ความน่าจะเป็นและสัญญาณสุ่ม (Probability & Random Signal)

ตอนที่ 5 : ตัวแปรสุ่มหลายตัวแปร (Multiple Random Variables)

ความน่าจะเป็นร่วม (Joint Probability)

เราใช้ตัวแปรสุ่มหนึ่งตัวในการอธิบายเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ในกรณีต่างๆ แต่**เราสามารถอธิบายเหตุการณ์หลายๆเห็นการที่เกิดขึ้นพร้อมกันโดยใช้ตัวแปรสุ่มมากกว่าหนึ่งตัว** เช่น เหตุการณ์ที่ฟ้าครึ้มและฝนตกพร้อมกัน หรือ เหตุการณ์ที่ไพ่ใบแรกเป็น King และไพ่ใบที่สองเป็น Queen **เราสามารถใช้ตรรกศาสตร์ในการอธิบายเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นพร้อมกัน หากกำหนดให้เหตุการณ์แรกเป็น E_1 และเหตุการณ์ที่สองเป็น E_2** เราจะเขียนเหตุการณ์และความน่าจะเป็นที่ทั้งสองเหตุการณ์เกิดขึ้นพร้อมกันได้ดังต่อไปนี้

$$E = E_1 \wedge E_2$$
$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(E_1 \wedge E_2)$$

เราเรียกความน่าจะเป็นนี้ว่าความน่าจะเป็นร่วม (joint probability) ซึ่งความสัมพันธ์ของความน่าจะเป็นสามารถสรุปเป็นตารางได้ดังต่อไปนี้

เหตุการณ์	E_1	$\neg E_1$	$E_1 \vee \neg E_1 = \text{True}$
E_2	$\mathrm{P}(E_1 \wedge E_2)$	$\mathrm{P}(\neg E_1 \wedge E_2)$	$\mathrm{P}(E_2) = \mathrm{P}(E_1 \wedge E_2) + \mathrm{P}(E_1 \wedge \neg E_2)$
$\neg E_2$	$\mathrm{P}(E_1 \wedge \neg E_2)$	$\mathrm{P}(\neg E_1 \wedge \neg E_2)$	$\mathrm{P}(\neg E_2) = P(\neg E_1 \wedge E_2) + \mathrm{P}(\neg E_1 \wedge \neg E_2$
$_2 \vee \neg E_2 = \text{True}$	$\mathrm{P}(E_1) = P(E_1 \wedge E_2) + \mathrm{P}(E_1 \wedge \neg E_2)$	$\mathrm{P}(\neg E_1) = P(\neg E_1 \wedge E_2) + \mathrm{P}(\neg E_1 \wedge \neg E_2)$	$\mathrm{P}(E_1) + \mathrm{P}(\neg E_1) = \mathrm{P}(E_2) + \mathrm{P}(\neg E_2) =$

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability)

ในหลายครั้ง **เราสามารถที่จะสังเกตเหตุการณ์ (observe) เพื่อใช้ในการคาดเดาว่าอีกเหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้นหรือไม่** เช่น ความน่าจะเป็นที่มีคนมาเยี่ยมบ้านเมื่อเราได้ยินเสียงสุนัขที่บ้านเห่า หรือ ความน่าจะเป็นที่อาชญากรรมจะเกิดขึ้น โดยที่เราเห็นโคนันกับแก๊งค์นักสืบเยาวชนในบริเวณนั้น

ความน่าจะเป็นแบบดังกล่าวถูกเรียกว่า **ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข** (conditional probability)

ความน่าจะเป็นแบบเงื่อนไขนี้สามารถถูกคำนวณได้จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{P}(E_1|E_2) = \frac{\mathrm{P}(E_1 \wedge E_2)}{\mathrm{P}(E_2)}$$

โดยที่

$\mathrm{P}(E_1|E_2)$ คือความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ E_1 เกิดขึ้นโดยกำหนดให้ เหตุการณ์ E_2 เกิดขึ้น

$\mathrm{P}(E_1 \wedge E_2)$ คือความน่าจะเป็นร่วมเหตุการณ์ E_1 เกิดขึ้นพร้อมกับ เหตุการณ์ E_2

จากตารางและนิยามของความน่าเป็นแบบเงื่อนไข เราสามารถหาความสัมพันธ์ของความน่าจะเป็นดังกล่าวได้

$$\mathrm{P}(E_1) = \mathrm{P}(E_1 \wedge E_2) + \mathrm{P}(E_1 \wedge \neg E_2) = \mathrm{P}(E_1|E_2) \cdot \mathrm{P}(E_2) + \mathrm{P}(E_1|\neg E_2) \cdot \mathrm{P}(\neg E_2)$$

