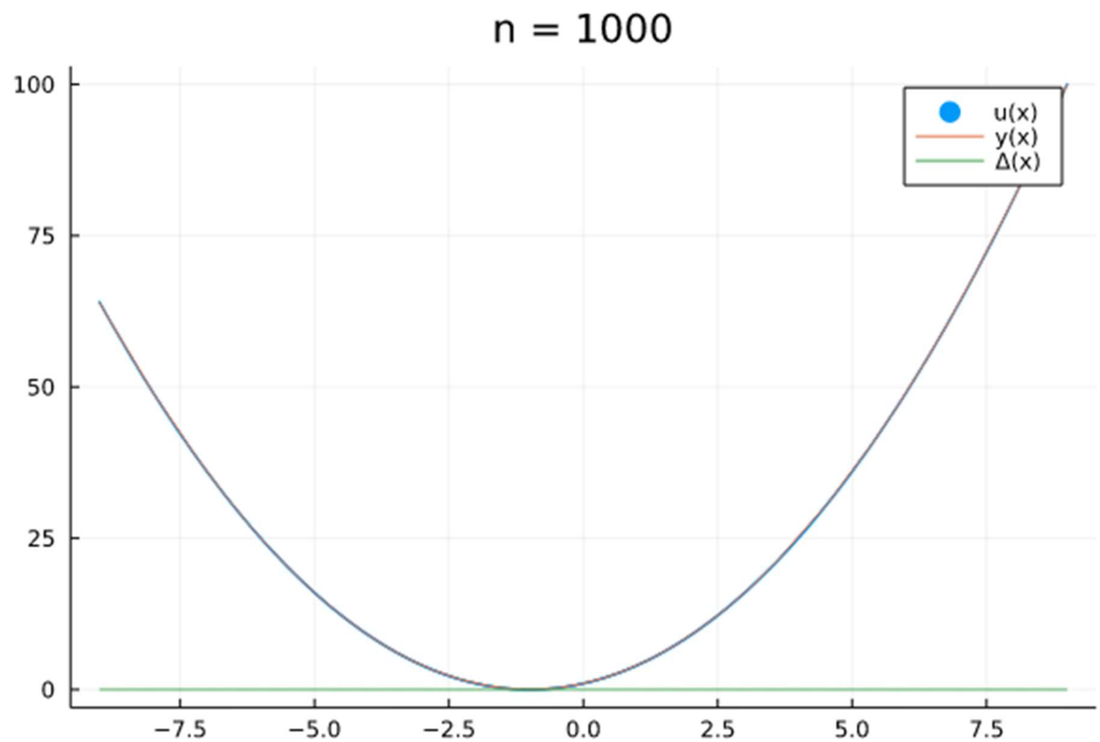
Xét bài toán biên loại 1 :

$$\begin{cases} [(x^2 + 1) * y']' - y = 5x^2 + 2x + 1 \\ -9 < x < 9 \\ y(-9) = 64, y(9) = 100 \end{cases}$$

Khi đó ta thấy $p(x) = x^2 + 1, q(x) = 1, f(x) = -5x^2 - 2x - 1, a = -9, b = 9$


n = 5
u(x)
y(x)
Δ(x)
100
75
50
25
0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5


n = 10
u(x)
y(x)
Δ(x)
100
75
50
25
0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5

