# Proposta de solução do Problema de Dominação de Rainhas Utilizando ILS e comparação com uma solução baseada em Algoritmo Genético

# *Proposed solution to the Minimum Dominating Set of Queens Problem using ILS and comparation with a Genetic Algorithm based Solution*

Maria Edoarda Vallim Fonseca Thales Athayde Santos

2018, v-1.0.0

## Resumo

Neste artigo, propomos uma solução para o Problema de Dominação de Rainhas usando Busca Iterativa Local e comparamos nossos resultados com uma solução proposta anteriormente que utiliza Algoritmo Genético.

**Palavras-chave**: Problema de Dominação de Rainhas. Busca Iterativa Local. Metaheurística.

## Abstract

In this paper, we propose a solution to the Dominating Set of Queens Problem using Iterative Local Search and compare our results with a previously proposed solution using Genetic Algorithm.

**Keywords**: Dominating Queen Problem. ILS. Metaheuristic.

**Data de submissão**: 10 de Dezembro de 2018

**Identificação e disponibilidade**: medoarda@id.uff.br thalesathaydesantos@id.uff.br

# 1 Introdução

O problema de dominação de rainhas é muito bem conhecido dentre os problemas de xadrez. Nele, dado um tabuleiro $n \times n$, temos $n$ quadrados dispostos nas linhas e $n$ quadrados nas colunas. Quando uma rainha Q é disposta no tabuleiro, ela domina a linha, a coluna, e as diagonais que passam pela sua posição. [Vide Figura 1] O objetivo do problema é descobrir a disposição da menor quantidade de rainhas possível de forma à dominar todo o tabuleiro.

Algoritmos evolucionários provaram ter sucesso para resolver e otimizar uma grande variedade de problemas complexos, incluindo problemas combinatórios, como o estudado aqui, em um tempo computacional razoavelmente aceitável. (DOERR et al., 2011)

*Local Search*, ou Busca Local, é um método heurístico para resolver problemas computacionalmente difíceis. Busca local pode ser usada em problemas que possam ser formulados como achar a solução maximizando um critério entre várias soluções possíveis. Algoritmos de busca local movem de solução à solução no espaço de soluções possíveis aplicando mudanças locais, até uma solução dita ótima ser encontrada. (HOOS; STÜTZLE, 2004)

Um dos problemas da Busca Local é que ela pode ficar presa em um mínimo local, sem conseguir melhorar seu resultado. Para contornar esse problema, utiliza-se *Iterative Local Search*, ou Busca Local Iterativa. Essa modificação consiste em iterar sobre chamadas da busca local, cada vez começando de um ponto diferente do conjunto de solução perturbando o mínimo local atual de modo que faça a solução chegar em outro ótimo local. Esta perturbação não pode ser muito forte nem muito fraca, pois corre o risco dela acabar encontrando o mesmo mínimo local ou servir como uma inicialização aleatória. (LOURENÇO; MARTIN; STÜTZLE, 2010)

Neste trabalho, propomos uma solução baseada em *Iterative Local Search* para o Problema de Dominação de Rainhas. Nossos resultados serão comparados com o método descrito em (ALHARBI; VENKAT, 2017), que utiliza Algoritmo Genético e é o mais comumente encontrado para solucionar este problema. Depois disso, iremos debater os resultados alcançados.

# 2 Motivação

Decidimos escolher o *Dominating Set of Queens Problem* por ter sido um dos temas abordados por um dos membros do grupo durante as apresentações de trabalho da disciplina, o que nos deu um certo grau de familiaridade com o assunto. Pesquisando mais à fundo, vimos que as soluções mais comuns para a solução do Problema de Dominação de Rainhas eram com *Backtracking* e Algoritmo Genético. Além disso, de acordo com (ALHARBI; VENKAT, 2017), existem muitos artigos procurando os limites superior e inferior do problema, mas não existe muito esforço de pesquisa na busca de soluções práticas para o problema.

Visto essa situação, decidimos propor uma solução baseada em *Iterative Local Search* para o problema e comparar os resultados com uma solução em Algoritmo Genético.

