UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

HUGO SANTOS ALVES CAVALCANTE

EXERCÍCIOS DO CAPITULO 1

(ALGEBRA VETORIAL E GEOMETRIA ANALÍTICA)

(PAULO WINTERLE)

CAMPINA GRANDE

2015

EXERCÍCIO

CAPÍTULO I

HUGO CAVALCANTE – IRECÊ – BA

ALGEBRA VETORIAL

1º) Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$. determine:

a) $2\vec{u} - v = u(2,3) , v(1,-1)$

$2(2,-3) - (1,-1)$

$\vec{R} = (4,-6) - (1,-1)$

$\boxed{\vec{R} = (3,-5)}$

b) $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$

$(1,-1) - (2,-3) + 2(-2,1)$

$\vec{R} = (1,-1) - (2,-3) + (-4,2)$

$\vec{R} = (-1,2) + (-4,2)$

$\boxed{\vec{R} = (-5,4)}$

c) $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$

$\frac{1}{2}(2,-3) - 2(1,-1) - (-2,1)$

$\vec{R} = (1,-\frac{3}{2}) - (-2,2) - (-2,1)$

$\vec{R} = (1,-\frac{3}{2}) - (0,1)$

$\boxed{\vec{R} = (1,\frac{1}{2})}$

d) $3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

$3(2,-3) - \frac{1}{2}(1,-1) - \frac{1}{2}(-2,1)$

$\vec{R} = (6,-9) - (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) - (1,-\frac{1}{2})$

$\vec{R} = (6,-9) - (-\frac{1}{2},0)$

$\boxed{\vec{R} = (\frac{13}{2},-9)}$

2) Dados os vetores $\vec{u}=(3,-1)$ e $\vec{v}=(-1,2)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que:

a) $4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{x} = 2\vec{u}-\vec{x}$

$12(\vec{u}-\vec{v})+\vec{x} = 6\vec{u} - 3\vec{x}$

$3\vec{x}+\vec{x} = 6\vec{u} - 12(\vec{u}-\vec{v})$

$4\vec{x} = 6\vec{u} - 12(\vec{u}-\vec{v})$ $(\div 4)$

$\vec{x} = \frac{6}{4}\vec{u} - \frac{12}{4}(\vec{u}-\vec{v})$

$\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{u} - 3(\vec{u}-\vec{v})$

$\vec{x} = \frac{3}{2}(3,-1) - 3(4,-3)$

$\vec{x} = (3, -\frac{3}{2}) - (12, 9)$

$\boxed{\vec{x} = (15, -\frac{15}{2})}$

• $(\vec{u}-\vec{v}) = (3,-1)-(-1,2)$

$(\vec{u}-\vec{v}) = (4,-3)$

B) $3\vec{x} - (2\vec{v}-\vec{u}) = 2(4\vec{x}-3\vec{u})$

$3\vec{x} - (2\vec{v}-u) = 8\vec{x} - 6\vec{u}$

$3\vec{x} - 8\vec{x} = -6\vec{u} + (2\vec{v}-\vec{u})$

$-5\vec{x} = -6\vec{u} + [(-2,4)-(3,-1)]$

$-5\vec{x} = (-18,6)+(-5,5)$

$-5\vec{x} = (-23, 11)$ $(-)$

$\boxed{\vec{x} = (\frac{23}{5}, \frac{11}{5})}$

• $2\vec{v} = 2(-1,2)$
$= (-2,4)$

• $3\vec{u} = 3(3,-1)$
$= (9,-3)$

• $-6\vec{u} = -6(3,-$
$= (-18, 6)$

3º) Dados os pontos A(-1,3), B(2,5), C(3,-1) e O(0,0), calcular:

a) $\vec{OA} - \vec{AB}$

• $\vec{OA} = \vec{A} - \vec{O} = (-1,3)-(0,0)$

$= (-1,3)$

• $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (2,5)-(-1,3)$

$= (3,2)$

logo $\vec{OA} - \vec{AB}$

$(-1,3) - (3,2)$

$\boxed{\vec{R} = (-4,1)}$

b) $\vec{OC} - \vec{BC}$

• $\vec{OC} = \vec{C} - \vec{O} = (3,-1) - (0,0)$

$\vec{OC} = (3,-1)$

• $\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = (2,5)-(3,-1)$

$\vec{BC} = (-1,6)$

logo $\vec{OC} - \vec{BC}$

$(3,-1)-(-1,6)$

$\boxed{\vec{R} = (2,5)}$

c) $3\,\vec{BA} - 4\,\vec{CB}$

• $\vec{A} - \vec{B} = (-1,3)-(2,5) = (-3,-2)$

• $\vec{B} - \vec{C} = (2,5)-(3,-1) = (-1,6)$

* $3.(-3,-2) - 4.(-1,6)$

$\vec{R} = (-9,-6) - (-4,-24)$

$\vec{R} = (-5,-30)$

$\boxed{\vec{R} = (-5,-30)}$

4º) Dados os vetores $\vec{u} = (2,-4)$, $\vec{v} = (-5,1)$ e $\vec{w} = (-12,6)$, determinar a_1, a_2 tais que $\vec{w} = a_1.\vec{u} + a_2.\vec{v}$

$\vec{u}(2,-4)$; $\vec{v}(-5,1)$; $\vec{w}(-12,6)$

• $\vec{w} = a_1(2,-4) + a_2(-5,1)$

$(-12,6) = (2a_1, -4a_1) + (-5a_2, 1a_2)$

SISTEMA:

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = -12 \\ -4a_1 - 5a_2 = 6 \end{cases}$$

Pela Solução $\boxed{a_1 = -1}$ e $\boxed{a_2 = 2}$

5º) Dados os pontos $A(3,-4)$, $B(-1,1)$ e o vetor $\vec{v}=(-2,3)$, calcule:

a) $(B-A)+2\vec{v}$

$\vec{R}=(-4,5)+2(-2,3)$

$\vec{R}=(-4,5)+(-4,6)$

$\boxed{\vec{R}=(-8,\ 11)}$

B) $(A-B)-\vec{v}$

$\vec{R}=(4,-5)-(-2,3)$

$\boxed{\vec{R}=(6,\ -8)}$

c) $B+2(B-A)$

$\vec{R}=(-1,1)+2(-4,5)$

$\vec{R}=(-1,1)+(-8,10)$

$\boxed{\vec{R}=(-9,\ 11)}$

d) $3\vec{v}-2(A-B)$

$\vec{R}=3(-2,3)-2(4,-5)$

$\vec{R}=(-6,9)+(-8,10)$

$\boxed{\vec{R}=(-14,\ 19)}$

6º) Sejam os pontos $A(-5,1)$, $B(1,3)$. Determine o vetor $\vec{v}=(a,b)$ tal que:

a) $B=A+2\vec{v}$

$B-A=2\vec{v}$

$\vec{v}=\frac{B-A}{2} \Rightarrow \vec{v}=\frac{(6,\ 2)}{2}$

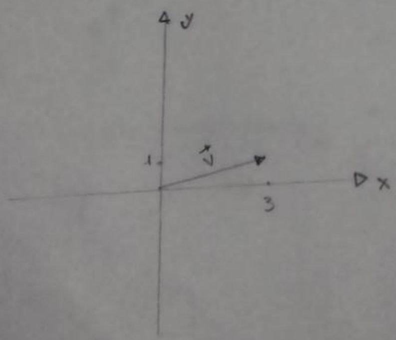
$\boxed{\vec{v}=(3,1)}$

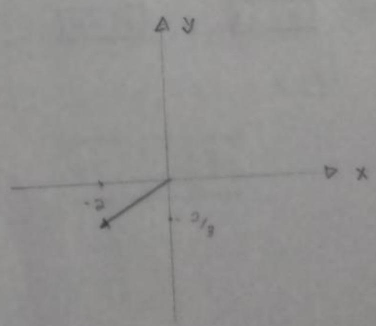
b) $A=B+3\vec{v}$

$A-B=3\vec{v}$

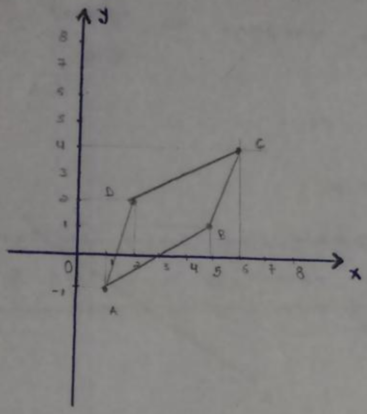
$\vec{v}=\frac{A-B}{3} \Rightarrow \frac{(-6,-2)}{3}$

$\boxed{\vec{v}=\left(-2,\ \frac{-2}{3}\right)}$





12) Sabendo que A(1, -1), B(5, 1), C(6, 4), são vértices de um paralelogramo, determinar o quarto vértice de cada um dos três paralelogramos possíveis de serem formados:



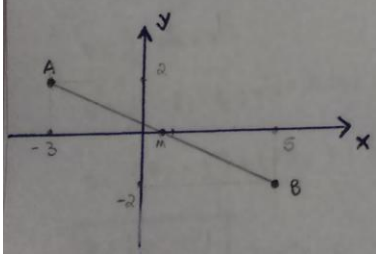
• $D = A + \vec{BC}$

$D = (1, -1) + (1, 3)$

$D: (2, 2)$

13) Dados os pontos A(-3, 2), B(5, -2), determinar os pontos M e N pertencentes ao segmento AB tais que $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ e $\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

• Os pontos A, B, M, N e P, devendo P ser tal que $\vec{AP} = \frac{3}{2}\vec{AB}$



• $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$\vec{m} = \frac{1}{2} AB - A$

$m = \frac{1}{2}(8, -4) - (-3, 2)$

$m = (4, -2) - (-3, 2)$

$\boxed{m = (1, 0)}$

• $\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

$N = \frac{2}{3}\vec{AB} - A$

$N = \frac{2}{3}(8, -4) - (-3, 2)$

$N = \left(\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right) - (-3, 2)$

$\boxed{N = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)}$

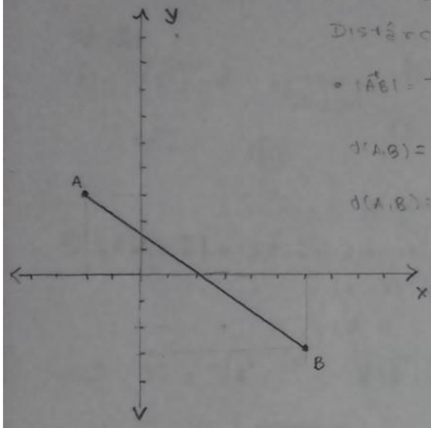
• $\vec{AP} = \frac{3}{2}\vec{AB}$

$P = \frac{3}{2}\vec{AB} - A$

$\boxed{P = (2, -4)}$

14) Sendo $A(-2,3)$, $B(6,-3)$ extremidades de um segmento, determinar:

a) Os pontos C, D, E que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento.



Distância de $\vec{AB} = |\vec{AB}|$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(6-(-2))^2 + (-3-3)^2}$

$d(A,B) = \sqrt{64+36}$

$d(A,B) = 10$

+ O comprimento total do segmento é de 10, divide e 4 vezes:

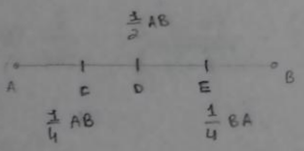
$\vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{AB}$

$C = \frac{1}{4}\vec{AB} + A$

$C = \frac{1}{4}(8,-6) + (-2,3)$

$C = (2, -\frac{6}{4}) + (-2,3)$

$\boxed{C = (0, \frac{3}{2})}$ Ponto C



$\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$D = \frac{1}{2}\vec{AB} + A$

$D = \frac{1}{2}(8,-6) + (-2,3)$

$D = (4,-3) + (-2,3)$

$\boxed{D = (2,0)}$ Ponto D

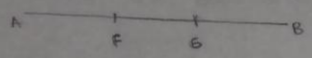
$\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{BA}$

$E = \frac{1}{4}(-8,6) + (-2,3)$

$E = (-2, \frac{3}{2}) + (-2,3)$

$\boxed{E = (4, -\frac{3}{2})}$ Ponto E

B) os pontos F, G que dividem o segmento de AB em três partes de mesmo comprimento.



X $\vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

$F = \frac{1}{3} AB + A$

$F = \frac{1}{3}(8, -6) + (-2, 3)$

$F = (\frac{8}{3}, -2) + (-2, 3)$

$\boxed{F = (\frac{2}{3}, 1)}$ ponto F

X $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{BA}$

$G = A + \frac{1}{3}\vec{BA}$

$G = (-2, 3) + \frac{1}{3}(-8, 6)$

$G = (-2, 3) + (-\frac{8}{3}, 2)$

$\boxed{G = (\frac{10}{3}, 1)}$ ponto G

16) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4)$ e $\vec{w} = (8, -6)$ calcule:

a) $|\vec{u}|$

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 - 1^2} = \boxed{\sqrt{2}}$

b) $|\vec{v}|$

$|\vec{v}| = \sqrt{-3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

c) $|\vec{w}|$

$|\vec{w}| = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{64 + 36}$

$= \sqrt{100} = 10$

d) $|\vec{u} + \vec{v}| \rightarrow u + v = (-2, 3)$

$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{-2^2 + 3^2}$

$= \sqrt{4 + 9} = \boxed{\sqrt{13}}$

E) $|2\vec{u} - \vec{w}| \rightarrow 2\vec{u} - \vec{v} = 2(1, -1) - (-3, 4)$

$= (2, -2) - (-3, 4)$

$= (5, 1)$

$|2\vec{u} - \vec{w}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 1}$

$= \sqrt{26}$ ou $\boxed{2\sqrt{13}}$

F) $|\vec{w} - 3\vec{u}| \rightarrow |\vec{w} - 3\vec{u}| = (8, -6) - 3(1, -1)$

$= (8, -6) - (3, -3)$

$= (5, -3)$

$|\vec{w} - 3\vec{u}| = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 + 9}$

$= \boxed{\sqrt{34}}$ ou $2\sqrt{17}$

g) $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{(-3, 4)}{\sqrt{-3^2 + 4^2}} = \left(\dfrac{-3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

h) $\left|\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right| = \left|\dfrac{(1, -1)}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ vetor unitário

17) calcular os valores de (a) para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha módulo 4. $|\vec{u}| = 4$ significa que o comprimento de $\vec{u}$ deve ser igual à 4.

$|\vec{u}| = 4 \rightarrow \sqrt{a^2 - 2^2} = 4$

$a^2 - 2^2 = 16$

$a^2 + 4 = 16$

$a^2 = 16 - 4$

$a = \sqrt{12}$

18) calcular os valores de (a) para que o vetor $\vec{u} = (a, \frac{1}{2})$ seja unitário.

Para que $\vec{u}$ seja um vetor unitário $|\vec{u}| = 1$ então:

$\sqrt{a^2 + (\frac{1}{2})^2} = 1$

$a^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1$

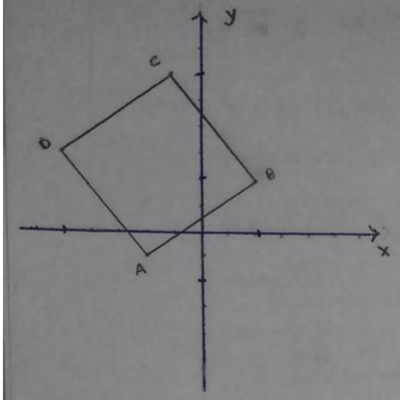
$a^2 + \frac{1}{4} = 1$

$a^2 = 1 - \frac{1}{4}$

$a = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

19) Provar que os pontos $A(-2,-1)$, $B(2,2)$, $C(-1,6)$, $D(-5,3)$, nesta ordem, são vértices de um quadrado.



Pelas propriedas algerbricas podemos provar que ABCD são vértices de um quadrado se provarmos que seus lados são congruentes logo:

• $\vec{AB} = \vec{CD}$ e $\vec{CD} = \vec{AB}$ assim

• $A = B + \vec{CD}$

$A = (2,2) + (-4,-3)$

$A = (-2,-1)$

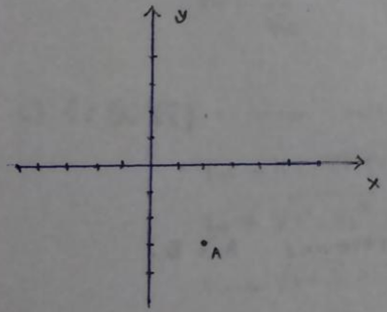
• $B = A + \vec{CD}$

$B = (-2,-1) + (4, 3)$

$B = (2,2)$

Do mesmo modo podemos encontrar os vértices C e D.

20) Encontrar um ponto P de eixo Ox de modo que a sua distância ao ponto $A(2,-3)$ seja igual a 5.



distância de $d\{(P, A) = 5\}$

• como P está no eixo Ox

$P = (x, 0)$

• Assim:

$|\vec{AP}| = 5 \Rightarrow |P - A| = 5$

$= |[(x-2) - 3]| = 5$

$= \sqrt{(x-2)^2 - 3^2} = 5$

$= \sqrt{2x + 4 + 9} = 5$

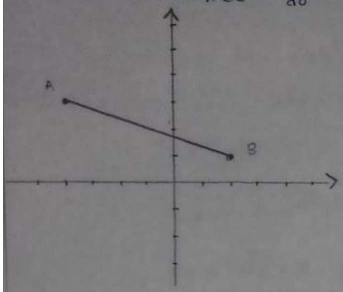
$= \sqrt{2x + 13} = 5$

$x = 6$

Logo o ponto é $(6, 0)$

21) Dados os pontos $A(-4,3)$ e $B(2,1)$, encontre o ponto P nos casos:

a) P pertence do eixo Oy e é eqüidistante de A e B:



- $P(0,y)$

b) P é equidistante de A e B e sua ordenada é o dobro da abscissa:

d) P pertence a mediatriz do segmento de extremos A e B:

22) Encontrar o vetor unitário que tenha (I) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e (II) sentido contrário a $\vec{v}$, nos casos:

a) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ → vetor unitário $|\vec{v}| = 1$ / $|-\vec{v}| = 1$ sentido oposto

$$V_u \Rightarrow |(-1,1)| = 1$$

$$V_u \Rightarrow \sqrt{-1^2 + 1^2} = 1$$

$$V_u \Rightarrow \sqrt{2} = 1$$

$$V_u = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

b) $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$ → vetor unitário $|\vec{v}| = 1$

$$V_u \Rightarrow |(3,-1)| = 1$$

$$V_u \Rightarrow \sqrt{3^2 - 1^2} = 1$$

$$V_u \Rightarrow \sqrt{9+1} = 1$$

$$V_u = \frac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right) \text{ e } \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

c) $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$ → vetor unitário $|\vec{v}| = 1$

$$V_u \Rightarrow |(1, \sqrt{3})| = 1$$

$$V_u \Rightarrow \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 1$$

$$V_u \Rightarrow \sqrt{1+3} = 1$$

$$V_u \Rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

d) $\vec{v} = (0,4)$ → vetor unitário $|\vec{v}| = 1$

$$|(0,4)| = 1$$

$$V_u \Rightarrow \sqrt{0^2 + 4^2} = 1$$

$$V_u \Rightarrow \sqrt{16} = 1$$

$$V_u = \frac{1}{4} \rightarrow (0,1) \text{ e } (0,-1)$$

23) Dado o vetor $\vec{v} = (1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha:

a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e duas vezes o módulo de $\vec{v}$.

Dois vetores são paralelos quando suas componentes forem proporcionais.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha$$

+ Como o vetor deve ter sentido contrario e 2 vezes o modulo de $\vec{v}$, Basta multiplicar por (-2)

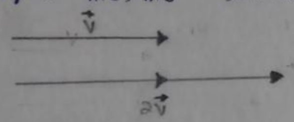
• Assim vamos encontrar um vetor paralelo a $\vec{v}$ fazendo:

$$\frac{1}{x_2} = \frac{-3}{y_2} = \alpha$$

→ Podemos afirmar que $\boxed{x_2 = -2 \text{ e } y_2 = 6}$

Pois $-\frac{1}{2} = -\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e modulo 2.



Um vetor unitário obtido é:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1, -3)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Como o vetor deve ter modulo 2
Basta multiplicar por 2.

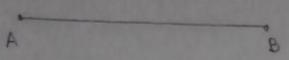
$$2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}}\right)$$

c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e modulo 4.

Como já obtemos o vetor unitário, basta apenas multiplicar por -4, já que o vetor deve ter sentido contrario.

$$-4\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{-4}{\sqrt{10}}, \frac{12}{\sqrt{10}}\right)$$

32) Dados os pontos $A(3, -4, -2)$, $B(-2, 1, 0)$, determine o ponto N pertencente ao segmento AB tal que $\vec{AN} = \frac{2}{5}\vec{AB}$.



$\vec{AN} = \frac{2}{5}\vec{AB}$

$N = A + \frac{2}{5}\vec{AB} \rightarrow N = (3, -4, -2) + \frac{2}{5}(-5, 5, 2)$

$N = (3, -4, -2) + (-2, 2, \frac{4}{5})$

$\boxed{N = (1, -2, -\frac{6}{5})}$

33) Dados os pontos $A(1, -2, 3)$, $B(2, 1, -4)$, $C(-1, -3, 1)$, determine D tal que $\vec{AB} + \vec{CD} = 0$

$\vec{AB} = \vec{CD}$

$(1, 3, -7) = CD$

$D = (1, 3, -7) + (-1, -3, 1)$

$D = (0, 0, -6)$

$\boxed{\text{PONTO } D = (0, 0, -6)}$

PROVA REAL

$\vec{AB} + \vec{CD} = 0$

$(B-A) + (D-C) = 0$

$(1, 3, -7) + (-1, -3, 7) = 0$

$= 0$

34) Sabendo que $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, determine a, b, c, sendo $\vec{u} = (2, -1, c)$, $\vec{v} = (a, b-2, 3)$, $\vec{w} = (4, -1, 0)$

