ความน่าจะเป็นและสัญญาณสุ่ม (Probability & Random Signal)

ตอนที่ 1 : ความไม่แน่นอนในกรณีที่แย่ที่สุด (Worst case Uncertainty)

ความไม่แน่นอน (uncertainty) เห็นพบได้ในระบบทางกายภาพทั่วไป บางระบบนั้นอาจจะได้รับผลกระทบจากความไม่แน่นอนมากกว่าระบบอื่น นั่นหมายความว่าผลตอบสนองของระบบนั้นสามารถเป็นได้หลากหลาย เราจึงจำเป็นต้องระบุความไม่แน่นอนในระบบเท่าที่ทำได้ และ ออกแบบตัวกรอง ระบบประมาณค่า หรือ ระบบควบคุม ที่จัดการความไม่แน่นอนนั้น

หนึ่งค่าที่บ่งบอกถึงลักษณะสำคัญของระบบคือพารามิเตอร์ (parameter) ซึ่งเป็นค่าคงที่ในระบบ ปัญหาในการวิเคราะห์หรือการออกแบบคือการที่เราไม่ทราบค่าที่แน่ชัดของค่าคงที่เหล่านี้ ดังนั้นเราสามารถเขียนค่าคงที่และบอกขอบเขตความไม่แน่นอนของค่าเหล่าได้ดังนี้

$$e = \hat{e} \pm \delta e$$

โดยที่

e คือค่าของพารามิเตอร์

$\hat{e}$ คือค่าประมาณที่ดีที่สุด (best estimate)

δe คือค่าความไม่แน่นอนสัมบูรณ์ที่มีค่ามากที่สุดซึ่งมีหน่วยเดียวกันกับค่า $\hat{e}$ ซึ่งจะเป็นค่าบวกเสมอ

ความไม่แน่นอนที่ดเขียนในรูปบวกลบนั้นระบุถึงกรณีที่แย่ที่สุดที่ (worst case) จะเกิดขึ้นได้จริง ดังนั้นค่าที่มีความไม่แน่นอนนี้จะอยู่ในช่วง $[\hat{e} - \delta\, e, \hat{e} + \delta\, e]$

การอธิบายความไม่แน่นอนในลักษณะดังกล่าวมีข้อดีในเรื่องของการออกแบบและวิเคราะห์ให้ครอบคลุม เราสามารถออกแบบระบบที่คงทน (robust) และทำงานอยู่ในช่วงได้

การบวกลบกันของความไม่แน่นอน

กำหนดให้ชิ้นงาน 2 ชิ้นวางต่อกันโดยที่ชิ้นงานแรกมีความยาวเท่ากับ $\hat{e}_1 \pm \delta e_1$ ชิ้นงานอีกชิ้นหนึ่งมีความยาวเท่ากับ $\hat{e}_2 \pm \delta e_2$ ดังนั้นหากเราเอาชิ้นงานวางต่อกัน ความยาวสูงสุดของชิ้นงานที่เป็นไปได้ $e_{\max}$ สามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$e_{\max} = \left(\hat{e}_1 + \delta e_1\right) + \left(\hat{e}_2 + \delta e_2\right)$$

ความยาวต่ำสุดของชิ้นงานที่เป็นไปได้ $e_{\min}$ เป็นดังต่อไปนี้

$$e_{\min} = \left(\hat{e}_1 - \delta e_1\right) + \left(\hat{e}_2 - \delta e_2\right)$$

หากเราเขียนอยู่ในรูป $\pm$ เราจะสามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
e &= \left(\hat{e}_1 + \hat{e}_2\right) \pm \frac{e_{\max} - e_{\min}}{2} \\
e &= \left(\hat{e}_1 + \hat{e}_2\right) \pm \frac{\left(\hat{e}_1 + \delta e_1\right) + \left(\hat{e}_2 + \delta e_2\right) - \left(\hat{e}_1 - \delta e_1\right) - \left(\hat{e}_2 - \delta e_2\right)}{2} \\
e &= \left(\hat{e}_1 + \hat{e}_2\right) \pm \frac{2(\delta e_1 + \delta e_2)}{2} \\
e &= \left(\hat{e}_1 + \hat{e}_2\right) \pm (\delta e_1 + \delta e_2)
\end{aligned}$$