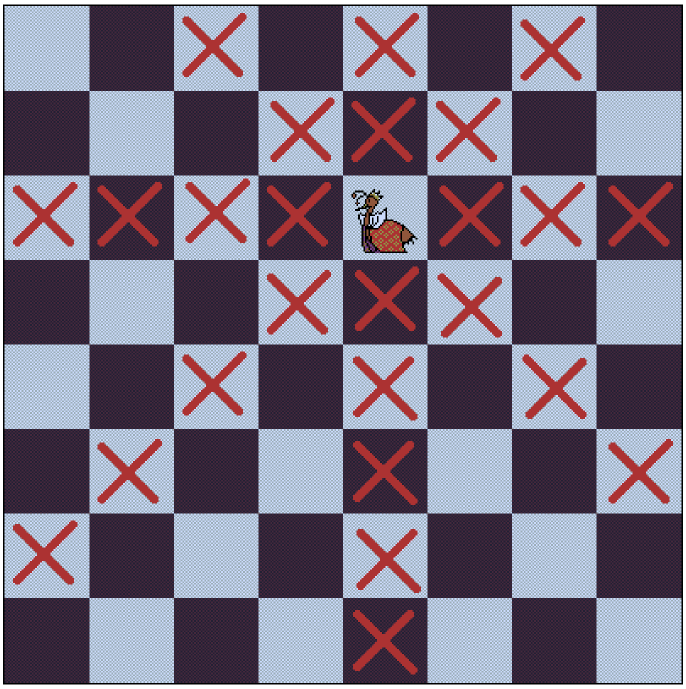


Figura 1 – Exemplo da linha de dominação de uma rainha em um tabuleiro de xadrez $8 \times 8$

Figura 2 – Exemplo de um tabuleiro de tamanho $8 \times 8$ sendo completamente dominado por quatro rainhas

## 3 Trabalhos Relacionados

Um problema semelhante, proposto em 1850, conhecido como problema das $n$-rainhas teve muitos esforços focados nele para sua solução. O problema das $n$-rainhas é descrito como: dado um tabuleiro $n \times n$, qual seria a disposição das rainhas de modo que nenhuma rainha consiga atacar a outra. Houve muita pesquisa em torno deste problema, e suas soluções utilizam desde teoria matemática até teoria dos grafos. O estudo desse tipo de problema pode beneficiar várias áreas como controle de tráfego, prevenção de *deadlocks* e armazenamento de memória paralela. (BELL; STEVENS, 2009)

Muitas soluções para o problema das $n$ rainhas foram propostas, dentre elas *backtracking*, redes neurais e algoritmos evolucionários.

Em contrapartida, o problema de dominação de rainhas não recebeu tanta atenção dentre os pesquisadores das ciências da computação. Na realidade, várias pesquisas se preocuparam em pesquisar o problema porém só adotaram modelos matemáticos. (ALHARBI; VENKAT, 2017) Burger e Mynhart apontaram que o problema de dominação das rainhas é um dos mais difíceis problemas de xadrez. (BURGER; MYNHARDT, 2002) Esse problema é comumente definido como achar o menor número possível de rainhas em um tabuleiro $n \times n$ que consigam a dominação total do tabuleiro. Esse número é conhecido como número de dominação e sua notação é $\gamma(\mathbf{Qn})$. Muitos pesquisadores focaram em descobrir os limites superior e inferior do problema desde a década de 70, e o número mínimo possível de rainhas para solucionar o problema ($\gamma(\mathbf{Qn})$) foi calculado para diversos tamanhos de tabuleiro [vide Tabela 1] (COCKAYNE, 1990; BURGER; MYNHARDT, 2002; WEAKLEY, 2002; GIBBONS; WEBB, 1997).

Tabela 1 – Número mínimo de rainhas para dominação total $\gamma(\mathbf{Qn})$ de um tabuleiro de tamanho $n$.

