Exercícios de Teste de Hipóteses:

1) A Oxford Cereals deseja determinar se o processo de abastecimento de cereais está operando adequadamente (ou seja, se a média aritmética da quantidade abastecida ao longo de todo o processo de abastecimento, permanece dentro de 368g especificado, e nenhuma ação corretiva se faz necessária). Para avaliar a exigência com relação aos 368 gramas, você seleciona uma amostra de 25 caixas, pesa cada uma e, depois avalia a diferença entre a estatística da amostra e o parâmetro da população apresentado na hipótese, comparando entre a média aritmética do peso (em gramas) da amostra e a média aritmética esperada de 368g, especificada pela empresa.

a) Descreva a hipótese nula e a hipótese alternativa.

$$H_0: \mu = 368$$
$$H_1: \mu \neq 368$$

b) Suponha que a amostra de 25 caixas de cereais indique uma média aritmética de amostra igual a 372,5 gramas, e o desvio padrão da população seja pressuposto como sendo 15 gramas, e utilizando um nível de significância α = 0,05, verifique se podemos ou não rejeitar a hipótese nula.

Critério de Rejeição: Para um dado valor de α, rejeitamos H_0 se $Z < -Z_c$ ou se $Z > Z_c$. Não rejeitamos H_0 se $-Z_c < Z < Z_c$.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{372{,}5 - 368}{\frac{15}{\sqrt{25}}} \rightarrow Z = 1{,}50$$

Como para α = 0,05 temos $Z_c = 1{,}96$ (bicaudal tabela) temos:

-1,96 < 1,50 < 1,96 ($-Z_c < Z < Z_c$), não existem evidências de que podemos rejeitar a hipótese nula. Assim, a média aritmética não mudou em relação ao valor histórico de 368g e o processo está funcionando corretamente.

2) Você é o gerente de uma lanchonete. Você deseja determinar se a média aritmética da população do tempo de espera de um pedido seja atendido se modificou, no mês anterior, e relação a seu valor anterior de 4,5 minutos para a média aritmética da população. Com base em experiências passadas, você pode pressupor que a população é distribuída nos moldes da distribuição de Gauss, com desvio padrão de 1,2 minutos para a população. Você seleciona uma amostra de 25 pedidos durante um período de uma hora. A média aritmética da amostra é de 5,1 minutos. Determine se existem evidências, ao nível de significância de 0,05, de que a média aritmética do tempo de espera para atendimento de um pedido se modificou, no mês passado, em relação a seu valor anterior de 4,5 minutos para a média aritmética da população.

Critério de Rejeição: Para um dado valor de α, rejeitamos H_0 se $Z < -Z_c$ ou se $Z > Z_c$. Não rejeitamos H_0 se $-Z_c < Z < Z_c$.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Para α = 0,05, o nível de confiança é de 95% (bicaudal ≠).

Pela tabela, $Z_c = 1,96$

Teste de Hipóteses:

$$H_0: \mu = 4,5$$
$$H_1: \mu \neq 4,5$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{5{,}1 - 4{,}5}{\frac{1{,}2}{\sqrt{25}}} \rightarrow Z = 2{,}50$$

Como 2,50 > 1,96 ($Z > Z_c$), rejeitamos H_0. Existem evidências de que o tempo de espera do atendimento mudou.

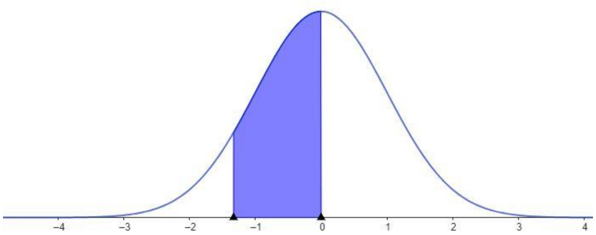
Exercício – Distribuição Normal

A Toby's Trucking Company determinou que a distância viajada por caminhão, a cada ano, é distribuída nos moldes da distribuição normal, com uma média aritmética igual a 50,0 mil milhas e um desvio-padrão igual a 12,0 mil milhas.

a) Que proporção desses caminhões se pode esperar que viaje entre 34,0 e 50,0 mil milhas no ano?

$$Z_1 = \frac{34 - 50}{12} \rightarrow Z_1 = -1{,}33$$

$$Z_2 = \frac{50 - 50}{12} \rightarrow Z_2 = 0$$



Queremos a área lilás.

$$P(Z_1 < Z < Z_2) = P(-1{,}33 < Z < 0) =$$
$$= P(Z < 0) - P(Z < -1{,}33) =$$
$$= 0{,}5 - 0{,}0918\ (tabela) = 0{,}4082$$

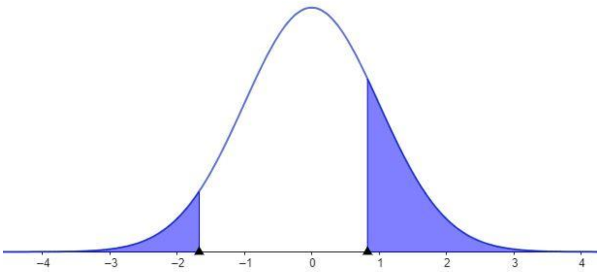
$$P(-1{,}33 < Z < 0) = P(34 < X < 50) = 0{,}4082$$