นอกจากนี้ **เราสามารถหาความสัมพันธ์ของความน่าจะเป็นแบบเงื่อนไข ได้ในรูปของทฤษฎีของ (Bayes' theorem)** ได้ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{P}(E_1|E_2) = \frac{\mathrm{P}(E_2|E_1) \cdot \mathrm{P}(E_1)}{\mathrm{P}(E_2)} = \frac{\mathrm{P}(E_2|E_1) \cdot \mathrm{P}(E_1)}{\mathrm{P}(E_2|E_1) \cdot \mathrm{P}(E_1) + \mathrm{P}(E_2|\neg E_1) \cdot \mathrm{P}(\neg E_1)}$$

ตัวอย่างที่ 1 : Am I being robbed ?

ณ ธนาคารเล็กๆแหน่งหนึ่ง นายธนาคารได้จ้างรปภ.คนใหม่ที่มีประสิทธิภาพสูง ถ้าไม่เกิดเหตุการณ์ปล้นในธนาคารภายในหนึ่งกะ นายรปภ.คนดังกล่าวจะมีโอกาสหลับที่ 1% ($S = 0$ คือรปภ. ไม่หลับ $S = 1$ คือรปภ. หลับ) จะอย่างไรก็ตาม นายธนาคารเป็นคนรอบคอบ เขาได้วิเคราะห์ข้อมูลจากธนาคารสาขาอื่นๆ ทำให้เขาทราบว่าความน่าจะเป็นที่ธนาคารจะโดนปล้นต่อหนึ่งกะคือ 10% ($R = 0$ คือไม่โดนปล้น $R = 1$ คือโดนปล้น)

ในรถตู้ที่อยู่บนถนนถัดไปมีกลุ่มโจรกำลังวางแผนโจรกรรมกับธนาคารแห่งนี้ โจรกลุ่มนี้ตัดสินใจที่จะใช้ลูกดอกยาสลบซึ่งมีผลทำให้คนหลับได้ทันทีแต่มือปืนของฝ่ายโจรบอกกับคนวางแผนว่าเขาอาจจะเผลอยิงโดนหัวเข็มขัดหรือสิ่งของอื่นๆได้ซึ่งโอกาสในการยิงโดนรปภ.จริงๆคือ 95% กล่าวอีกอย่างคือ มีโอกาส 95% ที่รปภ.จะหลับถ้าเกิดการปล้น

เมื่อนายธนาคารถึงเวลาออกมาตรวจเช็คงาน นายธนาคารเห็นสภาพรปภ.กำลังนั่งหลับอยู่ คำถามคือความน่าจะเป็นที่ธนาคารโดนปล้นอยู่เป็นเท่าไหร่

คำถามที่ถามมานั้นถามถึงความน่าจะเป็นแบบเงื่อนไขซึ่งสามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{P}(R = 1 | S = 1) : \text{ความน่าจะเป็นที่ธนาคารกำลังโดนปล้นเมื่อเห็นว่ารปภ. หลับอยู่}$$

เราสามารถใช้ความสัมพันธ์และทฤษฎีของเบย์ในการคำนวณหา ความน่าจะเป็นที่ธนาคารกำลังโดนปล้นเมื่อเห็นว่ารปภ. หลับอยู่ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(R = 1 | S = 1) &= \frac{\mathrm{P}(R = 1 \wedge S = 1)}{\mathrm{P}(S = 1)} = \frac{\mathrm{P}(S = 1 | R = 1) \cdot \mathrm{P}(R = 1)}{\mathrm{P}(S = 1)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(S = 1 | R = 1) \cdot \mathrm{P}(R = 1)}{\mathrm{P}(S = 1 | R = 1) \cdot \mathrm{P}(R = 1) + \mathrm{P}(S = 1 | R = 0) \cdot (1 - \mathrm{P}(R = 1))} \\
&= \frac{0.95 \cdot 0.1}{0.95 \cdot 0.1 + 0.01 \cdot (1 - 0.1)} \approx 0.9135
\end{aligned}$$

```
S1R0 = 0.01;
R1 = 0.1;
S1R1 = 0.95;

R1S1 = S1R1*R1/(S1R1*R1+S1R0*(1-R1))
```

```
R1S1 = 0.9135
```

