

# Projeção da mortalidade : o que projetar e como projetar?

**Bernardo Lanza Queiroz**

Depto de Demografia – UFMG

Métodos Computacionais aplicados às Ciências Atuais

Disciplina da Profa. Thais Paiva

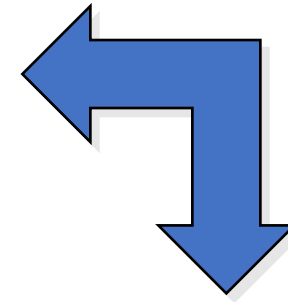
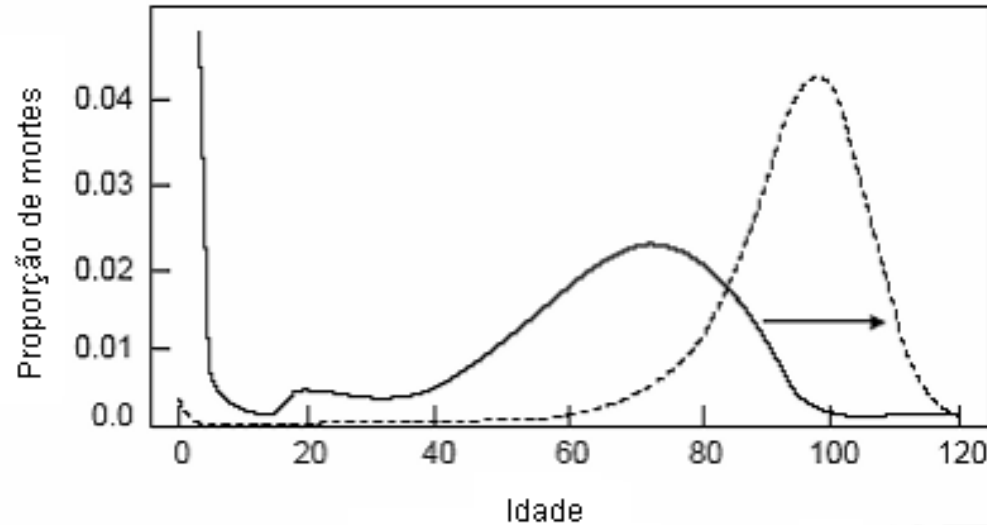
# Introdução

- As grandes melhorias nas condições sociais e econômicas, que refletem nas melhores das condições de vida, explicam o aumento do número médio de anos vividos pela população do mundo como um todo;
- aumento da esperança de vida é mudança positiva de indivíduos e uma substancial realização social, mas leva a uma preocupação sobre suas implicações para gastos públicos e privados de apoio à velhice;
- a redução da mortalidade e aumento da esperança de vida traz consigo uma discussão sobre as tendências da morbidade ao longo do ciclo de vida e no tempo.

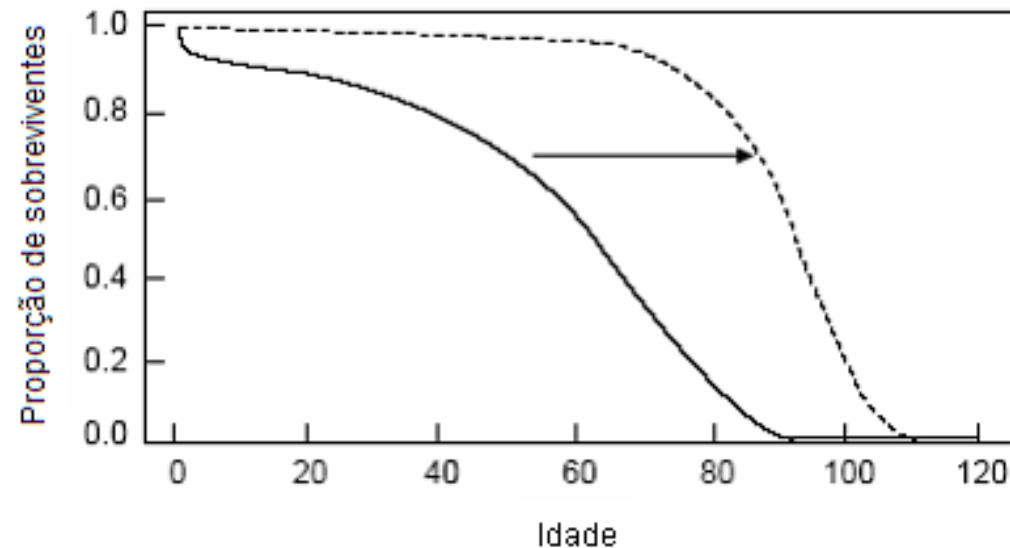
# Introdução

- Dentro deste contexto, o papel da projeção da mortalidade torna-se cada vez mais relevante;
- as projeções demográficas envolvem uma grande parcela de incerteza, o que torna necessário que qualquer metodologia de projeção demográfica forneça indicações da sua incerteza associada;
- O objetivo deste trabalho é projetar níveis e padrões de mortalidade por sexo, no Brasil, usando o método de Lee-Carter e variações;
- A aplicação de diferentes métodos visa avaliar a qualidade e a performance de cada um deles em diferentes cenários de projeção

# Teorias / Hipóteses para tendências futuras da mortalidade



Em quais idades estarão concentrados os ganhos futuros de mortalidade???



# Importância de se projetar a mortalidade

---

- Melhor entendimento da dinâmica populacional;
- Melhorar as projeções de população;
  - Consequências importantes para:
    - cálculos atuariais (RPPS);
    - previdência social (RGPS);
    - Gastos com saúde (SUS), etc.

# Métodos tradicionais

---

- Métodos determinísticos (IBGE, CELADE, Nações Unidas):
  - Trajetória (meta) pré-estabelecida com base em uma tábua limite → convergência?
  - Projeções com base na opinião de especialistas sobre tendências por causas de morte:

# Método tradicional:

## Relação Logital (CELADE, 1984)

- Suponha que tábuas de mortalidade inicial e limite possam ser descritas em função de um mesmo padrão:

$$1) \quad y_x^L = a_L + b_L y_x^S$$

$$2) \quad y_x^I = a_I + b_I y_x^S$$



$$y_x^{t_k} = \omega(a_L + b_L y_x^S) y_x^{t_L} + (1 - \omega)(a_I + b_I y_x^S)$$

$$\frac{t_k - t_I}{t_L - t_I}$$

$$\frac{t_k - t_I}{t_L - t_I}$$

# Método tradicional: Modelo Relacional (CELADE)

---

## Hipóteses básicas

- O logito da tábua inicial varia linearmente no tempo, tendendo ao logito da tábua de mortalidade limite.
- O mecanismo do método está no ritmo de variação que se supõe para o declínio da mortalidade.