$3(2, -1, c) - 4(a, b-2, 3) = 2(4, -1, 0)$

$(6, -3, 3c) - (-4a, 4b+8, 12) = (8, -2, 0)$

$$\begin{cases} 6 + 4a = 8 \\ 5 - 4b = -2 \\ -12 + 3c = 0 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{2}$
$b = \frac{7}{4}$
$c = 4$

35) Dados os vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$, $\vec{w} = (-3, 4, 0)$:

a) Determine o vetor $\vec{x}$ de modo que $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 4\vec{x} + 2\vec{w}$

passando $\vec{x}$ para o lado esquerdo:

$3\vec{x} = 3\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}$

$3\vec{x} = 3(2, 3, -1) - (1, -1, 1) + 2(-3, 4, 0)$

$3\vec{x} = (6, 9, -3) - (1, -1, 1) + (6, -8, 0)$

$3\vec{x} = (5, 10, -4) + (6, -8, 0)$

$3\vec{x} = (11, 2, -4)$

$\vec{x} = \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

b) Encontrar os números a_1, a_2, a_3 tais que $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = (-2, 13, -5)$

$\Rightarrow a_1(2, 3, -1) + a_2(1, -1, 1) + a_3(-3, 4, 0) = (-2, 13, -5)$

34) Sabendo que $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, determine a, b, c, sendo $\vec{u} = (2, -1, c)$, $\vec{v} = (a, b-2, 3)$, $\vec{w} = (4, -1, 0)$

$3(2, -1, c) - 4(a, b-2, 3) = 2(4, -1, 0)$

$(6, -3, 3c) - (-4a, 4b+8, 12) = (8, -2, 0)$

$$\begin{cases} 6 + 4a = 8 \\ 5 - 4b = -2 \\ -12 + 3c = 0 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{2}$
$b = \frac{7}{4}$
$c = 4$

35) Dados os vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$, $\vec{w} = (-3, 4, 0)$.

a) Determine o vetor $\vec{x}$ de modo que $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 4\vec{x} + 2\vec{w}$

passando $\vec{x}$ para o lado esquerdo:

$3\vec{x} = 3\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}$

$3\vec{x} = 3(2, 3, -1) - (1, -1, 1) + 2(-3, 4, 0)$

$3\vec{x} = (6, 9, -3) - (1, -1, 1) + (6, -8, 0)$

$3\vec{x} = (5, 10, -4) + (6, -8, 0)$

$3\vec{x} = (11, 2, -4)$

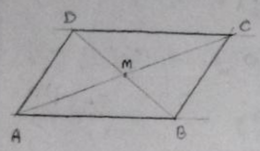
$\vec{x} = \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

b) Encontrar os números a_1, a_2, a_3 tais que $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = (-2, 13, -5)$

$\Rightarrow a_1(2, 3, -1) + a_2(1, -1, 1) + a_3(-3, 4, 0) = (-2, 13, -5)$

37) Sendo $A(2,-5,3)$, $B(7,3,-1)$, vertices consecutivos de um paralelogramo ABCD e $M(4,-3,3)$ o ponto de interseção das diagonais, determine os vértices C, D.

Por definição, sabemos que $\vec{AB}=\vec{CD}$ obrigatoriamente quando se é um paralelogramo, assim:



- O ponto C pode ser encontrado, fazendo:

$\vec{MC}=\vec{AM}$

$C=M+\vec{AM}$

$C=(4,-3,3)+(2,2,0)$

$\underline{C=(6,-1,3)}$

- O ponto D pode ser encontrado, fazendo:

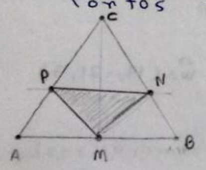
$\vec{MD}=\vec{BM}$

$D=M+\vec{BM}$

$D=(4,-3,3)+(-3,-6,4)$

$\underline{D=(1,-9,7)}$

38) Determine os três vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são. $M(5,0,-2)$, $N(3,1,-3)$, $P(4,2,1)$.



