VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

Chủ đề 25: HÀM GHÉP TRƠN

Môn học : Giải tích số

Giáo viên hướng dẫn : TS. Hà Thị Ngọc Yến

Lớp: CTTN Toán Tin K65

Họ và Tên: Nguyễn Hoàng Sơn

MSSV: 20206165

I. Đặt vấn đề và ý tưởng phương pháp

1. Đặt vấn đề

Các phương pháp tính nội suy đa thức đã biết ở các chủ đề trước, công thức tính khá thuận lợi, nhưng khi số lượng mốc nội suy tăng thêm thì bậc của đa thức nội suy cũng tăng lên. Khi nội suy với bộ dữ liệu lớn thì đa thức thu được sẽ có bậc rất cao, khiến việc tính toán và sử dụng đa thức thu được trở nên phức tạp hơn. Và phương pháp nội suy bằng hàm ghép trơn đã khắc phục được nhược điểm đó.

2. Ý tưởng phương pháp

Từ n+1 mốc nội suy, ta xây dựng các đa thức bậc thấp hơn n trên từng khúc, nhưng khi nối chúng lại vẫn đạt độ trơn cao (ghép trơn từng khúc). Các đa thức này có bậc như nhau và bậc chúng không đổi khi ta tăng số mốc nội suy

II. Nội dung lí thuyết

Trước hết ta cần biết định nghĩa hàm ghép trơn.

Xét 1 phân hoạch chia đoạn [a,b] như sau:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Hàm ghép trơn S(x) bậc m≤n trên đoạn Δ là hàm số có tính chất sau:

- $S \in C_{[a,b]}^{m-1} (m \geq 1)$ là lớp hàm liên tục và có đạo hàm liên tục đến cấp m-1 trên đoạn [a,b]
- Trên mỗi đoạn nhỏ $\Delta_i = \left[x_{i-1}, x_i\right], i = \overline{1,n}$ thì S(x) là đa thức bậc m

S(x) được tạo bởi n đa thức bậc m, mỗi đa thức bậc m cần m+1 hệ số chưa xác định. Như vậy để có được S(x) thì cần $n \times (m+1)$ hệ số. Theo cách chia đoạn như trên thì ta có n-1 điểm nối x_i tại các điểm đó thì hàm S(x) có đạo hàm liên tục đến cấp m-1, nghĩa là đã có $m \times (n-1)$ điều kiện, thêm n+1 điều kiện từ bảng số nên còn thiếu m-1 điều kiện. Điều kiện thiếu sẽ được bổ sung nhờ các nút biên $x = x_0 = a, x = x_n = b$

1. Spline bậc 1

S(x) là đa thức bậc nhất nên có dạng:

$$S(x) = \alpha_i (x_i - x) + \beta_i (x - x_{i-1}), i = \overline{1,n}$$

Khi $x = x_i$, có $S(x_i) = y_i \Rightarrow y_i = \beta_i h_i \Rightarrow \beta_i = \frac{y_i}{h_i}$

Khi $x = x_{i-1}$, có $S(x_{i-1}) = y_{i-1} \Rightarrow y_{i-1} = \alpha_i h_i \Rightarrow \alpha_i = \frac{y_{i-1}}{h_i}$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{y_{i-1}}{h_i}(x_i - x) + \frac{y_i}{h_i}(x - x_{i-1}), i = \overline{1,n}$$

$(h_i = x_i - x_{i-1})$

2. Spline bậc 2

S(x) là đa thức bậc 2 nên S'(x) là đa thức bậc nhất

$$\Rightarrow S'(x) = \alpha_i\left(x_i - x\right) + \beta_i\left(x - x_{i-1}\right), i = \overline{1,n}$$

Đăt $S'\left(x_i\right) = m_i$

Tương tự, ta có:

$$S'\left(x\right) = \frac{m_{i-1}}{h_i}\left(x_i - x\right) + \frac{m_i}{h_i}\left(x - x_{i-1}\right), i = \overline{1,n}$$

Tích phân S'(x) một lần ta được:

$$S\left(x\right) = -\frac{m_{i-1}}{2h_i}\left(x_i - x\right)^2 + \frac{m_i}{2h_i}\left(x - x_{i-1}\right)^2 + A_i, i = \overline{1,n}$$

Khi $x = x_i$, có $S\left(x_i\right) = y_i \Rightarrow y_i = \frac{m_i}{2}h_i + A_i \Rightarrow A_i = y_i - \frac{m_i}{2}h_i$

Khi $x = x_{i-1}$, có $S\left(x_{i-1}\right) = y_{i-1} \Rightarrow y_{i-1} = -\frac{m_{i-1}}{2}h_i + A_i$

$$\Rightarrow y_i - y_{i-1} = \frac{m_i + m_{i-1}}{2}h_i$$

$$\Rightarrow m_i + m_{i-1} = \frac{2}{h_i}\left(y_i - y_{i-1}\right)$$

Thiếu một phương trình nữa để giải được, ta lấy thêm một điều kiện tại biên x=a hoặc x=b

Nếu $f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp 1 tại a hoặc b thì được $f'\left(a\right) = m_0$ hoặc $f'\left(b\right) = m_n$

Xét $f'\left(a\right) = m_o$:

Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} m_0 = f'\left(a\right) \\ m_i + m_{i-1} = \dfrac{2}{h_i}\left(y_i - y_{i-1}\right), i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Giải hệ trên bằng cách thế dần như sau:

$$\begin{cases} m_o = f'(a) \\ m_1 = -m_o + \dfrac{2}{h_1}(y_1 - y_0) \\ m_2 = -m_1 + \dfrac{2}{h_2}(y_2 - y_1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ m_n = -m_{n-1} + \dfrac{2}{h_n}(y_n - y_{n-1}) \end{cases}$$

3. Spline bậc 3

S(x) là đa thức bậc 3 nên $S''(x)$ là đa thức bậc nhất.

