Análise e Modelagem de Sistemas Dinâmicos - 2023/2

Nome: Thamya Vieira Hashimoto Donadia

Data limite para entrega: 27/11/2023

A entrega deverá ser feita pelo Google ClassRoom

Trabalho 3 - Resposta no Tempo, Estabilidade e Sistemas Discretos

```
I = 17;  % Seu número I
init_t3(I);  % Define as variaveis do modelo 1
datetime('now')
```

```
ans = datetime
   01-Dec-2023 18:35:51
```

Funções úteis do Matlab: tf, tfdata, step, RespConfig, minreal, figure, plot, hold, grid, stairs, title, xlabel, ylabel, legend, sprintf, fprintf, ss, d2c, roots, sort, real, imag, abs, sqrt, poly, length, feedback, initial, tf2ss, cart2pol, eig, vpa, eval.

Análise da Resposta no Tempo Contínuo

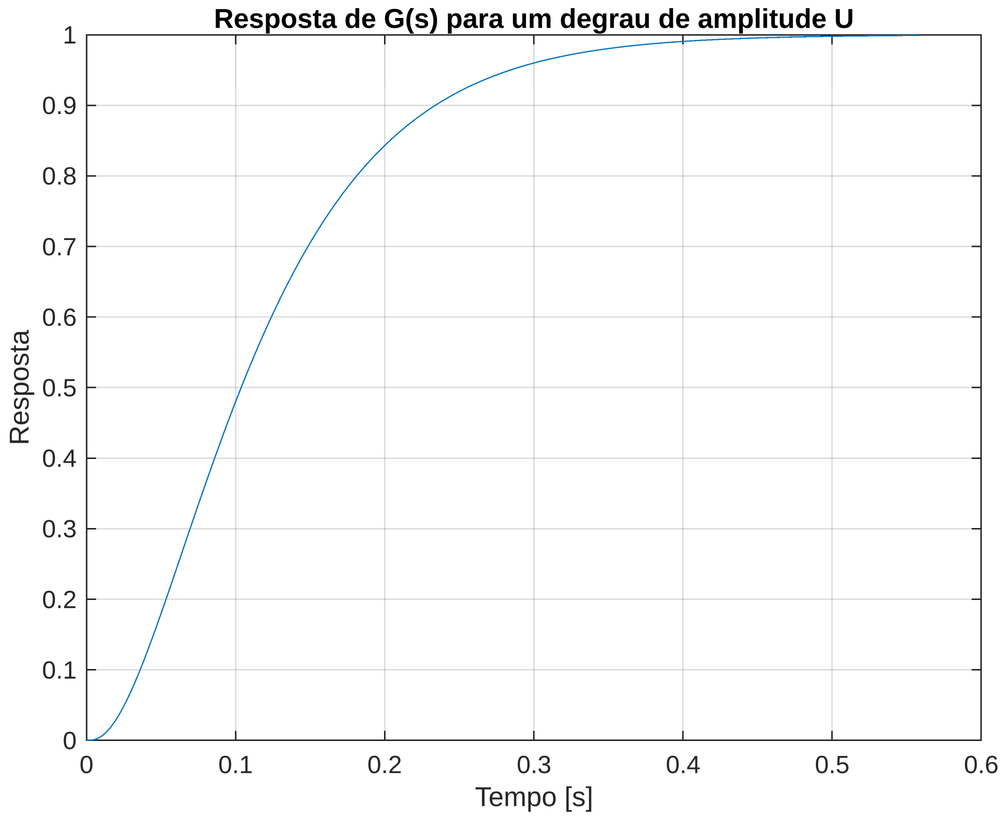
A Função de Transferência baixo foi designada em função do seu valor de I.

```
G
```

```
G =

               4913
  -----------------------------
  s^3 + 238 s^2 + 7225 s + 58956

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

1.1 Plote a resposta ao degrau de $G(s)$ para um degrau de amplitude U.

