Topologia de Espaços Métricos

Vocabulário

Def.: $M \neq \emptyset$ com uma distância d. Seja r um raio e $\bar{x} \in M$ um centro,

- a bola aberta é $B_r(\bar{x}) = \{x \in M | d(x, \bar{x}) < r\}$;
- a bola fechada é $B_r[\bar{x}] = \{x \in M | d(x, \bar{x}) \leq r\}$;
- a esfera é $S_r(\bar{x}) = \{x \in M | d(x, \bar{x}) = r\}$.

Def.: (M, d) espaço métrico. $A \subset M$ é limitado se $\exists r > 0$ e $\bar{x} \in M$ tq. $B_r(\bar{x}) \supset A$.

Def.: $M \neq \emptyset$ com uma distância d, $A \subset M$.

(i) $\bar{x} \in M$ é um ponto interior de A se existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset A$.

(ii) $\bar{x} \in M$ é ponto de fronteira de A se para todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$ e $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A^C \neq \emptyset$.

(iii) $\bar{x} \in M$ é ponto exterior de A se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset A^C$, i.e. $\bar{x}$ é ponto interior de A^C.

Notações:

$\mathring{A}$ = conjunto dos pontos interiores de A

$Fr(A)$ = conjunto dos pontos de fronteira de A

$Ext(A) = \mathring{A^C}$ = conjunto dos pontos exteriores de A

Fato: (M, d) é espaço métrico, se $A \subset M \Rightarrow M = \mathring{A} \cup Fr(A) \cup Ext(A)$.

Exemplos: $M = \mathbb{R}^2$

(a) com d_2, $\breve{A}$ é o conjunto do que está “dentro”, $Fr(A)$ é o conjunto da “borda” e $Ext(A)$ é o conjunto do que está “fora” usualmente.

(b) com $d_*(x, \bar{x})$, caracterizado por $d_*(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ e $d_*(x', \bar{x}) = 1$ se $x' \neq \bar{x}$. Seja A é o conjunto de pontos a uma distância r QUALQUER da origem, $\mathring{A} = A$, $Fr(A) = \emptyset$ e $Ext(A) = A^C$.

Def.: (M, d) espaço métrico com $A \subset M$,

(i) $\bar{x} \in M$ é um ponto de acumulação de A se $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap (A - \{\bar{x}\}) \neq \emptyset$, ou seja, a bola tem um ponto de A diferente de $\bar{x}$.

(ii) $\bar{x} \in M$ é um ponto de aderência de A se $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$. Não necessariamente $\bar{x}$ pertence a A!

(iii) $\bar{x} \in M$ é um ponto isolado de A se $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A = \{\bar{x}\}$.

Notação:

A' = conjunto dos pontos de acumulação de A

$\bar{A}$ = conjunto dos pontos de aderência de A

$Is(A)$ = conjunto dos pontos isolados de A.

Perguntas:

$A \subset \bar{A}$? Sim.

$A \subset A'$? Não. Um contra-exemplo é o conjunto unitário.

$Is(A) \subset A$? Sim.

Def.: (M, d) espaço métrico, $X \subset M$,

(i) Xé dito aberto (em M) se $\forall \bar{x} \in X$, $\exists \varepsilon = \varepsilon(\bar{x}) > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset X$, ie. $X \subset \mathring{X}$.

(ii) X é dito fechado (em M) se X^Cé aberto.

(iii) X é não aberto se $\exists \bar{x} \in X$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ temos $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap X^C \neq \emptyset$.

Def.: (M, d) espaço métrico, $K \subset M$, $K \neq \emptyset$, é dito sequencialmente compacto se qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em Ktem uma subsequência convergente.

Afirmação: $\mathring{A}$ é o maior aberto contido em A. Note que $\mathring{A} \subset \cup_{\bar{x}\in\mathring{A}} B_{\varepsilon_{\bar{x}}} \subset A$, em que a união de abertos $\cup B$ também é aberta.

Afirmações:

$A \subset \bar{A}$

$\bar{A}$ é fechado

$\mathring{A} \subset A$

$\mathring{A}$ é aberto

$\mathring{A}$ é o maior aberto contido em A

$\bar{A}$ é fechado

$\bar{A}$ é o menor fechado que contém A

$A' \subset \bar{A}$

$\bar{A} = A' \cup \mathrm{Is}(A)$ disjunta

A é aberto $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

A é fechado $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

A é fechado $\Leftrightarrow A' \subset A$.

Teorema. $M = \mathbb{R}^2$ com distância d usual (ou outra normalizada). Seja $A \subset M$ limitado e infinito. Então $A' \neq \emptyset$.

Além disso, se A for fechado, então A tem ponto de acumulação e $A' \subset A$.