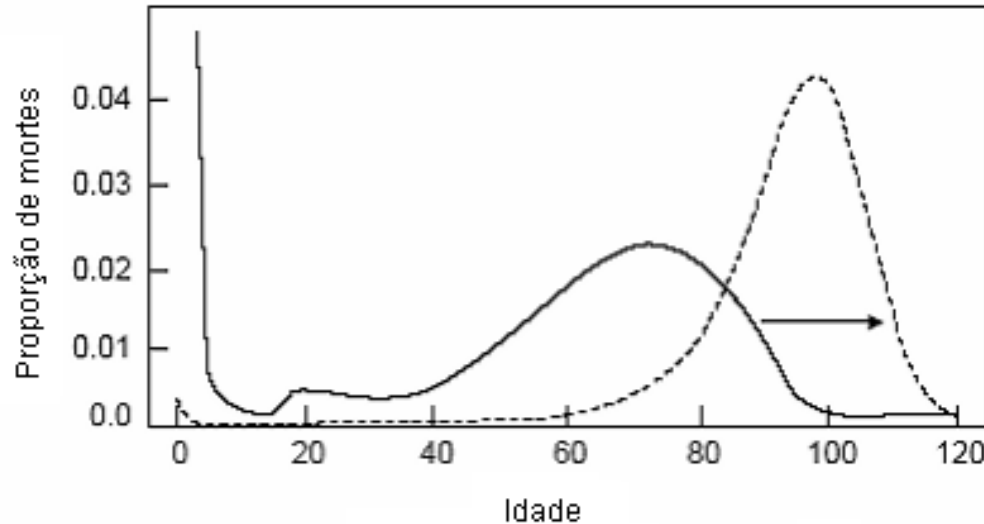


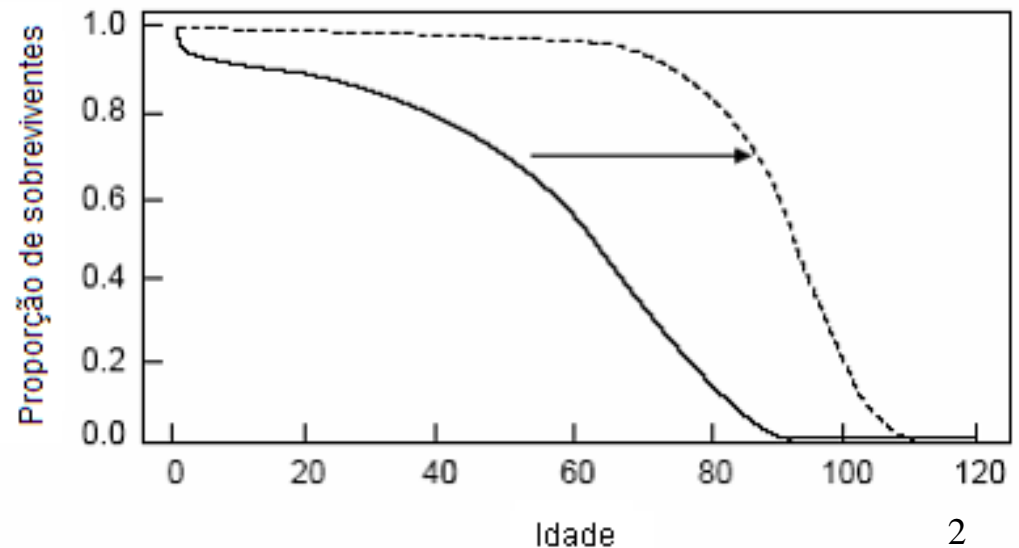
# ***Projeção da Mortalidade em Cálculos Atuariais: possibilidades e desafios***

*Bernardo Lanza Queiroz*  
Professor do Departamento de Demografia

# Teorias / Hipóteses para tendências futuras da mortalidade



Em quais idades estarão concentrados os ganhos futuros de mortalidade???



# Importância de se projetar a mortalidade

---

- Melhor entendimento da dinâmica populacional;
- Melhorar as projeções de população;
  - Consequências importantes para:
    - cálculos atuariais (RPPS);
    - previdência social (RGPS);
    - Gastos com saúde (SUS), etc.