# Modelo Relacional: alternativas para projeção

---

## 1ª Alternativa:

- Supõe-se uma esperança de vida a ser alcançada no horizonte de projeção. Critério: investigador, tendência passada, existência de alguma política, etc.
- Supõe uma data para a mortalidade inicial mas não se conhece a priori a data (L) em que se alcançará a mortalidade limite.
- A data L é determinada aplicando-se a equação de forma iterativa, variando L sucessivamente até alcançar o logito que implicará na  $e(0)$  proposta.
- Determina-se, em cada período, a tábua de mortalidade por sexo que corresponde àquela esperança de vida.

# Modelo Relacional: alternativas para projeção

---

## 2ª Alternativa:

- Não se tem uma data única para alcançar a tábua limite.
- Supõe-se esperanças de vida a serem alcançadas em cada quinquênio de projeção.
- Ao calcular a tábua em cada quinquênio varia-se a data limite em que se alcança a mortalidade limite (meta).
- Semelhante à 2ª alternativa, porém, aplicada a cada período quinquenal reiteradamente.

# Limitações

---

- Não incorpora diferencial de ganhos por grupos de idade.
- Fontes de incerteza: qualidade dos dados, opinião do analista, etc.
- A incerteza é incorporada com base em cenários (alto, médio e baixo) → nível de confiança???
- A incerteza aumenta em pequenas → necessidade de se mensurar estatisticamente a incerteza na estimação dos parâmetros.

# Método estocástico: Lee-Carter (1992)

---

$$\ln[m(x, t)] = a_x + b_x k_t + e_{x,t}$$

Onde:

$m(x, t)$  → Taxas centrais de mortalidade no ano  $t$

$a_x$  → Forma geral (média) da curva de mortalidade do modelo

$b_x$  → Diferença entre o  $\log[m(x)]$  entre  $t_1$  e  $t_2$

$k_t$  → Índice do nível geral de mortalidade no tempo

$e_{x,t}$  → Resíduo

# Método estocástico: Lee-Carter (1992)

---

- **Estimação dos parâmetros → Dois problemas**

1) Precisamos de um conjunto de  $m(x)$  observadas no passado.

Soluções:

a) Utilizar tábuas modelos: Coale-Demeny, Nações Unidas, HMD, etc.

b) Utilizar o próprio modelo → fixar  $k=0$  e  $k=1$  e estimar:

$$a_x = \ln[m(x,0)]$$

$$b_x = \ln[m(x,0)] - \ln[m(x,1)]$$

# Método estocástico: Lee-Carter (1992)

---

- **Estimação dos parâmetros → Dois problemas**

2) O lado direito da equação é composto apenas por parâmetros.

Solução:

Mínimos quadrados com aplicação do método de Decomposição Valores Singulares (DVS).

$a_x \rightarrow$  media do valor de  $\ln[m(x,t)]$  no tempo.

Subtraímos isso do  $\ln[m(x,t)]$  e temos os resíduos.

Utilizamos DVS nos resíduos para encontrar os valores de  $b_x$  e  $k_t$ , que juntos com  $a_x$  minimizam os erros.

# Método estocástico: Lee-Carter (1992)

---

## Projeção de $k_t$ :

- Tem características de um processo estocástico → modelos de séries temporais;
- Modelo escolhido: passeio aleatório com tendência

Onde:

$$k_t = k_{t-1} + c + e_i$$

$c$  → incorpora a tendência linear decrescente de  $k_t$

$e_i$  → incorpora a incerteza na trajetória de  $k_t$

# Variações do método Lee-Carter

---

## Lee-Miller (2001):

- $K_t$  é re-estimado para se ajustar a  $e_0$  no ano  $t$ .
- As taxas específicas de mortalidade por idade do último ano de ajuste do modelo são as taxas observadas nesse ano;
- O período base da projeção tem início em 1950.

## Wilmoth (1993):

- Ajuste do modelo por MQO e MV



# Vantagens/limitações do Método Lee-Carter

---

- Várias aplicações têm demonstrado maior precisão nas projeções realizadas pelo método Lee-Carter comparativamente a outros modelos (Lee & Miller, 2001; Girosi & King (2007)).
- Limitação: necessidade série longa de dados.

Li, N., Lee, R., & Tuljapurkar, S. (2004). Using the Lee–Carter Method to Forecast Mortality for Populations with Limited Data\*. *International Statistical Review*, 72(1), 19-36.

# Alguns exemplos de aplicações

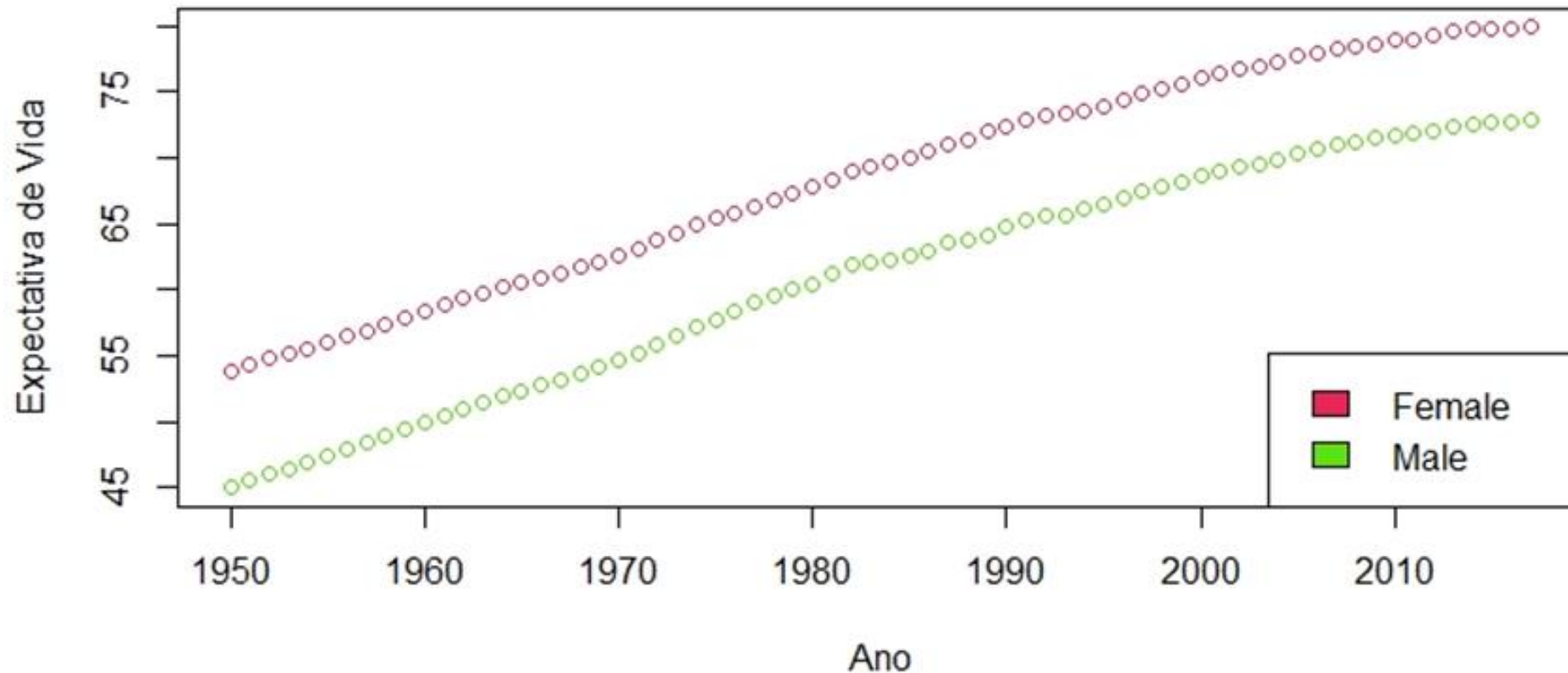
- Com a colaboração de diversos egressos do curso
  - Matheus
  - Bruno Lopes
  - Luis Henrique
  - Fernanda
  - Sedami
  - Thais Melo