Đặt $S''(x_i) = m_i$

Tương tự như trên ta có:

$$S''(x) = \frac{m_{i-1}}{h_i}(x_i - x) + \frac{m_i}{h_i}(x - x_{i-1}), i = \overline{1, n}$$

Tích phân đẳng thức trên 2 lần ta được:

$$S(x) = \frac{m_{i-1}}{6h_i}(x_i - x)^3 + \frac{m_i}{6h_i}(x - x_{i-1})^3 + A_i(x_i - x) + B_i(x - x_{i-1})$$

Khi $x = x_i$, có $S(x_i) = y_i$

$$\Rightarrow y_i = \frac{m_i}{6}h_i^2 + B_i h_i \Rightarrow B_i = \frac{1}{h_i}\left(y_i - \frac{m_i}{6}h_i^2\right)$$

Khi $x = x_{i-1}$, có $S(x_{i-1}) = y_{i-1}$

$$\Rightarrow y_{i-1} = \frac{m_{i-1}}{6}h_i^2 + A_i h_i \Rightarrow A_i = \frac{1}{h_i}\left(y_{i-1} - \frac{m_{i-1}}{6}h_i^2\right)$$

Thay vào S(x) ta được:

$$S(x) = \frac{m_{i-1}}{6h_i}(x_i - x)^3 + \frac{m_i}{6h_i}(x - x_{i-1})^3 + \frac{1}{h_i}\left(y_{i-1} - \frac{m_{i-1}}{6}h_i^2\right)(x_i - x) + \frac{1}{h_i}\left(y_i - \frac{m_i}{6}h_i^2\right)(x - x_{i-1})$$

Đạo hàm S(x) 1 lần:

$$S'(x) = -\frac{m_{i-1}}{2h_i}(x_i - x)^2 + \frac{m_i}{2h_i}(x - x_{i-1})^2 + \frac{1}{h_i}\left(y_{i-1} - \frac{m_{i-1}}{6}h_i^2\right) + \frac{1}{h_i}\left(y_i - \frac{m_i}{6}h_i^2\right)$$

Áp dụng điều kiện liên tục tại các điểm nối, buộc tại điểm x_i thì $S'(x_i + 0) = S'(x_i - 0)$

Với $S'(x_i - 0)$ lấy giá trị S'(x) trên đoạn $[x_{i-1}, x_i]$

Và $S'(x_i + 0)$ lấy giá trị S'(x) trên đoạn $[x_i, x_{i+1}]$

Khi đó, ta có:

$$S'(x_i - 0) = \frac{m_{i-1}}{6}h_i + \frac{m_i}{3}h_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

$$S'(x_i + 0) = -\frac{m_i}{3}h_{i+1} - \frac{m_{i+1}}{6}h_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

Từ $S'(x_i + 0) = S'(x_i - 0), i = \overline{1, n-1}$ ta được n-1 phương trình n+1 ẩn $m_0, m_1, ..., m_n$:

$$\frac{h_i}{6}m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}m_i + \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad (*) \quad \text{với } i = \overline{1, n-1}$$

Nhân 2 vế của với $\frac{6}{h_i + h_{i+1}}$ đặt $\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \mu_i = 1 - \lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$ và

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$$

Khi đó, phương trình $(*)$ trở thành:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i \qquad i = \overline{1, n-1}$$

Ta còn thiếu 2 điều kiện để giải được, điều kiện đó được lấy từ 2 đầu mút

- Nếu $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 tại a và b với $f''(a) = m_0 = d_0$ và $f''(b) = m_n = d_n$

Thì ta sẽ có hệ phương trình:

$$\begin{cases} m_0 = d_0 \\ \mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i & i = \overline{1, n-1} \\ m_n = d_n \end{cases} \qquad (1)$$

- Nếu $f(x)$ có đạo hàm cấp 1 tại a và b với $f'(a)$ và $f'(b)$

Có $S'(x_0+0) = -\frac{m_0}{3}h_1 - \frac{m_1}{6}h_1 + \frac{1}{h_1}(y_1 - y_0) = f'(a)$

$$\Rightarrow 2m_0 + m_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{1}{h_1}(y_1 - y_0) - f'(a)\right) = d_0$$

Tương tự, $S'(x_n - 0) = \frac{m_n}{3}h_n + \frac{m_{n-1}}{6}h_n + \frac{1}{h_n}(y_n - y_{n-1}) = f'(b)$

$$\Rightarrow m_{n-1} + 2m_n = \frac{6}{h_n}\left(f'(b) - \frac{1}{h_n}(y_{n+1} - y_n)\right) = d_n$$

Vậy trường hợp trên ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = d_0 \\ \mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i & i = \overline{1, n-1} \\ m_{n-1} + 2m_n = d_n \end{cases} \qquad (2)$$

Từ hai trường hợp trên ta có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} 2m_0 + \lambda_0 m_1 = d_0 \\ \mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i & i = \overline{1, n-1} \\ \mu_n m_{n-1} + 2m_n = d_n \end{cases} \qquad (3)$$

- Trong trường hợp nội suy với mốc cách đều $h_i = x_i - x_{i-1} = h = const\left(\forall i = \overline{1, n}\right)$ thì $\mu_i = \lambda_i = \frac{1}{2}$