```
% Configuração para modificar a amplitude do degrau
config = RespConfig('Amplitude', U);

% Plot da resposta ao degrau de amplitude U
[y1, t1] = step(G, config);
figure; plot(t1, y1),

title("Resposta de G(s) para um degrau de amplitude U");
xlabel("Tempo [s]"); ylabel("Resposta"); grid on
```



1.2 Encontre a função $Q(s)$ de 1ª ou de 2ª ordem (conforme o caso), cuja resposta ao degrau se aproxime a resposta ao degrau de $G(s)$.

A partir da resposta de $G(s)$ para um degrau de amplitude U, é possível observar que o formato do gráfico se assemelha à resposta de um sistema de 1° ordem ao degrau unitário. Nesse caso, temos que o sistema $Q(s)$ pode ser representado, de forma geral, como $Q(s) = \dfrac{K}{\tau s + 1}$, em que τ é a constante de tempo do sistema, e K, o ganho estacionário.

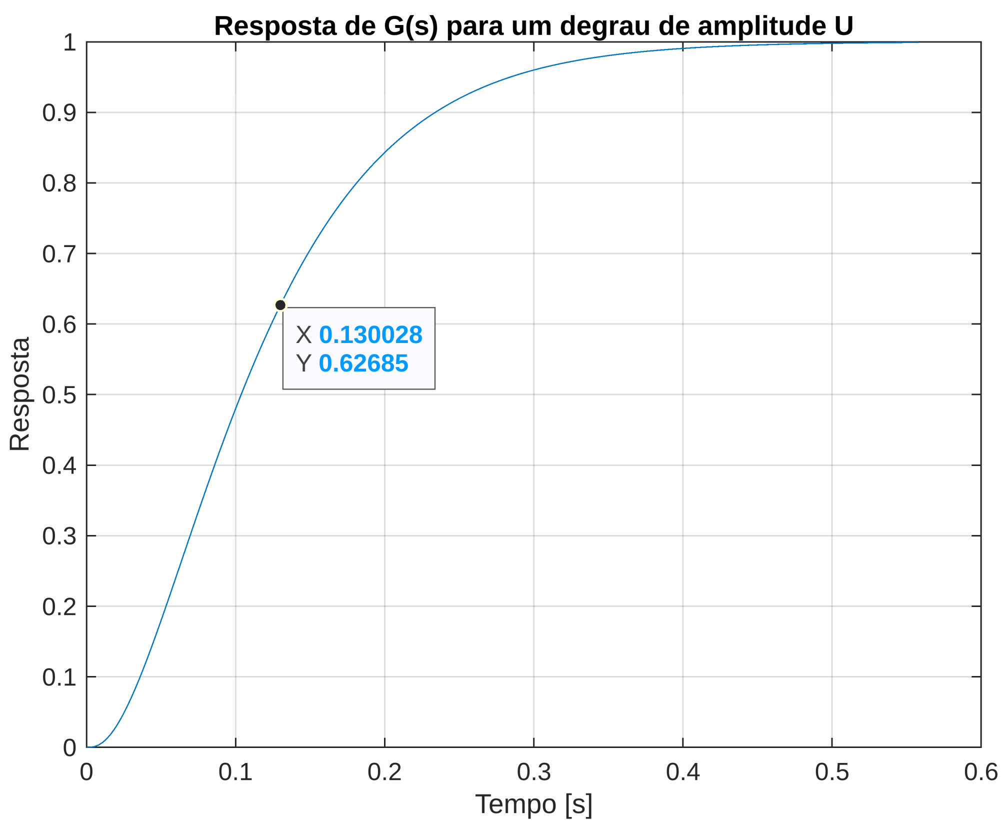
Considere $G(s) = \dfrac{F(s)}{U(s)} \Rightarrow F(s) = G(s)U(s)$ e $u(t) = 12 \Rightarrow U(s) = \dfrac{12}{s}$. Assim, aplicando o Teorema do Valor Final, temos:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s) = K \Rightarrow K = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{4913}{s^3 + 238\,s^2 + 7225\,s + 58956}\right)\left(\frac{12}{s}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \lim_{s\to 0}\left(\frac{58956}{s^3 + 238\,s^2 + 7225\,s + 58956}\right) = \frac{58956}{58956} = 1$$

Para determinar a constante de tempo, temos que $f(\tau) = 0,63K$.