# Dados

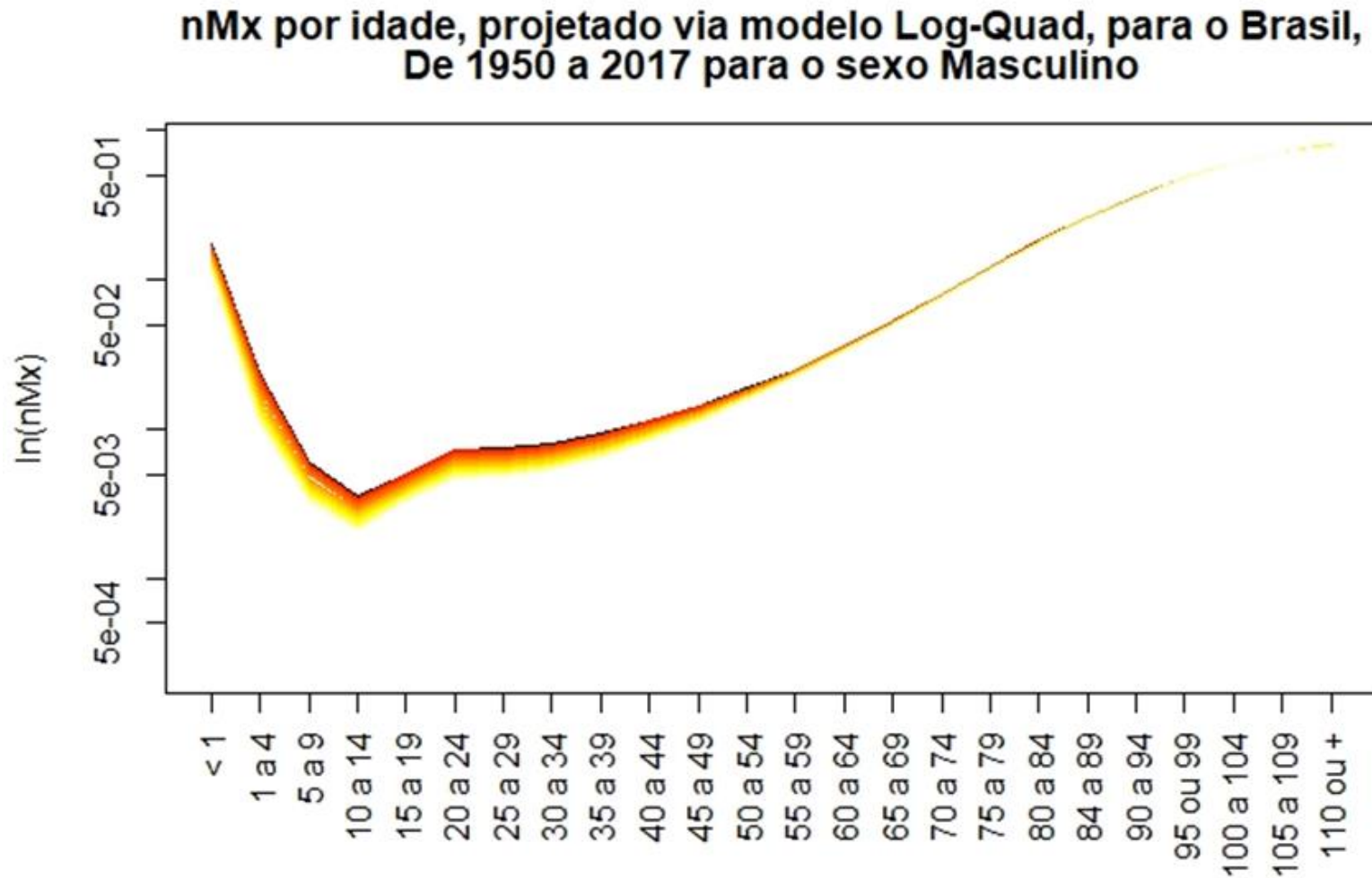
- estimativas de mortalidade para o Brasil, por sexo, realizados pelo *Institute of Health Metrics and Evaluation* (IHME)
- O IHME gera tabelas de vida completas, por sexo, entre 1950 e 2017.
- Dados estão disponíveis publicamente em:
  - <http://www.healthdata.org/>

# Evolução da esperança de vida ao nascer, Brasil, homens e mulheres, 1950-2017

**Expectativa de vida ao nascer do Brasil para ambos os sexos de 1950-2017**



# Suavização das curvas de mortalidade passadas via Log-Quad (Wilmoth, et.al, 2012)



# Métodos

- **Lee-Carter – Lee and Carter (1992)**

- Lee-Carter (1992) introduziram um novo modelo de projeção e construção de tabelas de vida. O interesse principal dos autores era modelar as mudanças ao longo do tempo na mortalidade de um país ou populações ao invés de estudar mudanças no perfil de mortalidade entre países;
- O modelo é estimado a partir da série histórica de mortalidade do país (ou região em estudo). O modelo de Lee-Carter é dado por:

- $$\ln(nmx) = ax + bxkt + \text{erro} \quad (1)$$

- $\ln(mx)$  é o logaritmo da taxa de mortalidade por todas as causas na idade  $x$  no momento  $t$ ;  $ax$  é o perfil etário médio das taxas de mortalidade por todas as causas, ou seja, captura diferenças nas taxas por idade;  $bx$  é a variação por idade do nível médio, dado o nível geral de mortalidade, ou seja, captura diferenças nas taxas relativas de mudança por idade;  $kt$  é o nível geral de mortalidade no momento  $t$  e captura mudanças na mortalidade geral.