é possível observar que os pontos médios formam um novo triângulo, que por definição é igual ao triângulo ABC, então podemos dizer que:

$$\begin{cases} \vec{AB}=\vec{PN} \\ \vec{BC}=\vec{MP} \\ \vec{CA}=\vec{NM} \end{cases}$$

- $\vec{AM}=\vec{PN}$

$A=M+\vec{PN}$

$A=(5,0,-2)+(-1,-1,-4)$

$\underline{A=(4,-1,-6)}$

- $\vec{BM}=\vec{NP}$

$B=M+\vec{NP}$

$B=(5,0,-2)+(1,1,4)$

$\underline{B=(6,1,2)}$

- $\vec{CP}=\vec{MN}$

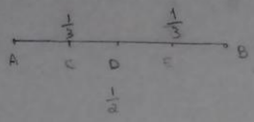
$C=P+\vec{MN}$

$C=(4,2,1)+(-2,1,-1)$

$\underline{C=(2,3,0)}$

40) Sendo $A(-2,1,3)$, $B(6,-7,1)$ extremidade de um segmento, determinar:

a) os pontos C, D, E, nesta ordem, que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento.



- $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$D = A + \frac{1}{2}\vec{AB}$

$D = (-2,1,3) + \frac{1}{2}(8,-8,-2)$

$D = (-2,1,3) + (4,-4,-1)$

$D = (2,-3,2)$

- $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AD}$

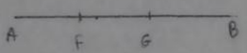
$C = A + \frac{1}{2}\vec{AD}$

$C = (-2,1,3) + \frac{1}{2}(4,-4,-1)$

$C = (-2,1,3) + (2,-2,-\frac{1}{2})$

$C = (0,-1,\frac{5}{2})$

b) os pontos F e G, nesta ordem, que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento.



- $\vec{AF} = \vec{FG} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$\vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

$F = A + \frac{1}{3}\vec{AB}$

$F = (-2,1,3) + \frac{1}{3}(8,-8,-2)$

$F = (-2,1,3) + (\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$

$F = (\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$

- $\vec{GB} = \frac{1}{3}\vec{BA}$

$G = B + \frac{1}{3}\vec{BA}$

$G = (6,-7,1) + (-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3})$

$G = (\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{5}{3})$

43) Quais os seguintes vetores $\vec{u} = (4,-6,2)$, $\vec{v} = (-6,9,-3)$, $\vec{w} = (14,-21,9)$, $\vec{T} = (10,-15,5)$ são paralelos.

Precisamos saber que um vetor é paralelo se existir um número real α que possa ser resultado dos dois vetores.

$\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha$

→ Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$\frac{4}{-6} = \frac{-6}{9} = \frac{2}{3} = \alpha$

$\alpha: \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelo

→ Para $\vec{u}$ e $\vec{w}$

$\frac{4}{14} = \frac{-6}{-21} = \frac{2}{9} = \alpha$

$\frac{2}{7} = \frac{3}{\frac{21}{2}} = \frac{1}{\frac{9}{2}} \neq \alpha$

α não é igual em todos os membros

→ Para $\vec{u}$ e $\vec{T}$

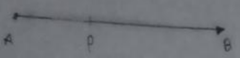
$\frac{4}{10} = \frac{-6}{-15} = \frac{2}{5} = \alpha$

$\frac{2}{5} = \frac{3}{\frac{15}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} = 3 \cdot \frac{2}{15} = 1 \cdot \frac{2}{5}$

$= \frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \alpha$

$\vec{u}$ e $\vec{T}$ SÃO PARALELOS

47) Sabendo que o ponto $P(m, 4, n)$ pertence à reta que passa pelos pontos $A(-1, -2, 3)$ e $B(2, 1, -5)$, calcule m, n.



Se P pertence à reta então obrigatoriamente ele irá formar um vetor paralelo a $\vec{AB}$

tomemos: $\vec{AP} // \vec{AB}$ então:

$(P-A) = (B-A)$

$(m+1, 6, n-3) = (3, 3, -8)$

$$\frac{3}{m+1} = \frac{3}{6} = \frac{-8}{n-3} \rightarrow \text{sistema:} \begin{cases} 3(m+1) = 18 \\ 3(n-3) = -48 \end{cases}$$

• sistema cuja a solução é:

$\underline{\overline{m = 5}}$ $\underline{\overline{n = -13}}$

50) Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = (n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ seja unitário.