```
% Plot novo da resposta ao degrau, marcando o ponto da constante de tempo
figure; grafico_1 = plot(t1, y1);

title("Resposta de G(s) para um degrau de amplitude U");
xlabel("Tempo [s]"); ylabel("Resposta"); grid on

% Valor de y1, tal que t1 = constante de tempo
valor_y1 = 0.63; % Tomando k = 1

% Para encontrar o índice do valor mais próximo em y1
indice = find(abs(y1-valor_y1) == min(abs(y1 - valor_y1)));

% Para obter o valor correspondente em t1
valor_t1 = t1(indice);

% Marcando o ponto desejado no gráfico
datatip(grafico_1, valor_t1, valor_y1, "Location", "southeast");
```

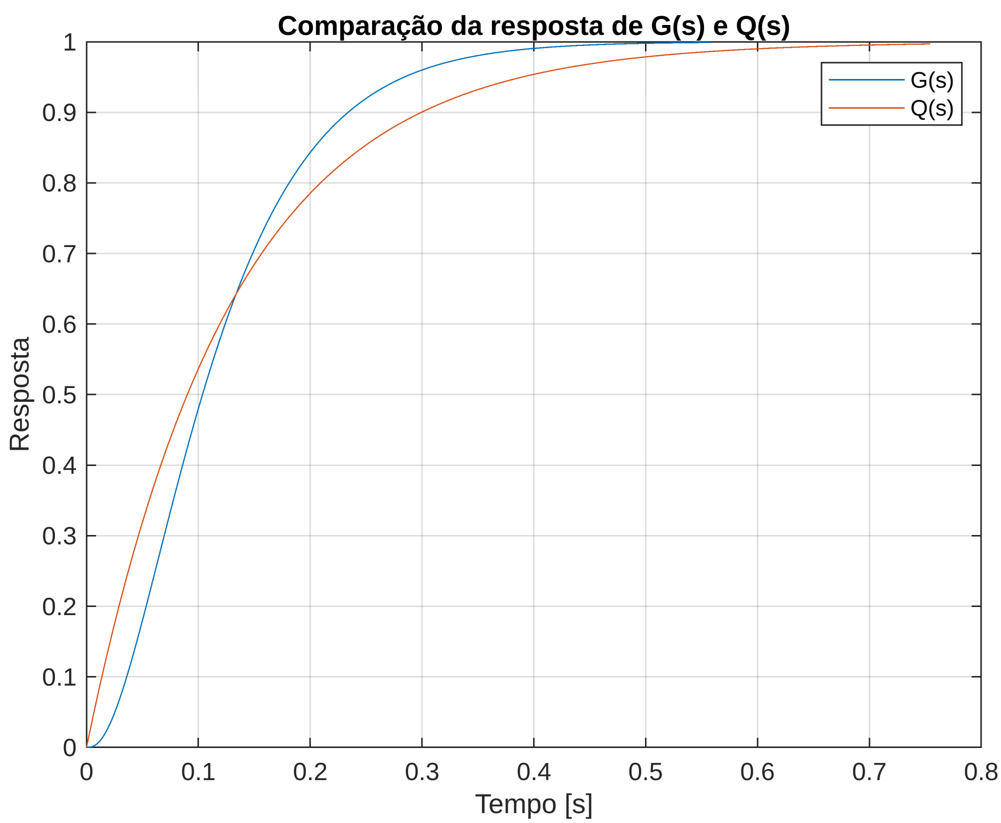


Dessa forma, temos que $\tau = 0.13$. Assim, reescrevendo a função $Q(s)$, obtemos:

$$Q(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \Rightarrow Q(s) = \frac{1}{0.13s + 1}.$$

1.3 Compare, no mesmo gráfico, a resposta ao degrau de $Q(s)$ com a resposta ao degrau de $G(s)$ para um degrau de amplitude U. Explique a resposta.