# Métodos

- **Pattern of mortality decline – PMD - (Andreev et al. 2013)**

- Pressupõe que o futuro declínio na mortalidade por idade seguirá um certo padrão com o aumento da expectativa de vida ao nascer ( $e_0$ )

$$\ln m_x(t_2) = \ln m_x(t_1) - k(t_{12}) \rho_x(t_{12}),$$

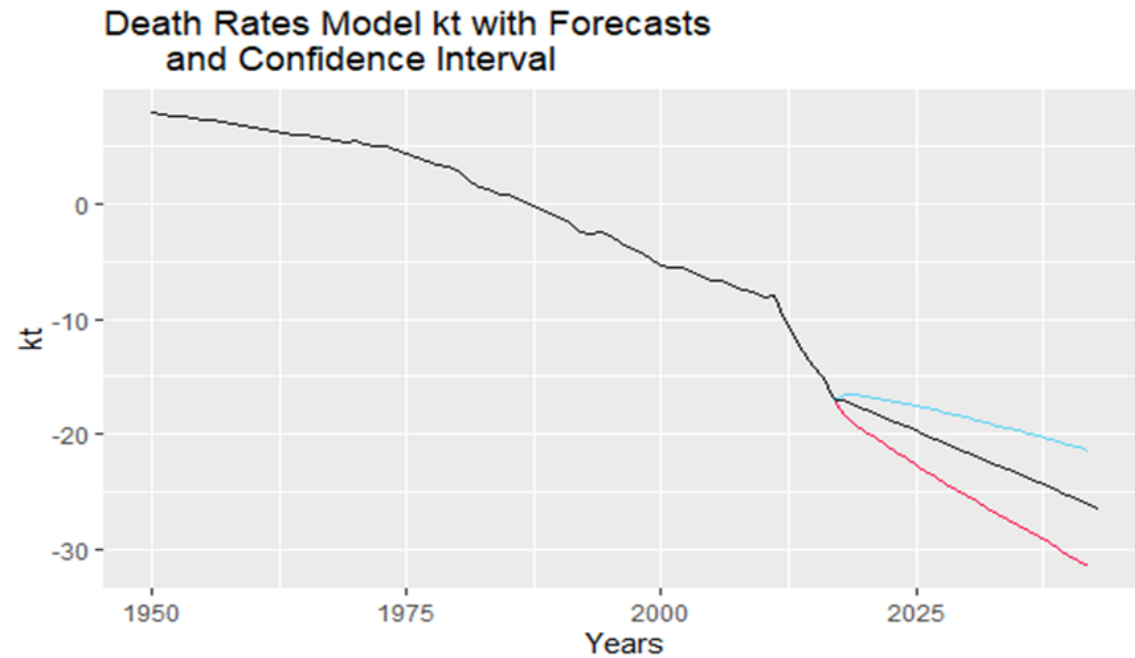
- 

$\rho_x(t_{12})$  é o padrão de idade específico de declínio da mortalidade do tempo  $t_1$  para o tempo  $t_2$

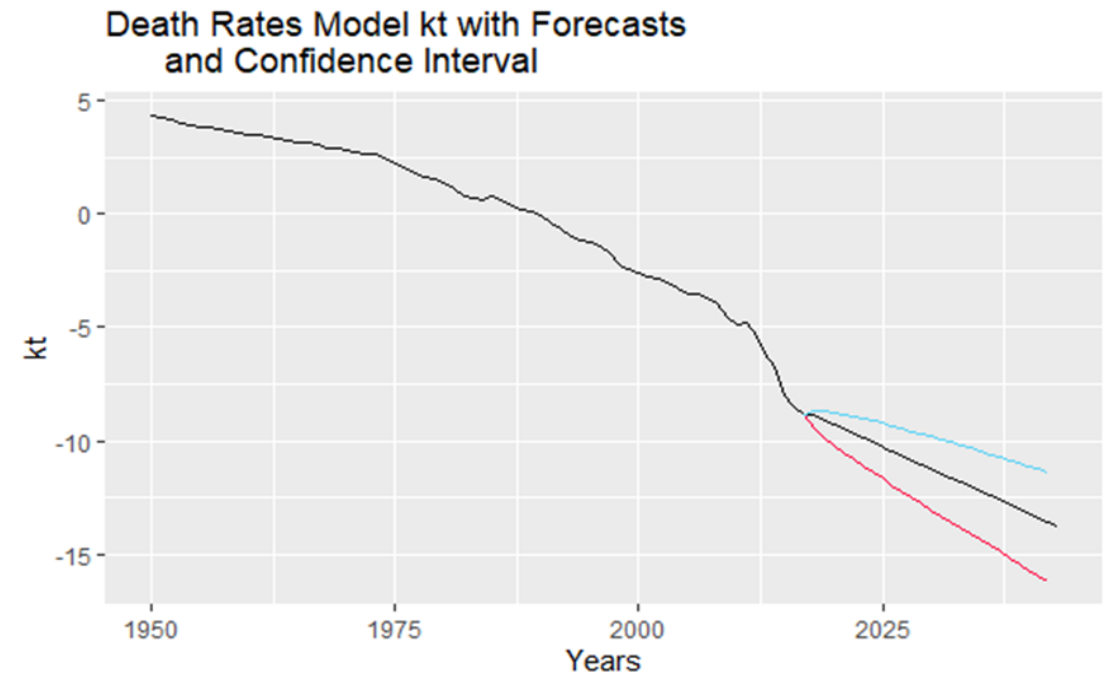
- Os valores do padrão de declínio da mortalidade são derivados de forma empírica a partir dos dados da Human Mortality Database.
- O termo  $\rho_x$  refere-se a mediana do declínio em todos os países do HMD para uma dada idade  $x$  e para um determinado nível de  $e_0$
- Ritmo de variação da mortalidade depende do nível de mortalidade, dado pelo esperança de vida, em cada período de tempo .

