การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 1 : แนวคิดของความถี่ของสัญญาณ (Concept of Frequency of Signal)

ในทางทฤษฎี **สัญญาณสามารถถูกแบ่งเป็นผลรวมของสัญญาณคลื่นไซน์ (sinusoidal) ที่มีความถี่ที่แตกต่างกัน** เพื่อให้เข้าถึงองค์ประกอบของสัญญาณโดยทั่วไป เราจะวิเคราะห์ถึงองค์ประกอบของสัญญาณคลื่นไซน์ซึ่งสัญญาณคลื่นไซน์ $y(t)$ สามารถเขียนเป็นฟังก์ชันได้ดังต่อไปนี้

$$y(t) = R\cos(2\pi ft + \phi)$$

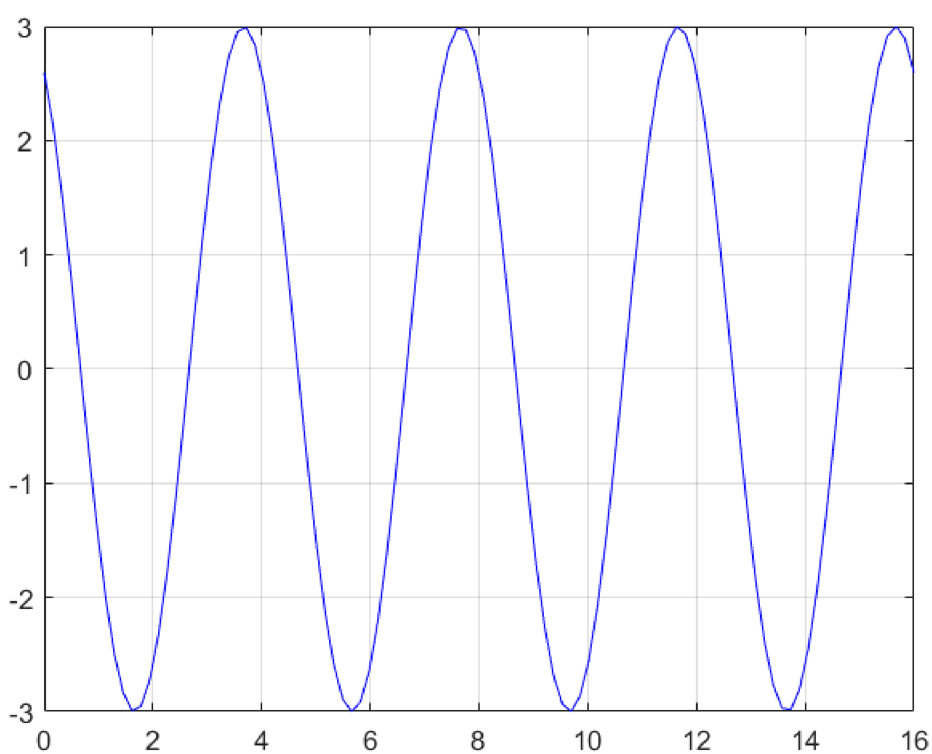
โดยที่

$R\,[\mathrm{unit}]$ คือ แอมพลิจูด (Amplitude) ของคลื่น

$f\,[\mathrm{Hz}]$ คือ ความถี่ (frequency) ของคลื่น

$\phi\,[\mathrm{rad}]$ คือ มุมเฟส (phase angle)

```
R = 3;
f = 0.25;
phi = pi/6;
t = linspace(0,4/f,100)';
y = R*cos(2*pi*f*t+phi);
ax = axes;
plot(ax,t,y,'b');
grid(ax,'on');
```



ในบางครั้ง การวิเคราะห์สัญญาณอาจจะใช้ตัวแปรความถี่เชิงมุม (angular frequency) $\omega \left[\frac{\text{rad}}{s}\right]$ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับความถี่ปกติดังต่อไปนี้

$$\omega = 2\pi f$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนสัญญาณได้ดังต่อไปนี้

$$y(t) = R\cos(\omega t + \phi)$$

ถ้าเรามีสัญญาณที่มีความถี่เท่ากันและเอามารวมกัน เราสามารถที่จะรวมแอพลิจูดของสัญญาณนี้ได้

กำหนดให้ สัญญาณ A (y_A) และสัญญาณ B (y_B) มีแอมพลิจูดเท่ากับ R_A และ R_B และมุมเฟสเท่ากับ ϕ_A และ ϕ_B โดยให้ความถี่เชิงมุมเท่ากับ ω ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} y_A(t) &= R_A\cos(\omega t + \phi_A) \\ y_B(t) &= R_B\cos(\omega t + \phi_B) \end{aligned}$$

หากเรานำทั้งสองสัญญาณนี้มารวมกัน เราจะได้สัญญาณลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$y(t) = y_A(t) + y_B(t) = R_A\cos(\omega t + \phi_A) + R_B\cos(\omega t + \phi_B)$$

