

Análise e Modelagem de Sistemas Dinâmicos - 2023/2

Nome: Thamya Vieira Hashimoto Donadia

Data limite para entrega: 25/10/2023

A entrega deverá ser feita pelo Google Classroom

Trabalho 2 - Sistemas no Espaço de Estados e Linearização

```
I = 17;           % Seu número I
init_t2(I);       % Define as variáveis dos modelos
datetime('now')
```

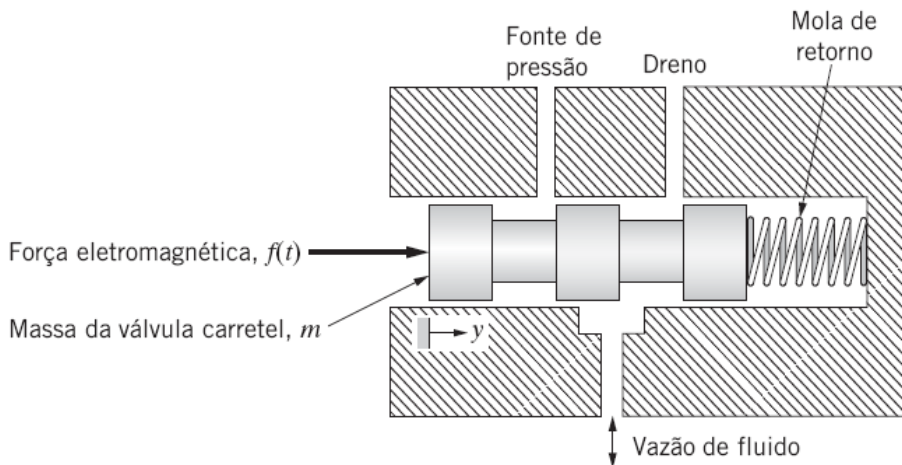
```
ans = datetime
      27-Oct-2023 19:14:56
```

Linearização do Modelo de Válvula Carretel (Spool Valve)

O vídeo abaixo mostra o funcionamento de uma válvula carretel de 4 vias.

```
%ShowVideo; % Este código pode ser comentado (o vídeo é apenas para ilustrar
o funcionamento da válvula)
```

A Figura abaixo mostra o esquemático de uma válvula carretel de três vias empregada para controlar a vazão em um sistema hidráulico, cujo funcionamento é semelhante à válvula carretel mostrada no vídeo acima.



O modelo matemático da válvula carretel consiste em uma única massa (m [kg]), uma força de atrito linear (b [N . s/m]) e uma força de mola linear (k [N/m]). A variável $y(t)$ é de deslocamento da válvula carretel (em [m]) e $f(t)$ é a força de um atuador eletromagnético que empurra a válvula (em [N]). Assume-se que não existe desequilíbrio na pressão do fluido hidráulico sobre a massa da válvula, e que as forças de fluxo são desprezadas; assim, a força do atuador $f(t)$ é a única aplicada sobre a massa da válvula. O sistema inicialmente está em repouso ($\dot{y}_0 = y_0 = 0$) no instante $t = 0$ [s].

Funções úteis do Matlab: tf, step, stepDataOptions, lsim, figure, plot, grid, yyaxis, title, xlabel, ylabel, sprintf, linspace.

1.1 Usando o simulink, elabore um diagrama de blocos do modelo dinâmico da válvula (Equação Diferencial) e simule para uma força que varia de $f_{\text{inicial}} [N]$ a $f_{\text{final}} [N]$ no instante $t_{\text{inicial}} [s]$.

OBS:

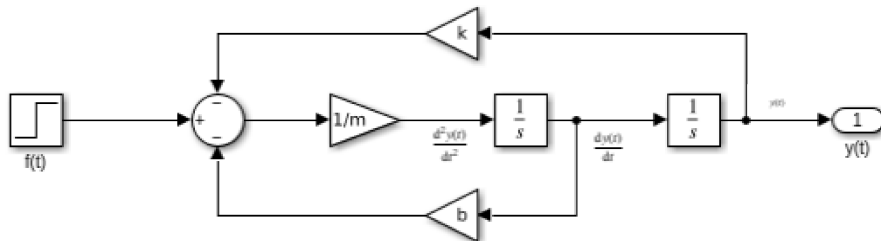
1) A saída do modelo deve ser um conector do tipo "Out1" disponível na biblioteca "Sinks".