# Resultados: método Lee-Carter

Feminino



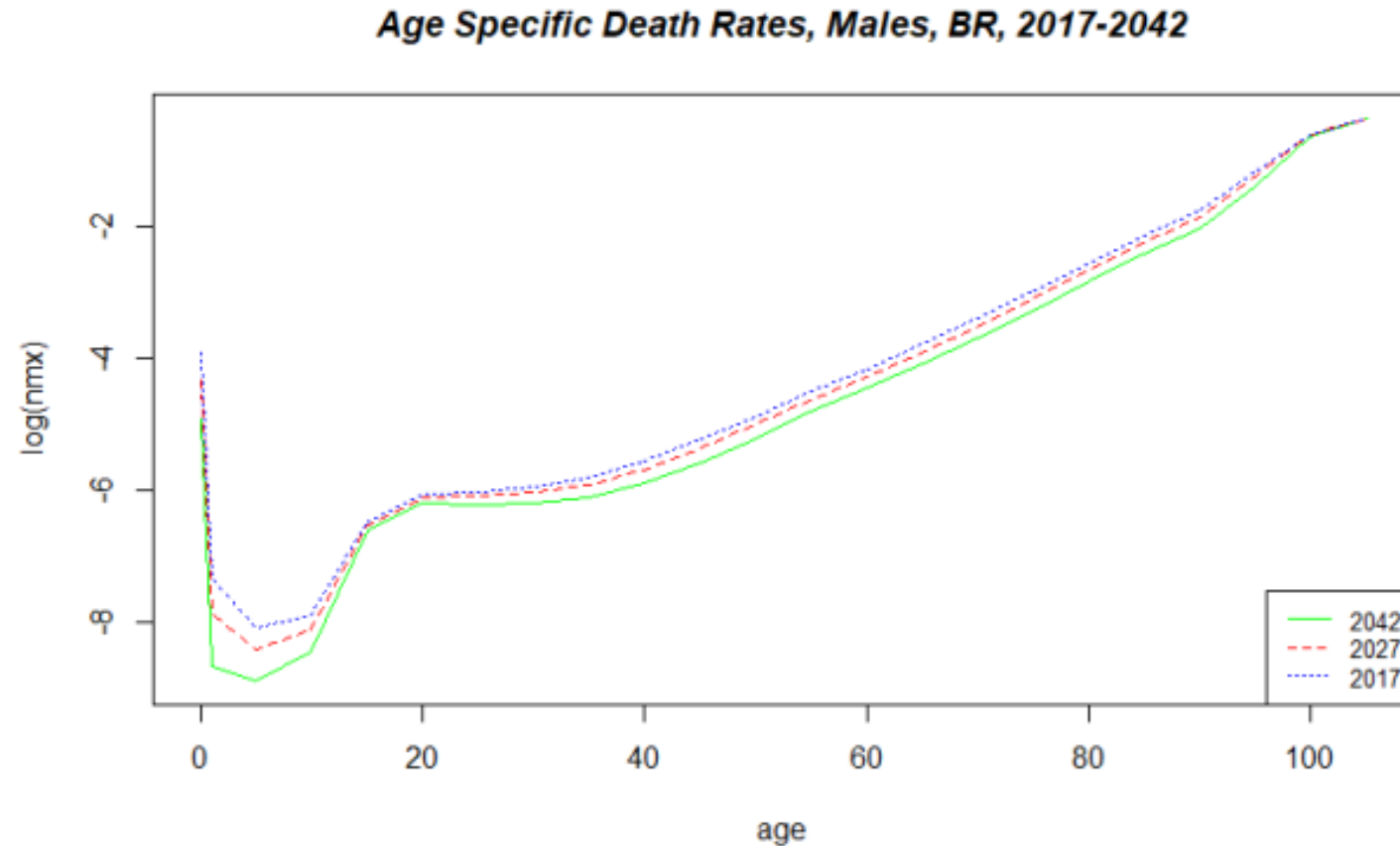
Masculino



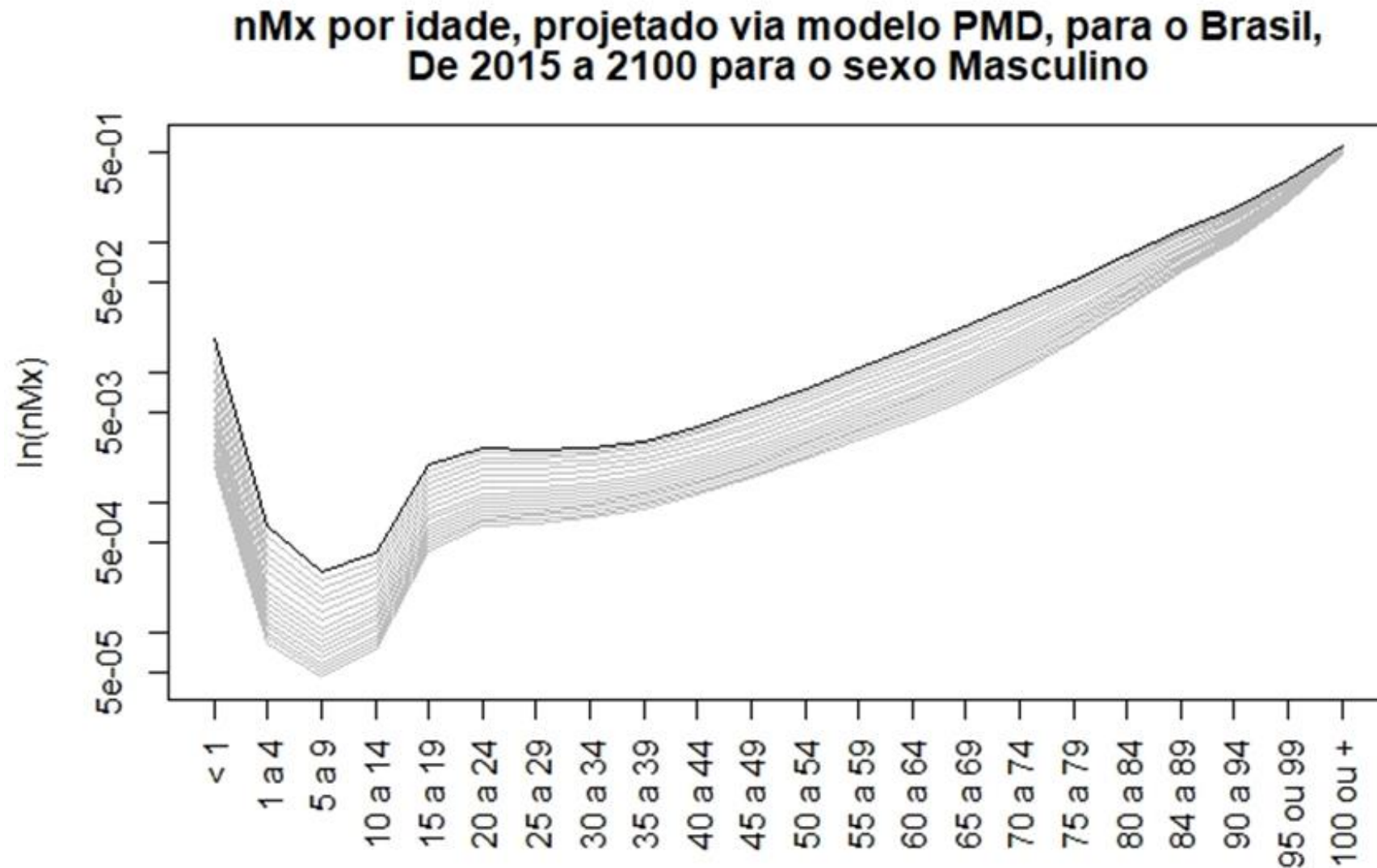


