O que é uma variável aleatória?

É uma **representação numérica** dos resultados possíveis de um **experimento aleatório**

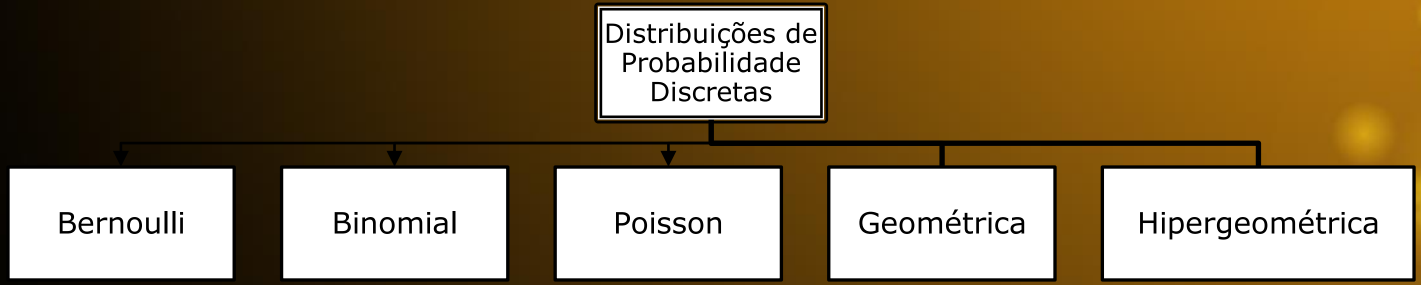
➢ Tipos de Variáveis Aleatórias

Variáves Aleatórias

- **Discretas**
  - Assumem valores de **contagem**
  - ex. Número de filhos nascidos vivos.
- **Contínuas**
  - Assumem valores em um intervalo **contínuo**
  - ex. Altura dos Alunos de uma turma

Distribuições de Probabilidade Discretas?

Descrevem a probabilidade de ocorrência de cada valor de uma variável aleatória **discreta** (Valores **finitos** e **enumeráveis**).



Distribuição de Bernoulli

É um **experimento aleatório** com **dois** resultados possíveis (**F**racasso ou **S**ucesso) e efetuado em uma única realização.

Exemplo: Jogar a moeda uma vez para cima e ver se sai cara ou coroa, uma empresa ter que pagar um determinado imposto ou não, etc..

- Vejamos a tabela a seguir:

X	P(X=x)
0	1-P
1	P

- A variável aleatória X, está assumindo **0** (**F**racasso), com probabilidade **q** ou**1-p** e assu mindo **1** (**S**ucesso), com probabilidade **p**.

- Imaginemos que X=”O aluno acertar uma questão na prova”, sendo que a prova só tem uma questão, contendo certo ou errado, portanto podemos entender que o aluno tem u ma resposta favorável em duas possíveis, 50% de chance de acertar a questão.

- Vamos chamar então de p, a probabilidade de sucesso, o nosso sucesso é ele acertar a questão e de q ou 1-p a probabilidade de fracasso, ou seja, ele errar a questão.

Nesse caso então p=0,5 e q=0,5 também.

Logo concluímos que P(X=x) = $\mathbf{0,5^{x}(0,5)^{1-x}}$, onde x =0,1 e 0≤p≤1

Queremos que ele acerte uma questão em uma.

Então x é o número de sucessos que queremos, logo x=1.

P(X=1) = 0,5 ou 50%

Distribuição de Bernoulli

- Dizemos que x ~ Bernoulli (p) e sua fórmula é dada genericamente por:

$$\boldsymbol{P(X=x)=p^{x}(1-p)^{1-x}}, \text{ onde } x=0,1 \text{ e } 0 \leq p \leq 1$$

$$\boldsymbol{Valor\ Esperado\ /\ Expectância\ /\ Média\ =\ p}$$

$$\boldsymbol{Variância\ =\ pq\ ou\ p(1-p)}$$

Distribuição Binomial

Representa n realizações independentes de experimentos Bernoulli, com a mesma probabilidade de sucesso p.

Ex: Jogar uma moeda, mais de uma vez e ver quantas caras e coroas, ter que pa gar mais de uma vez determinado imposto.

- Vejamos a tabela a seguir:

X	P(X=x)	X	P(X=x)
0	1-p	1	P
1	P	0	1-p

- A variável aleatória X, está assumindo 0 (Fracasso), com probabilidade q ou1-p e assumindo 1 (Sucesso), com probabilidade p, mas agora a **mesma variável** X tem **duas realizações distintas**.

- Imaginemos que X="O aluno acertar uma questão na prova", sendo que a prova só tem duas questões , contendo certo ou errado, portanto podemos entender que o aluno tem uma resposta favorável em duas possíveis, 50% de chance de acertar a questão.

- Vamos chamar então de p, a probabilidade de sucesso, o nosso sucesso é ele acertar a questão e de q ou 1-p a probabilidade de fracasso, ou seja, ele errar a questão.

