

การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 5 : อัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อน (Magnitude Ratio & Phase Shift)

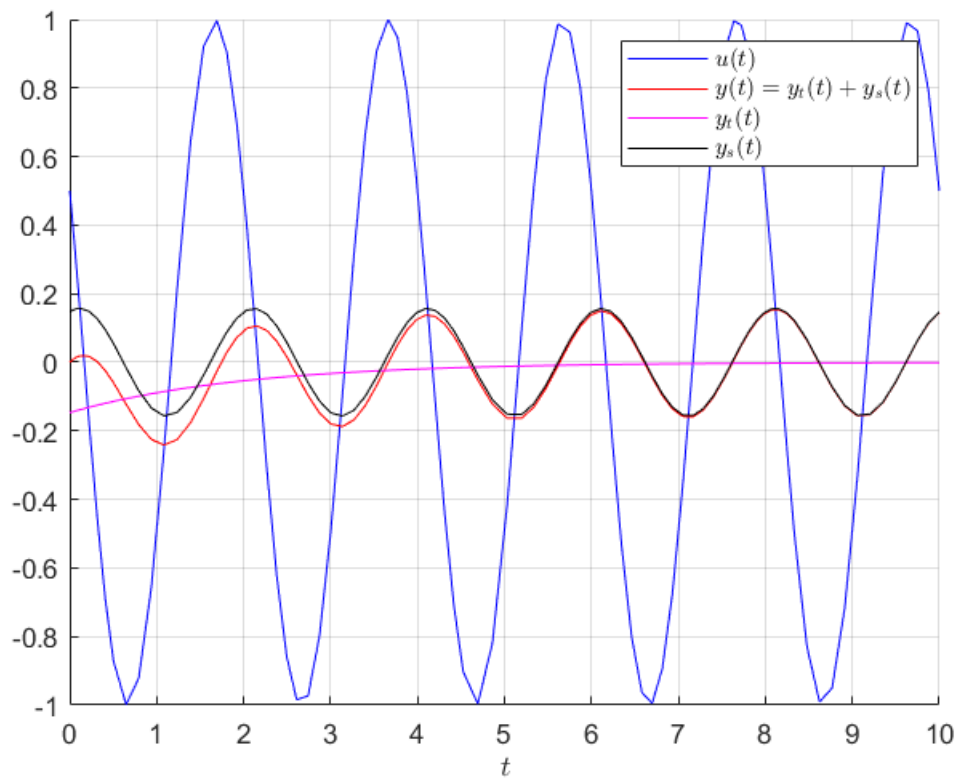
หากเรานำแนวคิดของการวิเคราะห์สัญญาณในรูปแบบของคลื่นไซน์มารวมกับระบบพลวัต เราจะสามารถศึกษาพฤติกรรมของผลตอบสนองได้ในเชิงความถี่ การป้อนอินพุตที่เป็นคลื่นไซน์ให้กับระบบพลวัตทำให้ผลตอบสนองแบบคงตัวมีลักษณะเป็นคลื่นไซน์ ส่วนผลตอบสนองแบบชั่วคราวจะเข้าสู่ศูนย์ คงที่ หรือ โดเป็นอนันต์ก็ได้ ดังนั้นเราสามารถเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$u(t) = R_{in} \cos(\omega t + \phi_{in})$$

$$y(t) = y_t(t) + R_{out} \cos(\omega t + \phi_{out})$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

```
R_in = 1;
f = 0.5;
w = 2*pi*f;
phi_in = pi/3;
u = @(t)R_in*cos(w*t+phi_in); %u(t)
t_max = 10;
tspan = [0 t_max];
y0 = 0;
w_c = 1/2;
[t,y] = ode45(@(t,y)[-w_c*y+w_c*u(t)],tspan,y0);
ax = axes;
hold(ax,'on')
grid(ax,'on')
plot(ax,t,u(t),'b')
plot(ax,t,y,'r')
plot(ax,t,-R_in*w_c/(w^2+w_c^2)*(w*sin(phi_in)+w_c*cos(phi_in))*exp(-w_c*t),'m')
R_out = R_in/sqrt(1+(w/w_c)^2);
phi_out = phi_in-atan(w/w_c);
plot(ax,t,R_out*cos(w*t+phi_out),'k')
xlabel('$t$', 'Interpreter', "latex")
legend({'$u(t)$', '$y(t)=y_t(t)+y_s(t)$', '$y_t(t)$', '$y_s(t)$'}, 'Interpreter', "latex")
```



