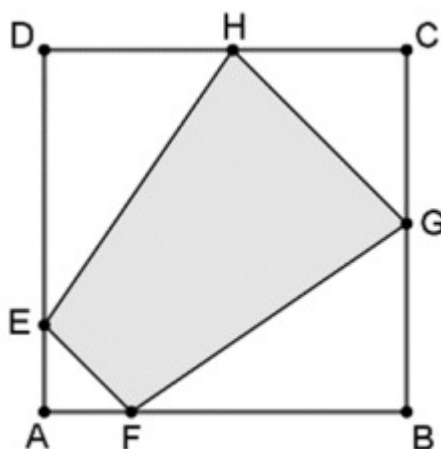
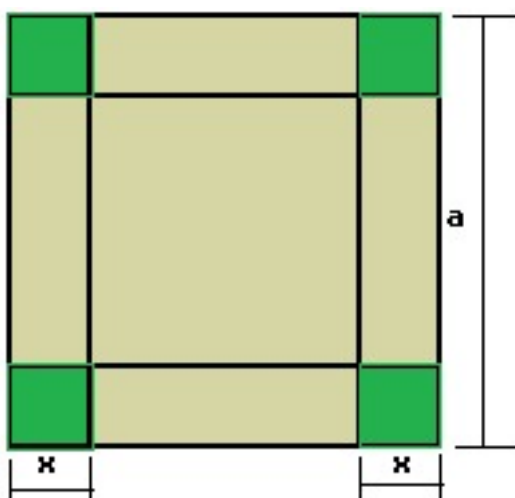


1. (FAMENA 2022) A figura a seguir mostra um quadrado ABCD de lado 1, os pontos E, F, G, H pertencentes aos lados DA, AB, BC, CD, respectivamente, e o polígono EFGH. Sabe-se que $CG = CH = 2AE = 2AF$. O valor máximo da área do polígono EFGH é de:



- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{5}{8}$

2. Na figura, em anexo, vemos um papelão quadrado com 12100 cm^2 de área, que deve ser transformado em uma caixa sem tampa. Determinar a medida x do lado de cada quadrado que será retirado nos quatro cantos do papelão, a fim de se maximizar volume:



Gabarito

Questão 1:

Primeiramente, ao analisar o enunciado e a figura, é possível atribuir o valor de x para os segmentos AE e AF, e o valor de $2x$ para CG e CH. E como os lados do quadrado ABCD = 1, temos que:

$$DH + CH = 1 \rightarrow DH + 2x = 1 \rightarrow DH = 1 - 2x$$

$$CG + GB = 1 \rightarrow GB + 2x = 1 \rightarrow GB = 1 - 2x$$

$$AF + FB = 1 \rightarrow FB + x = 1 \rightarrow FB = 1 - x$$

$$AE + ED = 1 \rightarrow ED + x = 1 \rightarrow ED = 1 - x$$

Com isso, obtivemos as medidas de todos os segmentos.

Agora, precisamos maximizar a área $A(x)$ do quadrilátero EFGH. Lembrando que o lado do quadrado ABCD é 1, podemos afirmar que sua área também é 1. Além disso, temos que a área $A(x) = \text{Área ABCD} - \text{Área EDH} - \text{Área BFG} - \text{Área CGH} - \text{Área AEF} = 1 - \text{Área EDH} - \text{Área BFG} - \text{Área CGH} - \text{Área AEF}$. Portanto, seguem os cálculos para encontrar as áreas EDH, BFG, CGH e AEF:

$$\text{EDH} = \frac{(1 - 2x) * (1 - x)}{2} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2}$$

$$\text{BFG} = \frac{(1 - 2x) * (1 - x)}{2} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2}$$

$$\text{CGH} = \frac{(2x) * (2x)}{2} = 2x^2$$

$$\text{AEF} = \frac{(x) * (x)}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Portanto: } A(x) = 1 - (2 * \frac{2x^2 - 3x + 1}{2}) - 2x^2 - \frac{x^2}{2} \rightarrow A(x) = -\frac{9x^2}{2} + 3x$$

Agora, para maximizar a função de segundo grau, precisamos entender que se trata de uma parábola com concavidade voltada para baixo, visto que o termo elevado ao quadrado acompanha um sinal negativo ($a = -9/2$). Dessa forma, o ponto de máximo será logo em cima de seu vértice, e pode ser calculado ao encontrar o Y_v da função. Seguem os cálculos:

$$1. Y_v = \frac{-\text{delta}}{4a}$$

$$2. \text{delta} = b^2 - 4ac \rightarrow 3^2 - 4 * \frac{9}{2} * c \rightarrow \text{delta} = 9$$

$$3. Y_v = \frac{-9}{4 * \frac{-9}{2}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, o gabarito é a letra A.

Questão 2:

Primeiramente, ao analisar o enunciado e a pergunta, podemos encontrar o valor do lado: $a = \sqrt{12100} \text{ cm}^2 = 110 \text{ cm}$. Dessa forma, temos que:

- o lado L da base da caixa é: $L = 110 - 2x$

- a altura da caixa é: $h = x$

- $110 - 2x > 0 : x < 55$ (portanto $0 < x < 55$)

Portanto, o volume da caixa de papelão é dado por: $V = L * L * h \rightarrow V = (110 - 2x)^2 * x \rightarrow V = 4x^3 - 440x^2 + 12100x$

Agora, precisamos encontrar a derivada $V'(x)$ dessa função e igualar a 0 para achar o x' e x'' . Portanto, temos: $V'(x) = 12x^2 - 880x + 12100 = 0$

$$x' = \frac{55}{3} \text{ e } x'' = 55$$

Não é possível optar pelo x'' , já que o lado da base $L = 110 - 2x$. Se $x = 55$, $L = 110 - (2 * 55) = 0$, tornando o problema inviável. Dessa forma, a medida x do lado deve ser de $\frac{55}{3} \text{ cm}$, obtendo um volume $V = 98592,59 \text{ cm}^3$.