Um vetor é considerado unitário se seu modulo for 1 ou seja $|\vec{v}| = 1$

$$|\vec{v}| = \sqrt{n^2 - \frac{1}{2}^2 + \frac{3}{4}^2} = 1 \rightarrow n^2 - \frac{1}{2}^2 + \frac{3}{4}^2 = 1$$

$$n^2 + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = 1$$

$$n^2 + \frac{4+9}{16} = 1$$

$$n^2 + \frac{13}{16} = 1$$

$$n^2 = 1 - \frac{13}{16}$$

$$n^2 = \frac{16-13}{16} = \frac{3}{16}$$

$$n = \sqrt{\frac{3}{16}} = \boxed{\pm\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

49) Verificar se são unitários os seguintes vetores:

$\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Para que um vetor seja unitário $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = 1$, então:

- $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \boxed{\frac{3}{\sqrt{3}}}$ não é unitário

- $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}} = \boxed{1}$ é unitário

50) Determinar o valor de (n) para que o vetor $\vec{v} = \left(n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ seja unitário.

Um vetor é unitário, se e somente se $|\vec{v}| = 1$ então:

$$|\vec{v}| = \sqrt{n^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow n^2 + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = 1$$

$$\Rightarrow n^2 + \frac{13}{16} = 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 1 - \frac{13}{16}$$

$$\Rightarrow n^2 = \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow n = \sqrt{\frac{3}{16}}$$

$$\Rightarrow n = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$$

51°) Determine o valor de (a) para que $\vec{u} = (a, -2a, 2a)$ seja um versor.

Todo versor é um vetor unitário, então se o vetor a ser encontrado será um vetor unitário, assim:

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 - 2a^2 + 2a^2} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a^2 + 4a^2 = 1$$

$$a^2(1+4+4) = 1$$

$$a^2 \cdot 9 = 1 \rightarrow a^2 = \frac{1}{9} \rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{9}} \rightarrow \boxed{a = \pm \frac{1}{3}}$$

52°) Dados os pontos A(1,0,-1), B(4,2,1), C(1,2,0) determine o valor de (m) para que $|\vec{v}| = 7$, sendo $\vec{v} = m.(\vec{AC} + \vec{BC})$

Se $\vec{v} = m.\vec{AC} + \vec{BC}$ e $|\vec{v}| = 7$ então:

3 ou $-\frac{13}{5}$

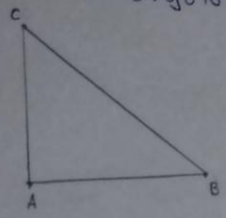
$$\vec{v} = m.(0,2,1) + (-3,0,-1)$$

$$\vec{V} = m.(-3,2,0)$$ → Propriedade que diz que são vetores paralelos.

→ $|\alpha v| = |\alpha|.|\vec{v}|$ Propriedade

$$\Rightarrow |\vec{v}| = |m.(-3,2,0)| = 7$$

53º) Determine o valor de y para que seja equilatero o triângulo de vértices $A(4, y, 4)$, $B(10, y, -2)$, $C(2, 0, 4)$



observe que as retas definidas pelos pontos AB e AC formam um ângulo de 90º, o que caracteriza um triângulo equilátero.

ENTÃO ABC será equilatero se $AB + AC = 0$

$(6, 0, -6) + (-2, -y, 0) = 0$

$4 - y - 6 = 0$

$y - 2 = 0$

$y = 2$

56º) Dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)$, determine o vetor paralelo a $\vec{v}$ q tenha:

a) Sentido contrario ao de $\vec{v}$ e três vezes o modulo de $\vec{v}$

se o vetor a ser encontrado é // a $\vec{v}$ então

$(2, -1, -3) \,//\, (x, y, z)$

Basta multiplicar $\vec{v}$ por -3 então o vetor será 3 vezes m que $\vec{v}$ e sentido contrario.

$-3 \cdot (2, -1, -3) = (-6, 3, 9)$

B) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e modulo 4.

Um vetor unitário a $\vec{v}$ seria: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$\frac{(2,-1,-3)}{\sqrt{2^2-1^2-3^2}} = \frac{(2,-1,-3)}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{(2,-1,-3)}{\sqrt{14}} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

Agora basta multiplicar por 4.

$$4 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \left(\frac{8}{\sqrt{14}}, -\frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{12}{\sqrt{14}}\right)$$

C) sentido contrario ao de $\vec{v}$ e modulo 5.

como já emcontramos o vetor unitário no item B.

Agora basta multiplicar por (-5) pois este vetor terá sentido contrario e modolo (5).

$$-5 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \left(-\frac{10}{\sqrt{14}}, \frac{5}{\sqrt{14}}, \frac{15}{\sqrt{14}}\right)$$