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma(\mathbf{Qn})$ | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | $\leq$8 | $\leq$9 | $\leq$9 | 9 | 9 |

## 4 Formulação do Problema

Para este problema ser usado num computador tivemos que fazer as seguintes coisas.

Cada casa do tabuleiro é representada por uma tupla $(x, y)$ onde $x$ representa o eixo $x$ e $y$ representa o eixo $y$. $x$ e $y$ podem ser um número de 0 até $n$ - 1, onde o tamanho total do tabuleiro é representado por $n \times n$. Com isso cada rainha é representada por uma tupla $(x, y)$ que é sua posição no tabuleiro.

Para representar um indivíduo usaremos um conjunto $Q$ de rainhas de modo que $Q = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\}$, onde a tupla $(x_1, y_1)$ representa a rainha de índice 1.

Cada rainha por sua vez possui um conjunto $D$ que representa todas as posições de dominação daquela rainha, onde $D_i = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\}$ tal que $D_i$ representa a rainha de $i$-ésima posição no indivíduo.

Além disso, $D_{total}$ é representado por:

$$D_{total} = \sum_{i=1}^{r} \bigcup D_i \tag{1}$$

### 4.1 Cálculo da Dominação

Para calcular a dominação de uma rainha nós chegamos nas seguintes equações:

$$\sum_{i=0}^{n} \bigcup (x, i) \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \bigcup (i, y) \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{min(x,y)+1} \bigcup (x - i, y - i) \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{min(x,n-y-1)+1} \bigcup (x - i, y + i) \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{min(n-x-1,y)+1} \bigcup (x + i, y - i) \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{min(n-x,n-y)} \bigcup (x + i, y + i) \tag{7}$$

As equações (2) e (3) representam a horizontal e vertical, respectivamente, (4) e (5) representam respectivamente as diagonais superiores esquerda e direita e (6) e (7) as diagonais inferiores esquerda e direita.

O $D$ de uma rainha é a união de todas essas equações para ela.

## 5 Metodologia

A nossa metodologia foi utilizar um *ILS* básico. Ele gera um início randômico, passa ele para o *Local Search* e salva o indivíduo se o $fitness$ dele for o melhor. Em seguida, pega-se esse ultimo indivíduo gerado pelo *Local Search* e o modifica usando nossa função de perturbação para em seguida enviar esse novo indivíduo para o *Local Search* fazendo um *loop*. Este exemplo pode ser visto no Pseudocódigo 1.

### 5.1 *Fitness*

Nosso $fitness$ é baseado no $fitness$ do *paper* que propoe a solução do problema de Dominação de Rainhas por Algoritmo Genético (ALHARBI; VENKAT, 2017).

Dado o conjunto $D_{total}$ que representa a dominação das rainhas e $n$ representa a quantidade de casas em uma coordenada do tabuleiro temos que:

$$fitness = \frac{|D_{total}|}{n^2} \tag{8}$$

Com isso, temos as seguintes propriedades:

- Quanto maior o $fitness$, melhor o indivíduo;
- Se o $fitness$ for igual à 1, aquela solução é ótima.