  Khi đó, hệ (3) được viết lại thành:

$$\begin{cases} 2m_0 + \lambda_0 m_1 = d_0 \\ m_{i-1} + 2m_i + m_{i+1} = 2d_i \\ \mu_n m_{n-1} + 2m_n = d_n \end{cases} \qquad i = \overline{1, n-1} \qquad (4)$$

- Giải hệ (3) như sau:

Ta tìm nghiệm trong hệ (3) có dạng:

$$m_i = \alpha_{i+1} m_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad i = \overline{0, n-1} \qquad (5)$$

Trong đó $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ sẽ được tìm từ điều kiện ràng buộc (4) là nghiệm của hệ (3)

Thay (5) vào (3) và kết hợp sử dụng đẳng thức:

$$m_{i-1} = \alpha_i m_i + \beta_i = \alpha_i \left(\alpha_{i+1} m_{i+1} + \beta_{i+1}\right) + \beta_i$$

Ta được:

$$\left[\alpha_{i+1}\left(\alpha_i \mu_i + 2\right) + \lambda_i\right] m_{i+1} + \left[\left(\alpha_i \mu_i + 2\right)\beta_{i+1} + \beta_i \mu_i - d_i\right] = 0$$

Đẳng thức trên đúng $\forall m_i \;\; i = \overline{1, n-1}$ nên:

$$\begin{cases} \alpha_{i+1}\left(\alpha_i \mu_i + 2\right) + \lambda_i = 0 \\ \left(\alpha_i \mu_i + 2\right)\beta_{i+1} + \beta_i \mu_i - d_i = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{i+1} = \dfrac{\lambda_i}{-2 - \alpha_i \mu_i} \\ \beta_{i+1} = \dfrac{\beta_i \mu_i - d_i}{-2 - \alpha_i \mu_i} \end{cases} \qquad i = \overline{1, n-1}$$

Để thực hiện công thức trên ta cần có a_1, β_1, m_n được xác định từ phương trình đầu tiên và phương trình cuối cùng của hệ (3)

Vậy nghiệm của hệ (3) được xác định như sau:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{\lambda_0}{2}; \beta_1 = \dfrac{d_0}{2} \\ \alpha_{i+1} = \dfrac{\lambda_i}{-2-\alpha_i \mu_i} \\ \beta_{i+1} = \dfrac{\beta_i \mu_i - d_i}{-2-\alpha_i \mu_i} \\ m_n = \dfrac{\mu_n \beta_n - d_n}{-2-\mu_n \alpha_n} \\ m_i = \alpha_{i+1} m_{i+1} + \beta_{i+1} \end{cases}$$

4. Lưu ý khi chọn các điều kiện biên:

Trong phần lý thuyết ở trên, chúng ta chọn được điều kiện tại biên như vậy khi đã có hàm $y = f(x)$. Nhưng trong thực tế, bài toán đặt ra thường chỉ cho dướng dạng bộ điểm (x, y) mà không cho biết hàm số. Trong trường hợp này, ta chọn đạo hàm cấp 1 tại 2 biên như sau:

$$f'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \text{ và } f'(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

III. Sai số và ứng dụng

1. Sai số:

Sai số phụ thuộc rất lớn vào cách chọn mốc nội suy. Khi ta chọn mốc nội suy phù hợp và khoảng cách giữa các mốc nội suy đủ nhỏ thì sai số sẽ bé. Ngược lại thì sai số sẽ lớn

2. Ứng dụng:

Do đa thức thu được có bậc không quá cao (thường là bậc 3), nên việc sử dụng các đa thức này vào tính toán và ứng dụng thực tế khá dễ dàng và phổ biến. Sau đây là một vài ứng dụng của hàm SPLINE:

a. Trong tính toán:

- Sử dụng hàm SPLINE để tính gần đúng giá trị hàm số
- Sử dụng hàm SPLINE để tính gần đúng đạo hàm

- Sử dụng hàm SPLINE để tính gần đúng tích phân

b. Trong khoa học, kỹ thuật

- Sử dụng hàm SPLINE để vẽ bàn tay
- Sử dụng hàm SPLINE để nhận dạng chữ viết tay
- Sử dụng hàm SPLINE để nhận dạng, xử lý ảnh

3. Ưu nhược điểm:

a. Ưu điểm:

- Sử dụng trong trường hợp bộ dữ liệu lớn, nhiều mốc nội suy. Khi tăng thêm các mốc ta vẫn thu được đa các thức với bậc cố định

b. Nhược điểm:

- Nhược điểm lớn nhất của phương pháp nằm ở việc chọn mốc nội suy, nếu ta chọn các mốc nội suy hợp lý thì đa thức thu được sẽ chính xác, ngược lại thì đa thức thu được sẽ có sai số khá lớn

IV. Thuật toán, chương trình và ví dụ

1. Thuật toán

Input:

Bộ mốc nội suy x_i và y_i

Điểm cần tính giá trị a

Output:

Các đa thức spline bậc 1, 2, 3

Đồ thị các hàm spline bậc 1, 2, 3

Giá trị hàm spline bậc 1, 2, 3 tại các điểm cần tính

Bước 1:

- Nhập bộ giá trị x_i , y_i vào file input

- Nhập a

Bước 2:

- Xây dựng hàm spline bậc 3:

  + Xây dựng gói tính m :

