Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Centro de Ciências e Tecnologia - CCT
Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística - UAME

Disciplina : Álgebra Vetorial e Geometria Analítica - Manhã Período: 2013.1
Candidato(a) : ______________________ Nota: ______ Data: 04/07/2013

Primeira Avaliação AV1

IMPORTANTE! **RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS SERÃO DESCONSIDERADAS.**
Não retire o grampo da prova. Use apenas o papel da prova. Não apague as contas.

1. (2.0 Pontos) Sabendo que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores mutualmente ortogonais tais que $||\vec{u}|| = 2, ||\vec{v}|| = 4$, o ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60° e $\vec{w}$ é um vetor unitário, calcule a norma do vetor
$$P_{\vec{u}}(\vec{v}) - 3\vec{v} + 4\vec{w}.$$

2. (2.0 Pontos) Considere os pontos $A(2,1,0), B(2,2,0), C(2,1,1)$ e $D(2,2,1)$.
   (a) Mostre que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelegramo.
   (b) Calcule a área do paralelogramo $ABCD$.

3. (2.0 Pontos) Considere os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}, \vec{v} = \vec{j}$ e $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, onde $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ são os vetores canônicos do espaço. Mostre que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Interprete o resultado.

4. (2.0 Pontos) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores ortogonais tais que $||\vec{u}|| = \sqrt{5}$ e $||\vec{v}|| = 2$.
   (a) Determine o(s) vetor(es) $\vec{w} = \vec{u} + \lambda\vec{v}$ tal que $||\vec{w}|| = 9$.
   (b) Existe algum valor de λ que torne o vetor $\vec{w}$ perpendicular a ambos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Justifique.

5. (2.0 Pontos) Considere os vetores $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (2,1,-3)$. Encontre um vetor simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de norma 2 que forma um ângulo agudo com o vetor $\vec{b} = (1,0,1)$.

Boa Sorte !!

Respostas da Avaliação 1

1. Note que
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 60^{o} = 2.4.\frac{1}{2} = 4.$$
Daí, $\text{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|u|^2}\vec{u} = \dfrac{4}{2^2}\vec{u} = \vec{u}$. Logo, sabendo que $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja, $\vec{w}\cdot\vec{v} = \vec{w}\cdot\vec{u} = 0$, obtemos
$$\begin{aligned}
|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} - 3\vec{v} + 4\vec{w}|^2 &= |\vec{u} - 3\vec{v} + 4\vec{w}|^2\\
&= |\vec{u} - 3\vec{v}|^2 + 2(\vec{u} - 3\vec{v})\cdot(4\vec{w}) + |4\vec{w}|^2\\
&= |\vec{u}|^2 + 9|\vec{v}|^2 + 16|\vec{w}|^2 - 6\vec{u}\cdot\vec{v} + 8\vec{u}\cdot\vec{w} - 24\vec{v}\cdot\vec{w}\\
&= |\vec{u}|^2 + 9|\vec{v}|^2 + 16|\vec{w}|^2 - 6\vec{u}\cdot\vec{v}\\
&= 4 + 6.16 + 16.1 - 6.4\\
&= 140
\end{aligned}$$
Portanto, $|\,\text{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v} - 3\vec{v} + 4\vec{w}| = \sqrt{140}$.

2. **(a)** O quadrilátero é um paralelogramo pois
$$\overrightarrow{AB} = (0,1,0) = \overrightarrow{DC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (0,0,1) = \overrightarrow{BD}$$
isto é, os lados opostos são iguais.

   (b) Como
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = (1,0,0)$$
a área do paralelogramo é
$$A = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1.$$

3. Temos

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Logo, o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = 2.$$

Além disso,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2),$$

ou seja, a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2.$$

Como A é a área da base do paralelepípedo de volume V, e $A = V = 2$ concluímos que o paralelepípedo tem altura medindo 1.