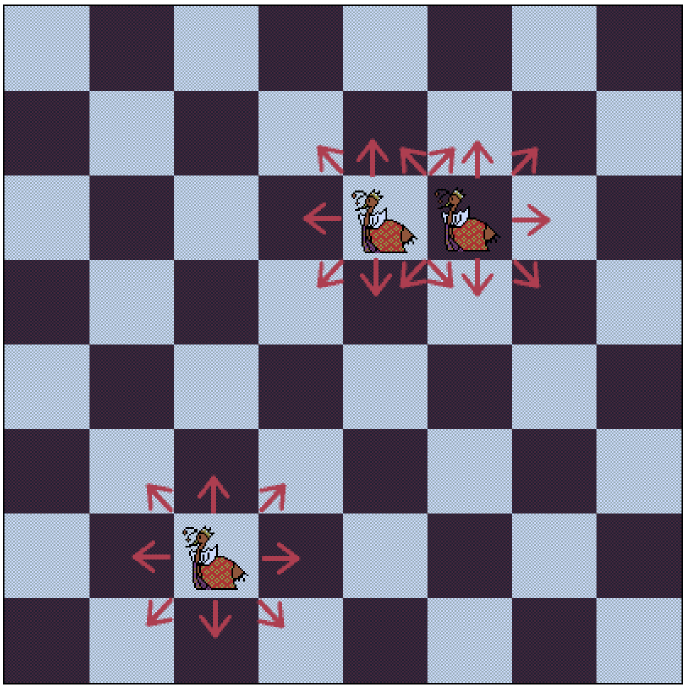


Figura 3 – Exemplo de possiveis movimentações de três rainhas no *Local Search* e da perturbação

## 5.2 Início Randômico

O *Iterative Local Search* começa gerando um inicio randômico, onde são posicionadas $r$ rainhas no tabuleiro onde $r$ é um argumento inicial do programa. Porém existem duas restrições que a rainha deve cumprir para ser considerada válida, que são:

- Duas rainhas não podem ocupar o mesmo quadrado;
- Cada rainha deve estar dentro dos limites do tabuleiro.

## 5.3 *Local Search*

O *Local Search* calcula a movimentação de cada rainha para cada direção com 1 de distância (direita, esquerda, cima, baixo e diagonais) [Vide Figura 3] Essa movimentação deve atender as mesmas restrições do início randômico. O motivo desta implementação é o fato de cada possível movimentação virar uma matriz, e não um vetor, contendo todas as posições a um de distância de cada rainha no tabuleiro. Embora usar um *Local Search* com distâncias maiores gere resultados melhores, isso teria a consequência negativa de aumentar exponencialmente o tempo computacional da execução do algoritmo.

## 5.4 Perturbação

Para fazer a perturbação realizamos um número $p$ de pertubações, onde $p$ é um argumento inicial do programa. Para cada pertubação, escolhe-se uma rainha e realiza-se uma movimentação randômica de uma casa, caindo nas restrições citadas no início randômico.

**Algorithm 1:** Pseudocódigo do algoritmo de ILS utilizado

```
Data: rainhas, best, maxIterações
Result: best - Melhor solução
rainhas ← randomStart(rainhas);
rainhas ← LocalSearch(rainhas);
best ← rainhas;
repeat
    rainhas ← perturbation(rainhas);
    rainhas ← LocalSearch(rainhas);
    if fitness(rainhas) > fitness(best) then
        best ← rainhas;
    end
until maxIterações OU fitness(best) = 1;
```

**Algorithm 2:** Pseudocódigo do Algoritmo Genético utilizado

```
Data: population, best
Result: best - Melhor fitness na população
population ← randomStart();
populationFitness ← fitness(population);
repeat
    population ← algoritmoGenetico(population);
    populationFitness ← fitness(population);
until maxIterações OU ∃populationFitness = 1;
best ← bestIn(population, populationFitness);
```

## 6 Resultados

Nossos testes foram rodados em uma máquina Intel Core i5-7400 com 8GB de RAM, usando o sistema operacional Windows 10 64-bit. A linguagem de programação utilizada foi Python 3.7.0 32-bit.

Para cada valor nas tabelas 2, 3 e 4, foram rodadas 1000 iterações.

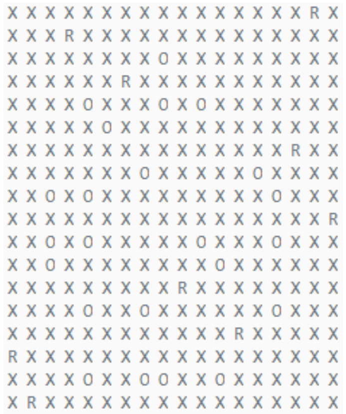
O Algoritmo Genético foi testado com uma população de 100 indivíduos, uma chance de mutação de 5%, e, dado que a mutação ocorre, ela muda 2 bits do código genético do indivíduo.

Em nossos testes os valores de pertubação do *Iterative Local Search* que mais geraram bons resultados foi entre 5 e 10 pertubações. Aqui decidimos mostrar em nossos resultados tanto 5 quanto 10 pertubações para estudar se havia um ganho significativo de desempenho com esses dois valores.