    Khởi tạo dh0 và dhn

    Tính $m_i \quad i=\overline{1,n}$

  + S(x) trên mỗi đoạn $\left[x_{i-1},x_i\right]$ bằng:

$$S(x)=\frac{m_{i-1}}{6h_i}(x_i-x)^3+\frac{m_i}{6h_i}(x-x_{i-1})^3+\frac{1}{h_i}\left(y_{i-1}-\frac{m_{i-1}}{6}h_i^2\right)(x_i-x)+\frac{1}{h_i}\left(y_i-\frac{m_i}{6}h_i^2\right)(x-x_{i-1})$$

Bước 3:

- Xây dựng hàm spline bậc 1:

  + S(x) trên mỗi đoạn $\left[x_{i-1},x_i\right]$ bằng:

$$S(x)=\frac{y_{i-1}}{h_i}(x_i-x)+\frac{y_i}{h_i}(x-x_{i-1})$$

Bước 4:

- Xây dựng hàm spline bậc 2:

+ Khởi tạo m_0

+ Tính $m_i \quad i=\overline{1,n}$

+ S(x) trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ bằng:

$$S(x) = -\frac{m_{i-1}}{2h_i}(x_i - x)^2 + \frac{m_i}{2h_i}(x - x_{i-1})^2 - \frac{m_i}{2}h_i + y_i$$

Bước 5:

- Xuất ra các đa thức spline 3, 1, 2

- Xuất ra đồ thị các đa thức

- Xuất giá trị tại điểm a

2. Chương trình

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def data():
    global x,y,n
    x = []
    y = []
    with open('test.txt','r+') as f:
        for line in f.readlines():
            x.append(float(line.split(' ')[0]))
            y.append(float(line.split(' ')[1]))
    x = np.asarray(x)
    y = np.asarray(y)
    n = len(x)-1
    return x,y,n
x,y,n=data()


def spline3(k,x0):
    x, y, n = data()
    h = np.diff(x)
```

```
    # Duoi day la ham tính m
    def tinhM(x,y,n):
        m=np.empty(n+1)
        d=np.empty(n+1)
        anpha=np.empty(n+1)
        beta=np.empty(n+1)
        muy=np.empty(n+1)
        lamda=np.empty(n+1)
        h=np.diff(x)
        dh0=(y[1]-y[0])/(x[1]-x[0])
        dhn=(y[n]-y[n-1])/(x[n]-x[n-1])
        d[0]=6/h[0]*((y[1]-y[0])/h[0]-dh0)
        d[n]=6/h[n-1]*(dhn-(y[n]-y[n-1])/h[n-1])
        anpha[1]=1/(-2)
        beta[1]=d[0]/2
        for i in range(1,n):
            d[i]=6*((y[i+1]-y[i])/h[i]-(y[i]-y[i-1])/h[i-1])/(h[i]+h[i-1])
        for i in range(1,n):
            muy[i]=h[i-1]/(h[i-1]+h[i])
            lamda[i]=h[i]/(h[i-1]+h[i])
        for i in range(1,n):
            anpha[i+1]=lamda[i]/(-2-anpha[i]*muy[i])
            beta[i+1]=(muy[i]*beta[i]-d[i])/(-2-anpha[i]*muy[i])
        m[n]=(1*beta[n]-d[n])/(-2-1*anpha[n])
        for i in range(n-1,-1,-1):
            m[i]=anpha[i+1]*m[i+1]+beta[i+1]
        return m
    m=tinhM(x,y,n)
    if k==1:
        for j in range(1,n+1):
            print('S3' +'['+ str(x[j-1])+','+str(x[j])+']'+'= ' + str(round(m[j - 1] /
(6 * h[j - 1]),3)) + '(' + str(x[j]) + '- x)^3' +
                  '+ ' + str(round(m[j] / (h[j - 1] * 6),3)) + '(x-' + str(x[j - 1]) +
')^3' +
                  '+ ' + str(round((1 / h[j - 1]) * (y[j - 1] - m[j - 1] / 6 * h[j - 1]
** 2),3)) + '(' + str(x[j]) + '-x)' +
                  '+ ' + str(round((y[j] - (m[j] / 6) * h[j - 1] ** 2) / h[j - 1],3)) +
'(x-' + str(x[j - 1]) + ')')
    for i in range(1,n+1):
        if x[i-1]<=x0 and x0<=x[i]:
            s3=m[i-1]/(6*h[i-1])*(x[i]-x0)**3+m[i]/(h[i-1]*6)*(x0-x[i-1])**3+(1/h[i-
1])*(y[i-1]-m[i-1]/6*h[i-1]**2)*(x[i]-x0) +(y[i]-(m[i]/6)*h[i-1]**2)*(x0-x[i-1])/h[i-1]
    return s3


def spline1(k,x0):
    x, y, n = data()
    h = np.diff(x)
    if k==1:
```

```
        for i in range(1,n+1):
            print('S1'+'['+str(x[i-1])+', '+str(x[i])+']='+str(round(y[i-1]/h[i-1],3))+'('+str(x[i])+'-x)'+'+'+str(round(y[i]/h[i-1],3))+'(x-'+str(x[i-1])+')')
    for i in range(1,n+1):
        if x[i-1]<=x0 and x0<=x[i]:
            s1=y[i-1]/h[i-1]*(x[i]-x0)+y[i]/h[i-1]*(x0-x[i-1])
    return s1