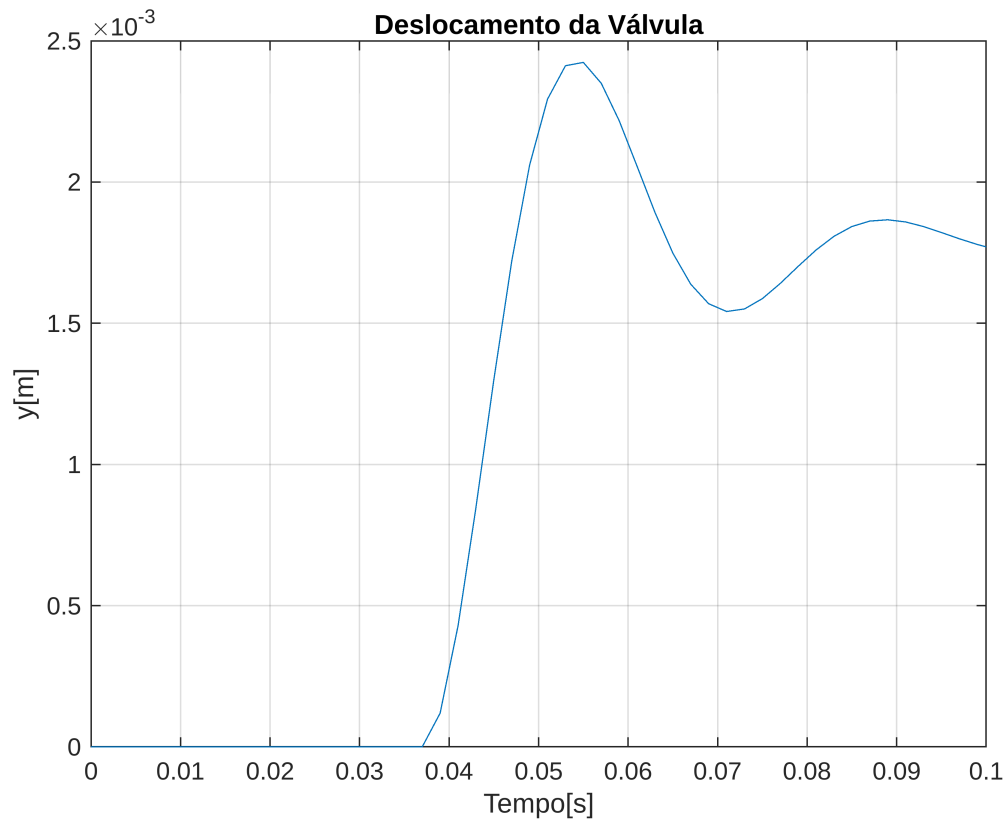
2) Escolha um tempo de simulação de aproximadamente 0,1[s] de operação em regime permanente.

Aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos a modelagem do sistema indicado:

$$m\ddot{y}(t) = f(t) - ky(t) - b\dot{y}(t) \quad (1.1)$$

```
% Modelo original
modelo = 'Questao1_1';
[y1,t1] = snapshotModel(modelo);
```





1.2 Considere que, por desgaste, uma força de atrito seco $f_s(t)$ passe a compor o atrito da válvula juntamente com o atrito viscoso pré existente. A equação do atrito seco possui uma componente $f_a(t)$ que atua em sentido contrário ao movimento, como mostrado abaixo.

$$f_s(t) = f_a(t) \frac{\dot{y}(t)}{|\dot{y}(t)|} [N]$$

a) É possível simular (no simulink) o modelo com a não linearidade acima? Explique.

A não linearidade *on-off* apresentada acima não pode ser simulada no simulink, em virtude da descontinuidade em $\dot{y}(t) = 0$. Para trabalhar com esse tipo de função, é necessário um pequeno intervalo de integração, permitindo que a força seja calculada com precisão ao se aproximar da velocidade nula. Isso faz com que o tempo de execução da simulação seja muito longo, inviabilizando o seu uso no simulink.

b) Se a afirmativa anterior for verdadeira, simule, no simulink, para uma força que varia de $f_{\text{inicial}} [N]$ a $f_{\text{final}} [N]$ no instante $t_{\text{inicial}} [s]$. Senão, estabeleça uma forma de modelar a não linearidade e simule para as mesmas condições.

OBS:

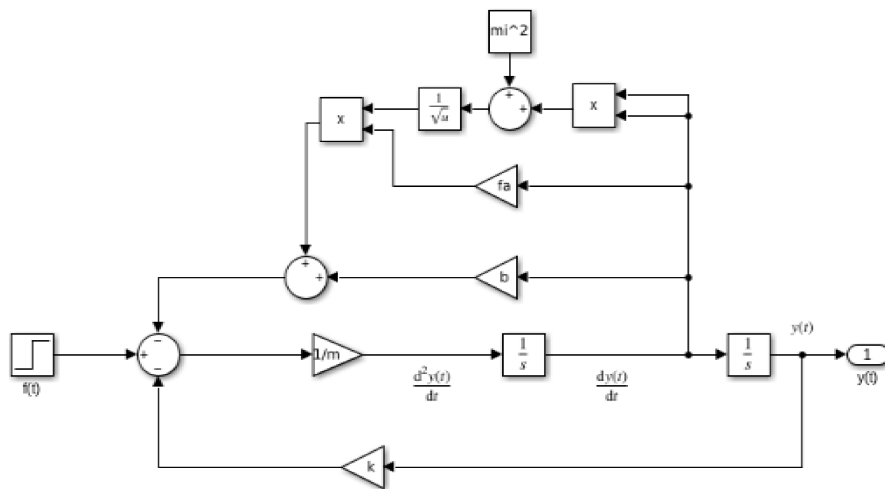
1) A saída do modelo deve ser um conector do tipo "Out1" disponível na biblioteca "Sinks".