- Nesse caso então p=0,5 e q=0,5 também

- Note que o aluno tem essas possibilidades para acertar só uma questão, fazendo as duas questões e acertar a primeira questão é independente de acertar a segunda e vice versa:

Acertar (p) | Errar (1-p) → $p^1(1-p)^1$

Errar (1-p) | Acertar (p) → $(1-p)^1 p^1$

- Logo concluímos que ele pode acertar tanto na primeira e errar a segunda, como acertar a segunda e errar a primeira, todas as possibilidades devem ser levadas em consideração, portanto como a ordem não está importando, será a combi nação de n elementos tomados x a x, neste caso, combinação de 2 elementos tomados 1 a 1.

- Ficamos com:

P(X=x)=$\binom{n}{x}\mathbf{0,5}^{x}(\mathbf{0,5})^{n-x}$, onde x =0,1 e 2 e 1≤p≤0

X é o número de sucessos que queremos, logo 1.
n é a quantidade de tentativas possíveis, logo 2, pois são duas questões.

P(X=1)=$\binom{2}{1}\mathbf{0,5}^{1}(\mathbf{0,5})^{(2-1)}$
P(X=1)=0,5 ou 50%

Distribuição Binomial

- Dizemos que x ~ Binomial (n, p) e sua fórmula é dada genericamente por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$, onde x=0,1,2... n e $0 \leq p \leq 1$

$$\text{Valor Esperado / Expectância / Média} = np$$

$$\text{Variância} = npq \text{ ou } np(1-p)$$

- DICA: Note também que a bernoulli é um caso particular de binomial, com n=1, alterando n=1 na fórmula da binomial, chegamos tanto a fórmula da bernoulli, quanto a sua esperança e variância.

Considere um exame de múltipla escolha com 20 questões, 5 alternativas pra cada pergunta. Caso o aluno não estude e "chute" todas as respostas, qual a probabilidade de acertar 30% da prova? E qual seu número esperado de acertos?

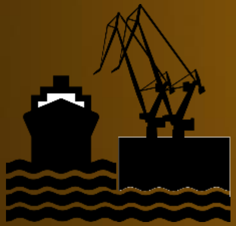
- ✓ n = 20, número de questões (tentativas)
- ✓ X = "O aluno acertar uma questão"
- ✓ $\boldsymbol{p = 1/5 \text{ ou } 20\%}$
- ✓ $\boldsymbol{q = 1 - p = 4/5 \text{ ou } 80\%}$
- ✓ $\boldsymbol{X \sim Binomial(20, 1/5)}$

- ➢ Queremos que ele acerte 30% de 20, que é acertar 6 questões, logo precisamos calcular a proba bilidade de X=6, então substituindo na fórmula:

P(X=6) = $\binom{20}{6} 0,2^6 0,8^{14}$ = 0,109 ou 10,9%.

O valor esperado da Binomial é, E(x)= n.p= 20.0,2= 4 Acertos em média.

Distribuição de Poisson

Distribuição que representa números de ocorrências de um evento em um intervalo correspondente.

Ex: Número de carros passando em uma ponte, número de pessoas chegando em uma fila, número de navios atracando no porto, número de chamadas aten didas por um call center, ... etc.

Distribuição de Poisson

Fórmula da distribuição de Poisson:

- $\boldsymbol{\lambda} =$ taxa média em determinado período de tempo
- $\boldsymbol{X = \text{“}número\ de\ Sucessos\text{”}}$

$$\boldsymbol{P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0, 1 \ldots ; \ \lambda > 0.}$$

$$\boldsymbol{X \sim Poisson(\lambda)}$$

$$\boldsymbol{Valor\ esperado = E(X) = \lambda}$$

$$\boldsymbol{Variância = V(X) = \lambda}$$

O número de acidentes que acontecem na ponte Rio Niterói segue uma distribuição de Poisson com média 3 por hora.

a) Calcule a probabilidade de 2 acidentes em uma hora.

$$P(X = 2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = 4,5e^{-3} = 0{,}22404 \text{ ou } 22{,}404\%$$

b) Calcule a probabilidade de pelo menos 2 acidentes em 2 horas.
Como queremos para duas horas e nosso lâmbida é 3 por hora, vamos fazer a regra de 3 pra achar nosso lâmbida.

3 – 1hora
x – 2horas x= 6, portanto nosso novo lâmbida é 6.

Pelo menos 2, são 2 ou mais, então:

$$P(x \geq 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = 1 - \left(e^{-6}(1 + 6)\right) = 1 - 7e^{-6} = 0,9826 \; ou \;\; 98,26\%.$$

Distribuição Geométrica (Primeira parametrização)

Considere, como na definição da Binomial, realizações independentes de experimentos de Bernoulli, todos com mesma probabilidade de sucesso p. A distribuição da v.a. que representa o número de realizações necessárias **até que ocorra o primeiro sucesso** chama-se **geométrica**, com parâmetro p.