As figuras 4, 5 e 6 são exemplos das soluções que os programas encontraram em uma configuração de tabuleiro $18 \times 18$ com 9 rainhas.

Para um valor de tabuleiro relativamente pequeno, $14 \times 14$, e 7 rainhas a média dos resultados entre $ILS$ com 10 pertubações e o Algoritmo Genético ficou igual, porém, no $ILS$ de 5 perturbações tivemos um $fitness$ igual e uma melhora de 15% do tempo de execução em relação aos outros métodos.

Quando a complexidade do problema começou a aumentar, o Algoritmo Genético



```
X X X X X X X X X X X X X X X X R X
X X X R X X X X X X X X X X X X X X
X X X X X X X X O X X X X X X X X X
X X X X X X R X X X X X X X X X X X
X X X X O X X X O X O X X X X X X X
X X X X X O X X X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X X X X X X R X X
X X X X X X X O X X X X X O X X X X
X X O X O X X X X X X X X X O X X X
X X X X X X X X X X X X X X X X X R
X X O X O X X X X X O X X X O X X X
X X O X X X X X X X X O X X X X X X
X X X X X X X X X R X X X X X X X X
X X X X O X X O X X X X X X O X X X
X X X X X X X X X X X X R X X X X X
R X X X X X X X X X X X X X X X X X
X X X X O X X O O X X O X X X X X X
X R X X X X X X X X X X X X X X X X
```

Figura 4 – Output do programa: Solução proposta pelo Algoritmo Genético

começou a ter o tempo de execução cada vez mais lento. Com 8 rainhas, os testes foram repetidos pelos pesquisadores por acreditar que era um erro, mas o tempo de execução se manteu no mesmo vão.

O Algoritmo Genético novamente apresenta um desempenho igual em questão de $fitness$, mas foi quase quatro vezes mais lento para achar uma solução do que o algortimo baseado em $ILS$.

Quando o tabuleiro ficou ainda maior, $18 \times 18$, com 9 rainhas, o ILS se comportou bem, aproximadamente dobrando seu tempo de execução em relação ao resultado anterior e a solução de algoritmo genético mais que dobrou seu tempo de processamento.

Com isso, parece que a solução do problema de dominação de rainhas é muito mais eficiente usando *Iterative Local Search* do que utilizando a solução proposta anterior utilizando Algoritmo Genético.

Tabela 2 – Resultados conseguidos em um tabuleiro $14 \times 14$ com 7 rainhas.

| | Melhor $fitness$ (%) | Tempo de execução (s) |
|---|---|---|
| Algoritmo Genético | 91.3265306122448 | 23.75254201889038 |
| ILS (perturbação 5) | 91.8367346938775 | 20.71260714530945 |
| ILS (pertubação 10) | 91.3265306122448 | 23.75254201889038 |

Tabela 3 – Resultados conseguidos em um tabuleiro $14 \times 14$ com 8 rainhas.

| | Melhor $fitness$ (%) | Tempo de execução (s) |
|---|---|---|
| Algoritmo Genético | 95.4081632653061 | 115.54515361785889 |
| ILS (perturbação 5) | 95.9183673469387 | 30.753767013549805 |
| ILS (pertubação 10) | 95.4081632653061 | 29.001476049423218 |

Tabela 4 – Resultados conseguidos em um tabuleiro $18 \times 18$ com 9 rainhas.

| | Melhor $fitness$ (%) | Tempo de execução (s) |
|---|---|---|
| Algoritmo Genético | 92.9012345679012 | 251.10087895393372 |
| ILS (perturbação 5) | 90.7407407407407 | 59.24564051628113 |
| ILS (pertubação 10) | 90.4320987654321 | 67.17142534255981 |

```
O X X X X X X X X X O O X X X X O X
O X X X X O X O X X O X X X X O X O
O X O X X X X X X X X X X X X X O O
X X X X X X R X X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X R X X X X X X X X
X X X X X X X X X X X X R X X X X X
X X X X X O X X X X O X X X X O O O
X X X X X X X X R X X X X X X X X X
O X X O X X X X X X X X X X X X X O
X X O X X X X O X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X X X X X X X X X
X R X X X X X X X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X X X X X R X X X
X X X X X O X X X X O X X X X X X X
O X X X X O X O X X X O X X X X X X
X X X X X X X X X R X X X X X X X X
X X X X R X X X X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X X X X R X X X X
```