Espera-se que 40,82% dos caminhões viajem entre 34 e 50 mil milhas.

b) Que percentagem de caminhões pode ser esperada que viaje abaixo de 30,0 ou acima de 60,0 mil milhas no ano?

$$Z_1 = \frac{30 - 50}{12} \rightarrow Z_1 = -1{,}67$$

$$Z_2 = \frac{60 - 50}{12} \rightarrow Z_2 = 0{,}83$$



Queremos calcular a área lilás.

$$P(Z < Z_1 \; ou \; Z > Z_2) = P(Z < -1{,}67 \; ou \; Z > 0{,}83)$$

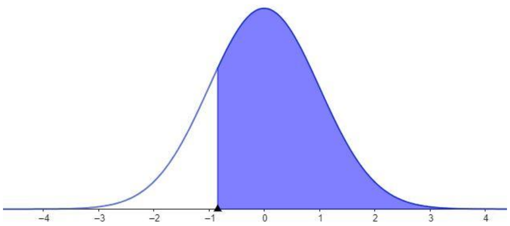
Usando simetria:

$$P(Z < -1{,}67 \; ou \; Z > 0{,}83) = P(Z < -1{,}67) + P(Z > 0{,}83) =$$
$$= 0{,}0475 + P(Z > 0{,}83) = 0{,}0465 + P(Z < -0{,}83) =$$
$$= 0{,}0475 + 0{,}2033 = 0{,}2508$$

$$P(Z < -1{,}67 \; ou \; Z > 0{,}83) = 0{,}2508$$

Portanto, 25,08% dos caminhões viajarão abaixo de 30 mil milhas ou acima de 60 mil milhas.

c) Quantas milhas serão viajadas por pelo menos 80% dos caminhões?



A área Lilás vale 0,80 (80%) mas a tabela não fornece esse valor. A tabela fornece a área branca, que vale 0,20.

$$Z = -0{,}85 \rightarrow P(Z < -0{,}85) = 0{,}1977\ (erro\ de\ 0{,}0023)$$
$$Z = -0{,}84 \rightarrow P(Z < -0{,}84) = 0{,}2005\ (erro\ de\ 0{,}0005)$$

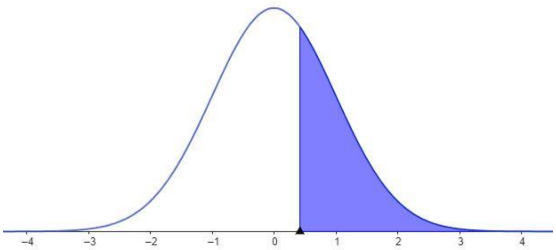
Assim, Z = -0,84

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow X = Z\sigma + \mu = -0{,}84 \times 12 + 50$$
$$X = 39{,}92\ mil\ milhas$$

Espera-se que 80% dos caminhões viajem pelo menos 39,92 mil milhas.

EXTRA 1: Que percentagem de caminhões pode ser esperada que viaje acima de 55,0 mil milhas no ano?

$$Z_1 = \frac{55 - 50}{12} \rightarrow Z_1 = 0{,}42$$

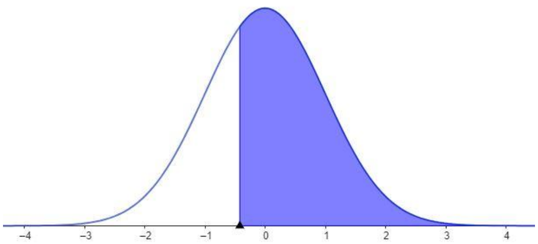


Queremos calcular a área lilás. Por simetria:

$P(Z > Z_1) = P(Z < -Z_1) = P(Z < -0{,}42) = 0{,}3372$

33,72% dos caminhões percorrerão mais de 55 mil milhas.

EXTRA 2: Que percentagem de caminhões pode ser esperada que viaje acima de 45,0 mil milhas no ano?



$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{45 - 50}{12} \rightarrow Z = -0{,}42$$

Usando simetria:

P(X > 45) = P(Z > -0,42) = P(Z < 0,42) = 0,6628

Assim, P(X > 45) = 0,6628

66,28% dos caminhões viajarão pelo menos 45 mil milhas.

d) Quais seriam suas respostas de (a) até (c) (incluir EXTRA 1 e EXTRA 2) se o desvio-padrão fosse igual a 10,0 mil milhas?