เพื่อการจัดรูป เราสามารถกระจาย cos ของผลบวกได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} y(t) &= R_A\cos(\omega t)\cos(\phi_A) - R_A\sin(\omega t)\sin(\phi_A) + R_B\cos(\omega t)\cos(\phi_B) - R_B\sin(\omega t)\sin(\phi_B) \\ y(t) &= [R_A\cos(\phi_A) + R_B\cos(\phi_B)]\cos(\omega t) - [R_A\sin(\phi_A) + R_B\sin(\phi_B)]\sin(\omega t) \end{aligned}$$

เพื่อการจัดรูป เราจะกำหนดให้

$$\begin{aligned} R\cos(\phi) &= R_A\cos(\phi_A) + R_B\cos(\phi_B) \\ R\sin(\phi) &= R_A\sin(\phi_A) + R_B\sin(\phi_B) \end{aligned}$$

การกำหนดดังกล่าวทำให้เราจัดรูปสัญญาณให้เป็นรูปปกติได้ดังต่อไปนี้

$$y(t) = R\cos(\omega t + \phi)$$

$$R = \sqrt{R_A^2 + R_B^2 + 2R_AR_B(\cos(\phi_A - \phi_B))}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{R_A\sin(\phi_A) + R_B\sin(\phi_B)}{R_A\cos(\phi_A) + R_B\cos(\phi_B)}\right)$$

การคำนวณแสดงให้เห็นว่า**เราสามารถนำสัญญาณคลื่นไซน์ที่มีความถี่เดียวกันได้เป็นคลื่นเดียวกัน**

```
R_A = 3;
R_B = 5;
phi_A = pi/6;
phi_B = pi/4;
f = 0.25;
w = 2*pi*f;
t = linspace(0,4/f,100)';
y_A = R_A*cos(w*t+phi_A);
y_B = R_B*cos(w*t+phi_B);
y_C = y_A+y_B;
R = sqrt(R_A^2+R_B^2+2*R_A*R_B*cos(phi_A-phi_B));
```

```
phi = atan((R_A*sin(phi_A)+R_B*sin(phi_B))/(R_A*cos(phi_A)+R_B*cos(phi_B)));
y_D = R*cos(w*t+phi);
clf
ax = axes;
hold(ax,'on')
plot(ax,t,y_C,'b');
plot(ax,t,y_D,'ro');
grid(ax,'on');
```

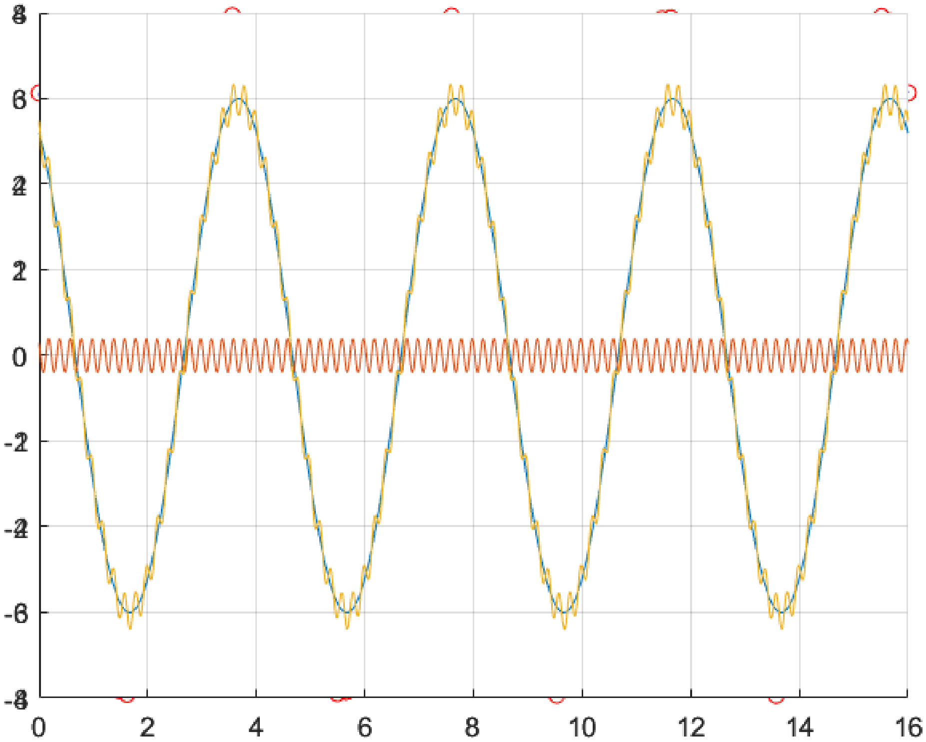
หากเรารวมสัญญาณคลื่นไซน์ที่มีความถี่ที่แตกต่างกัน เราจะได้ฟังก์ชันที่เป็นคาบ แต่เราจะไม่ได้ฟังก์ชันที่เป็นคลื่นไซน์ ยกตัวอย่างเช่น

$$y(t) = R_A\cos(\omega_A t + \phi_A) + R_B\cos(\omega_B t + \phi_B)$$

โดยที่

$$R_A > R_B$$
$$\omega_A < \omega_B$$

```
R_A = 3;
R_B = 0.2;
phi_A = pi/6;
phi_B = pi/4;
f = 0.25;
w_A = 2*pi*f;
w_B = 2*pi*f*20;
t = linspace(0,4/f,1000)';
y_A = R_A*cos(w_A*t+phi_A);
y_B = R_B*cos(w_B*t+phi_B);
y_C = y_A+y_B;
ax = axes;
hold(ax,'on')
plot(ax,t,y_A);
plot(ax,t,y_B);
plot(ax,t,y_C);
grid(ax,'on');
```