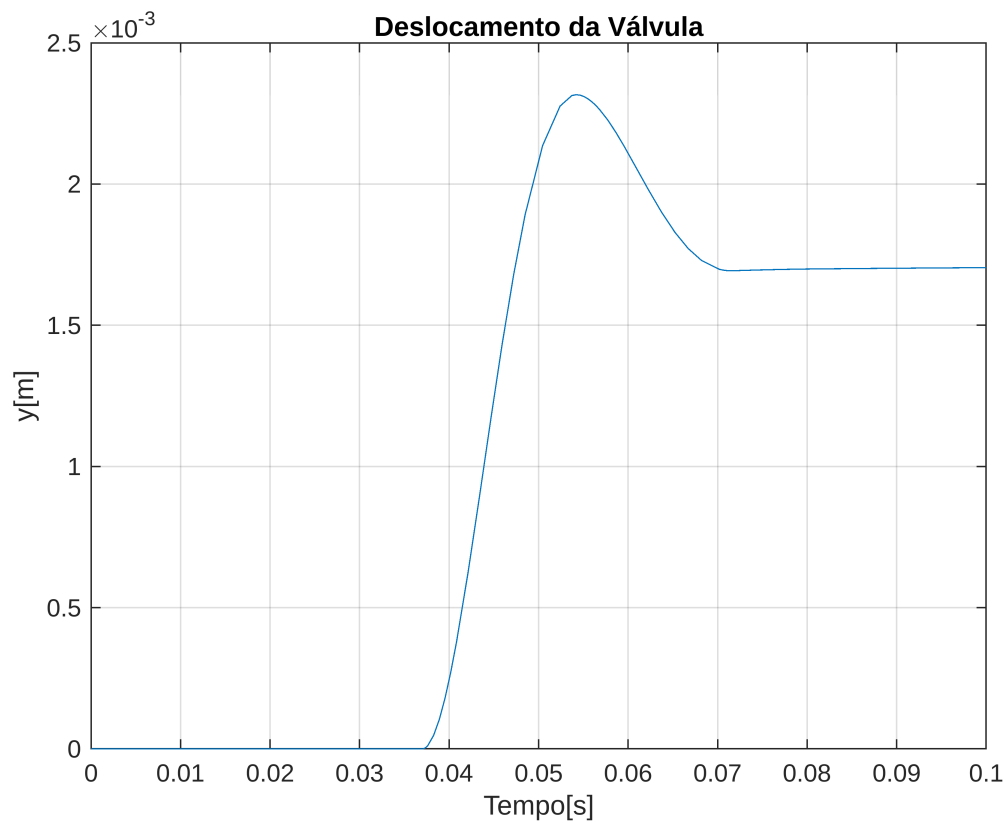
2) Escolha um tempo de simulação de aproximadamente 0,1[s] de operação em regime permanente.

O atrito seco pode ser aproximado por:

$$f_s(t) = f_a(t) * \frac{(\dot{y}(t))}{\sqrt{\dot{y}^2(t) + \mu^2}}, \text{ tal que } \mu \cong 10^{-4} \left[\frac{m}{s} \right]$$

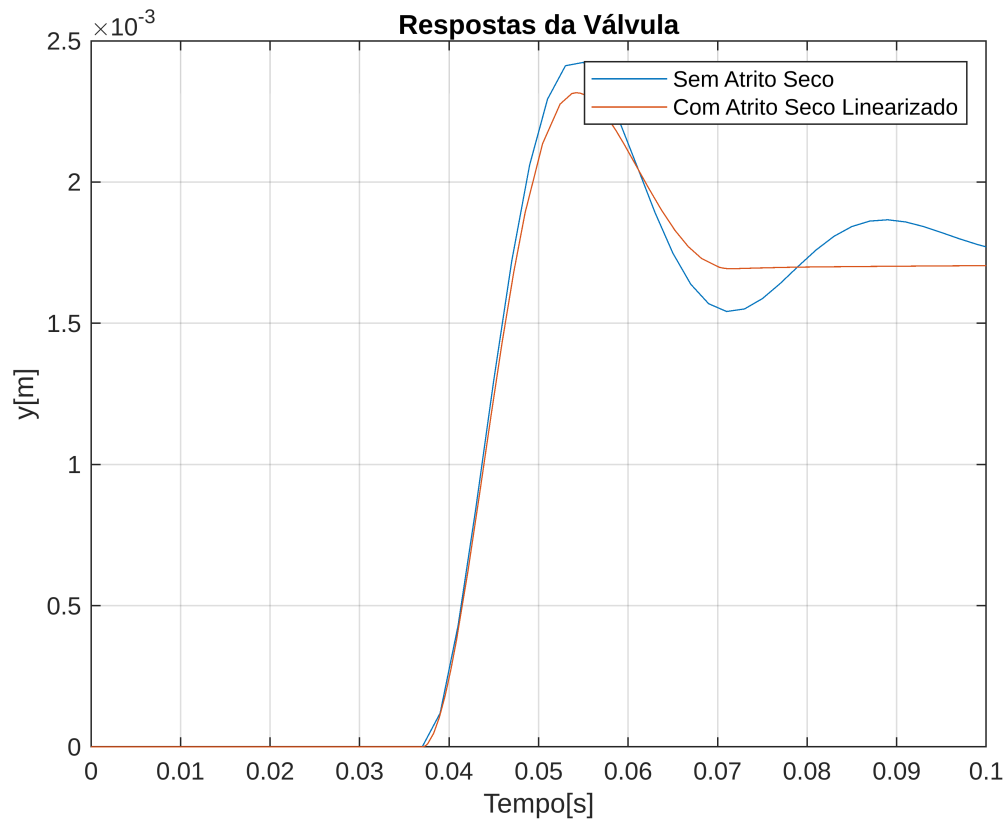
```
% Modelo linearizado
mi = 10^(-4);
modelo = 'Questao1_2';
[y2,t2] = snapshotModel(modelo);
```