# Métodos tradicionais

---

- Métodos determinísticos (IBGE, CELADE, Nações Unidas):
  - Trajetória (meta) pré-estabelecida com base em uma tábua limite → convergência?
  - Projeções com base na opinião de especialistas sobre tendências por causas de morte:

# Método tradicional:

## Relação Logital (CELADE, 1984)

- Suponha que tábuas de mortalidade inicial e limite possam ser descritas em função de um mesmo padrão:

$$1) \quad y_x^L = a_L + b_L y_x^S$$

$$2) \quad y_x^I = a_I + b_I y_x^S$$



$$y_x^{t_k} = \omega(a_L + b_L y_x^S) y_x^{t_L} + (1 - \omega)(a_I + b_I y_x^S)$$

$$\frac{t_k - t_I}{t_L - t_I}$$

$$\frac{t_k - t_I}{t_L - t_I}$$

# Método tradicional: Modelo Relacional (CELADE)

---

## Hipóteses básicas

- O logito da tábua inicial varia linearmente no tempo, tendendo ao logito da tábua de mortalidade limite.
- O mecanismo do método está no ritmo de variação que se supõe para o declínio da mortalidade.

# Modelo Relacional: alternativas para projeção

---

## 1ª Alternativa:

- Supõe-se uma data para mortalidade inicial e outra para a limite (2010 e 2000, por exemplo).
- Para encontrar a mortalidade nas datas intermediárias, basta aplicar a equação anterior, interpolando-se linearmente no tempo os logitos:

$$y_x^I \quad y_x^L$$

# Modelo Relacional: alternativas para projeção

---

## 2ª Alternativa:

- Supõe-se uma esperança de vida a ser alcançada no horizonte de projeção. Critério: investigador, tendência passada, existência de alguma política, etc.
- Supõe uma data para a mortalidade inicial mas não se conhece a priori a data (L) em que se alcançará a mortalidade limite.
- A data L é determinada aplicando-se a equação de forma iterativa, variando L sucessivamente até alcançar o logito que implicará na  $e(0)$  proposta.
- Determina-se, em cada período, a tábua de mortalidade por sexo que corresponde àquela esperança de vida.



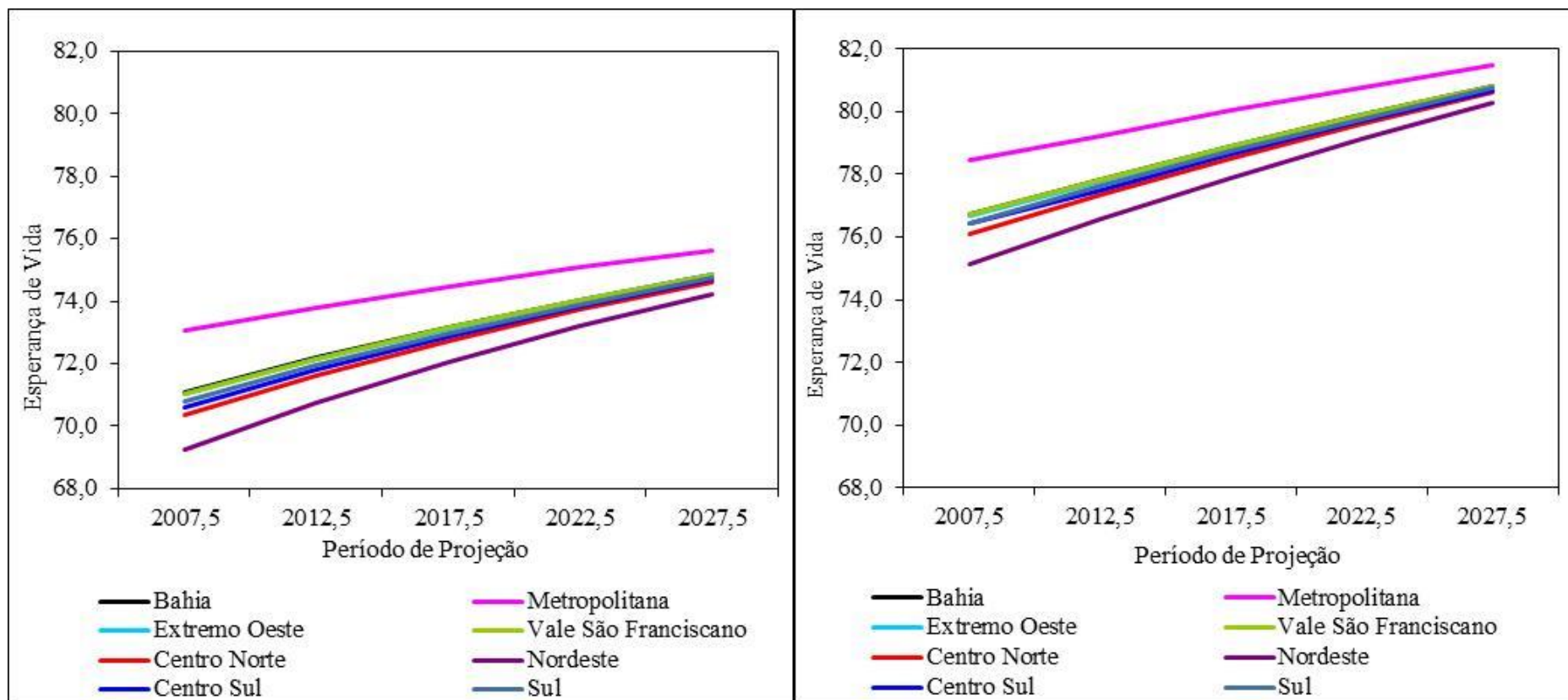
# Modelo Relacional: alternativas para projeção