As figuras são do mesmo tipo da Parte I (a, b, c, e, EXTRA 1 e EXTRA 2).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

a)

$$Z_1 = \frac{34 - 50}{10} \rightarrow Z_1 = -1{,}60$$

$$Z_2 = \frac{50 - 50}{10} \rightarrow Z_2 = 0$$

Queremos a área lilás.

$$P(Z_1 < Z < Z_2) = P(-1{,}60 < Z < 0) =$$
$$= P(Z < 0) - P(Z < -1{,}60) =$$
$$= 0{,}5 - 0{,}0548\ (tabela) = 0{,}4452$$

$$P(-1{,}33 < Z < 0) = P(34 < X < 50) = 0{,}4452$$

Espera-se que 44,52% dos caminhões viajem entre 34 e 50 mil milhas.

b)

$$Z_1 = \frac{30-50}{10} \rightarrow Z_1 = -2{,}00$$

$$Z_2 = \frac{60-50}{10} \rightarrow Z_2 = 1{,}00$$

Queremos calcular a área lilás.

$$P(Z < Z_1 \; ou \; Z > Z_2) = P(Z < -2{,}00 \; ou \; Z > 1{,}00)$$

Usando simetria:

$$P(Z < -2{,}00 \; ou \; Z > 1{,}00) = P(Z < -2{,}00) + P(Z > 1{,}00) =$$
$$= 0{,}0228 + P(Z > 1{,}00) = 0{,}0228 + P(Z < -1{,}00) =$$
$$= 0{,}0228 + 0{,}1587 = 0{,}1815$$

$$P(Z < -2{,}00 \; ou \; Z > 1{,}00) = 0{,}1815$$

Portanto, 18,15% dos caminhões viajarão abaixo de 30 mil milhas ou acima de 60 mil milhas.

c)

A área Lilás vale 0,80 (80%) mas a tabela não fornece esse valor. A tabela fornece a área branca, que vale 0,20.

$$Z = -0{,}85 \rightarrow P(Z < -0{,}85) = 0{,}1977 \; (erro \; de \; 0{,}0023)$$
$$Z = -0{,}84 \rightarrow P(Z < -0{,}84) = 0{,}2005 \; (erro \; de \; 0{,}0005)$$

Assim, Z = -0,84

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow X = Z\sigma + \mu = -0{,}84 \times 10 + 50$$
$$X = 41{,}60 \; mil \; milhas$$

Espera-se que 80% dos caminhões viajem pelo menos 41,60 mil milhas.

EXTRA 1

$$Z = \frac{55 - 50}{10} \rightarrow Z = 0{,}50$$

Queremos calcular a área lilás. Por simetria:

P(Z > Z) = P (Z < -Z) = P(Z < -0,50) = 0,3085

30,85% dos caminhões percorrerão mais de 55 mil milhas.

EXTRA 2

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{45 - 50}{10} \rightarrow Z = -0{,}50$$

Usando simetria:

P(X > 45) = P(Z > -0,50) = P(Z < 0,50) = 0,6915

Assim, P(X > 45) = 0,6915

69,15% dos caminhões viajarão pelo menos 45 mil milhas.

Exercícios Probabilidade:

1) Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que essa carta seja vermelha ou um ás?

Evento V: Carta vermelha

Evento A: Tirar um Ás

Queremos calcular $P(V \cup A)$.

Usando a Regra Geral da Adição:

$$P(V \cup A) = P(V) + P(A) - P(V \cap A)$$

Como o baralho tem 52 cartas, sendo 26 vermelhas e 26 pretas, a probabilidade de escolher uma carta vermelha será:

$$P(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} = \frac{26}{52} \rightarrow P(V) = \frac{1}{2}$$

Como o baralho tem 52 cartas, sendo 4 ases, a probabilidade de escolher um Ás será:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{52} = \frac{2}{26} \rightarrow P(A) = \frac{1}{13}$$

Como o baralho tem 52 cartas, sendo *2 ases vermelhos*, a probabilidade de escolher um Ás vermelho será:

$$P(V \cap A) = \frac{n(V \cap A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{52} \rightarrow P(A \cap V) = \frac{1}{26}$$

$$P(V \cup A) = P(V) + P(A) - P(V \cap A)$$

$$P(V \cup A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{13} - \frac{1}{26} \rightarrow P(V \cup A) = 0{,}53846$$

A probabilidade de tirar uma carta vermelha ou um ás é de 53,85%

2) Uma prova é constituída de 10 exercícios em forma de testes de múltipla escolha com 5 alternativas em cada teste. Se um aluno "chutar" todas as respostas, qual a probabilidade de ele acertar 6 exercícios?

Evento: Acertar um teste.

Se em um dado teste a resposta for a alternativa (a), as outras 4 alternativas não são sucesso.

P((a)) = 1/5   (sucesso)

Probabilidade de não ser a alternativa (a):

P(não (a)) = 4/5   (insucesso)

Esse raciocínio pode ser feito para as demais alternativas estarem corretas, que constituem eventos mutuamente excludentes e coletivamente exaustivos e podemos resolver o problema usando a distribuição binomial.

p = 1/5   e   1 – p = 4/5

Dados do problema:

Tamanho da amostra: n = 10

Número de sucessos: X = 6

Probabilidade de sucesso: p = 1/5

Probabilidade de insucesso: 1 – p = 4/5

$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} p^X (1-p)^{n-X}$$

$$P(X) = \frac{10!}{6!\,(10-6)!} p^6 (1-p)^{10-6} = 0{,}00550524$$