Figura 5 – Output do programa: Solução proposta pelo algoritmo *Iterative Local Search* com 5 pertubações

```
X O X X X O X O X O X X X X X X X O
O X X O X X X X X X O X X X X X X X
X X X X X X X X X X X X X R X X X X
O X X X O O X X X X X X X X X X X O
O O X O X O X X X X X X X X X X X O
X X X X X X X X R X X X X X X X X X
X X X O X O X X X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X X R X X X X X X
X X R X X X X X X X X X X X X X X X
O X X X X O X X X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X X X X X X X R X
O O X O X X X X X X O X X X X X X X
O X X X O X X X X O X X X X X X X X
X X X X X X R X X X X X X X X X X X
O X X O X X X X X X O X X X X X X X
X X X X X X X X X X X X X X X R X X
X X X X X X X X X X X X X X R X X X
X X X X X X X X X X X X R X X X X X
```

Figura 6 – Output do programa: Solução proposta pelo algoritmo *Iterative Local Search* com 10 pertubações

## 7 Conclusão

Nesse trabalho, propomos uma solução ao problema de Dominação de Rainhas utilizando *Iterative Local Search* e o comparamos com uma solução baseada em uma apresentada anteriormente em (ALHARBI; VENKAT, 2017), que utiliza Algoritmo Genético.

Chegamos a conclusão que a solução em $ILS$ se torna cada vez melhor à medida que o tabuleiro aumenta, sendo muito mais rápida e sem perdas significativas de $fitness$, o que a torna melhor para buscas de solução em tabuleiros particularmente grandes.

Para próximos trabalhos, poderiamos variar os parâmetros do Algoritmo Genético, procurar formas de paralelizar o problema e testar com números ainda maiores de tabuleiro, para ter certeza que a melhora do *Iterative Local Search* em relação ao Algoritmo Genético não tenha um comportamento senoidal.

# Referências


ALHARBI, S.; VENKAT, I. A genetic algorithm based approach for solving the minimum dominating set of queens problem. *Journal of Optimization*, Hindawi, v. 2017, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 2, 4, 5 e 9.

BELL, J.; STEVENS, B. A survey of known results and research areas for n-queens. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 309, n. 1, p. 1–31, 2009. Citado na página 4.

BURGER, A. P.; MYNHARDT, C. M. An upper bound for the minimum number of queens covering the n× n chessboard. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 121, n. 1-3, p. 51–60, 2002. Citado na página 4.

COCKAYNE, E. J. Chessboard domination problems. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 86, n. 1-3, p. 13–20, 1990. Citado na página 4.

DOERR, B. et al. Evolutionary algorithms and dynamic programming. *Theoretical computer science*, Elsevier, v. 412, n. 43, p. 6020–6035, 2011. Citado na página 2.

GIBBONS, P. B.; WEBB, J. Some new results for the queens domination problem. *Australasian Journal of Combinatorics*, CENTRE FOR COMBINATORICS, v. 15, p. 145–160, 1997. Citado na página 4.

HOOS, H. H.; STÜTZLE, T. *Stochastic local search: Foundations and applications*. [S.l.]: Elsevier, 2004. Citado na página 2.

LOURENÇO, H. R.; MARTIN, O. C.; STÜTZLE, T. Iterated local search: Framework and applications. In: *Handbook of metaheuristics*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 363–397. Citado na página 2.

WEAKLEY, W. D. Upper bounds for domination numbers of the queen's graph. *Discrete mathematics*, North-Holland, v. 242, n. 1-3, p. 229–243, 2002. Citado na página 4.