---

## 3ª Alternativa:

- Não se tem uma data única para alcançar a tábua limite.
- Supõe-se esperanças de vida a serem alcançadas em cada quinquênio de projeção.
- Ao calcular a tábua em cada quinquênio varia-se a data limite em que se alcança a mortalidade limite (meta).
- Semelhante à 2ª alternativa, porém, aplicada a cada período quinquenal reiteradamente.

# Esperança de vida ao nascer por períodos quinquenais e sexo - Mesorregiões, Bahia, 2005-2030



Fonte: LED/Cedeplar.

# Limitações

---

- Não incorpora diferencial de ganhos por grupos de idade.
- Fontes de incerteza: qualidade dos dados, opinião do analista, etc.
- A incerteza é incorporada com base em cenários (alto, médio e baixo) → nível de confiança???
- A incerteza aumenta em pequenas → necessidade de se mensurar estatisticamente a incerteza na estimação dos parâmetros.

# Método estocástico: Lee-Carter (1992)

---

$$\ln [m(x, t)] = a_x + b_x k_t + e_{x,t}$$

Onde:

$m(x, t)$  → Taxas centrais de mortalidade no ano  $t$

$a_x$  → Forma geral (média) da curva de mortalidade do modelo

$b_x$  → Descreve o padrão de de desvio da forma geral quando  $k$  varia

$k_t$  → Índice do nível geral de mortalidade no tempo

$e_{x,t}$  → Resíduo

# Método estocástico: Lee-Carter (1992)

---

- **Estimação dos parâmetros → Dois problemas**

1) Precisamos de um conjunto de  $m(x)$  observadas no passado.

Soluções:

a) Utilizar tábuas modelos: Coale-Demeny, Nações Unidas, HMD, etc.

b) Utilizar o próprio modelo → fixar  $k=0$  e  $k=1$  e estimar:

$$a_x = \ln[m(x,0)]$$

$$b_x = \ln[m(x,0)] - \ln[m(x,1)]$$

# Método estocástico: Lee-Carter (1992)

---

- **Estimação dos parâmetros → Dois problemas**

2) O lado direito da equação é composto apenas por parâmetros.

Solução:

Mínimos quadrados com aplicação do método de Decomposição Valores Singulares (DVS).

$a_x \rightarrow$  media do valor de  $\ln[m(x,t)]$  no tempo.

Subtraímos isso do  $\ln[m(x,t)]$  e temos os resíduos.

Utilizamos DVS nos resíduos para encontrar os valores de  $b_x$  e  $k_t$ , que juntos com  $a_x$  minimizam os erros.