นั่นหมายความว่าการที่เห็นว่ารปภ.หลับอยู่อาจจะมีโอกาส 91.35% ธนาคารกำลังโดนปล้นอยู่

ตัวแปนที่อิสระต่อกัน (Indepedent Random Variables)

หากเหตุการณ์ทั้งสองเหตุการณ์นั้นเป็นอิสระต่อกัน (independent) เหตุการณ์หนึ่งจะไม่ส่งผลอะไรให้อีกเหตุการณ์หนึ่งเลย ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{P}(E_1 | E_2) = \mathrm{P}(E_1)$$

จากสมการดังกล่าวและทฤษฎีของเบย์ **เราสามารถที่จะคำนวณหาความน่าจะเป็นร่วมของทั้งสองเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันได้ดังนี้**

$$\mathrm{P}(E_1 \wedge E_2) = \mathrm{P}(E_1) \cdot \mathrm{P}(E_2)$$

ตัวอย่างที่ 2 : โยนเหรียญ

กำหนดให้เหรียญที่ถูกโยนมีความน่าจะเป็นที่ออกหัวหรือก้อยเท่าๆกัน หากเราโยนเหรียญ 10 ครั้งติดต่อกัน ความน่าจะเป็นจะออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้งเป็นเท่าไหร่

กำหนดให้ X_k เป็นตัวแปรที่บอกถึงผลของการโยนเหรียญครั้งที่ k($X_k = 0$ เหรียญที่โยนออกก้อย $X_k = 1$ เหรียญที่โยนออกกหัว)

เราสามารถหาความน่าจะเป็นของแต่ละการโยนออกเป็นก้อยได้ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{P}(X_k = 0) = 0.5$$

ความน่าจะเป็นที่ทุกการโยนมีผลออกมาเป็นก้อย $E_{\mathrm{AT}} = (X_1 = 0) \wedge (X_2 = 0) \wedge \cdots \wedge (X_{10} = 0)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของผลคูณความน่าจะเป็นในการโยนของแต่ละครั้งเนื่องจากว่าการโยนในแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$\mathrm{P}(E_{\mathrm{AT}}) = \mathrm{P}(X_1 = 0) \cdot \mathrm{P}(X_2 = 0) \cdot \cdots \cdot \mathrm{P}(X_{10} = 0) = (0.5)^{10}$$

กำหนดให้ E_H เป็นเหตุการณ์ที่โยนเหรียญทั้งหมด 10 เหรียญและผลออกมาเป็นหัวอย่างน้อย 1 ครั้งนั้นซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ตรงกันข้ามกับเหตุการณ์ที่โยนเหรียญทั้งหมด 10 เหรียญและผลออกมาเป็นก้อยทั้ง 10 ครั้ง

$$\mathrm{P}(E_H) = 1 - \mathrm{P}(E_{\mathrm{AT}}) = 1 - (0.5)^{10} \approx 0.9990$$

ฟังก์ชันการแจกแจงของความน่าจะเป็นร่วม (joint probability distribution function)

เช่นเดียวกับตัวแปรเดี่ยว **เราสามารถใช้ฟังก์ชันในการอธิบายการแจกแจงของความน่าจะเป็นร่วมโดยใช้ฟังก์ชันหลายตัวแปร** (multi-variable function)

หากเรากำหนดให้ X และ Yเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของความน่าจะเป็นได้ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{P}((X = x) \wedge (Y = y)) = f_{XY}(x, y)$$

ซึ่งฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต้อเนื่องต้องมีพฤติกรรมดังต่อไปนี้

$$\sum_{\text{for all } y} \sum_{\text{for all } x} f_{XY}(x, y) f_{XY}(x, y) = 1$$
$$0 \le f_{XY}(x, y) \le 1$$

หากเรากำหนดให้ X และ Yเป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของความน่าจะเป็นได้ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{P}((X \le k) \wedge (Y \le h)) = \int_{-\infty}^{h} \int_{-\infty}^{k} f_{XY}(x, y) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y$$

ี่ซึ่งฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต้อเนื่องต้องมีพฤติกรรมดังต่อไปนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = 1$$
$$f_{XY}(x, y) \ge 0$$

หากตัวแปรทั้งสองตัวเป็นอิสระต่อกัน ฟังก์ชันการแจกแจงสามารถถูกเขียนในรูปของผลคูณได้ดังต่อไปนี้

$$f_{XY}(x, y) = f_{XY}(x) \cdot f_{XY}(y)$$