0
2
4
6
8
10
12
14
16

การวิเคราะห์เชิงความถี่

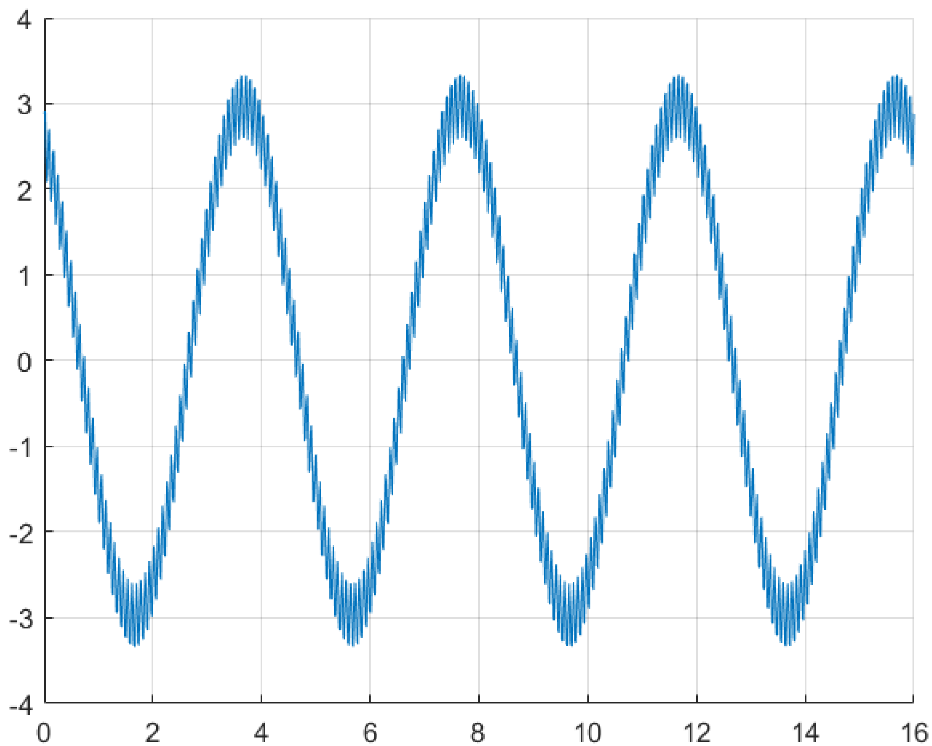
ตอนที่ 2 : แนวคิดของสัญญาณรบกวน (Concept of Noise)

ในโลกความเป็นจริง **สัญญาณที่อ่านได้จากเซนเซอร์อาจโดนสัญญาณที่ไม่ต้องการเข้ามาแทรก สัญญาณนี้เรียกว่า สัญญาณรบกวน (noise)** ซึ่งสามารถเป็นลักษณะได้ทั้งในความถี่ที่ต่ำและความถี่ที่สูง โดยทั่วไปแล้ว สัญญาณรบกวนอาจจะเกิดจากการสั่นสะเทือนทางกล (mechanical vibration) หรือ การรบกวนทางแม่เหล็กไฟฟ้า (EMI, electromagnetic interference) เช่นหลอด fluorescent

ถึงแม้ว่าสัญญาณรบกวนจะไม่ใช่สัญญาณคลื่นไซน์ แต่เราสามารถจำลองสัญญาณรบกวนในรูปแบบของผลรวมของสัญญาณหลายๆอันได้

สัญญาณรบกวนที่มีความถี่สูง (high-frequency noise)

```
R_A = 3;
R_B = 0.4;
phi_A = pi/6;
phi_B = pi/4;
f = 0.25;
w_A = 2*pi*f;
w_B = 2*pi*f*200;
t = linspace(0,4/f,1000)';
y_A = R_A*cos(w_A*t+phi_A);
noise = R_B*cos(w_B*t+phi_B);
y = y_A+noise;
ax = axes;
hold(ax,'on')
plot(ax,t,y);
grid(ax,'on');
```



4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
2
4
6
8
10
12
14
16

การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 1 : แนวคิดของพลังของสัญญาณ (Concept of Power of Signal)

ก่อนที่เราจะพูดถึงการลดทอนสัญญาณรบกวน เราจำเป็นต้องศึกษาเกี่ยวกับพลังของสัญญาณ

กำหนดให้พลัง (power) P ของสัญญาณแบบเวลาต่อเนื่อง $x(t)$ ที่เป็นคาบ (periodic) สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$P = \frac{1}{T}\int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (|x(t)|^2)\,\mathrm{d}\,t$$