# Método estocástico: Lee-Carter (1992)

---

## Projeção de $k_t$ :

- Tem características de um processo estocástico → modelos de séries temporais;
- Modelo escolhido: passeio aleatório com tendência

$$k_t = k_{t-1} + c + e_i$$

Onde:

$c$  → incorpora a tendência linear decrescente de  $k_t$

$e_i$  → incorpora a incerteza na trajetória de  $k_t$

# Variações do método Lee-Carter

---

## Lee-Miller (2001):

- $K_t$  é re-estimado para se ajustar a  $e_0$  no ano  $t$ .
- As taxas específicas de mortalidade por idade do último ano de ajuste do modelo são as taxas observadas nesse ano;
- O período base da projeção tem início em 1950.

## Wilmoth (1993):

- Ajuste do modelo por Mínimos Quadrados Ponderados
  - O peso pode ser o número de mortes em cada grupo etário
- Máxima Verossimilhança
  - nesse caso é necessário derivar a função. Wilmoth sugere partir de uma distribuição Poisson



# Vantagens/limitações do Método Lee-Carter

---

- Várias aplicações têm demonstrado maior precisão nas projeções realizadas pelo método Lee-Carter comparativamente a outros modelos (Lee & Miller, 2001; Girosi & King (2007)).
- Limitação: necessidade série longa de dados.

Li, N., Lee, R., & Tuljapurkar, S. (2004). Using the Lee–Carter Method to Forecast Mortality for Populations with Limited Data\*. International Statistical Review, 72(1), 19-36.

# Vantagens/limitações do Método Lee-Carter

---

- Limitação: necessidade série longa de dados.

Li, N., Lee, R., & Tuljapurkar, S. (2004). Using the Lee–Carter Method to Forecast Mortality for Populations with Limited Data\*. International Statistical Review, 72(1), 19-36.

- Demonstram que uma modificação no modelo pode ser aplicada com apenas 2 pontos no tempo, se estiverem com uma distância de tempo razoável entre eles. Três pontos seriam mais adequados para ter melhores estimativas do IC
- O ponto principal é a condição que  $k(t)$  tenha uma passeio aleatório com drift é o declínio da mortalidade

# Vantagens/limitações do Método Lee-Carter

---

- Limitação: mudança no padrão etário da mudança da mortalidade.

Li, N., Lee, R., & Gerland, P. (2013). Extending the Lee-Carter method to model the rotation of age patterns of mortality decline for long-term projections. *Demography*, 50(6), 2037-2051.

- No modelo, assumimos  $a(x)$  e  $b(x)$  constantes no tempo de projeção. Mas o ritmo de mudança do padrão da mortalidade pode mudar no tempo – fenômeno chamado de rotação da mortalidade

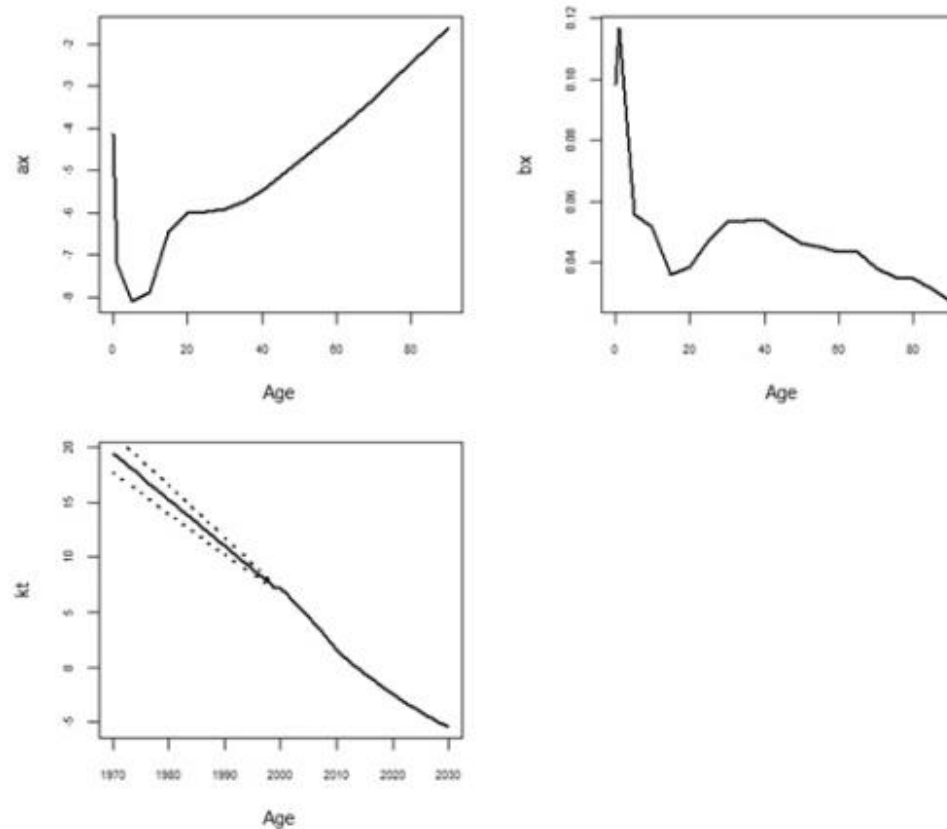
# Vantagens/limitações do Método Lee-Carter