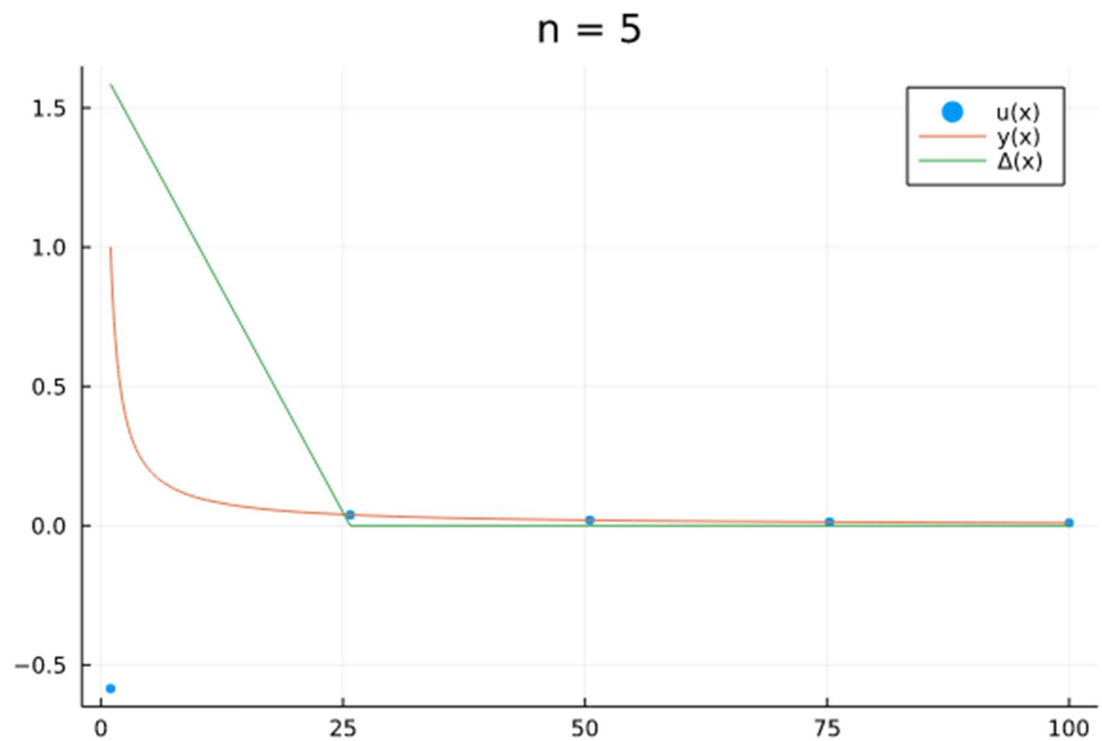


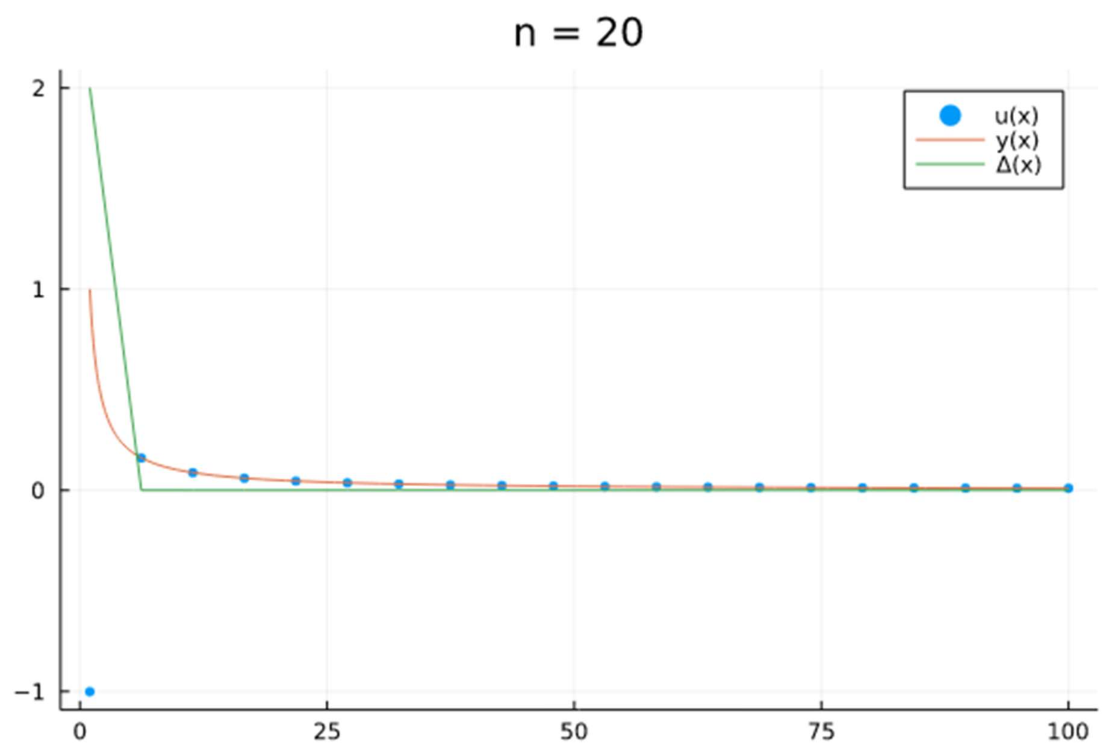
Nhận xét:
- Với n nhỏ dẫn đến h lớn (h tỷ lệ nghịch với n) nên sai số sẽ lớn $o(h^2)$ dẫn đến kết quả như ở đồ thị đầu tiên
- Khi n tăng dần, sai số giảm dần, hàm thu được xấp xỉ với hàm chính xác