จากภาพ เราจะสังเกตเห็นได้ว่า ผลตอบสนองแบบคงตัว $y_s(t)$ นั้นมีลักษณะเป็นคลื่นไซน์ที่มีแอมพลิจูดและมุมเฟสที่แตกต่างกับอินพุต และผลตอบสนองแบบชั่วคราวนั้นเข้าสู่ศูนย์ เราจึงวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของความถี่กับผลตอบสนองแบบคงตัวเท่านั้น

กำหนดให้อัตราส่วนขนาด (magnitude ratio) $| \cdot |$ ของฟังก์ชันถ่ายโอน G คืออัตราส่วนระหว่างแอมพลิจูดของคลื่นเอาต์พุตและคลื่นอินพุต

$$|G| = \frac{R_{\text{out}}}{R_{\text{in}}}$$

ข้อสังเกตของอัตราส่วนขนาดมีดังต่อไปนี้

1. อัตราส่วนขนาดเป็นค่าบวกเสมอเนื่องจากแอมพลิจูดของสัญญาณเป็นบวกเสมอ
2. หากอัตราส่วนขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนน้อยกว่า 1 แอมพลิจูดของเอาต์พุตจะถูกลดทอนให้น้อยลง (Attenuated)
3. หากอัตราส่วนขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนมากกว่า 1 แอมพลิจูดของเอาต์พุตจะถูกขยายให้เพิ่มขึ้น (Amplified)
4. กำลังสองของอัตราส่วนขนาดจะเท่ากับอัตราส่วนกำลังของฟังก์ชันถ่ายโอน

$$|G|^2 = \frac{R_{\text{out}}^2}{R_{\text{in}}^2}$$

ตามหลักของการวิเคราะห์สัญญาณและระบบ อัตราส่วนขนาดมักจะถูกวิเคราะห์ในหน่วยเดซิเบล (decibel) หนึ่งในสาเหตุหลักของการใช้เดซิเบลคือการวิเคราะห์อัตราส่วนที่มีช่วงกว้าง

$$|G|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(|G|)$$

ข้อสังเกตของอัตราส่วนขนาดในเดซิเบลมีดังต่อไปนี้

1. อัตราส่วนขนาดในเดซิเบลเป็นได้ทั้งบวกและลบ
2. หากอัตราส่วนขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนในเดซิเบลน้อยกว่า 0 dB แอมพลิจูดของเอาต์พุตจะถูกลดทอนให้น้อยลง
3. หากอัตราส่วนขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนในเดซิเบลมากกว่า 0 dB แอมพลิจูดของเอาต์พุตจะถูกขยายให้เพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ เรายังสามารถวิเคราะห์ เฟสการเลื่อน (phase shift)

$$\angle(G) = \phi_{\text{out}} - \phi_{\text{in}}$$

ข้อสังเกตของเฟสการเลื่อนมีดังต่อไปนี้

1. เฟสการเลื่อนมีค่าอยู่ในช่วง $[-\pi, \pi]$ [rad]
2. หากเฟสการเลื่อนมีค่าเป็นบวก สัญญาณเอาต์พุตจะถูกทำให้ล่าช้า (Lagging)
3. หากเฟสการเลื่อนมีค่าเป็นลบ สัญญาณเอาต์พุตจะถูกทำให้นำหน้า (Leading)