---

- Rotação da mortalidade:
  - A solução passa pela modificação do padrão de  $b(x)$ 
    - Suavizando as taxas de mortalidade dos jovens (0-14) e dos adultos (15-64) para que fiquem igual a média do período todo
    - Isso vai levar a queda da mortalidade para idades mais avançadas (acima de 65).

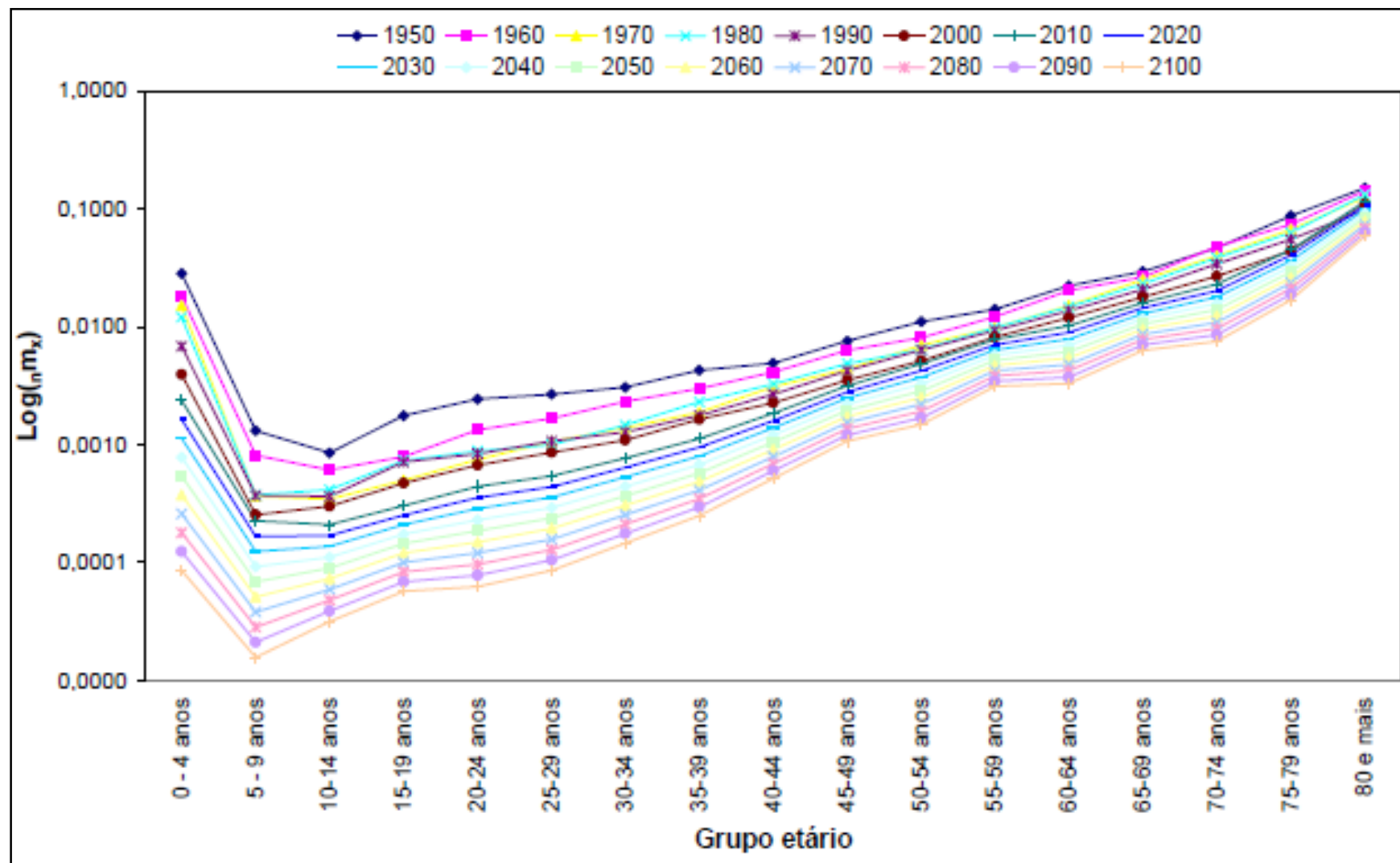
# Perfil da Mortalidade, mudanças da mortalidade e evolução do nível