def spline2(k,x0):
    x, y, n = data()
    h = np.diff(x)
    m=np.empty(n+1)
    m[0]=(y[1]-y[0])/h[0]
    for i in range(1,n+1):
        m[i]=2/h[i-1]*(y[i]-y[i-1])-m[i-1]
    if k==1:
        for i in range(1,n+1):
            print('S2'+'['+str(x[i-1])+', '+str(x[i])+']='+str(round(-m[i-1]/2/h[i-1],3))+'('+str(x[i])+'-x)^2+'+str(round(m[i]/2/h[i-1],3))+'(x-'+str(x[i-1])+')^2'+'+'+str(round(y[i]-m[i]/2*h[i-1],3)))
    for i in range(1,n+1):
        if x[i-1]<=x0 and x0<=x[i]:
            s2=-m[i-1]/2/h[i-1]*(x[i]-x0)**2+m[i]/2/h[i-1]*(x0-x[i-1])**2+y[i]-m[i]/2*h[i-1]
    return s2


print("Các đa thức spline bậc 3")
spline3(1,x[0])
print("===============================================================================")
print("Các đa thức spline bậc 1:")
spline1(1,x[0])
print("===============================================================================")
print("Các đa thức spline bậc 2")
spline2(1,x[0])
print("===============================================================================")
a=float(input("Nhập giá trị cần tính: "))
print('Giá trị xấp xỉ đa thức theo spline bậc 3 tại '+str(a)+ ' là: '+str(spline3(0,a)))
print('Giá trị xấp xỉ đa thức theo spline bậc 2 tại '+str(a)+ ' là: '+str(spline2(0,a)))
print('Giá trị xấp xỉ đa thức theo spline bậc 1 tại '+str(a)+ ' là: '+str(spline1(0,a)))