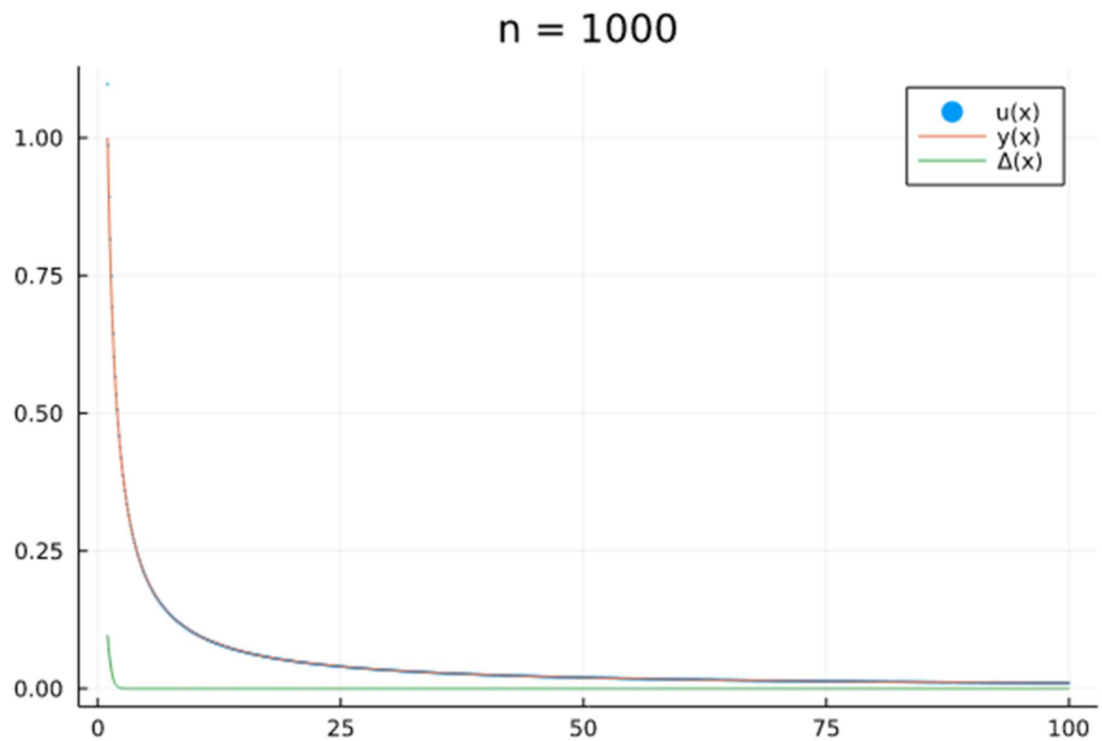
<u>Ví dụ 3:</u>

- Lần này ta sẽ xét ví dụ với bài toán biên loại 3 với khoảng [a, b] lớn hơn
- Hàm được chọn trước là $\frac{1}{x}$, bài toán biên như sau :