เมื่อนำค่ามาบวกรวมกัน ความไม่แน่นอนของแต่ละค่าก็จะเอามารวมกันด้วยเช่นกัน

ในกรณีที่เรามีชิ้นงานที่มีความยาว $\hat{e}_1 \pm \delta e_1$ เราทำการใช้เครื่องมือตัดชิ้นส่วนโดยวัดจากขอบไปเป็นความยาว $\hat{e}_2 \pm \delta e_2$ เราจะหาความยาวของชิ้นงานที่โดนตัดได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
e_{\max} &= \left(\hat{e}_1 + \delta e_1\right) - \left(\hat{e}_2 - \delta e_2\right) \\
e_{\min} &= \left(\hat{e}_1 - \delta e_1\right) - \left(\hat{e}_2 + \delta e_2\right)
\end{aligned}
$$

หากเราเขียนอยู่ในรูป $\pm$ เราจะสามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
e &= \left(\hat{e}_1 - \hat{e}_2\right) \pm \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \\
e &= \left(\hat{e}_1 - \hat{e}_2\right) \pm \frac{\left(\hat{e}_1 + \delta e_1\right) - \left(\hat{e}_2 - \delta e_2\right) - \left(\hat{e}_1 - \delta e_1\right) + \left(\hat{e}_2 + \delta e_2\right)}{2} \\
e &= \left(\hat{e}_1 - \hat{e}_2\right) \pm \frac{2(\delta e_1 + \delta e_2)}{2} \\
e &= \left(\hat{e}_1 - \hat{e}_2\right) \pm (\delta e_1 + \delta e_2)
\end{aligned}
$$

ถึงแม้ว่าเราจะนำค่าสองค่ามาลบกัน แต่ความไม่แน่นอนจะถูกรวมกัน

การคูณและหารกันของความไม่แน่นอน

แทนที่เราจะวิเคราะห์ความไม่แน่นอนในเชิงสัมบูรณ์ เราสามารถวิเคราะห์ความไม่แน่นอนแบบสัมพัทธ์ $\delta^r e$ ได้ (relative uncertainty) ซึ่งสามารถคำนวณได้ตามความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$
\delta^r e = \frac{\delta e}{|\hat{e}|}
$$

โดยที่ $\hat{\delta} e$ คือความไม่แน่นอนสัมพัทธ์ของค่า e

สมมุติว่าแผนชิ้นงานถูกกำหนดมาให้มีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเท่ากับ $\hat{e}_1 \pm \delta e_1$ และมีความยาวเท่ากับ $\hat{e}_2 \pm \delta e_2$ หากเราต้องการหาพื้นที่หรือผลคูณระหว่างความยาวและความกว้าง เราสามารถหาความไม่แน่นอนจากการรวมกันของความไม่แน่นอนสัมพัทธ์ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$
\frac{\delta e}{|\hat{e}|} = \frac{\delta e_1}{|\hat{e}_1|} + \frac{\delta e_2}{|\hat{e}_2|}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{e} \pm \delta e &= \left(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2\right) \pm \left|\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2\right| \cdot \frac{\delta e_1}{|\hat{e}_1|} + \left|\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2\right| \frac{\delta e_2}{|\hat{e}_2|} \\
\hat{e} \pm \delta e &= \left(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2\right) \pm \left|\frac{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}{\hat{e}_1}\right| \cdot \delta e_1 + \left|\frac{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}{\hat{e}_2}\right| \cdot \delta e_2 \\
\hat{e} \pm \delta e &= \left(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2\right) \pm \left|\hat{e}_2\right| \cdot \delta e_1 + \left|\hat{e}_1\right| \cdot \delta e_2
\end{aligned}
$$