x0=np.linspace(x[0], x[n], 1000)
y3=[]
```

```
y1=[]
y2=[]
for i in x0:
  y3.append(spline3(0,i))
  y1.append(spline1(0,i))
  y2.append(spline2(0,i))
plt.figure(figsize=(20,10))
plt.title("Spline Curve")
plt.plot(x0,y1,color='blue',label='Spline bậc 1')
plt.plot(x0,y2,color='green',label='Spline bậc 2')
plt.plot(x0,y3,color='red',label='Spline bậc 3')
plt.scatter(x,y)
plt.legend();
```

3. Một số ví dụ minh họa

VD1: Bộ điểm dựa trên hàm $y = \sin(x)$ với khoảng nội suy $[0, 2\pi]$:

x	0	0.52	1.05	1.57	2.09	2.62	3.14	3.66	4.17	4.71	5.23	5.76	6.28
$y = f(x)$	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0

Sau đây là kết quả chạy chương trình:

Các đa thức spline bậc 3

S3[0.0,0.52] = 0.097(0.52- x) ^3+ -0.194(x-0.0) ^3+ -0.026(0.52-x) + 1.014(x-0.0)

S3[0.52,1.05] = -0.19(1.05- x) ^3+ -0.277(x-0.52) ^3+ 0.997(1.05-x) + 1.719(x-0.52)

S3[1.05,1.57] = -0.282(1.57- x) ^3+ -0.32(x-1.05) ^3+ 1.749(1.57-x) + 2.009(x-1.05)

S3[1.57,2.09] = -0.32(2.09- x) ^3+ -0.289(x-1.57) ^3+ 2.009(2.09-x) + 1.751(x-1.57)

S3[2.09,2.62] = -0.283(2.62- x) ^3+ -0.165(x-2.09) ^3+ 1.721(2.62-x) + 0.99(x-2.09)

S3[2.62,3.14] = -0.168(3.14- x) ^3+ 0.0(x-2.62) ^3+ 1.007(3.14-x) + -0.0(x-2.62)

S3[3.14,3.66] = 0.0(3.66- x) ^3+ 0.168(x-3.14) ^3+ -0.0(3.66-x) + -1.007(x-3.14)

S3[3.66,4.19] = 0.165(4.19- x) ^3+ 0.283(x-3.66) ^3+ -0.99(4.19-x) + -1.721(x-3.66)

S3[4.19,4.71] = 0.289(4.71- x) ^3+ 0.32(x-4.19) ^3+ -1.751(4.71-x) + -2.009(x-4.19)

S3[4.71,5.23] = 0.32(5.23- x) ^3+ 0.282(x-4.71) ^3+ -2.009(5.23-x) + -1.749(x-4.71)

S3[5.23,5.76] = 0.277(5.76- x) ^3+ 0.19(x-5.23) ^3+ -1.719(5.76-x) + -0.997(x-5.23)

S3[5.76,6.28] = 0.194(6.28- x) ^3+ -0.097(x-5.76) ^3+ -1.014(6.28-x) + 0.026(x-5.76)

==

Các đa thức spline bậc 1:

S1[0.0, 0.52] =0.0(0.52-x) +0.962(x-0.0)

S1[0.52, 1.05] =0.943(1.05-x) +1.642(x-0.52)