# Resultados Lee-Carter

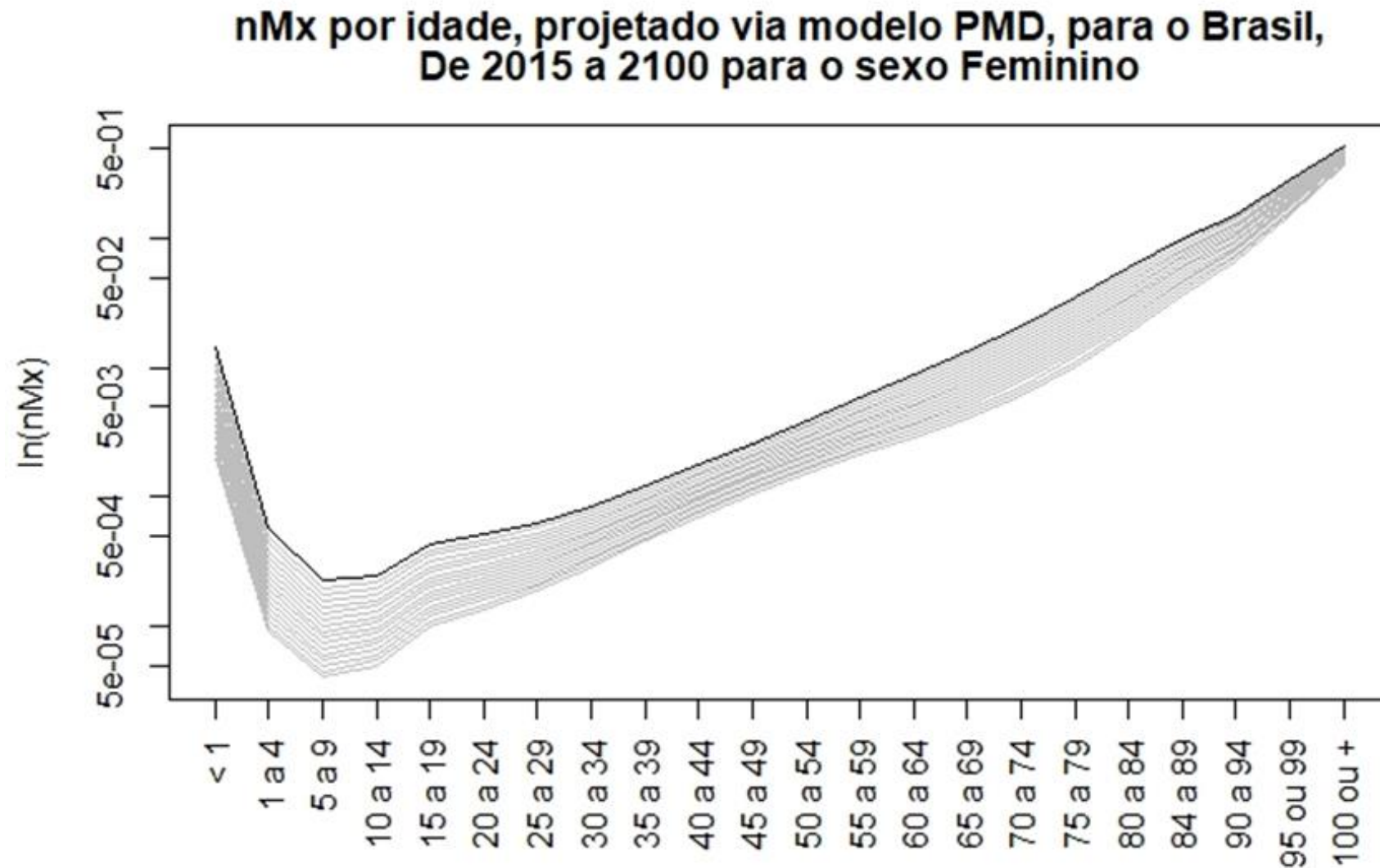
**Figura 6 – Estimativas das taxas de mortalidade, em escala log, masculinas com modelo Lee-Carter, Brasil**