```
% Resposta ao degrau de Q(s)
s = tf('s'); Q = 1/(0.13*s + 1);
[y2, t2] = step(Q);

% Plot das duas respostas em um mesmo gráfico
figure; plot(t1, y1)
hold on, plot(t2, y2)

grid on, legend("G(s)", "Q(s)");
title("Comparação da resposta de G(s) e Q(s)");
xlabel("Tempo [s]"); ylabel("Resposta");
```



A partir do gráfico de comparação, é possível observar que as funções $Q(s)$ e $G(s)$ apresentam respostas aproximadas quando submetidas a um degrau unitário e de amplitude U, respectivamente. No entanto, há algumas discrepâncias, especialmente no tempo de estabilização e no início da curva (nas proximidades da origem).

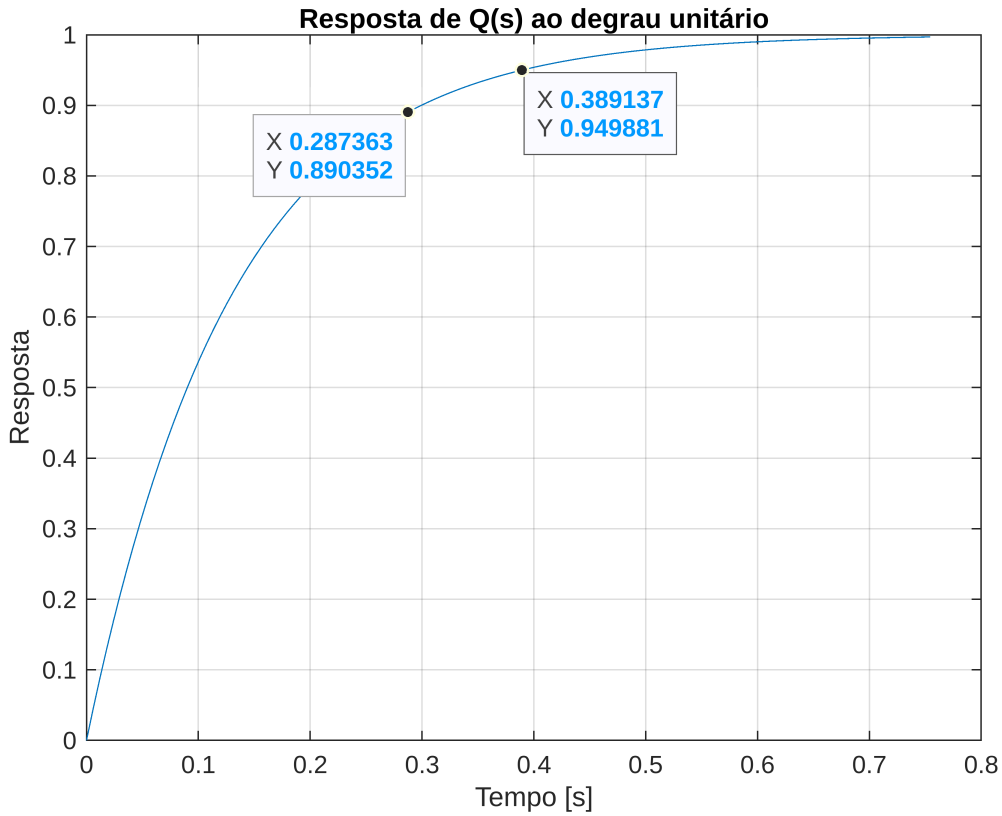
1.4 A partir da equação de $Q(s)$ e de medições feitas diretamente no gráfico da resposta ao degrau de $Q(s)$, para um degrau de amplitude U, informe os valores de

ζ **,** ω_n **,** MP**,** t_p**,** t_r **e** $t_s(5\%)$**. (Mostre com *Data Tips* sempre que for possível marcar os valores no gráfico)**

Como $Q(s)$ caracteriza um sistema de 1° ordem, ele não apresenta os valores de ζ ,ω_n,MP e t_p. Para o tempo de subida (t_r) e de estabilização a 5% (t_{s5}), temos:

$t_r \approx 2.2\tau = 2.2 * 0.13 = 0.286s$ e $t_{s5} \approx 3\tau = 3 * 0.13 = 0.39s$