S1[1.05, 1.57] =1.673(1.57-x) +1.923(x-1.05)

S1[1.57, 2.09] =1.923(2.09-x) +1.673(x-1.57)

S1[2.09, 2.62] =1.642(2.62-x) +0.943(x-2.09)

S1[2.62, 3.14] =0.962(3.14-x) +0.0(x-2.62)

S1[3.14, 3.66] =0.0(3.66-x) +-0.962(x-3.14)

S1[3.66, 4.19] =-0.943(4.19-x) +-1.642(x-3.66)

S1[4.19, 4.71] =-1.673(4.71-x) +-1.923(x-4.19)

S1[4.71, 5.23] =-1.923(5.23-x) +-1.673(x-4.71)

S1[5.23, 5.76] =-1.642(5.76-x) +-0.943(x-5.23)

S1[5.76, 6.28] =-0.962(6.28-x) +0.0(x-5.76)

Các đa thức spline bậc 2

S2[0.0, 0.52] =-0.925(0.52-x) ^2+0.925(x-0.0) ^2+0.25

S2[0.52, 1.05] =-0.907(1.05-x) ^2+0.41(x-0.52) ^2+0.755

S2[1.05, 1.57] =-0.418(1.57-x) ^2+0.063(x-1.05) ^2+0.983

S2[1.57, 2.09] =-0.063(2.09-x) ^2+-0.544(x-1.57) ^2+1.017

S2[2.09, 2.62] =0.533(2.62-x) ^2+-0.784(x-2.09) ^2+0.72

S2[2.62, 3.14] =0.799(3.14-x) ^2+-1.05(x-2.62) ^2+0.284

S2[3.14, 3.66] =1.05(3.66-x) ^2+-0.799(x-3.14) ^2+-0.284

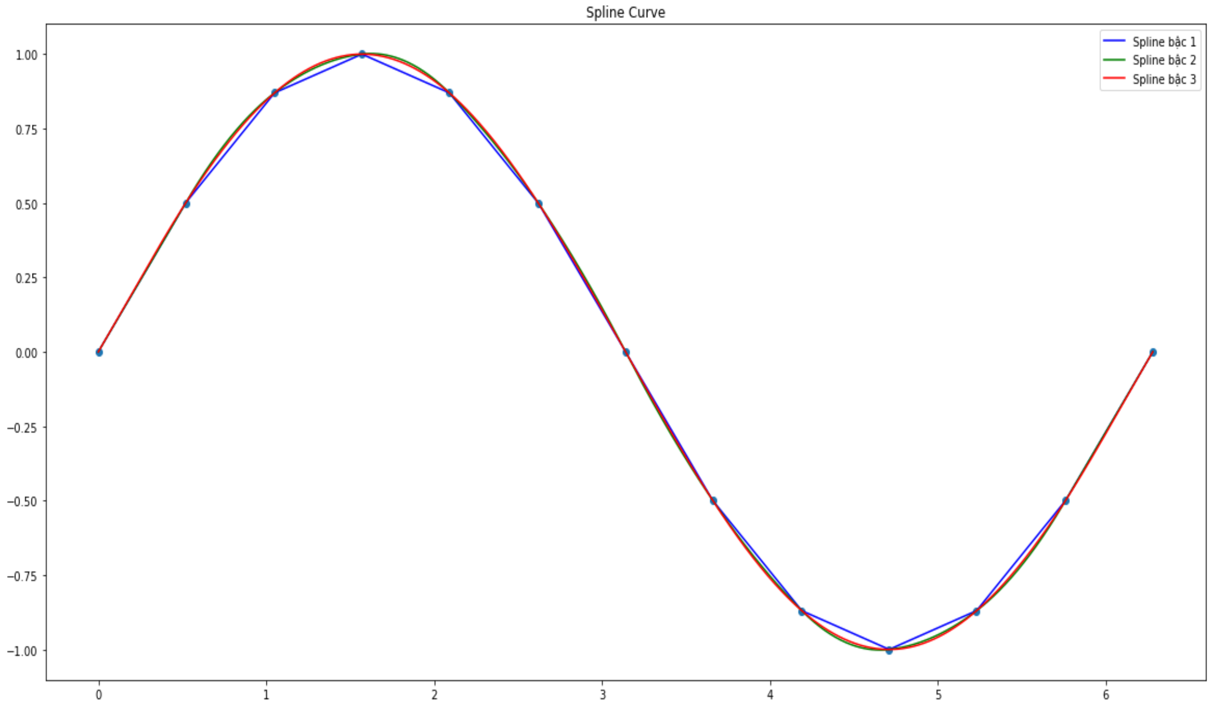
S2[3.66, 4.19] =0.784(4.19-x) ^2+-0.533(x-3.66) ^2+-0.72

S2[4.19, 4.71] =0.544(4.71-x) ^2+0.063(x-4.19) ^2+-1.017

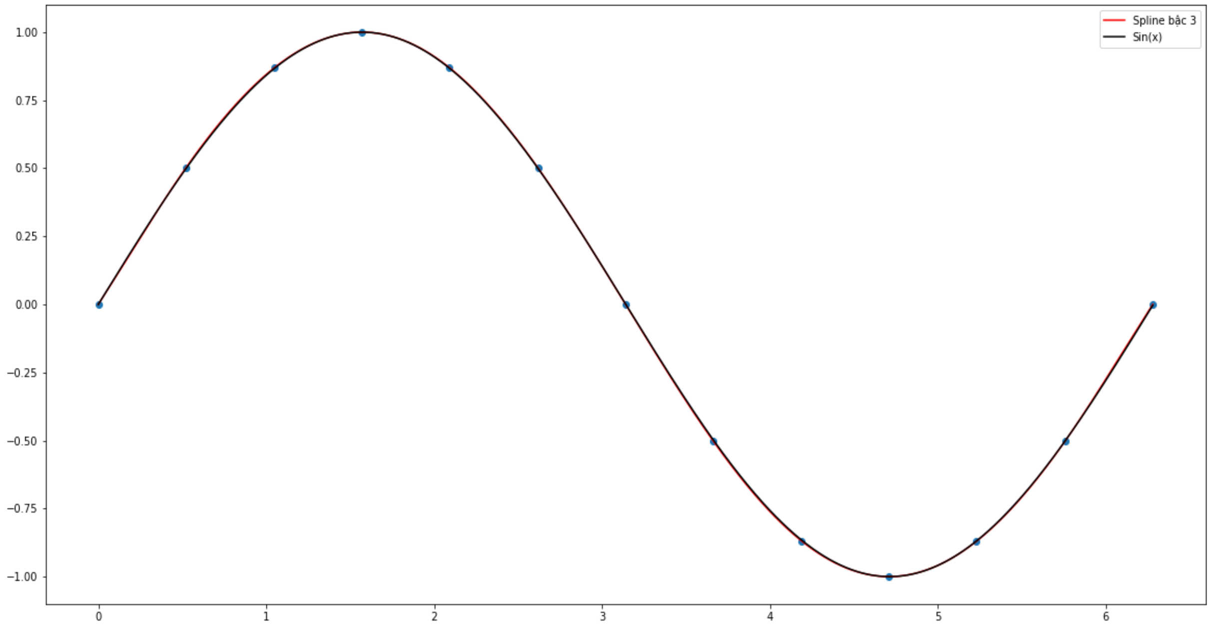
S2[4.71, 5.23] =-0.063(5.23-x) ^2+0.418(x-4.71) ^2+-0.983

S2[5.23, 5.76] =-0.41(5.76-x) ^2+0.907(x-5.23) ^2+-0.755

S2[5.76, 6.28] =-0.925(6.28-x) ^2+0.925(x-5.76) ^2+-0.25



- So sánh hàm Spline bậc 3 so với hàm gốc $y = \sin(x)$



VD2: Ta có bảng giá trị mực nước biển trung bình theo nhiệt độ trung bình của trái đất và bảng giá trị đo nhiệt độ trung bình của trái đất theo thời gian:

Bảng 1: Nhiệt độ trung bình của trái đất theo thời gian

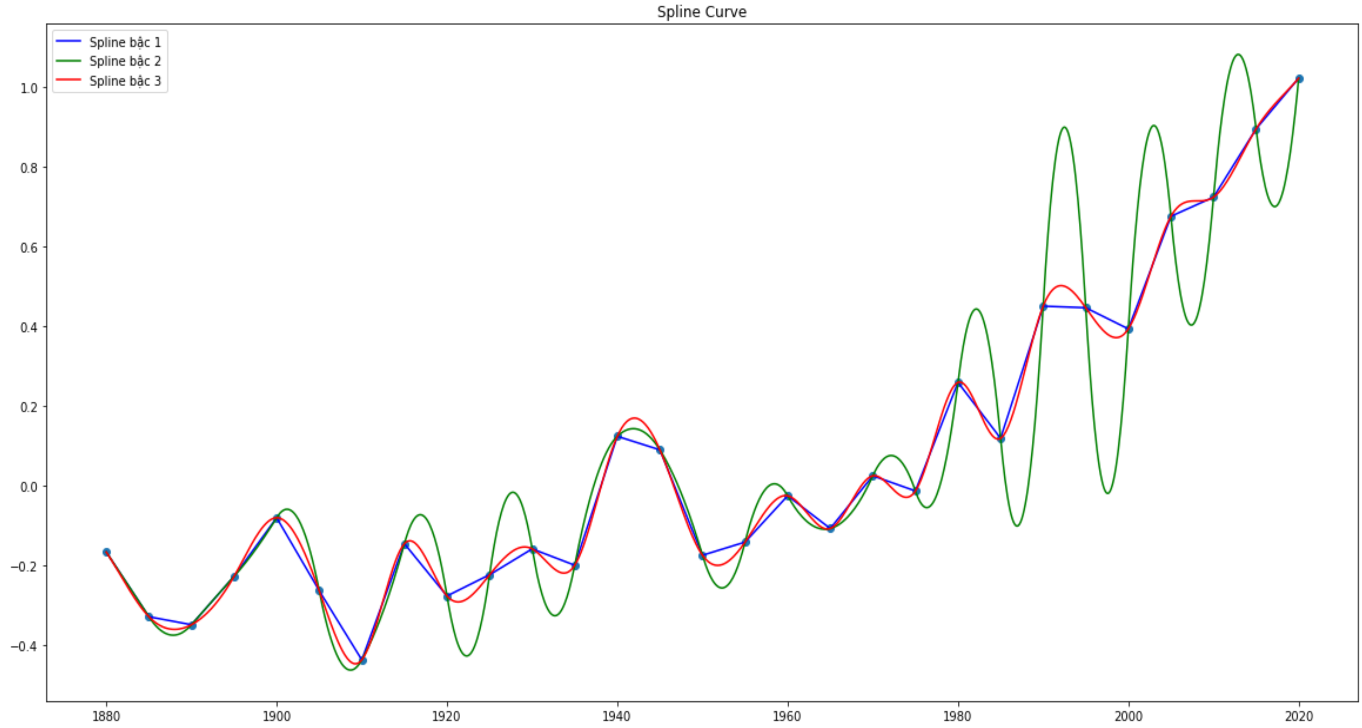
x	y
1880	-0.166
1885	-0.328
1890	-0.348
1895	-0.227
1900	-0.08
1905	-0.263
1910	-0.436
1915	-0.145
1920	-0.276
1925	-0.223
1930	-0.158
1935	-0.199
1940	-0.124
1945	0.09
1950	-0.174
1955	-0.141
1960	-0.025
1965	-0.107
1970	0.025
1975	-0.013
1980	0.259
1985	0.119
1990	0.45