สมมุติว่าเราต้องการคำนวณความชันของเส้นโดยกำหนดความต่างในแนวตั้งเป็น $e_1 \pm \delta e_1$ และ ความต่างในแนวนอนเป็น $e_2 \pm \delta e_2$ เราสามารถหาผลหารได้ในลักษณะเดียวกันกับผลคูณซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$
\frac{\delta e}{|\hat{e}|} = \frac{\delta e_1}{|\hat{e}_1|} + \frac{\delta e_2}{|\hat{e}_2|}
$$

$$\hat{e} \pm \delta e = \left(\frac{\hat{e}_1}{\hat{e}_2}\right) \pm \left|\frac{\hat{e}_1}{\hat{e}_2}\right| \cdot \frac{\delta e_1}{|\hat{e}_1|} + \left|\frac{\hat{e}_1}{\hat{e}_2}\right| \cdot \frac{\delta e_2}{|\hat{e}_2|}$$

$$\hat{e} \pm \delta e = \left(\frac{\hat{e}_1}{\hat{e}_2}\right) \pm \left|\frac{\hat{e}_1}{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}\right| \cdot \delta e_1 + \left|\frac{\hat{e}_1}{\hat{e}_2^2}\right| \cdot \delta e_2$$

$$\hat{e} \pm \delta e = \left(\frac{\hat{e}_1}{\hat{e}_2}\right) \pm \frac{1}{\hat{e}_2^2} \cdot \left(|\hat{e}_2| \cdot \delta e_1 + |\hat{e}_1| \cdot \delta e_2\right)$$

ผลรวมเชิงเส้น (Linear Combination)

กำหนดให้ค่าที่ต้องคำนวณสามารถเขียนในรูปขงผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ได้ดังต่อไปนี้

$$e = a_1 \cdot \left(\hat{e}_1 \pm \delta e_1\right) + a_2 \cdot \left(\hat{e}_2 \pm \delta e_2\right) + \cdots$$

$$e = \sum_{k=1}^{n} \left\{a_k \cdot \left(\hat{e}_k \pm \delta e_k\right)\right\}$$

โดยที่ a_k อาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้

เราสามารถหาค่าความคลาดเคลื่อนได้ดังต่อไปนี้

$$e = \sum_{k=1}^{n} \left\{a_k \cdot \hat{e}_k\right\} \pm \sum_{k=1}^{n} \left\{|a_k| \cdot \delta e_k\right\}$$

การยกกำลังของความไม่แน่นอน

หากเรามีค่าที่มีความไม่แน่นอนที่โดนยกกำลัง เราสามารถหาความไม่แน่นอนได้โดยทำการคูณความไม่แน่นอนสัมพัทธ์เดิมด้วยเลขยกกำลัง

$$p = (\hat{e} \pm \delta e)^n$$

$$\frac{\delta p}{|\hat{p}|} = |n| \frac{\delta e}{|\hat{e}|}$$

$$\delta p = |n\hat{e}^{n-1}|\delta e$$

การประมาณความไม่แน่นอนด้วยอนุพันธ์

ในกรณีที่ความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น เราสามารถประมาณความไม่แน่นอนจากนิยามของอนุพันธ์ กำหนดให้ความสัมพันธ์เป็นดังต่อไปนี้

$$p = f(e)$$

เราะสามารถประมาณความไม่แน่นอนได้โดยใช้นิยามดังต่อไปนี้

$$\frac{\delta p}{\delta e} \approx \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, e}(f(e))\right|_{e=\hat{e}}$$

ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$p \approx \hat{e} \pm \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, e}(f(e))\right|_{e=\hat{e}} \cdot \delta e$$

เข้น

$$
\begin{aligned}
\cos(p) &= \cos(\hat{e} \pm \delta e) \\
\cos(p) &= \cos(\hat{e}) \pm \delta p = \cos(\hat{e}) \pm \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,e}\cos(e)\right|_{e=\hat{e}} \cdot \delta e \\
\cos(p) &= \cos(\hat{e}) \pm \left|-\sin(\hat{e})\right| \cdot \delta e
\end{aligned}
$$