Figure 2: Lee-Carter parameters, Males, Brasil, 1970-2030



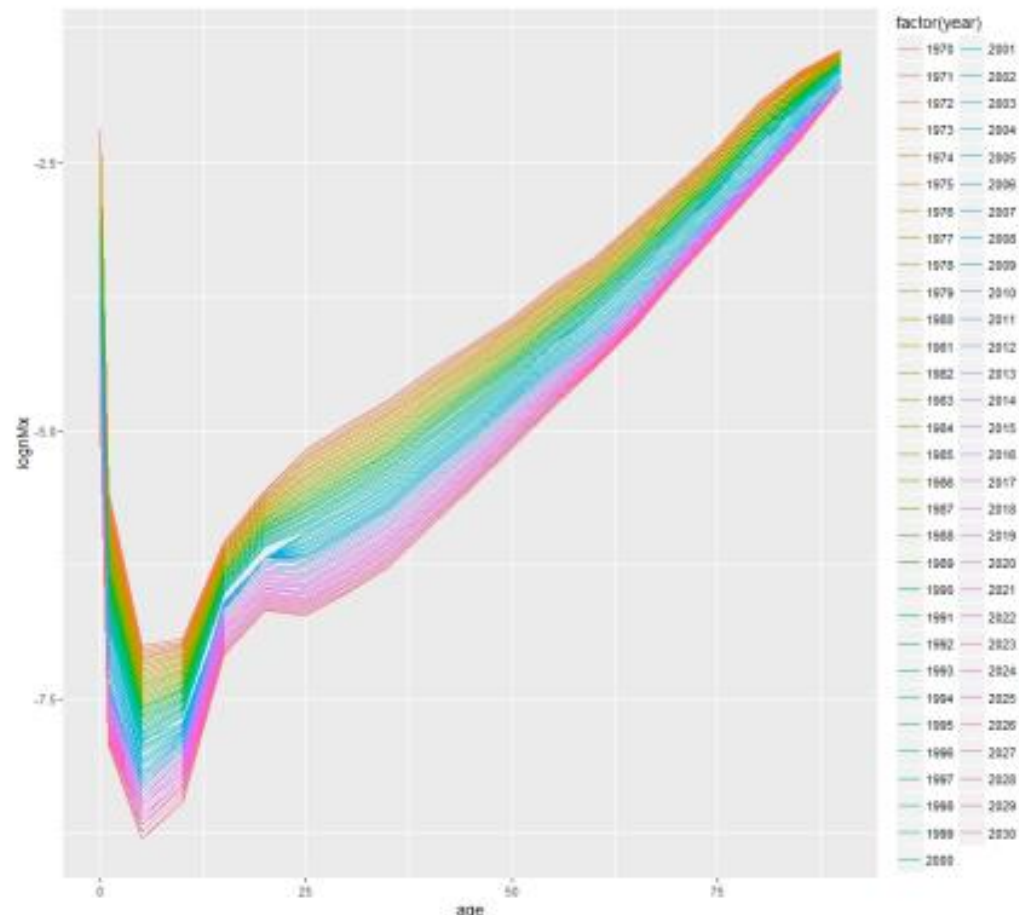
Source: IBGE(2016)