c) Compare a resposta da válvula sem o atrito seco com a resposta com o atrito seco linearizado.

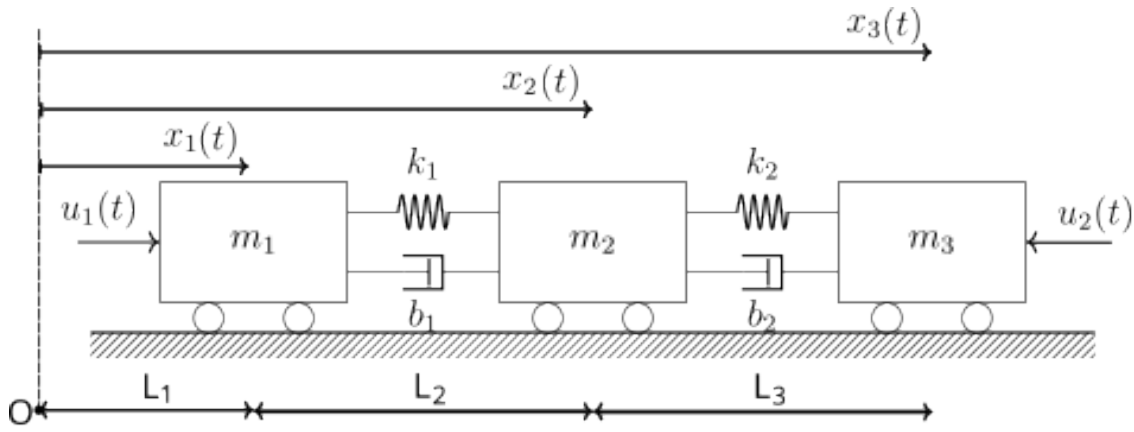
```
% Gráficos para comparação
figure;
plot(t1,y1)
hold on
plot(t2,y2)
grid on
legend('Sem Atrito Seco','Com Atrito Seco Linearizado')
xlabel('Tempo[s]')
ylabel('y[m]')
title('Respostas da Válvula')
```



A partir dos gráficos obtidos, foi possível observar que, com a força de atrito seco compondo o atrito da válvula, juntamente com o atrito viscoso pré existente, a oscilação da válvula reduziu. Dessa forma, após a variação da força de entrada, no tempo t_{inicial} (0.0370s), a válvula apresentou maior estabilidade em seu deslocamento, isto é mais amortecido, comparado ao movimento sem o atrito seco.

Análise dos Estados de um Conjunto de Vagões Interligados

A Figura abaixo mostra um conjunto de três vagões interligados. A ligação entre eles pode ser modelada como um par mola-amortecedor. A motorização do comboio é feita no vagão de trás, gerando uma força $u_1(t)$, enquanto a frenagem é feita no vagão da frente, gerando uma força $u_2(t)$. A posição dos vagões é obtida a partir de um ponto de referência O, sendo que o vagão 1 inicia a uma distancia L_1 de O. As distâncias L_2 e L_3 são tais que os conjuntos mola-amortecedor encontram-se em repouso.



2.1 Considere as posições $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, e as velocidades $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$, $\dot{x}_3(t)$, como estados. O modelo em espaço de estados será linear? Justifique sua resposta.

O modelo não será linear, uma vez que apresentará uma componente constante, causada pela distância dos vagões em relação ao ponto de referência, quando os conjuntos mola-amortecedor encontram-se em repouso. Dessa forma, a função é classificada como afim, e, portanto, o sistema é não linear.

2.2 Represente o modelo do sistema no Espaço de Estados (linearize o sistema, caso seja necessário), sendo $u_1(t)$ e $u_2(t)$ as entradas e, as posições de cada vagão, as saídas.