$$\begin{cases} y'' - 4x^3 * y = \dfrac{2}{x^3} - 4x \ \textit{với}\ 1 < x < 100 \\ y'(1) - 2y(1) = -3 \\ y'(100) = -\dfrac{1}{10000} \end{cases}$$


n = 5
u(x)
y(x)
Δ(x)
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0
25
50
75
100


n = 20
u(x)
y(x)
Δ(x)
2
1
0
−1
0
25
50
75
100



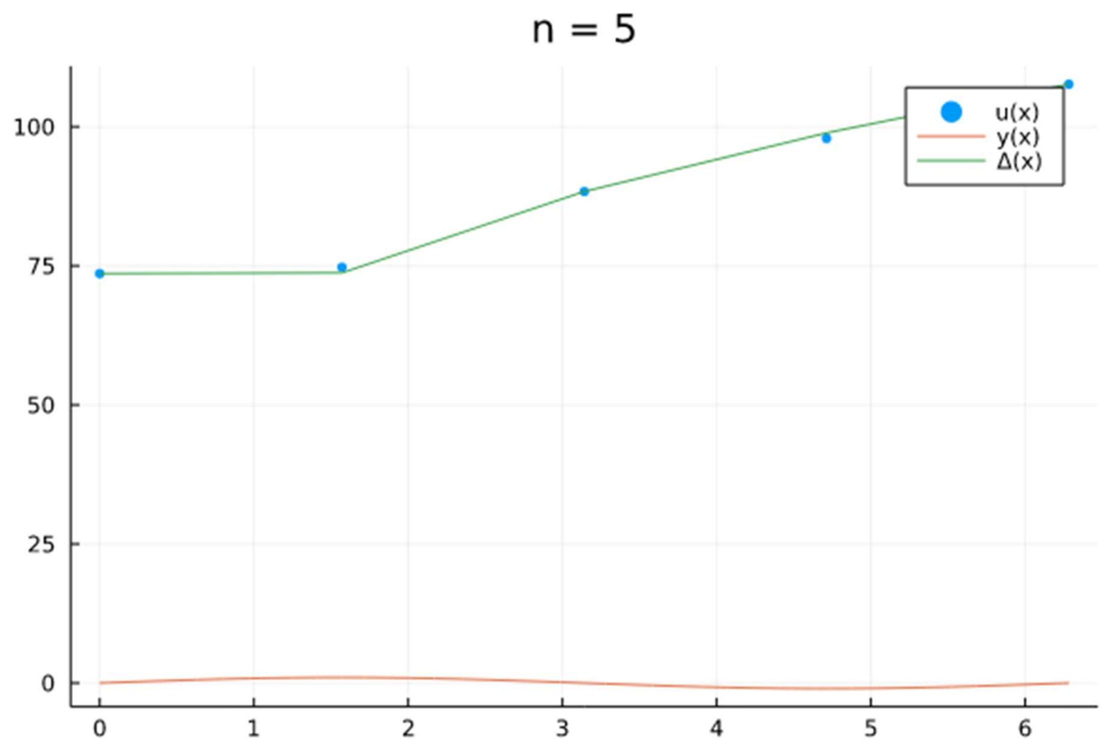
Nhận xét:
- Với khoảng [a, b] lớn, ta thấy phải khi n đủ lớn thì sai số mới có thể chấp nhận được

