ความน่าจะเป็นและสัญญาณสุ่ม (Probability & Random Signal)

ตอนที่ 7 : เวกเตอร์สุ่ม (Random Vector)

ในกรณีที่เรามีตัวแปรสุ่มมากกว่าหนึ่งตัว **เราสามารถจัดเรียงตัวแปรเหล่านี้ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์** เราจะกำหนดให้ ตัวแปรสุ่มมีทั้งหมด n ตัว และกำหนดให้เวกเตอร์สุ่ม (random vector) $\mathbf{X}$ ประกอบไปด้วยสมาชิกดังนี้

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

หากตัวแปรสุ่มแต่ละตัวเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง เราสามารถจำลองความไม่แน่นอนของเวกเตอร์ดังกล่าวได้ว่าการแจกแจงซึ่งมีหลากหลายรูปแบบ ซึ่งล้วนแต่ต้องเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\mathrm{P}(\mathbf{X} \in A) = \sum_{\mathbf{x} \in A} \cdots \sum f_X(\mathbf{x})$$

โดยที่

$$\sum_{\text{for all } \mathbf{x}} \cdots \sum f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1$$
$$0 \le f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \le 1$$

หากตัวแปรสุ่มแต่ละตัวเป็นแบบต่อเนื่อง เราสามารถเขียนฟังก์ชันแจกแจงได้ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\mathrm{P}(\mathbf{X} \in A) = \int^{A} \left\{ \cdots \int \{f_X(x_1, \cdots, x_n)\} \, \mathrm{d}\, x_1 \cdots \right\} \mathrm{d}\, x_n$$

โดยที่

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \{f_X(x_1, \cdots, x_n)\} \, \mathrm{d}\, x_1 \cdots \right\} \mathrm{d}\, x_n = 1$$
$$0 \le f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \le 1$$

ถึงแม้เวกเตอร์สุ่มเป็นเวกเตอร์หลัก **(column) ในการเขียนสมการคณิตศาสตร์ แต่ในการเขียนโปรแกรมส่วนใหญ่ เรามักจะเรียกเวกเตอร์ให้เป็นแนวนอนเพื่อที่จะให้ค่าของเวกเตอร์นั้นเรียงกันได้ในแนวตั้ง** เช่น กำหนดให้ตัวแปรสุ่มมีทั้งหมด 3 ตัวซึ่งจะถูกเก็บค่า/สุ่มค่าทั้งหมด 4 ครั้ง เราจะได้ชุดข้อมูลในรูปแบบดังกล่าว

$$\text{ข้อมูล} : \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{(1)} & \mathbf{X}_{(2)} & \mathbf{X}_{(3)} & \mathbf{X}_{(4)} \end{bmatrix}$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นโปรแกรมได้ดังนี้

```
X = rand(4,3) % uniform distribution between 0 & 1
```

```
X = 4×3
    0.4844    0.8296    0.2297
    0.0274    0.5490    0.5741
    0.9214    0.1532    0.9114
    0.5770    0.2602    0.5215
```

ค่าคาดหวังและเมตริกซ์แปรปรวน

ไม่ว่าการกระจายตัวจะเป็นอย่างไร เราสามารถที่จะจำลองลักษณะความไม่แน่นอนจากคุณลักษณะต่างๆได้ หนึ่งในนั้นก็คือ**ค่าคาดหวังของเวกเตอร์สุ่ม**ซึ่งเท่ากับเวกเตอร์ของค่าคาดหวังของแต่ละสมาชิกในเวกเตอร์

$$\mu_{\mathbf{X}} = E\{\mathbf{X}\} = \begin{bmatrix} E\{X_1\} \\ \vdots \\ E\{X_n\} \end{bmatrix}$$