โดยที่ T คือคาบ (Period) ของสัญญาณ

เมื่อประยุกต์นิยามนี้กับสัญญาณคลื่นไซน์ เราจะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างพลังของสัญญาณและแอมพลิจูดของสัญญาณได้ดังต่อไปนี้

$$x(t) = R\cos(\omega t + \phi)$$
$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$u = \omega t + \phi$$
$$\mathrm{d}\,u = \omega\,\mathrm{d}\,t$$
$$\mathrm{d}\,t = \frac{\mathrm{d}\,u}{\omega}$$

$$P = \frac{\omega}{2\pi}\int_{t=-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} (|R\cos(\omega t + \phi)|^2)\,\mathrm{d}\,t$$
$$= \frac{1}{2\pi}R^2\int_{\tau=-\pi+\phi}^{\pi+\phi} (\cos^2(u))\,\mathrm{d}\,u$$
$$= \frac{1}{2\pi}R^2\left[\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u)\right]_{\tau=-\pi+\phi}^{\pi+\phi}$$
$$= \frac{1}{2}R^2$$

เราสรุปได้ว่า **พลังของสัญญาณแบบคลื่นไซน์นั้นเท่ากับ ครึ่งหนึ่งของค่าแอมพลิจูดที่โดนกำลังสอง**

พลังของสัญญาณถูกนำมาใช้ในการเปรียบสัญญาณที่เราสนใจและสัญญาณรบกวน เราทำการกำหนดให้ **อัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (Signal-to-Noise ratio, SNR, S/N) เป็นอัตราส่วนของพลังของสัญญาณที่เราสนใจ y และสัญญาณรบกวน w**

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_y}{P_w} = \frac{R_y^2}{R_w^2}$$

โดยส่วนมาก อัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน**มักจะถูกอธิบายในเดซิเบล (decibel)** ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ต่อนี้

$$\mathrm{SNR_{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{P_y}{P_w}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{R_y^2}{R_w^2}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{R_y}{R_w}\right)$$

ค่าของอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนที่ดีนั้นขึ้นอยู่กับการประยุกต์ใช้ของสัญญาณ เช่นการสื่อสารไร้สาย การป้อนกลับของสัญญาณในระบบควบคุมการเคลื่อนที่ การกรองสัญญาณภาพถ่าย **ยิ่งค่าของอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนมากเท่าไหร่ ยิ่งทำให้สัญญาณชัดเจนขึ้น**

การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 4 : ผลตอบสนองแบบชั่วครู่ และ ผลตอบสนองแบบคงตัว (Transient Response & Steady-state Response)

ระบบพลวัตแบบ LTI (Linear Time-Invariant) และ SISO (Single-Input Single Output) สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, t^n}(y(t)) + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\, t^{n-1}}(y(t)) + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(y(t)) + a_0 y(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\, t^m}(u(t)) + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\, t^{m-1}}(u(t)) + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(u(t)) + b_0 u(t)$$

สมการดังกล่าวจะมีผลเฉลยเป็น $y(t)$ ซึ่งตามหลักการแก้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น **ผลเฉลยนี้จะประกอบไปด้วย 2 ส่วนซึ่งก็คือ ผลเฉลยเชิงเอกพันธุ์ $y_h(t)$ และ ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(t)$**

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

ผลเฉลยเชิงเอกพันธุ์คือผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่มีอินพุตหรือสมการเชิงเอกพันธุ์ (solution of the homoegeneous equation) ซึ่งเมื่อเอาผลเฉ,ยนี้ไปแทนค่าในสมการ เราจะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, t^n}(y_h(t)) + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\, t^{n-1}}(y_h(t)) + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(y_h(t)) + a_0 y_h(t) = 0$$

ไม่ว่าจะขยายผลเฉลยนี้มากน้อยเพียงใด ผลลัพธ์จากการแทนค่าของสมการเชิงอนุพันธ์จะทำให้ได้ 0 เสมอ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นเชิงเส้นจะมีผลเฉลยเชิงเอกพันธุ์พ่วงอยู่ด้วยเสมอ

ส่วนที่จะทำให้สมการเชิงอนุพันธ์เป็นจริงได้นั้นคือผลเฉลยเฉพาะ $y_p(t)$

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, t^n}(y_p(t)) + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\, t^{n-1}}(y_p(t)) + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(y_p(t)) + a_0 y_p(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\, t^m}(u(t)) + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\, t^{m-1}}(u(t)) + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(u(t)) + b_0 u(t)$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นจะประกอบไปด้วย 2 องค์ประกอบนี้เสมอ

ตัวอย่างที่ 1

หากเรากำหนดให้ สมการเชิงอนุพันธ์เป็นดังต่อไปนี้

$$\dot{y} + k \cdot y = u$$
$$u(t) = t$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่

เนื่องจากผลเฉลยประกอบไปด้วย y_h และ y_p เราสามารถแก้สมการได้โดยการสร้างสมการเชิงเอกพันธุ์จากสมการที่กำหนดมาให้เพื่อที่จะนำไปแก้หา y_h เมื่อนำ y_h ไปแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ เราจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\dot{y}_h + k \cdot y_h = 0$$