```
% Plot novo da resposta ao degray de Q(s)
figure; grafico_2 = plot(t2, y2); grid on;
title("Resposta de Q(s) ao degrau unitário");
xlabel("Tempo [s]"); ylabel("Resposta");

% Para encontrar o valor de y2, tal que t2 = tempo de subida
valor_tr = 0.286;
indice_tr = find(abs(t2 - valor_tr) == min(abs(t2 - valor_tr)));
valor_y2_tr = y2(indice_tr);

datatip(grafico_2, valor_tr, valor_y2_tr, "Location", "southwest");

% Para encontrar o valor de y2, tal que t2 = tempo de estabilização
valor_ts = 0.39;
indice_ts = find(abs(t2-valor_ts) == min(abs(t2 - valor_ts)));
valor_y2_ts = y2(indice_ts);

datatip(grafico_2, valor_ts, valor_y2_ts, "Location", "southeast");
```



1.5 Feche a malha do processo $G(s)$ com uma realimentação de ganho K. Obtenha a faixa de valores de K em que o sistema é estável.

A partir de uma malha do processo $G(s)$, com realimentação de ganho K, temos a seguinte função de transferência do novo sistema:

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)K} = \frac{4913}{s^3 + 238\,s^2 + 7225\,s + 58956} * \frac{1}{1 + \left(\dfrac{4913\,K}{s^3 + 238\,s^2 + 7225\,s + 58956}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{4913}{s^3 + 238\,s^2 + 7225\,s + (58956 + 4913\,K)}$$

Das condições do arranjo de Routh temos: $(58956 + 4913\,K) > 0 \Rightarrow K > -12$. Assim, construindo o arranjo de Routh:

$$\begin{array}{llll}
s^3\,| & 1 & 7225 & 0 \\
s^2\,| & 238 & (58956 + 4913\,K) & 0 \\
\hline
s^1\,| & a_1 & 0 & \\
s^0\,| & (58956 + 4913\,K) & 0 &
\end{array},$$

com $a_1 = \frac{((238 * 7225) - (58956 + 4913K))}{238} = \frac{(1660594 - 4913K)}{238}$

Para que o sistema seja estável, não pode ter troca de sinais e elementos nulos na primeira coluna. Dessa forma, das condições dos valores de K, temos:

$$(58956 + 4913K) > 0 \; e \; a_1 > 0 \Rightarrow K > -12 \; e \; (1660594 - 4913K) > 0 \Rightarrow K > -12 \; e \; K < 338 \Rightarrow -12 < K < 338$$

Análise da Resposta no Tempo Discreto

A Função de Transferência baixo foi designada em função do seu valor de I.

```
Dz
```

```
Dz =

  0.007413 z^2 + 0.01483 z + 0.007413
  -----------------------------------
        z^2 - 0.807 z + 0.1628

Sample time: 0.05 seconds
Discrete-time transfer function.
Model Properties
```

2.1 Obtenha o modelo equivalente contínuo $D_t(s)$ de $D(z)$ usando a transformação bilinear para $T_s = 50[\text{ms}]$.

Para a transformação bilinear, por meio da função "d2c", temos