การประยุกต์ใช้ความไม่แน่นอนของระบบ

เมื่อกล่าวถึงการจำลอง (simulation) คนส่วนมากมักจะคิดถึงการจำลองในอุดมคติที่มีค่าพารามิเตอร์ที่ชัดเจน แต่**ในโลกความเป็นจริง เราอาจจะไม่สามารถทราบค่าที่ชัดเจนของพารามิเตอร์เหล่านี้ เพื่อที่จะจำลองให้มีลักษณะที่ครอบคลุมหรือใกล้เคียงกับการทดลองจริง เราสามารถประยุกต์ใช้ความไม่แน่นอนนี้ได้** หากเราสามารถกำหนดช่วงของพารามิเตอร์เหล่านี้ได้ เราจะสามารถจำลองเป็นจำนวนหลายครั้งได้โดยเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ในช่วงความไม่แน่นอนที่คำนวณมา

ตัวอย่างที่ 1 : การจำลองพลวัต

ตัวอย่างนี้เป็นการทดลองเพื่อวัดหาเวลาที่ทำให้วัตถุหยุดจากความเร็วเชิงมุมที่คงที่ ω^*

วัตถุที่ถูกทำให้หมุนเป็นวัตถุทรงปริซึมสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งสามารถหาความเฉื่อยในแนวแกนหมุนตามสมการดังต่อไปนี้

$$
J = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) + ml^2
$$

โดยที่

a และ b เป็นความกว้างและความยาวของวัตถุ $[m]$

l เป็นระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวลและแกนในการหมุน $[m]$

m เป็นมวลของวัตถุ $[\mathrm{kg}]$

นอกจากนี้ ระบบที่โดนหมุนได้เชื่อมต่อกับตลับลูกปืนที่มีความฝืดเชิงมุมเท่ากับ B $\left[\frac{\mathrm{N\cdot m\cdot s}}{\mathrm{rad}}\right]$

และมีพลวัตตามสมการดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
J \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\omega) &= -B \cdot \omega \\
\omega(0) &= \omega^*
\end{aligned}
$$

เราจะนิยามระยะเวลาในการหยุดของวัตถุ T_s ให้เป็นระยะเวลาที่ความเร็วของวัตถุมีความเร็วเหลือแค่ 2% ของความเร็วเริ่มต้น

$$
\omega(T_s) = 0.02 \cdot \omega^*
$$

นอกจากลักษณะและความสัมพันธ์ของระบบและพารามิเตอร์ที่บอกมา ค่าต่างๆและความไม่แน่นอนถูกกำหนดมาดังนี้

$$
\begin{bmatrix}
\text{พารามิเตอร์} & \text{ค่าของพารามิเตอร์} & \text{หน่วย} \\
\omega^* & 60 \pm 2.5 & \mathrm{rpm} \\
B & 0.067 \pm 0.034 & \dfrac{\mathrm{N \cdot m \cdot s}}{\mathrm{rad}} \\
m & 1.343 \pm 0.001 & \mathrm{kg} \\
a & 0.35 \pm 0.005 & \mathrm{m} \\
b & 0.25 \pm 0.005 & \mathrm{m} \\
l & 0.05 \pm 0.005 & \mathrm{m}
\end{bmatrix}
$$

หนึ่งในวิธีที่เราสามารถจำลองระบบให้ครอบคลุมได้คือการกำหนดให้พารามเตอร์มีค่าที่เป็นได้

```
N = 11;
w_0 = 60+2.5*linspace(-1,1,N);
B = 0.067+0.034*linspace(-1,1,N);
m = 1.343+0.001*linspace(-1,1,N);
a = 0.35+0.005*linspace(-1,1,N);
b = 0.25+0.005*linspace(-1,1,N);
l = 0.05+0.005*linspace(-1,1,N);
```

หากเรากำหนดค่าพารามิเตอร์ในรูปแบบดังกล่าว เราจะต้องจำลองทั้งหมด 11^6 หรือมากกว่า 1.7 ล้านครั้ง แต่ถ้าหากเราหาความไม่แน่นอนและรวมพารามิเตอร์บางตัวได้ เราจะสามารถลดการคำนวณได้อีก เราทำการย้ายพารามิเตอร์ของระบบให้เป็นดังต่อไปนี้