A priori, considere $x_3(t) > x_2(t) > x_1(t) > 0$. Assim, analisando o vagão de massa m_1 , aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos

$$m_1 \ddot{x}_1(t) = k_1((x_2(t) - x_1(t)) - L_2) + b_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + u_1(t) \quad (2.1)$$

Analisando o vagão de massa m_2 , aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos

$$m_2 \ddot{x}_2(t) = -k_1((x_2(t) - x_1(t)) - L_2) - b_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k_2((x_3(t) - x_2(t)) - L_3) + b_2(\dot{x}_3(t) - \dot{x}_2(t)) \quad (2.2)$$

Analisando o vagão de massa m_3 , aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos

$$m_3 \ddot{x}_3(t) = -k_2((x_3(t) - x_2(t)) - L_3) - b_2(\dot{x}_3(t) - \dot{x}_2(t)) - u_2(t) \quad (2.3)$$

Considere os estados: $q_1(t) = x_1(t)$, $q_2(t) = x_2(t)$, $q_3(t) = x_3(t)$, $q_4(t) = \dot{x}_1(t)$, $q_5(t) = \dot{x}_2(t)$, $q_6(t) = \dot{x}_3(t)$. Dessa forma, o modelo em Espaço de Estados é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \dot{q}_4(t) \\ \dot{q}_5(t) \\ \dot{q}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \\ f_3(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \\ f_4(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \\ f_5(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \\ f_6(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \dot{q}_4(t) \\ \dot{q}_5(t) \\ \dot{q}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \\ -\frac{k_1}{m_1}L_2 + \frac{k_1}{m_1}q_2(t) - \frac{k_1}{m_1}q_1(t) + \frac{b_1}{m_1}q_5(t) - \frac{b_1}{m_1}q_4(t) + \frac{u_1(t)}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2}L_2 - \frac{k_1}{m_2}q_2(t) + \frac{k_1}{m_2}q_1(t) - \frac{b_1}{m_2}q_5(t) + \frac{b_1}{m_2}q_4(t) - \frac{k_2}{m_2}L_3 + \frac{k_2}{m_2}q_3(t) - \frac{k_2}{m_2}q_2(t) + \frac{b_2}{m_2}q_6(t) - \frac{b_2}{m_2}q_5(t) \\ \frac{k_2}{m_3}L_3 - \frac{k_2}{m_3}q_3(t) + \frac{k_2}{m_3}q_2(t) - \frac{b_2}{m_3}q_6(t) + \frac{b_2}{m_3}q_5(t) - \frac{u_2(t)}{m_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Os pontos de equilíbrio são obtidos para $\dot{\mathbf{q}}^* = f(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*) = 0$. Do enunciado, temos que, quando os conjuntos mola-amortecedor estão em repouso, isto é, quando o sistema encontra-se em equilíbrio, os vagões m_1, m_2, m_3 estão a uma distância de $L_1, L_1 + L_2, L_1 + L_2 + L_3$, respectivamente, do ponto de referência. Assim, temos que $q_1^* = L_1, q_2^* = L_1 + L_2, q_3^* = L_1 + L_2 + L_3$. Substituindo tais valores nas equações $\dot{\mathbf{q}}^* = f(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*) = 0$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{q}) \\ f_2(\mathbf{q}) \\ f_3(\mathbf{q}) \\ f_4(\mathbf{q}) \\ f_5(\mathbf{q}) \\ f_6(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_1^* = L_1 \\ q_2^* = L_1 + L_2 \\ q_3^* = L_1 + L_2 + L_3 \\ q_4^* = q_5^* = q_6^* = 0 \\ u_1^* = u_2^* = 0 \end{array} \right\}$$

Seja $\dot{z} = \dot{q} - \dot{q}^*$, $\dot{v} = \dot{u} - \dot{u}^*$, para o sistema linearizado, temos

$$\dot{z} = \mathbf{A}z + \mathbf{B}v = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1}f_1 & \frac{\partial}{\partial q_2}f_1 & \frac{\partial}{\partial q_3}f_1 & \frac{\partial}{\partial q_4}f_1 & \frac{\partial}{\partial q_5}f_1 & \frac{\partial}{\partial q_6}f_1 \\ \frac{\partial}{\partial q_1}f_2 & \frac{\partial}{\partial q_2}f_2 & \frac{\partial}{\partial q_3}f_2 & \frac{\partial}{\partial q_4}f_2 & \frac{\partial}{\partial q_5}f_2 & \frac{\partial}{\partial q_6}f_2 \\ \frac{\partial}{\partial q_1}f_3 & \frac{\partial}{\partial q_2}f_3 & \frac{\partial}{\partial q_3}f_3 & \frac{\partial}{\partial q_4}f_3 & \frac{\partial}{\partial q_5}f_3 & \frac{\partial}{\partial q_6}f_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1}f_4 & \frac{\partial}{\partial q_2}f_4 & \frac{\partial}{\partial q_3}f_4 & \frac{\partial}{\partial q_4}f_4 & \frac{\partial}{\partial q_5}f_4 & \frac{\partial}{\partial q_6}f_4 \\ \frac{\partial}{\partial q_1}f_5 & \frac{\partial}{\partial q_2}f_5 & \frac{\partial}{\partial q_3}f_5 & \frac{\partial}{\partial q_4}f_5 & \frac{\partial}{\partial q_5}f_5 & \frac{\partial}{\partial q_6}f_5 \\ \frac{\partial}{\partial q_1}f_6 & \frac{\partial}{\partial q_2}f_6 & \frac{\partial}{\partial q_3}f_6 & \frac{\partial}{\partial q_4}f_6 & \frac{\partial}{\partial q_5}f_6 & \frac{\partial}{\partial q_6}f_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \\ z_5(t) \\ z_6(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1}f_1 & \frac{\partial}{\partial u_2}f_1 \\ \frac{\partial}{\partial u_1}f_2 & \frac{\partial}{\partial u_2}f_2 \\ \frac{\partial}{\partial u_1}f_3 & \frac{\partial}{\partial u_2}f_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1}f_4 & \frac{\partial}{\partial u_2}f_4 \\ \frac{\partial}{\partial u_1}f_5 & \frac{\partial}{\partial u_2}f_5 \\ \frac{\partial}{\partial u_1}f_6 & \frac{\partial}{\partial u_2}f_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