```
Dt = d2c(Dz, "tustin")
```

```
Dt =

       24.08
  ----------------
  s^2 + 34 s + 289

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

2.2 Obtenha o modelo equivalente contínuo $D_{\text{zoh}}(s)$ de $D(z)$ usando ZOH para $T_s = 50[\text{ms}]$.

Para a transformação usando ZOH, por meio da função "d2c", temos

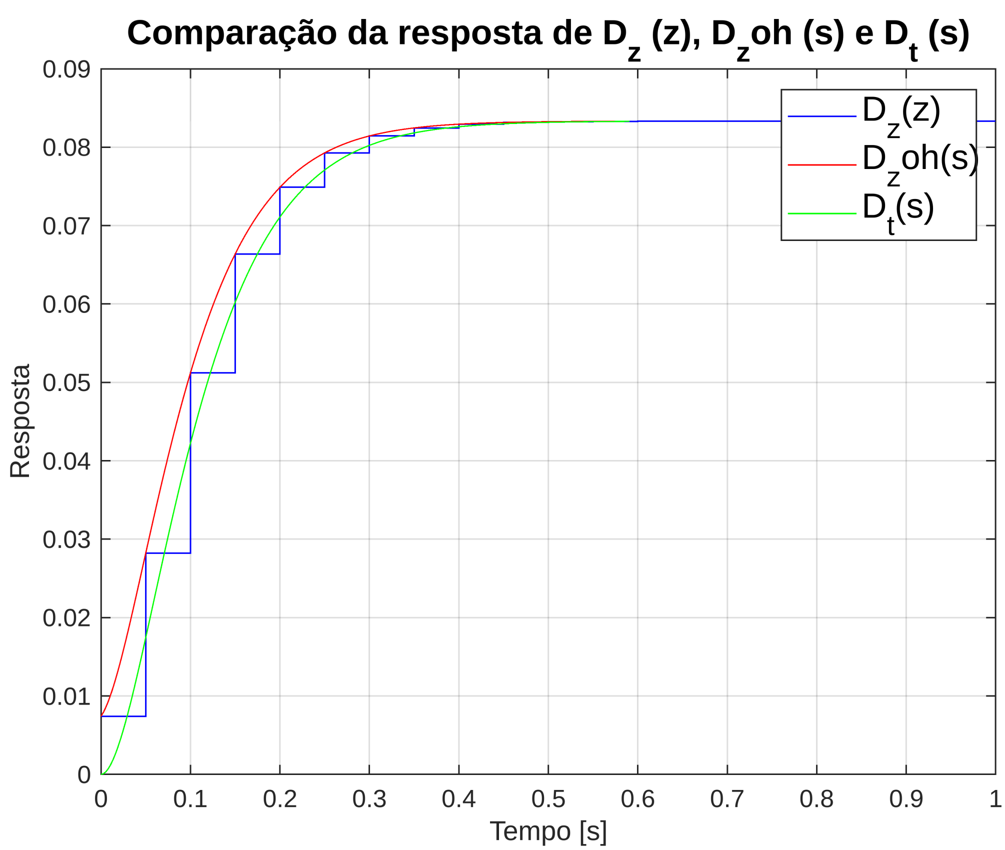
```
D_zoh = d2c(Dz, "zoh")
```

```
D_zoh =

  0.007413 s^2 + 0.4338 s + 27.46
```

```
    ------------------------------
         s^2 + 36.3 s + 329.5

  Continuous-time transfer function.
  Model Properties
```

2.3 Compare a resposta ao degrau unitário de $D_z(z)$, $D_{\text{zoh}}(s)$ e $D_t(s)$. Explique o resultado.

```
% Obtendo as respostas ao degrau unitário das funções
[y3, t3] = step(Dz);
[y4, t4] = step(D_zoh);
[y5, t5] = step(Dt);

% Criando os plots das respostas
figure; stairs(t3, y3, "Color", "blue"), hold on;
plot(t4, y4, "Color", "red"), hold on;
plot(t5, y5, "Color", "green"), hold off;

grid on, legend({'D_z(z)', 'D_zoh(s)', 'D_t(s)'}, "FontSize", 14);
title("Comparação da resposta de D_z (z), D_zoh (s) e D_t (s)", "FontSize",
14);
xlabel("Tempo [s]"); ylabel("Resposta");
```



A partir do gráfico, é possível observar o comportamento do ZOH de segurar a ordem zero entre as amostras, o que implica que o sinal é mantido constante durante o intervalo de amostragem. Já no transformação bilinear, é possível verificar que o método mantém a estabilidade do sistema, neste caso, a tendência ao valor estacionário.