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\omega) = -\frac{1}{\tau}\cdot\omega
$$
$$
\tau = \frac{J}{B}
$$

เราคำนวณค่าความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ k ได้ดังต่อไปนี้

$$
\delta\tau = \hat{\tau}\cdot\left(\frac{\delta J}{\hat{J}} + \frac{\delta B}{\hat{B}}\right)
$$
$$
\delta J = \frac{1}{12}\delta\{m(a^2+b^2)\} + \delta\{ml^2\}
$$
$$
\delta J = \frac{1}{12}\cdot\left[\hat{m}\cdot\delta\{(a^2+b^2)\} + \left(\hat{a}^2+\hat{b}^2\right)\cdot\delta m\right] + \left[\hat{m}\cdot\delta\{l^2\} + \hat{l}^2\cdot\delta m\right]
$$
$$
\delta J = \frac{1}{12}\cdot\left[\hat{m}\cdot\left(2\hat{a}\cdot\delta a + 2\hat{b}\cdot\delta b\right) + \left(\hat{a}^2+\hat{b}^2\right)\cdot\delta m\right] + \left[\hat{m}\cdot 2\hat{l}\cdot\delta l + \hat{l}^2\cdot\delta m\right]
$$
$$
\delta J = \left(\frac{\hat{m}\hat{a}}{6}\right)\cdot\delta a + \left(\frac{\hat{m}\hat{b}}{6}\right)\cdot\delta b + \left(\frac{\hat{a}^2+\hat{b}^2}{12} + \hat{l}^2\right)\cdot\delta m + \left(2\hat{m}\hat{l}\right)\cdot\delta l
$$

```
w_0_e = 60;
B_e = 0.067;
m_e = 1.343;
a_e = 0.35;
b_e = 0.25;
l_e = 0.05;

dw = 2.5;
dB = 0.034;
dm = 0.001;
da = 0.005;
```

```
db = 0.005;
dl = 0.005;

dJ = (m_e*a_e/6)*da+(m_e*b_e/6)*db+((a_e^2+b_e^2)/12+l_e^2)*dm+(2*m_e*l_e)*dl;
J_e = (m_e*(a_e^2+b_e^2))/12+m_e*l_e^2;
tau_e = J_e/B_e;
dtau = tau_e*(dJ/J_e+dB/B_e);
```

ผลที่ได้คือค่า k ที่มีค่าเท่ากับ $2.7845 \pm 1.5705\ [\mathrm{s}^{-1}]$

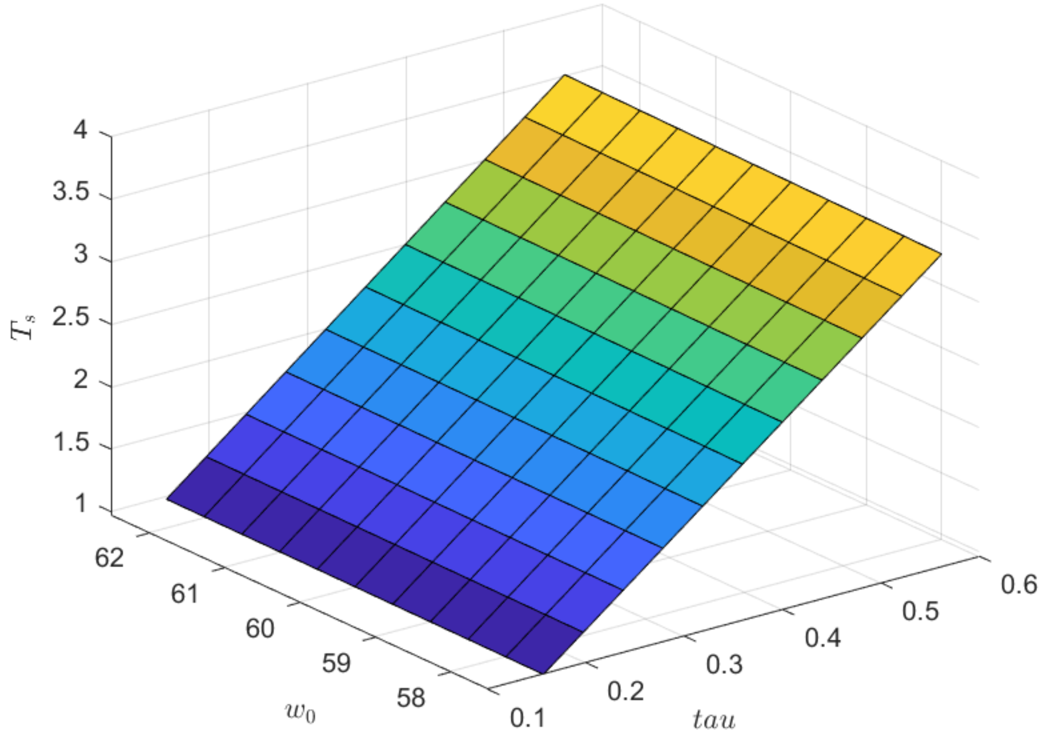
$$\begin{bmatrix} \text{พารามิเตอร์} & \text{ค่าของพารามิเตอร์} & \text{หน่วย} \\ \omega^* & 60 \pm 2.5 & \mathrm{rpm} \\ k & 0.3591 \pm 0.2026 & \mathrm{s} \end{bmatrix}$$

```
N = 11;
w_0 = 60+2.5*linspace(-1,1,N);
tau = 0.3591+0.2026*linspace(-1,1,N);
```

