Lista zadań. Nr 0. 27 lutego 2025

Algorytmy i Struktury Danych

IIUWr. II rok informatyki.

1. (0 pkt) Przeczytaj Notatkę nr 1 Notatkę nr 2, (zostały przesłane mailem do osób zapisanych na przedmiot).
2. (1pkt) Określ z dokładnością do Θ złożoność (przy kryterium jednorodnym) poniższych fragmentów programów:

```
for i ← 1 to n do
    j ← i
    while j < n do
        sum ← P(i, j)
        j ← j + 1
```

```
for i ← 1 to n do
    j ← i
    while j < n do
        sum ← P(i, j)
        j ← j + j
```

   Rozważ dwa przypadki:

   - koszt wykonania procedury $P(i, j)$ wynosi $\Theta(1)$
   - koszt wykonania procedury $P(i, j)$ wynosi $\Theta(j)$

3. (1pkt) Zapisz w pseudokodzie algorytm szybkiego potęgowania liczby x, który oblicza x^n przez wymnożenie odpowiednich potęg dwójkowych liczby x (tj. potęg postaci x^{2^k}). Zadbaj, by Twój algorytm używał stałej liczby komórek pamięci. Oszacuj jego złożoność przy kryterium jednorodnym i przy kryterium logarytmicznym.
4. (1pkt) Napisz w pseudokodzie rekurencyjne funkcje w pseudokodzie, które dla danego drzewa binarnego T obliczają:
   - liczbę wierzchołków w T;
   - maksymalną odległość między wierzchołkami w T.
5. (1pkt) Napisz w pseudokodzie procedury, które dla danego drzewa binarnych przeszukiwań T:
   - wstawiają zadany klucz do T;
   - usuwają wierzchołek z zadanym kluczem z T;
   - dla danego klucza znajdują następny co do wielkości klucz w drzewie.

   Możesz założyć, że wszystkie klucze w T są różne.
6. (2pkt) Pokaż, w jaki sposób algorytm "macierzowy" obliczania n-tej liczby Fibonacciego można uogólnić na inne ciągi, w których kolejne elementy definiowane są liniową kombinacją skończonej liczby elementów wcześniejszych. Następnie uogólnij swoje rozwiązanie na przypadek, w którym n-ty element ciągu definiowany jest jako suma kombinacji liniowej skończonej liczby elementów wcześniejszych oraz wielomianu zmiennej n.
7. (1,5pkt) Ułóż algorytm, który dla drzewa $T = (V, E)$ oraz listy par wierzchołków $\{v_i, u_i\}$ ($i = 1, \ldots, m$), sprawdza, czy v_i leży na ścieżce z u_i do korzenia. Przyjmij, że drzewo zadane jest jako lista $n - 1$ krawędzi (p_i, a_i), takich, że p_i jest ojcem a_i w drzewie.
8. (1pkt) Udowodnij Twierdzenie 1 podane w Notatce nr 2.

9. (**Z** 2pkt)[1] Ułóż algorytm dla następującego problemu:

   PROBLEM.[2]
   dane: $n, m \in \mathcal{N}$
   wynik: wartość współczynnika przy x^2 (wzięta modulo m) wielomianu $\underbrace{(...((x-2)^2-2)^2...-2)^2}_{n \text{ razy}}$

   Czy widzisz zastosowanie metody użytej w szybkim algorytmie obliczania n-tej liczby Fibonacciego do rozwiązania tego problemu?

10. (1pkt) Czy algorytm Dijkstry może być zmodyfikowany tak, by rozwiązywał problem najkrótszych dróg w grafach nieskierowanych, w których wagi przypisane są wierzchołkom a nie krawędziom? Długością drogi w takim grafie jest suma wag wierzchołków, przez które wiedzie.

11. (1,5pkt) Niech G będzie nieskierowanym grafem ważonym, w którym waga dokładnie jednej krawędzi (oznaczmy ją przez (u, v))jest ujemna. Wagi pozostałych krawędzi są dodatnie. Czy algorytm Dijkstry uruchomiony od wierzchołka v poprawnie wylicza długości najkrótszych ścieżek prostych (tj. takich, które nie zawierają powtarzających się wierzchołków) od v do pozostałych wierzchołków?

Krzysztof Loryś

[1] Znaczenie etykietki **Z** zostało przedstawione na pierwszym wykładzie. Wyjaśnienie można znaleźć w dokumencie *Zasady zaliczania ćwiczeń*.

[2] Zadanie zaczerpnięte ze Sparingu w Programowaniu Zespołowym - Poznań 22.01.2005