1995	0.446
2000	0.393
2005	0.675
2010	0.723
2015	0.894
2020	1.021

Bảng 2: Giá trị mực nước biển trung bình theo nhiệt độ trung bình của trái đất

x	y
-0.463	-133.8307292
-0.387	-150.7140615
-0.360	-144.0890625
-0.357	-176.7640625
-0.288	-132.5557292
-0.280	-148.8723959
-0.270	-168.6557292
-0.218	-130.4973958
-0.160	-124.7307292
-0.105	-191.5807292
-0.028	-97.58072917
-0.027	-118.2473958
-0.023	-69.2890625
0.008	-49.2640625
0.010	-84.0390625
0.032	-66.4390625
0.048	-73.88072917
0.066	-103.5223958
0.138	-33.00572917
0.177	-46.98072917
0.220	-17.9640625
0.323	-34.74739583
0.462	-2.780729167
0.628	0.8859375
0.645	42.341628
0.663	13.76927083
0.921	55.11239131

- Ta sẽ tính dự đoán mực nước biển tại năm 1933

  Đầu tiên, ta sẽ có giá trị nhiệt độ trung bình được dự đoán từ Bảng 1



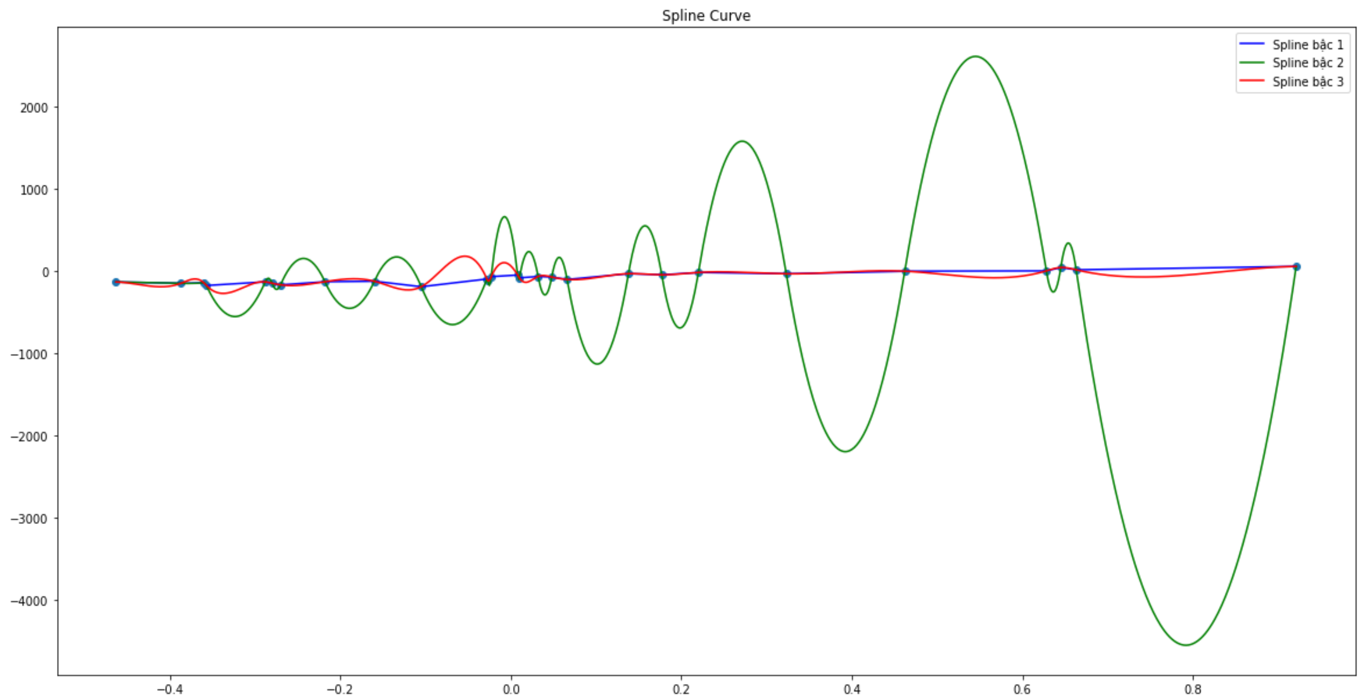
Giá trị xấp xỉ đa thức theo spline bậc 3 tại 1933.0 là: -0.21402750614459728

Giá trị xấp xỉ đa thức theo spline bậc 2 tại 1933.0 là: -0.323

Giá trị xấp xỉ đa thức theo spline bậc 1 tại 1933.0 là: -0.1826

Ta lấy nhiệt độ trung bình tại năm 1933 được dự đoán ≈ -0.214

Từ đây, ta sẽ dự đoán được mực nước biển trung bình năm 1933 theo Bảng 2



Giá trị xấp xỉ đa thức theo spline bậc 3 tại -0.214 là: -123.99956009027183

Giá trị xấp xỉ đa thức theo spline bậc 2 tại -0.214 là: -214.01167726064983

Giá trị xấp xỉ đa thức theo spline bậc 1 tại -0.214 là: -130.0996946551724

Vậy ta đã có được dự đoán mực nước biển trung bình tại năm 1933

4. Đánh giá phương pháp

- Đây là một phương pháp nội suy khá là mạnh và đã khắc phục được nhược điểm khi có quá nhiều mốc nội suy thì bậc của đa thức sẽ tăng theo của có phương pháp nội suy đã nêu trước
- Độ phức tạp thuật toán chỉ có O(n), được giảm nhiều so với các phương pháp khác, do đó phương pháp này sẽ là lựa chọn tối ưu khi chạy được với bộ dữ liệu lớn