Substituindo $q = q^* + u$ e $u = u^* + v$:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \\ \dot{z}_5(t) \\ \dot{z}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{(k_1 + k_2)}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{(b_1 + b_2)}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} \\ 0 & \frac{k_2}{m_3} & -\frac{k_2}{m_3} & 0 & \frac{b_2}{m_3} & -\frac{b_2}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \\ z_5(t) \\ z_6(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

Assim, tomando o ponto de equilíbrio, o sistema $\dot{q}(t) = \mathbf{A}q(t) + \mathbf{B}u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}q(t) + \mathbf{D}u(t)$ é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \dot{q}_4(t) \\ \dot{q}_5(t) \\ \dot{q}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{(k_1+k_2)}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{(b_1+b_2)}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} \\ 0 & \frac{k_2}{m_3} & -\frac{k_2}{m_3} & 0 & \frac{b_2}{m_3} & -\frac{b_2}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) - L_1 \\ q_2(t) - (L_1 + L_2) \\ q_3(t) - (L_1 + L_2 + L_3) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

`% Modelo no Espaço de Estados`

```
A = [ 0 0 0 1 0 0;
      0 0 0 0 1 0;
      0 0 0 0 0 1;
      -k1/m1 k1/m1 0 -b1/m1 b1/m1 0;
      k1/m2 -(k1+k2)/m2 k2/m2 b1/m2 -(b1+b2)/m2 b2/m2;
      0 k2/m3 -k2/m3 0 b2/m3 -b2/m3;
    ];
```

```
B = [ 0 0;
      0 0;
      0 0;
      1/m1 0;
      0 0;
      0 -1/m3;
    ];
```

```
C = [1 0 0 0 0 0;
      0 1 0 0 0 0;
      0 0 1 0 0 0;
    ];
```

```
D = [0 0;
      0 0;
      0 0;
    ];
```

```
sistema = ss(A, B, C, D);
```

2.2 Obtenha a resposta $y(t)$ do sistema para entradas tipo impulso unitário:

a) apenas para a entrada $u_1(t) = \delta(t)$;

b) apenas para a entrada $u_2(t) = \delta(t)$;

c) para entradas $u_1(t) = u_2(t) = \delta(t)$.

Apresente a resposta até 20 segundos. Unidades em SI.