# Log taxas de mortalidade, observadas e projetadas para o município de São Paulo, 1950 a 2100 – sexo feminino

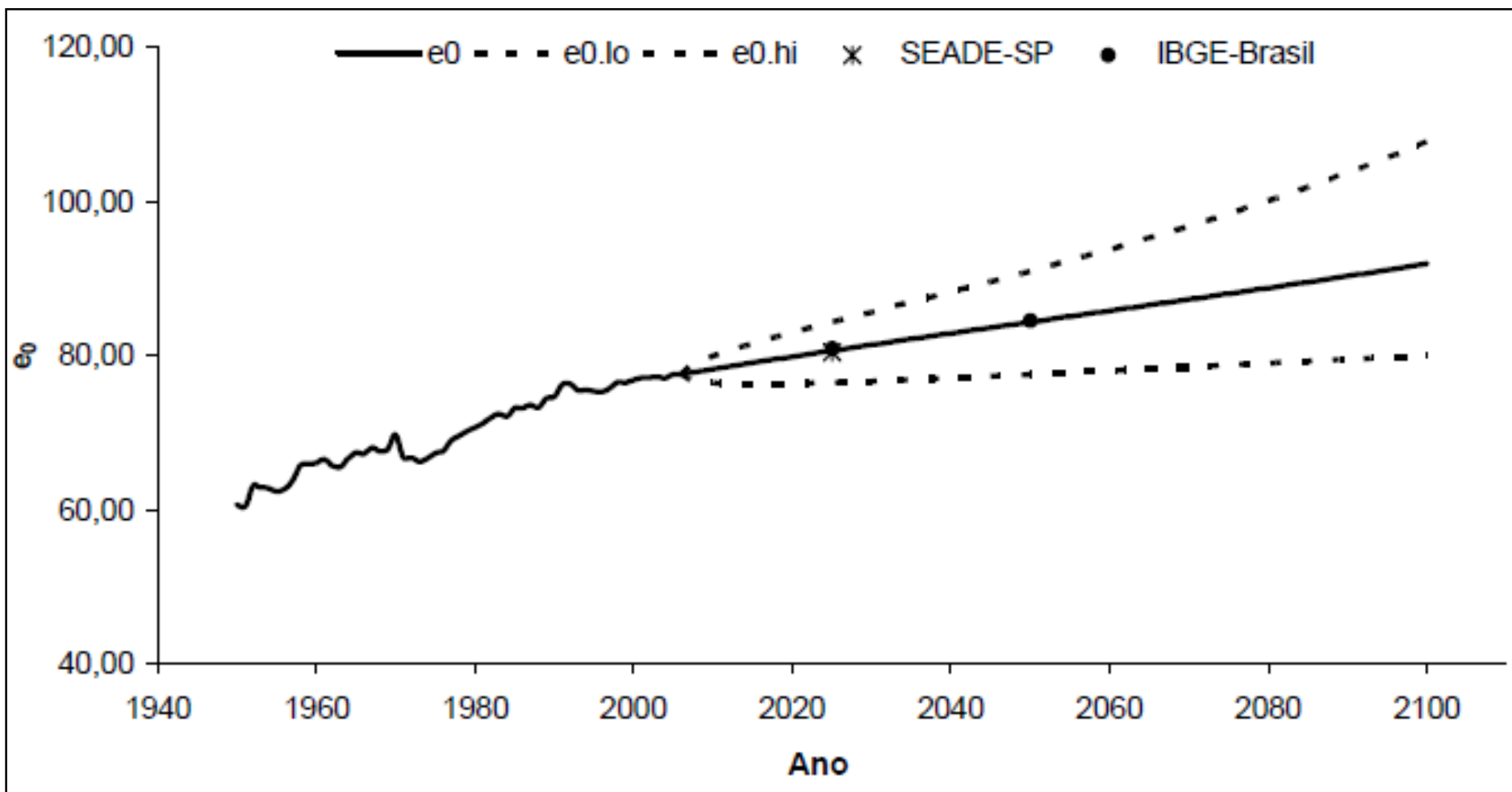


# Log taxas de mortalidade, observadas e projetadas para Minas Gerais, 1970 a 2030 – sexo masculino

Figure 3: Projections and backcast projections for males log mortality rates by single year, Minas Gerais (1970-2030)



## Esperança de vida ao nascer, observadas e projetadas, e intervalo de confiança da projeção – sexo feminino





# Estimando Lee-Carter no R

---

- Duas boas alternativas:
  - Demography:
    - <https://cran.r-project.org/package=demography>
  - MortCast:
    - <https://cran.r-project.org/package=MortCast>