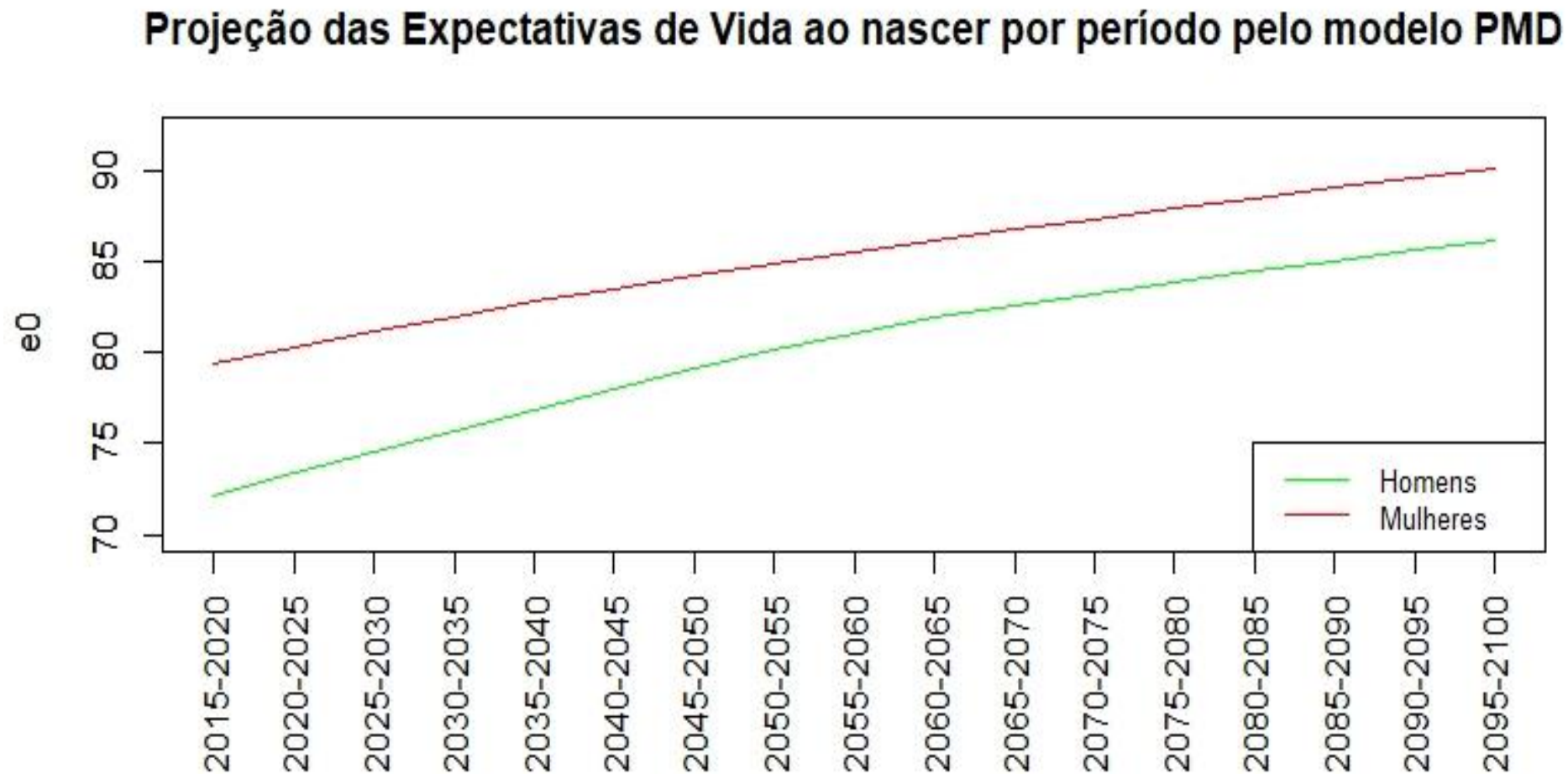
# PMD – Curvas de Mortalidade- Homens



# PMD – Curvas de Mortalidade - Feminino



# Resultados PMD – esperança de vida



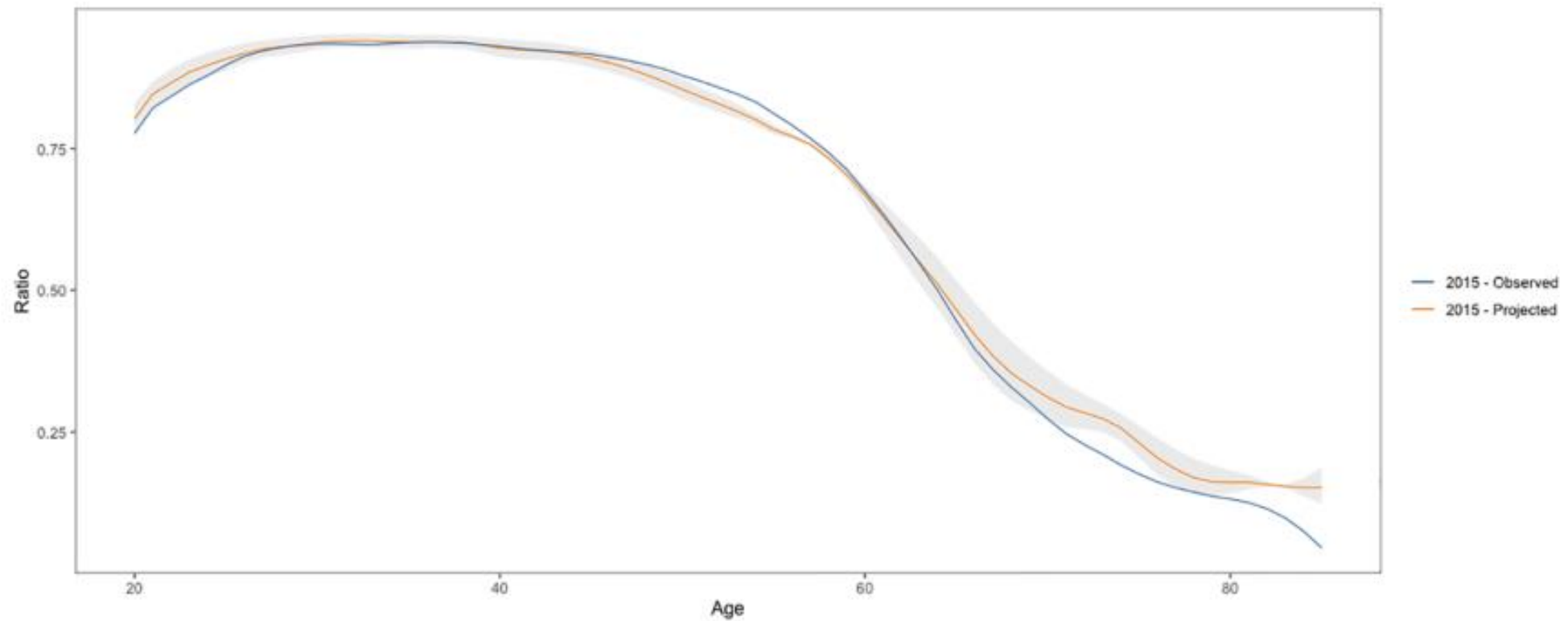
# Conclusão

- No caso dos homens, **modelo Lee-Carter** tem uma limitação importante de carregar a sobre-mortalidade masculina para o futuro;
- Também tem problema de coerência, pois soma de óbitos masculino e feminino são batem com a projeção da mortalidade total;
- Mas já há alternativas e variações do Lee-Carter para isso.
- **Modelo PMD** é bastante flexível e simples de usar
- Boa alternativa quando os dados são mais limitados e a tendência de variação de mortalidade é mais instável;
- Funções de mortalidade projetadas são bem plausíveis;
- Restrição é que a experiência de declínio da mortalidade foi construída com base na experiência da HMD.