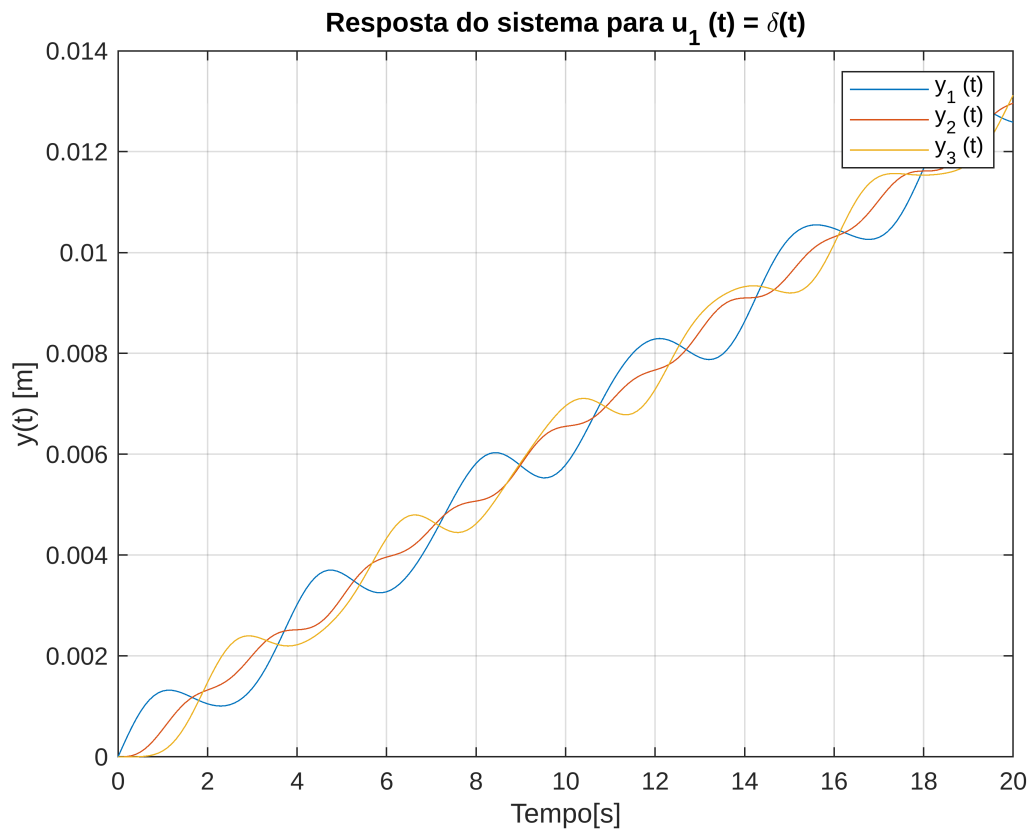
```
% Gráficos da Resposta
s = tf('s');
vetor_tempo = 0:0.1:20; % Vetor de 0 a 20 segundos
I = eye(size(A)); % Matriz identidade 6x6

% Matriz de Funções de Transferência do sistema em EE
G = C*inv((s*I- (A)))*B + D; % Matriz 3x2

% a) Resposta y(t) para apenas para entrada u1(t)

% Obtendo as saídas 1, 2 e 3 do sistema para u1(t) = impulso unitário, a
% partir das funções de transferência que relacionam a entrada 1 com as
saídas
[y1_1, vetor_tempo] = impulse(G(1, 1), vetor_tempo);
[y2_1, vetor_tempo] = impulse(G(2, 1), vetor_tempo);
[y3_1, vetor_tempo] = impulse(G(3, 1), vetor_tempo);

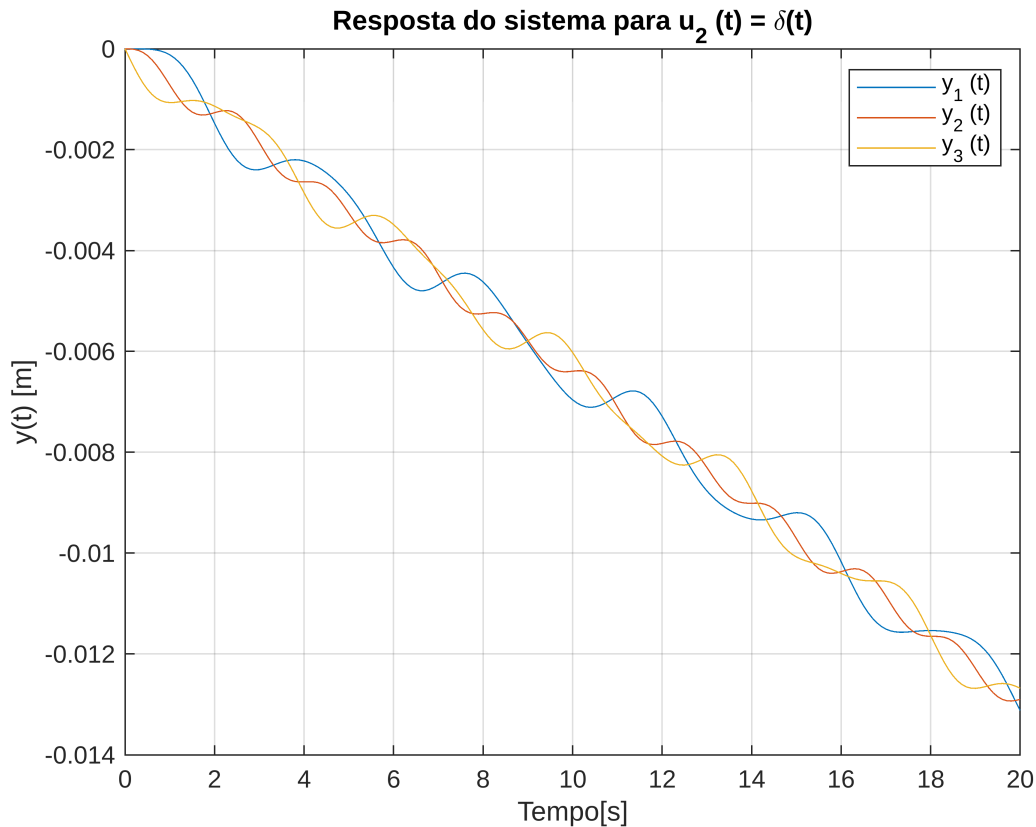
% Plotando a resposta obtida
figure; plot(vetor_tempo, y1_1)
hold on; plot(vetor_tempo, y2_1)
hold on; plot(vetor_tempo, y3_1)
grid on
legend('y_1 (t) ', 'y_2 (t) ', 'y_3 (t) ')
xlabel('Tempo[s]'); ylabel('y(t) [m]')
title('Resposta do sistema para u_1 (t) = \delta(t)')
```



```
% b) Resposta y(t) para apenas para entrada u2(t)

% Obtendo as saídas 1, 2 e 3 do sistema para u2(t) = impulso unitário, a
% partir das funções de transferência que relacionam a entrada 2 com as
saídas
[y1_2, vetor_tempo] = impulse(G(1, 2), vetor_tempo);
[y2_2, vetor_tempo] = impulse(G(2, 2), vetor_tempo);
[y3_2, vetor_tempo] = impulse(G(3, 2), vetor_tempo);

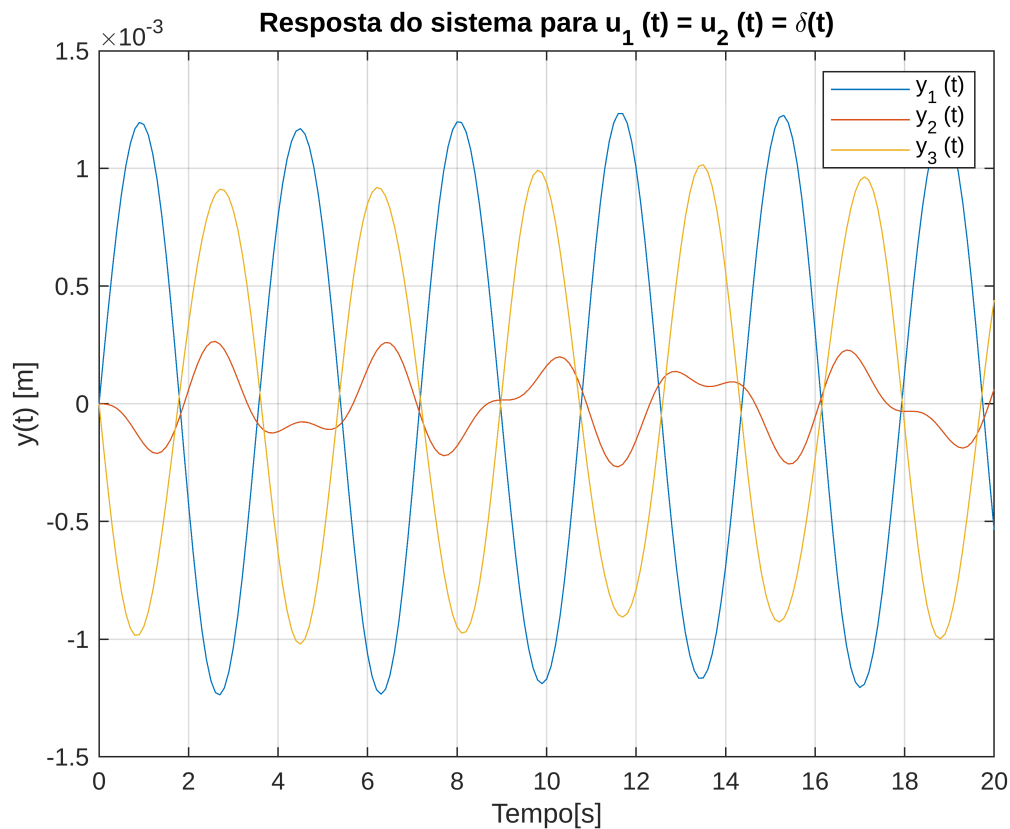
% Plotando a resposta obtida