2.4 Obtenha as matrizes do modelo no EE de $D_z(z)$.

```
% Montando o vetor de numerador e denonimador da função Dz(z)
[numerador, denominador, ts] = tfdata(Dz),
```

```
numerador = 1x1 cell array
    {[0.0074 0.0148 0.0074]}
denominador = 1x1 cell array
    {[1 -0.8070 0.1628]}
ts = 0.0500
```

```
% Obtendo o sistema em espaço de estados
[A, B, C, D] = tf2ss(cell2mat(numerador), cell2mat(denominador))
```

```
A = 2×2
    0.8070   -0.1628
    1.0000         0
B = 2×1
     1
     0
C = 1×2
    0.0208    0.0062
D = 0.0074
```

Assim, tomando o sistema em espaço de estados é dado por:

$$q_{k+1} = [A]q_k + [B]u_k; y_k = [C]q_k + [D]u_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.8070 & -0.1628 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} q_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \; e \; y_k = [0.0208 \quad 0.0062] q_k + [0.0074] u_k$$

2.5 Obtenha a matrix de transição de estados $\Phi[k] = A^k$ e use-a para obter a saída $y[k]$ do sistema para $\vec{q}_0$ com todos os elementos iguais a 1. Compare a resposta obtida com a produzida pela função "initial" do MATLAB. Considere $T_s = 50[\text{ms}]$ e apresente o gráfico com tempo até três segundos.

Da matriz A, temos que seus autovalores são dados por

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda - 0.8070 & 0.1628 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(5000\lambda^2 - 4035\lambda + 814)}{5000} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.407 \; e \; \lambda_2 = 0.4$$

Assim, pelo Teorema de Cayley- Hamilton, temos

$$\lambda^k = p_o(k) + p_1(k)\lambda \Rightarrow \begin{cases} (0.407)^k = p_o(k) + p_1(k)0.407 \\ (0.4)^k = p_o(k) + p_1(k)0.4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_o(k) = \dfrac{1000}{7}[(0.407)^k - (0.4)^k] \\ p_1(k) = \dfrac{407}{7}(0.4)^k - \dfrac{400}{7}(0.407)^k \end{cases}$$

Logo,

$$\boldsymbol{A}^k = p_o(k)\boldsymbol{I} + p_1(k)\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} p_o(k) + 0.8070\,p_1(k) & -0.1628\,p_1(k) \\ p_1(k) & p_o(k) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^k = \left(\frac{1}{7}\right)\begin{bmatrix} 677.2(0.407)^k - 671.551(0.4)^k & 65.12(0.407)^k - 66.2596(0.4)^k \\ 407(0.4)^k - 400(0.407)^k & 1000(0.407)^k - 1000(0.4)^k \end{bmatrix}$$

```
% Criando as variáveis simbólicas e o vetor de estados iniciais
Ts = 0.05; z = tf('z', Ts); syms k; q0 = [1 ; 1];

% Montando a matriz de transição de estados
A_k = (1/7)*[(677.2*(0.407)^k - 671.551*(0.4)^k) (65.12*(0.407)^k - 66.2596*(0.4)^k);
               (407*(0.4)^k - 400*(0.407)^k)        (1000*(0.407)^k - 1000*(0.4)^k);]
```

A_k =

$$\begin{pmatrix} \dfrac{3386\left(\frac{407}{1000}\right)^k}{35} - \dfrac{5907025065156805\left(\frac{2}{5}\right)^k}{61572651155456} & \dfrac{1628\left(\frac{407}{1000}\right)^k}{175} - \dfrac{2331302420857173\left(\frac{2}{5}\right)^k}{246290604621824} \\ \dfrac{407\left(\frac{2}{5}\right)^k}{7} - \dfrac{400\left(\frac{407}{1000}\right)^k}{7} & \dfrac{1000\left(\frac{407}{1000}\right)^k}{7} - \dfrac{1000\left(\frac{2}{5}\right)^k}{7} \end{pmatrix}$$