นอกจากนี้ เรายังสามารถอธิบายความแปรปรวนของเวกเตอร์สุ่มได้ เช่นเดียวกันกับกรณีของตัวแปรสุ่มสองตัว เราจำเป็นที่จะต้องจับคู่ระหว่างตัวแปรสุ่มเพื่อคำนวณหาค่าแปรปรวนร่วมเกี่ยวและยังต้องหาค่าแปรปรวนของแต่ละตัวแปรสุ่มอีกด้วย

หากเรามีจำนวนตัวแปรสุ่มทั้งหมด n ตัวด้วยกัน เราจะมีค่าแปรปรวนทั้งหมด n ตัว $(\sigma_{X_i}^2)$ และค่าแปรปรวนร่วมเกี่ยวเป็นจำนวนทั้งหมด $n \cdot (n-1)$ ตัว $(\sigma_{X_i X_j})$ เพื่อความสะดวกในการเขียนอธิบาย **เราสามารถจัดค่าแปรปรวนทั้งหมดนี้ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ดังต่อไปนี้**

$$\mathbf{K_X} = \mathrm{Cov}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_n} \\ \sigma_{X_1X_2} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_1X_n} & \sigma_{X_2X_n} & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์นี้ถูกเรียกว่า เมตริกซ์ค่าแปรปรวน-ค่าแปรปรวนร่วมเกี่ยว หรือเรียกสั้นๆว่า **เมติกซ์ค่าแปรปรวนร่วมเกี่ยว** (variance-covariance matrix/covariance matrix) ซึ่งเมตริกซ์นี้จะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

$$\mathbf{v}^\top \cdot \mathbf{K_X} \cdot \mathbf{v} \geq 0$$

$$\mathbf{K_X} = \mathbf{K_X}^\top$$

$$\mathrm{Cov}\{\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b}\} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{K_X} \cdot \mathbf{A}^\top$$

สองสมบัติแรกแสดงให้เห็นว่าเราไม่สามารถที่จะเลือกจำลองเมตริกซ์ค่าแปรปรวนแบบสุ่มสี่สุ่มห้าได้

หากเรามีชุดข้อมูล เราสามารถที่จะใช้ฟังก์ชัน cov ของ MATLAB ในการหาเมตริกซ์ค่าแปรปรวนนี้ได้เลย

```
X_U = rand(100,2);
X = [X_U 2*X_U+0.1*(rand(size(X_U))-0.5)];

K = cov(X)
```

```
K = 4×4
    0.0835   -0.0130    0.1675   -0.0251
   -0.0130    0.0865   -0.0272    0.1725
    0.1675   -0.0272    0.3370   -0.0530
   -0.0251    0.1725   -0.0530    0.3450
```

```
R = corrcoef(X); % เมตริกซ์สหสัมพันธ์
```

การแจกแจงแบบปรกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)

การแจกแจงที่มักจะถูกใช้บ่อยครั้งในการจำลองความไม่แน่นอนที่มีหลายตัวแปรคือการแจกแจงแบบปรกติสำหรับหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) ซึ่งสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{K}_{\mathbf{X}}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{x}})^{\top}\mathbf{K}_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{x}})}$$

การแจกแจงนี้ถูกใช้เป็นแบบจำลองความไม่แน่นอนของพฤติกรรมหลายอย่างในระบบหุ่นยนต์เช่นความไม่แน่นอนของตำแหน่งในพื้นที่ 2 มิติ หรือความไม่แน่นอนของค่าต่างๆที่อ่านได้จากเซนเซอร์

เราสามารถใช้ฟังก์ชัน mvnrnd ของ MATLAB ในการสุ่มค่าของตัวแปรดังต่อไปนี้

```
x_est = [3;4];
var = [2;1];
covar = 2*sqrt(abs(prod(var)))*(rand-1/2);
P = diag(var)+[0 covar; covar 0]; % must be semi-positive definite
X = mvnrnd(x_est,P,100);
clf
ax = axes;
hold(ax,'on')
grid(ax,'on')
plot(ax,X(:,1),X(:,2),'+')
axis(ax,'equal')
```