4. **(a)** Temos

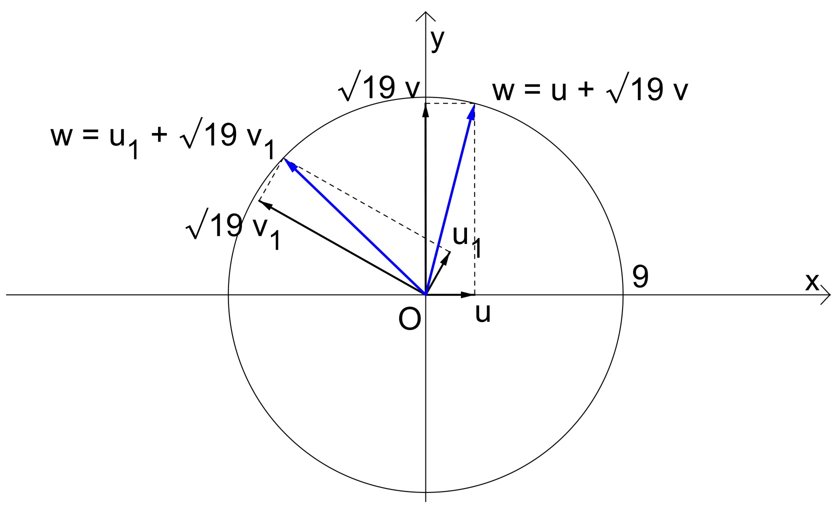
$$|\vec{w}|^2 = |\vec{u} + \lambda \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda^2 |\vec{v}|^2.$$

Como $|\vec{w}| = 9$, $|\vec{u}| = \sqrt{5}$, $\vec{v} = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, obtemos

$$9^2 = 5 + 2^2 \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{19}.$$

Daí, os vetores são $\vec{w} = \vec{u} \pm \sqrt{19}\vec{v}$.

Para descobrir as coordenadas dos vetores, se estivermos no plano $\mathbb{R}^2$, note que os vetores $\vec{w}$ têm extremidade na circunferência de raio 9, conforme a figura:



Logo, as coordenadas de $\vec{w}$ satisfazem a seguinte equação da circunferência:

$$x^2 + y^2 = 9^2$$

donde, $x = \pm\sqrt{81 - y^2}$. Portanto, os vetores são $\vec{w} = (\pm\sqrt{81 - y^2}, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Analogamente, se estivermos no espaço $\mathbb{R}^3$, os vetores $\vec{w}$ terão extremidades na esfera centrada na origem de raio 9:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9^2$$

ou seja, $x = \pm\sqrt{81 - y^2 - z^2}$. Portanto, os vetores seriam $\vec{w} = (\pm\sqrt{81 - y^2 - z^2}, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$.

(b) Suponha que para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ tenhamos $\vec{w} = \vec{u} + \lambda\vec{v}$. Então,

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{u} + \lambda\vec{v} \\ \vec{w} \cdot \vec{u} &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \lambda\vec{v} \cdot \vec{u} \\ \vec{w} \cdot \vec{u} &= 5. \end{aligned}$$

Logo, não pode existir $\lambda \in \mathbb{R}$ que torne $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pois para qualquer número λ sempre teremos $\vec{w} \cdot \vec{u} = \sqrt{5} \neq 0$.

5. Sendo $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 1 - 3)$ temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-4, 5, -1).$$

que é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Como $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{16 + 25 + 1} = \sqrt{42}$, o versor de $\vec{u} \times \vec{v}$ é o vetor unitário $\dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$. Logo, um vetor de módulo 2 simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o seguinte:

$$\vec{w} = 2\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{42}}(-4, 5, -1).$$

Agora, observe que o ângulo entre $\vec{w}$ e $\vec{b} = (1, 0, 1)$ é igual ao ângulo entre $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{b}$ ($\vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ são paralelos). Daí, sendo θ este ângulo, temos

$$\cos\theta = \frac{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{b}}{|\vec{u} \times \vec{v}||\vec{b}|} = \frac{(-4, 5, -1) \cdot (1, 0, 1)}{|(-4, 5, -1)||(1, 0, 1)|} = \frac{-4 + 0 - 1}{\sqrt{42}\sqrt{2}} = -\frac{5}{\sqrt{84}}.$$

Mas, isto significa que θ é um ângulo obtuso. Portanto, para que θ seja um ângulo agudo, basta considerar o vetor $-\vec{u} \times \vec{v}$ e o vetor procurado é

$$\vec{w}_1 = -\frac{2}{\sqrt{42}}(-4, 5, -1).$$