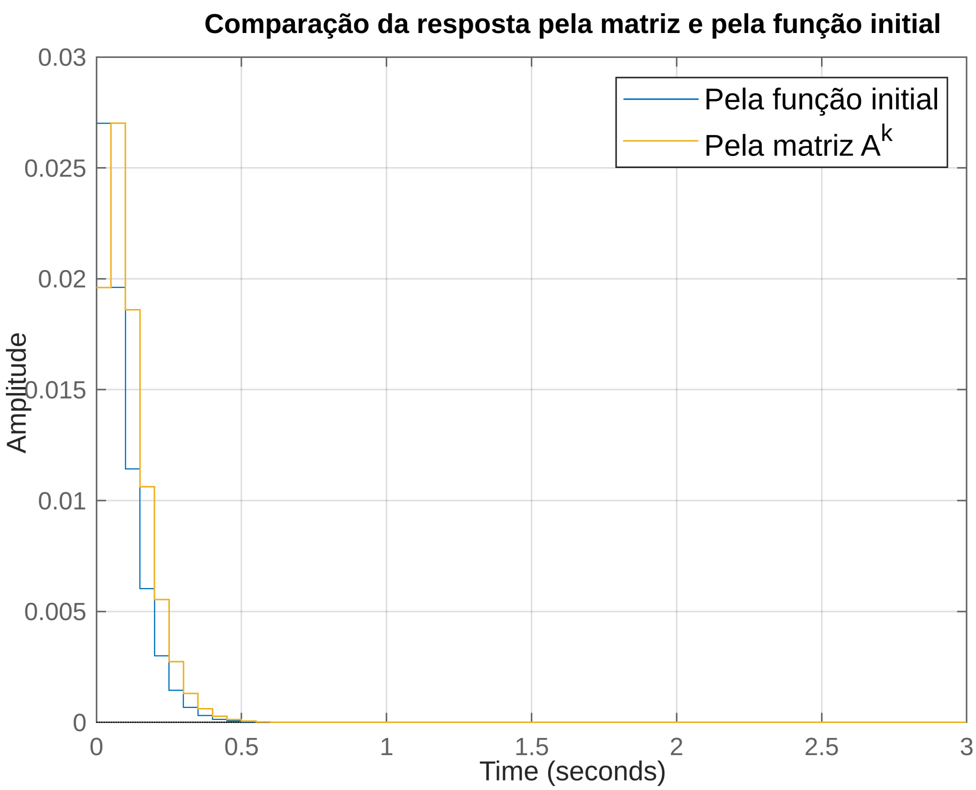
```
resposta_homogenea = C * A_k * q0
```

resposta_homogenea =

$$\frac{17265830421818953881\left(\frac{407}{1000}\right)^k}{6305039478318694400} - \frac{96501957604590085334035498551327\left(\frac{2}{5}\right)^k}{35494216806390423241907689750528}$$

```
% Substituindo a variável simbólica 'k' por um range de valores
vetor_tempo = 0:Ts:3; vetor_k = 0:(length(vetor_tempo)-1);
yk1_homogenea = subs(resposta_homogenea, k, vetor_k);

% Obter a resposta homogênea pela função
```

```
sys = ss(A, B, C, D, Ts);

t_final = 3; % Para apresentar o gráfico com tempo até três segundos.
figure; initial(sys, q0, t_final); hold on
stairs(vetor_tempo, yk1_homogenea), hold off, grid on

legend({"Pela função initial", "Pela matriz A^k"}, "FontSize", 12);
title("Comparação da resposta pela matriz e pela função initial");
```



A partir do plot dos dois gráficos, é possível observar que eles apresentam comportamentos parecidos a partir de uma condição inicial. As leves discrepâncias nas linhas podem ter ocorrido em função das aproximações realizadas nas contas. No entanto, de forma geral, o comportamento observado é esperado para uma resposta homogênea (natural), tomando a condição inicial $\vec{q_o}$.