figure; plot(vetor_tempo, y1_2)
hold on; plot(vetor_tempo, y2_2)
hold on; plot(vetor_tempo, y3_2)
grid on
legend('y_1 (t) ', 'y_2 (t) ', 'y_3 (t) ')
xlabel('Tempo[s]'); ylabel('y(t) [m]')
title('Resposta do sistema para u_2 (t) = \delta(t)')
```



```
% c) Resposta y(t) para entradas u1(t) = u2(t) = impulso unitário
% Funções de Transferência que relacionam a entrada 1 e 2 com as saídas 1,
2, 3
G1 = G(1, 1) + G(1, 2);
G2 = G(2, 1) + G(2, 2);
G3 = G(3, 1) + G(3, 2);

% Obtendo as saídas 1, 2 e 3 do sistema para u1(t) = u2(t) = impulso unitário
[y1_3, vetor_tempo] = impulse(G1, vetor_tempo);
[y2_3, vetor_tempo] = impulse(G2, vetor_tempo);
[y3_3, vetor_tempo] = impulse(G3, vetor_tempo);

% Plotando a resposta obtida
figure; plot(vetor_tempo, y1_3)
hold on; plot(vetor_tempo, y2_3)
hold on; plot(vetor_tempo, y3_3)
grid on
legend('y_1 (t) ', 'y_2 (t) ', 'y_3 (t) ')
xlabel('Tempo[s]'); ylabel('y(t) [m]')
title('Resposta do sistema para u_1 (t) = u_2 (t) = \delta(t)')
```



2.3 Explique o comportamento visto para o caso $u_1(t) = u_2(t) = \delta(t)$.

Neste caso, é possível observar que o movimento da massa m_2 é reduzido (amortecido), em função das duas forças iguais de entrada que apresentam mesmo módulo, mas sentidos opostos. Dessa forma, a resposta dos conjuntos amortecedor-mola, em função da força impulso de entrada, provoca a redução da oscilação do deslocamento da massa m_2 .