จากนั้นเราทำการแก้สมการได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}_h = -k \cdot y_h \\
&\frac{1}{y_h}\dot{y}_h = -k \\
&\int \left(\frac{1}{y_h}\dot{y}_h\right) \mathrm{d}\,t = \int (-k) \mathrm{d}\,t \\
&\ln(y_h) = -k \cdot t + C_1 \\
&y_h = \mathrm{e}^{-k \cdot t + C} = C \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot t}
\end{aligned}
$$

เราจะได้ว่า

$$
y_h(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot t}
$$

จากนั้น เราสามารถที่จะเดารูปแบบของ y_p ให้อยู่ในรูปที่คล้ายกับ $u(t)$ ได้ เนื่องจาก $u(t)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่ง เราจะเดาให้ y_p อยู่ในรูปพหุนามกำลังหนึ่งกังต่อไปนี้

$$
y_p(t) = A \cdot t + B
$$

เมื่อเราเอาไปแทนสมการเชิงอนุพันธ์ เราจะได้สมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(A \cdot t + B) + k \cdot (A \cdot t + B) = t \\
&A + k \cdot A \cdot t + k \cdot B = t
\end{aligned}
$$

หากเราจับคู่ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ เราจะได้ระบบสมการดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&k \cdot A = 1 \\
&A + k \cdot B = 0
\end{aligned}
$$

เมื่อเราแก้ระบบสมการดังกล่าวเราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&A = \frac{1}{k} \\
&B = -\frac{A}{k} \\
&B = -\frac{1}{k^2}
\end{aligned}
$$

$$
y_p(t) = \frac{1}{k}t - \frac{1}{k^2}
$$

ดังนั้นผลเฉ,ยของสมการเชิงอนุพันธ์จะเขียนอยู่ในรูปผลบวกของ y_h และ y_p ดังต่อไปนี้

$$
y(t) = \left[C \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot t}\right] + \left[\frac{1}{k}t - \frac{1}{k^2}\right]
$$

ในเชิงของระบบพลวัต ตัวระบบเองนั้นถูกจำลองในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นก็คือ ผลตอบสนอง (response) ของระบบ

ระบบพลวัตแบบ LTI (Linear Time-Invariant) และ SISO (Single-Input Single Output) นั้นจะประกอบไปด้วยผลตอบสนอง 2 ส่วนด้วยกัน ซึ่งได้แก่

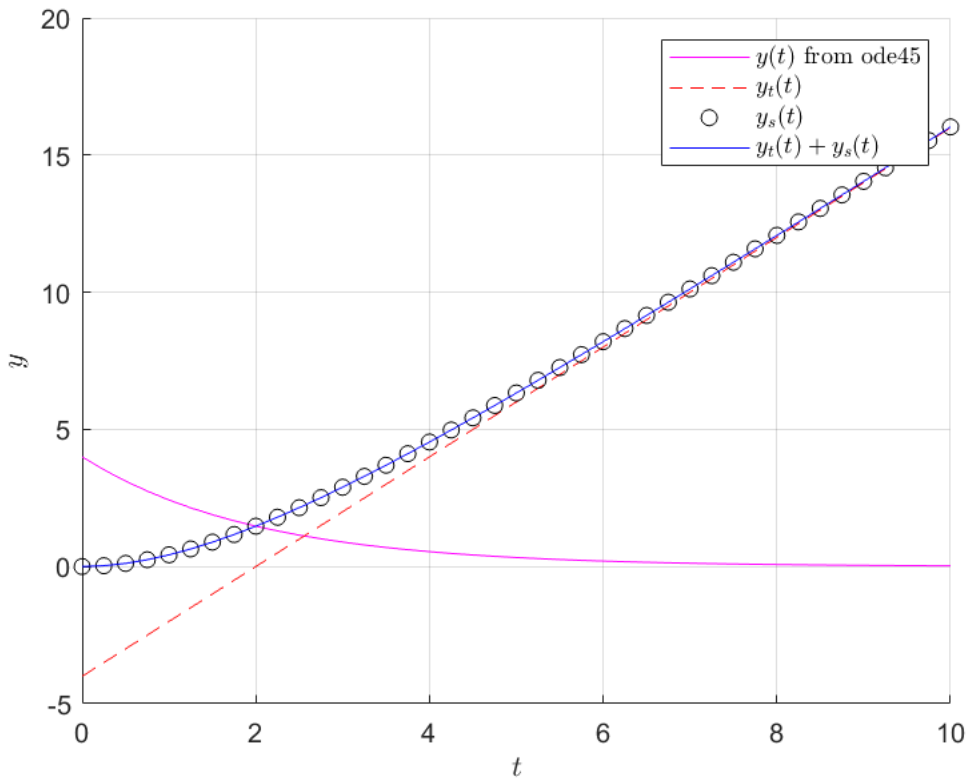
- ผลตอบสนองแบบชั่วครู่ **(transient response)** $y_t(t)$
- ผลตอบสนองแบบคงตัว **(steady-state response)** $y_s(t)$

ซึ่งในเชิงของสมการอนุพันธ์ ผลตอบสนองแบบชั่วครู่ก็คือผลเฉลยเชิงเอกพันธุ์ และผลตอบสนองแบบคงตัวคือผลเฉลยเฉพาะ นอกจากคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์แล้ว เราสามารถอธิบายความหมายของผลตอบสนองแต่ละส่วนในเชิงของระบบพลวัตได้อีกด้วย