Ex: Número de tiros no alvo, até a ocorrência do primeiro tiro certeiro, número de espeções até a primeira ocorrência de uma peça defeituosa, número de tentativas de um atleta, até chegar no primeiro podium.

Distribuição Geométrica (Primeira parametrização)

Fórmula da distribuição Geométrica:

- $\boldsymbol{\lambda}$ = taxa média em determinado período de tempo
- $\boldsymbol{X = \text{“número de Sucessos”}}$

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}, x = 1, 2 \ldots n\,; 0 \leq p \leq 1.$$

$$X \sim Geom(p)$$

$$Valor\ esperado = E(X) = 1/p$$

$$Variância = V(X) = q/p^2$$

Distribuição Geométrica (Primeira parametrização)

A probabilidade de um indivíduo acertar um alvo é 2/3. Se ele deve atirar até que acerte o alvo pela primeira vez, qual a probabilidade de que seja m necessários exatamente 5 tiros?

X ~ Geom(2/3).

$$\boldsymbol{P(X = x) = (1 - p)^{x-1}}$$

$$\boldsymbol{P(X = 5)} = (1 - 2/3)^{\boldsymbol{5-1}} = 0{,}0082$$

Distribuição Geométrica (Segunda parametrização)

Uma parametrização alternativa para a distribuição geométrica é tal que X representa o número de fracasso **antes do** (e não até o) primeiro sucesso.

$$P(X = x) = (1 - p)^{x}p, x = 0, 1, 2 \ldots n \,; 0 \leq p \leq 1$$

$$X \sim Geom(p)$$

$$Valor\ esperado = E(X) = q/p$$

$$Variância = V(X) = q/p^2$$

Distribuição Geométrica (Segunda parametrização)

Fórmula da distribuição Geométrica:

- $\lambda =$ taxa média em determinado período de tempo
- $X =$ "*número de Sucessos*"

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}, x = 1, 2 \ldots n\ ; 0 \leq p \leq 1.$$

$$X \sim Geom(p)$$

$$Valor\ esperado = E(X) = 1/p$$

$$Variância = V(X) = q/p^2$$

Distribuição Geométrica (Segunda parametrização)

A probabilidade de um indivíduo acertar um alvo é 2/3. Se ele deve atirar até que acerte o alvo pela primeira vez, qual a probabilidade de que sejam necessários exatamente 5 tiros?

X ~ Geom(2/3).

$$\boldsymbol{P(X = x) = (1 - p)^{x-1}}$$

$$\boldsymbol{P(X = 4)} = (1 - 2/3)^{\boldsymbol{4-1}} .\ 2/3 = 0{,}0082$$

Distribuição Hipergeométrica

Distribuição utilizada quando a amostragem é sem reposição, fazendo com que as extrações sejam de pendentes umas das outras e com que a probabilidade de sucesso não seja constante . Esse é o ponto que a diferencia da binomial.

Fórmula da Hipergeométrica:

$$P(X=x)= \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$X \sim Hiper(N,r,n)$$

$\binom{N}{n}$ ="Número total de amostras de tamanho n que podemos obter da população"

$\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}$ =" Número de formas de extrair x sucessos dentre os r possíveis e (n - x) fracassos dentre os (N – r) possíveis.

$$\text{Valor esperado}=E(X)=n\frac{r}{N}$$

$$\text{Variância}=V(X)=n\left(\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r}{N}\right)\frac{(N-n)}{(N-1)}$$

Em uma eleição, suponha que 300 dos 1000 habitantes de um município são e leitores de um candidato A. Toma-se uma amostra de 10 eleitores.

Qual a probabilidade de que exatamente 5 deles pretendam votar no candidato A?

$$X \sim Hiper(N, r, n)$$
$$X \sim Hiper(1000, 300, 10)$$

$$P(X=x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \therefore$$

$$P(X=5) = \frac{\binom{300}{5}\binom{1000-300}{10-5}}{\binom{1000}{10}} = 0{,}1026445$$

Aproximação da Hipergeométrica pela Binomial

Se N é muito maior do que n (N≥20n), a distribuição hipergeométrica pode ser aproximada pela distribuição binomial (cujas probabilidades são mais simples de calcular), com parâmetros n e p = r/N.

X~Binomial(n,p=r/N)

X~Binomal(10,p=300/1000)

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

P(X=5)=$\binom{10}{5} 0,3^{10} (0,7)^{10-5}$=0,1029193

Aproximação da binomial pela Poisson

Se n for grande e p for pequeno, o número de sucessos em n realizações independentes de experimentos de Bernoulli pode ser aproximado pela distribuição de Poisson, com λ = np.

Uma companhia de seguros de automóveis descobriu que somente cerca de 0,005% da população está incluída em um certo tipo de sinistro cada ano. Se seus 20.000 segurados são escolhidos ao acaso na população, qual é a distribuição aproximada do número de clientes que serão enquadrados nesta categoria de sinistro no próximo ano?

Poisson com λ = 20.000*0,00005 = 1.