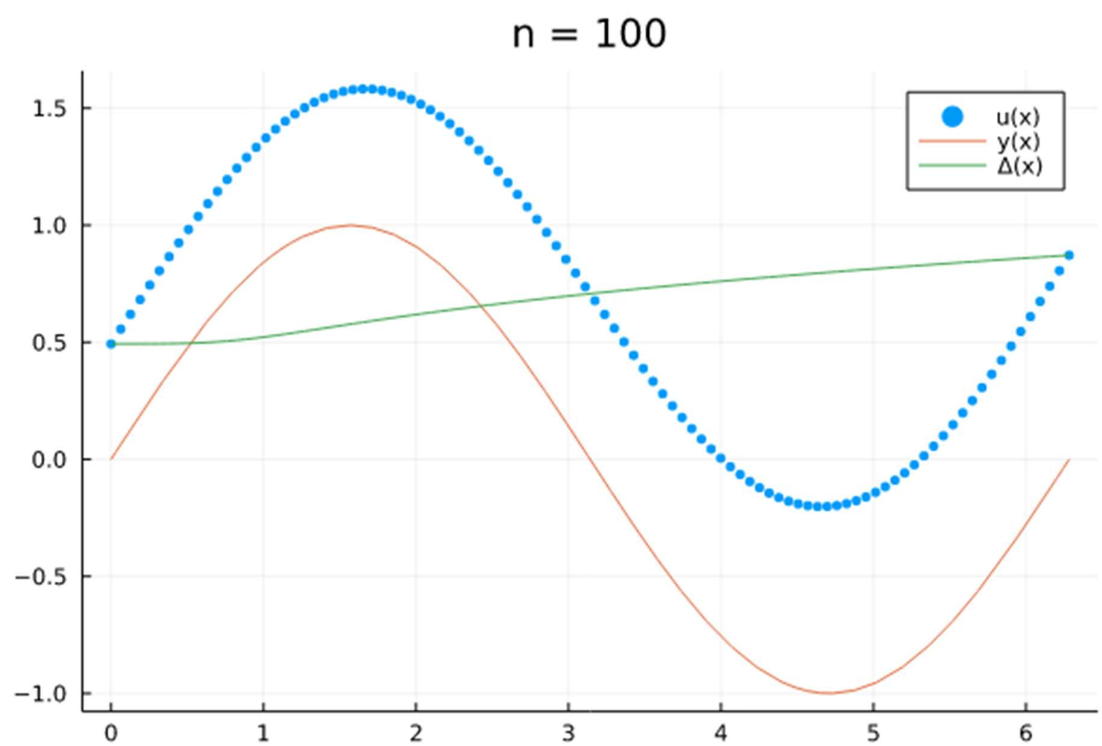
<u>Ví dụ 4 :</u>

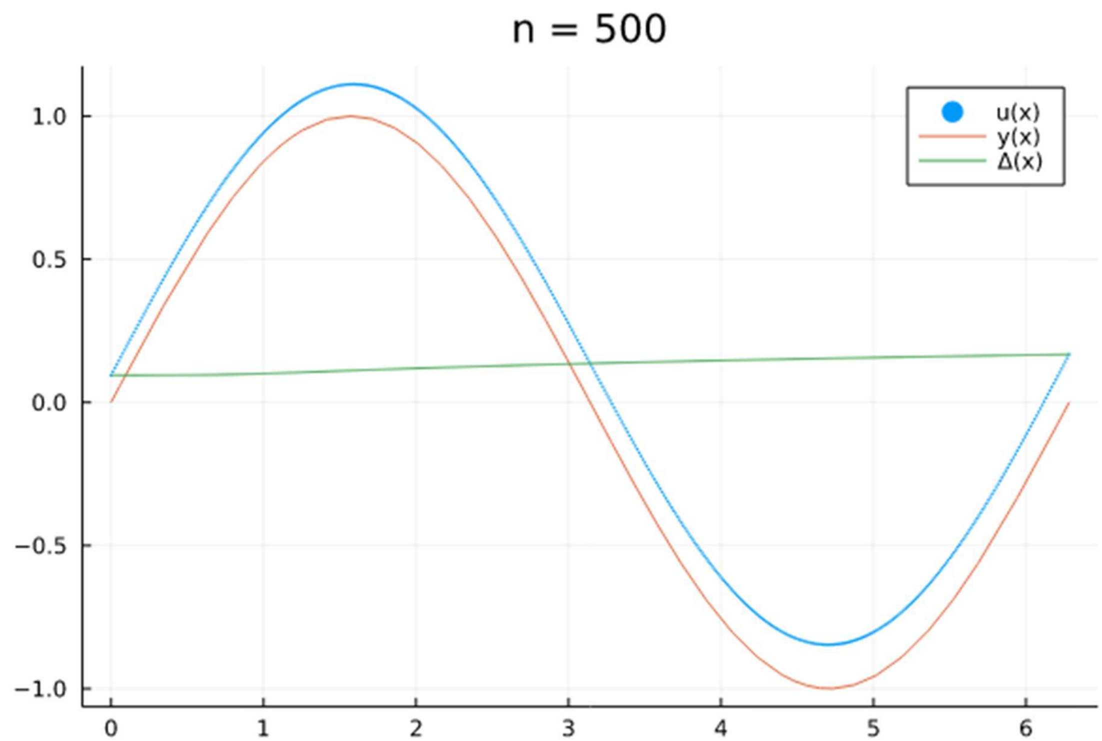
Chọn trước hàm $sin(x)$, bài toán biên như sau :

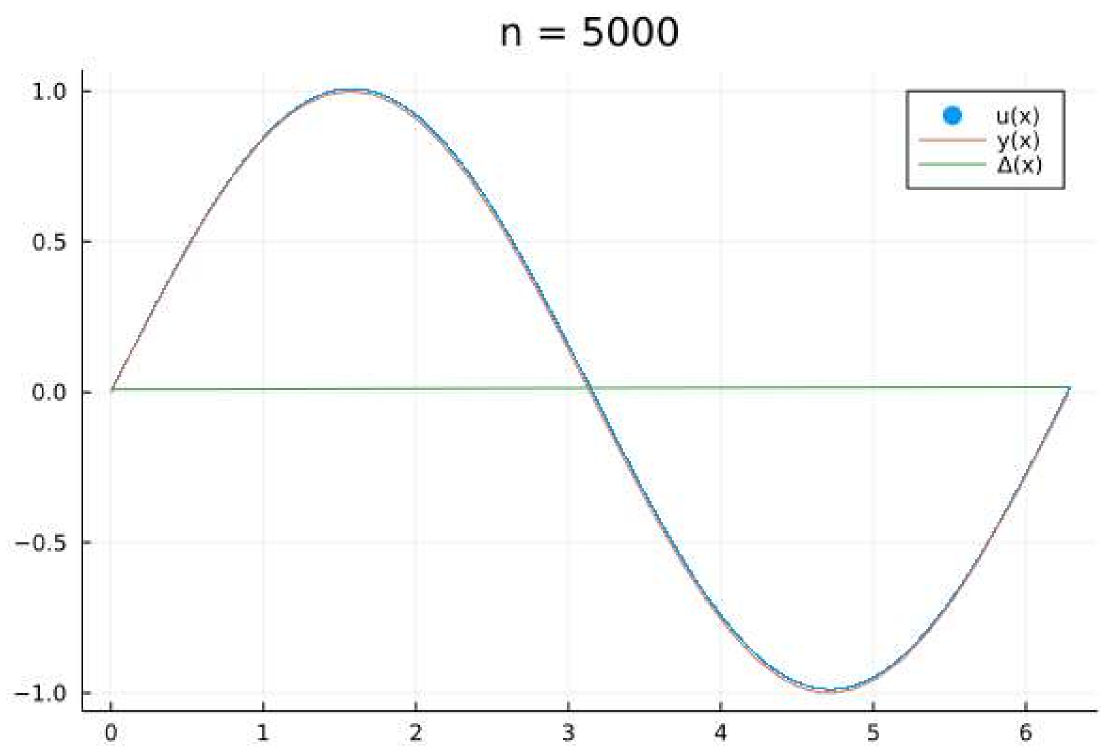
$$\begin{cases} [(x^4 + 1)y']' - x^2 * y = 4x^3 * cos(x) - (x^4 + x^2 + 1) * sin(x) \text{ với } 0 < x < 2\pi \\ p(0)y'(0) = 1 \\ p(2\pi)y'(2\pi) = 1 + 16\pi^4 \end{cases}$$