เมื่อระบบพลวัตถูกกระตุ้นด้วยอินพุต ระบบจะเปลี่ยนไปตามธรรมชาติของระบบเอง ธรรมชาติของระบบนี้จะเกิดขึ้นทันทีและเป็นการเปลี่ยนแปลงที่"อาจ"จะเกิดขึ้นแค่ชั่วขณะ เนื่องระบบพลวัตมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาและมีสถานะที่ไม่อยากจะเปลี่ยนกระทันหันได้ ระบบจึงมีผลตอบสนองตามธรรมชาติของมัน

นอกจากนั้นระบบพลวัตเองก็ต้องเปลี่ยนแปลงไปตามอินพุต มันจึงไม่แปลกระบบจะมีผลตอบสนองแบบคงตัวที่มีลักษณะคล้ายกับอินพุต

```
k = 0.5;
t_max = 10;
tspan = [0 t_max];
y0 = 0;
u = @(t)t;
[t,y] = ode45(@(t,y)-k*y+u(t),tspan,y0); %[t,y] = ode45(odefun,tspan,y0), where tspan = [t0 tf]
y_s = t/k-1/k^2;
y_t = (1/k^2+y0)*exp(-k*t);
clf
ax = axes;
hold(ax,'on');
grid(ax,'on')
plot(ax,t,y_t,'m')
plot(ax,t,y_s,'r--')
plot(ax,t,y_t+y_s,'ko')
plot(ax,t,y,'b')
xlabel('$t$','Interpreter',"latex");
ylabel('$y$','Interpreter',"latex");
legend({'$y(t)$ from ode45','$y_t(t)$','$y_s(t)$','$y_t(t)+y_s(t)$'},'Interpreter',"latex")
```



เมื่อเราทำการวิเคราะห์ระบบพลวัต **เราสามารถที่จะศึกษาในแต่ละส่วนของผลตอบสนองแยกกัน หากเราต้องการที่จะวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลา เราจะทำการศึกษาเฉพาะในส่วนของผลตอบสนองแบบชั่วครู่y_t(t)**

แต่เราต้องการที่จะวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงความถี่ เราจะทำการศึกษาเฉพาะในส่วนของผลตอบสนองแบบคงตัว y_s(t)

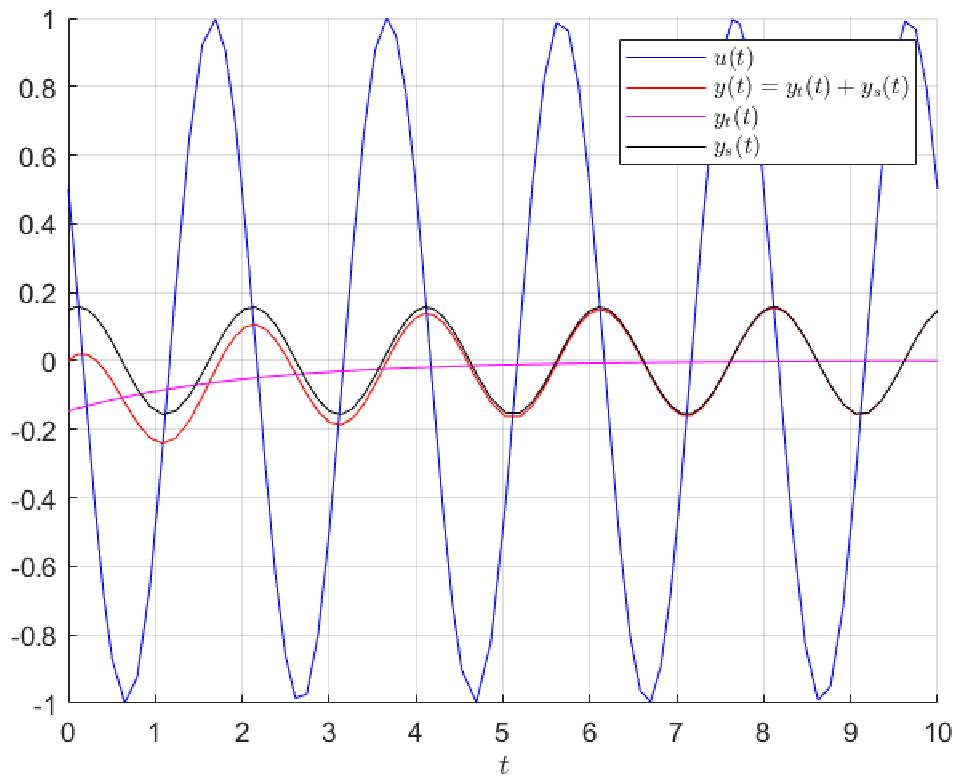
การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 5 : อัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อน (Magnitude Ratio & Phase Shift)