# Aplicação para oferta de trabalho

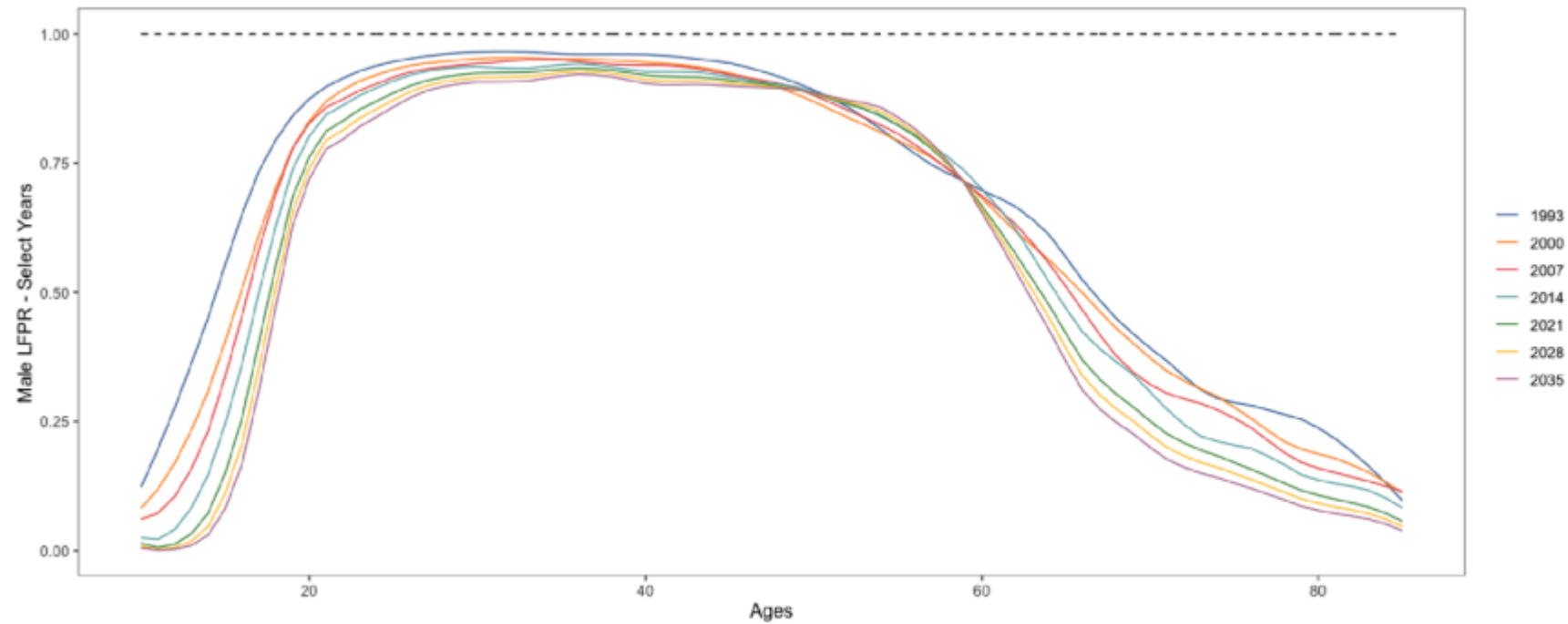
- Com Matheus Ferreira
  - Aplicamos o Lee-Carter para projetar a oferta de trabalho no Brasil
  - Com base nisso, usamos um método demográfico bem direto para estimar a duração da aposentadoria no Brasil até 2050
  - Trabalho acabou de ser publicado no Journal of the Economics of Ageing.

# Validação do Modelo



**Fig. 5.** Labor Force Participation Rates, Males, Model Validation for 2015.

# Projeção da PEA - homens



**Fig. 7.** Forecasted Labor Force Participation Rates, Males, Brazil, (selected years).



# Resultados na aplicação

**Table 1**

Life Expectancy at 20, Labor Force Participation at Selected Ages, Expected Length of Retirement and Percentage of Working Life as Retired, Males, Brazil, select years.

Year	% out of labor force age 65	Labor force participation at 45	Labor force participation at 55	Expected Duration of Retirement	Life expectancy at age 20	% of adult life in retirement	Median retirement age	Savings rate (3% interest)
1993	43.22	94.36	79.17	6.09	48.64	12.52	67	10.16%
1998	46.66	92.70	79.50	6.28	49.56	12.67	66	11.19%
2003	47.92	92.16	78.39	6.91	50.68	13.63	66	11.46%
2008	47.78	93.14	79.87	7.85	51.80	15.15	66	11.72%
2013	53.41	91.78	81.67	8.63	52.83	16.33	65	12.90%
2018	56.74	91.33	82.04	9.46	53.77	17.59	64	14.17%
	(54.4–58.8)	(90.0–91.96)	(81.4–82.6)	(9.61–11.95)		(17.8–22.3)		
2023	58.83	90.93	82.58	10.09	54.66	18.45	64	14.37%
	(54.8–62.5)	(90.17–91.69)	(81.5–83.6)	(10.3–12.4)		(18.9–22.6)		
2028	60.82	90.52	83.12	10.68	55.57	19.21	63	15.71%
	(55.4–65.5)	(89.49–91.57)	(81.73–84.5)	(10.9–12.9)		(19.7–23.2)		
2033	62.72	90.12	83.66	11.29	56.51	19.98	63	15.89%
	(56.2–68.2)	(88.34–91.43)	(81.91–84.4)	(11.5–13.5)		(20.5–23.9)		

Para replicar (o artigo)

- <https://github.com/blanza/paperJEoA>

# Pacotes para usar os modelos no R

- Package 'StMoMo'
  - <https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/StMoMo.pdf>
- demography and lifecontingencies packages
  - [https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/vignettes/mortality\\_projection.pdf](https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/vignettes/mortality_projection.pdf)
- Forecast mortality using Compositional Data Lee-Carter model - R Package
  - <https://github.com/mpascariu/CoDa>

# Exemplo para fazer (no R)

- Tem um exemplo para aplicar o Lee-Carter bem simples
  - Usa os dados da Suécia
- A turma que for fazer Projeção no semestre que vem vai trabalhar mais com isso
  - Vamos fazer a projeção da mortalidade no Brasil (por UF) usando diferentes modelos, projetar a população por idade e sexo e depois a população de beneficiários e contribuintes de um sistema de previdência.