Khảo sát n ta được thu các đồ thị sau :


n = 5
u(x)
y(x)
Δ(x)
0
25
50
75
100
0
1
2
3
4
5
6


n = 100
u(x)
y(x)
Δ(x)
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
0
1
2
3
4
5
6





Nhận xét :

- Ta thấy ban đầu, hàm xấp xỉ có sai số khá lớn với n = 5.
- Khi tăng dần n, sai số giảm dần tuy nhiên hàm thu được vẫn còn sai lệch (n = 100 và n = 500)

- Chỉ khi tăng n = 5000, sai số mới thu hẹp đến khoảng chấp nhận được.

2. Bài toán trị riêng

2.1 Thuật toán

```
Input : p(x), q(x), r(x)

Chọn n là số nút của lưới

h = (b – a)/(n – 1) là bước của lưới

Xây dựng ma dựa vào công thức đã tìm được.

Giải ma trận
```

2.2 Ví dụ

Ví dụ 1 : Tìm hai trị riêng gần đúng ban đầu của bài toán

$$\begin{cases} -y'' = \lambda(1 + x)y \\ 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Chương trình thu được kết quả như sau :

```
Trị riêng λ = 5.963522811809617
(0.3333333333333333, 1.0)
(0.6666666666666666, 1.218393200446767)
Trị riêng λ = 18.336477188190386
(0.3333333333333333, 1.0)
(0.6666666666666666, -0.7818946137647627)
```

Ví dụ 2 : Tìm trị riêng và xấp xỉ hàm số

$$\begin{cases} -(x\text{^}2) * y'' - (x + 2) * y = \lambda(1 + x)y \\ 1 < x < 10 \\ y(1) = y(10) = 0 \end{cases}$$

Chương trình thu được kết quả như sau :

```
Trị riêng λ = -0.7058985442413223
(3.25, 1.0)
(5.5, -0.9034257689601584)
(7.75, 0.2611376003834507)
Trị riêng λ = 0.47906236516157935
(3.25, 1.0)
(5.5, 0.9743703912167035)
(7.75, -1.2107154152986788)
Trị riêng λ = 2.507340859584423
(3.25, 1.0)
(5.5, 1.956489880623706)
(7.75, 3.351813506911934)
```

E. KẾT LUẬN

Qua các ví dụ đã xét, có thể thấy thuật toán có ưu điểm và nhược điểm sau :

Ưu điểm :

- Thuật toán đơn giản, dễ cài đặt
- Tính hiệu quả cao trong hầu hết các trường hợp

Nhược điểm :

- Thuật toán chỉ có thể xấp xỉ chứ không thể tìm chính xác hàm số
- Khi khoảng [a, b] lớn, dẫn đến sai số lớn, hàm tìm được có thể không còn chính xác

F. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Giáo Trình Giải Tích Số, Lê Trọng Vinh, NXB Khoa học và kỹ thuật, 12/2007

[2] http://web.mit.edu/16.90/BackUp/www/pdfs/Chapter12.pdf

[3] https://archive.siam.org/books/ot98/sample/OT98Chapter1.pdf

[4] Finite difference method - Wikipedia