เราจะสังเกตได้ว่า **พารามิเตอร์ที่ไม่แน่นอนนั้นถูกลดจำนวนจาก 6 ตัวเหลือแค่ 2 ตัว ทำให้ตำนวนครั้งในการจำลองลดลงเหลือ** 121 **ครั้ง** หากการจำลองหนึ่งครั้งต้องใช้เวลา $0.1\ [\mathrm{s}]$ **เดิมทีเราต้องใช้เวลา 49 ชั่วโมงในการจำลอง แต่การลดจำนวนตัวแปรทำให้การจำลองลดเวลาเหลือแค่ 12 วินาที**

```
N = 11;
w_e = 60;
w_0 = 60+2.5*linspace(-1,1,N);
tau_e = 0.3591;
tau = 0.3591+0.2026*linspace(-1,1,N);
% at2percent = @(t,y,w_e)deal(y==0.002*w_e,1,-1);
opt = odeset('Events',@(t,y)at2percent(t,y,w_e));
t_max = 10*tau_e;
tspan = [0 t_max];
T_s = zeros(N,N);
for i = 1:N
    for j = 1:N
        [t,y] = ode45(@(t,y)-y/tau(j),tspan,w_0(i),opt);
        T_s(i,j) = t(end);
    end
end

[T,W] = meshgrid(tau,w_0);
clf
ax = axes;
surf(ax,T,W,T_s)
xlabel('$tau$','Interpreter',"latex")
ylabel('$w_0$','Interpreter',"latex")
zlabel('$T_s$','Interpreter',"latex")
```




```
T_mean = mean(T_s,'all');
T_max = max(T_s,[],'all');
T_min = min(T_s,[],'all');
```

จากจำลอง 121 ครั้ง ค่าเฉลี่ยที่ $2.2319\ [\mathrm{s}]$ ค่าที่มากที่สุดที่ $3.5139\ [\mathrm{s}]$ และค่าที่น้อยที่สุดที่ $0.9661\ [\mathrm{s}]$ ซึ่งเราเขียนเป็นความไม่แน่นอนได้ที่ $2.2319 \pm 1.2820\ [\mathrm{s}]$ สาเหตุที่ความไม่แน่นอนสัมพันธ์อยู่ที่ $57.44\ \%$ ก็เพราะว่าความไม่แน่นอนของค่าความฝืดมีความไม่แน่นอนสัมพัทธ์ที่สูงอยู่แล้ว (50.75%) ดังนั้นผลจากการจำลองเลยมีความไม่แน่นอนที่สูงตามเช่นกัน

```
function [condition,isTerminal,direction] = at2percent(t,y,w_e)
condition = y<=0.002*w_e;
isTerminal = 1;
direction = 1;
end
```