หากเรานำแนวคิดของการวิเคราะห์สัญญาณในรูปแบบของคลื่นไซน์มารวมกับระบบพลวัต เราจะสามารถศึกษาพฤติกรรมของผลตอบสนองได้ในเชิงความถี่ **การป้อนอินพุตที่เป็นคลื่นไซน์ให้กับระบบพลวัตทำให้ผลตอบสนองแบบคงตัวมีลักษณะเป็นคลื่นไซน์** ส่วนผลตอบสนองแบบชั่วครู่การจะลู่เข้าสู่ศูนย์ คงที่ หรือ โตเป็นอนันต์ก็เป็นได้ ดังนั้นเราจะสามารถเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$u(t) = R_{\text{in}}\cos(\omega t + \phi_{\text{in}})$$
$$y(t) = y_t(t) + R_{\text{out}}\cos(\omega t + \phi_{\text{out}})$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

```
R_in = 1;
f = 0.5;
w = 2*pi*f;
phi_in = pi/3;
u = @(t)R_in*cos(w*t+phi_in); %u(t)
t_max = 10;
tspan = [0 t_max];
y0 = 0;
w_c = 1/2;
[t,y] = ode45(@(t,y)[-w_c*y+w_c*u(t)],tspan,y0);
ax = axes;
hold(ax,'on')
grid(ax,'on')
plot(ax,t,u(t),'b')
plot(ax,t,y,'r')
plot(ax,t,-R_in*w_c/(w^2+w_c^2)*(w*sin(phi_in)+w_c*cos(phi_in))*exp(-w_c*t),'m')
R_out = R_in/sqrt(1+(w/w_c)^2);
phi_out = phi_in-atan(w/w_c);
plot(ax,t,R_out*cos(w*t+phi_out),'k')
xlabel('$t$','Interpreter',"latex")
legend({'$u(t)$','$y(t)=y_t(t)+y_s(t)$','$y_t(t)$','$y_s(t)$'},'Interpreter',"latex")
```



จากภาพ เราจะสังเกตเห็นได้ว่า ผลตอบสนองแบบคงตัว $y_s(t)$ นั้นมีลักษณะเป็นคลื่นไซน์ที่มีแอมพลิจูดและมุมเฟสที่แตกต่างกับอินพุต และผลตอบสนองแบบชั่วครู่นั่นลู่เข้าสู่ศูนย์ เราจึงวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของความถี่กับผลตอบสนองแบบคงตัวเท่านั้น

กำหนดให้**อัตราส่วนขนาด (magnitude ratio) $|\cdot|$ ของฟังก์ชันถ่ายโอน G คืออัตราส่วนระหว่างแอมพลิจูดของคลื่นเอ้าท์พุตและคลื่นอินพุต**

$$|G| = \frac{R_{\text{out}}}{R_{\text{in}}}$$

ข้อสังเกตของอัตราส่วนขนาดมีดังต่อไปนี้

1. อัตราส่วนขนาดเป็นค่าบวกเสมอเนื่องจากแอมพลิจูดของสัญญาณเป็นบวกเสมอ
2. หากอัตราส่วนขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนน้อยกว่า 1 แอมพลิจูดของเอ้าท์พุตจะถูกลดทอนให้น้อยลง (Attenuated)
3. หากอัตราส่วนขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนมากกว่า 1 แอมพลิจูดของเอ้าท์พุตจะถูกขยายให้เพิ่มขึ้น (Amplified)
4. กำลังสองของอัตราส่วนขนาดจะเท่ากับอัตราส่วนพลังของฟังก์ชันถ่ายโอน

$$|G|^2 = \frac{R_{\text{out}}^2}{R_{\text{in}}^2}$$

ตามหลักของการวิเคราะห์สัญญาณและระบบ **อัตราส่วนขนาดมักจะถูกวิเคราะห์ในหน่วยเดซิเบล (decibel)** หนึ่งใน**สาเหตุหลักของการใช้เดซิเบลคือการวิเคราะห์อัตราส่วนที่มีช่วงกว้าง**

$$|G|_{\text{dB}} = 20\log_{10}(|G|)$$

ข้อสังเกตของอัตราส่วนขนาดในเดซิเบลมีดังต่อไปนี้

1. อัตราส่วนขนาดในเดซิเบลเป็นได้ทั้งบวกและลบ
2. หากอัตราส่วนขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนในเดซิเบลน้อยกว่า 0 dB แอมพลิจูดของเอ้าท์พุตจะถูกลดทอนให้น้อยลง
3. หากอัตราส่วนขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนในเดซิเบลมากกว่า 0 dB แอมพลิจูดของเอ้าท์พุตจะถูกขยายให้เพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ เรายังสามารถวิเคราะห์ เฟสการเลื่อน (phase shift)

$$\angle(G) = \phi_{\text{out}} - \phi_{\text{in}}$$

ข้อสังเกตของเฟสการเลื่อนมีดังต่อไปนี้

1. เฟสการเลื่อนมีค่าอยู่ในช่วง $[-\pi, \pi]\,[\text{rad}]$
2. หากเฟสการเลื่อนมีค่าเป็นบวก สัญญาณเอ้าท์พุตจะถูกทำให้ล้าหลัง (Lagging)
3. หากเฟสการเลื่อนมีค่าเป็นลบ สัญญาณเอ้าท์พุตจะถูกทำให้นำหน้า (Leading)

การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 6 : การกรองสัญญาณพื้นฐาน และแผนภาพโบเด (Basic Filtering & Bode plot)

กระบวนการกรองสัญญาณ (filtering) คือการลดทอนสัญญาณที่อยู่ในย่านความถี่ (band) ที่ไม่ต้องการให้น้อยลง

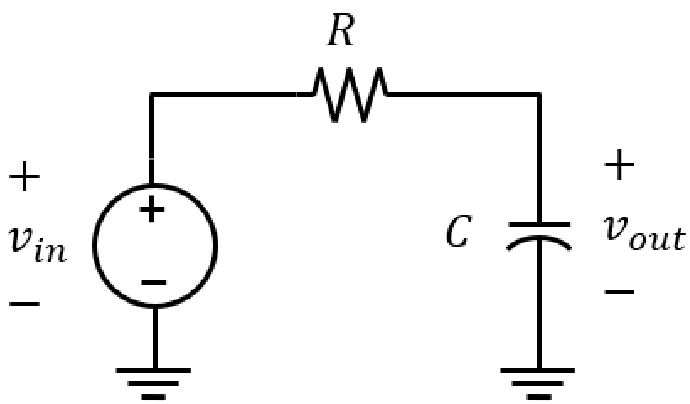
Pass Band : ย่านความถี่ของสัญญาณที่ตัวกรอง (filter) ให้ผ่าน

Stop Band : ย่านความถี่ของสัญญาณที่ตัวกรองไม่ให้ผ่าน

Cutoff Frequency : ความถี่ ณ ขอบเขตระหว่างการให้สัญญาณผ่านและไม่ผ่าน

เราจะเริ่มศึกษาพื้นฐานของกระบวนการกรองสัญญาณจากตัวกรองแบบอนาล็อกอันดับที่หนึ่ง (first-order analog filter)

กำหนดให้วงจร RC อันดับที่หนึ่ง (first-order RC circuit) เป็นดังต่อไปนี้



โดยที่

R คือความต้านทาน (resistance) ของตัวต้านทาน

C คือความจุ (capacitance) ของตัวเก็บประจุ

v_{in} คือแรงดันไฟฟ้าอินพุต (input voltage)

v_{out} คือแรงดันไฟฟ้าเอ้าท์พุต (output voltage)

เราสามารถใช้กฎของ Kirchoff ในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

$$v_{\text{in}} = Ri + v_c$$

$$i = C\frac{dv_c}{dt}$$

$$v_{\text{out}} = v_c$$

หรือ

$$v_{\text{in}} = RC\frac{dv_{\text{out}}}{dt} + v_{\text{out}}$$

เราสามารถวิเคราะห์ระบบโดยใช้โดเมนของลาปลาซเพื่อหาฟังก์ชันถ่ายโอน (transfer function) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}\{v_{\text{in}}\} = \boldsymbol{L}\left\{RC\frac{dv_{\text{out}}}{dt} + v_{\text{out}}\right\}\\
&V_{\text{in}}(s) = RCsV_{\text{out}}(s) + V_{\text{out}}(s)\\
&G(s) = \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} \; = \frac{1}{RCs+1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}} = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}
\end{aligned}
$$

โดยที่ $G(s)$ คือฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจร และ $\omega_c = \dfrac{1}{RC}$

เราจะกำหนดให้อินพุตอยู่ในรูปของฟังก์ชันคลื่นไซน์ที่มีแอมพลิจูดเท่ากับ R_{in} และมุมเฟส ϕ_{in} ซึ่งเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&v_{\text{in}}(t) = R_{\text{in}}\cos(\omega t + \phi_{\text{in}}) : \; \cos(A \pm B) = \text{cosAcosB} \mp \text{sinAsinB}\\
&v_{\text{in}}(t) = R_{\text{in}}\cos(\phi_{\text{in}})\cos(\omega t) - R_{\text{in}}\sin(\phi_{\text{in}})\sin(\omega t)\\
&V_{\text{in}}(s) = R_{\text{in}}\left(\frac{\cos(\phi_{\text{in}})s - \sin(\phi_{\text{in}})\omega}{s^2+\omega^2}\right)
\end{aligned}
$$

จากนั้น เราสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยแก้สมการในโดเมนของลาปลาซ ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

เราสามารถนำอินพุตไปคูณกับฟังก์ชันถ่ายโอนและแยกพจน์ให้อยู่ในรูปผลบวกโดยใช้เทคนิค partial fraction

$$
\begin{aligned}
&\text{จาก } \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \frac{\omega_c}{s+\omega_c} \; \textbf{ และ } \; V_{\text{in}}(s) = R_{\text{in}}\left(\frac{\cos(\phi_{\text{in}})s - \sin(\phi_{\text{in}})\omega}{s^2+\omega^2}\right)\\
&V_{\text{out}}(s) = \left(\frac{\omega_c}{s+\omega_c}\right)R_{\text{in}}\left(\frac{\cos(\phi_{\text{in}})s - \sin(\phi_{\text{in}})\omega}{s^2+\omega^2}\right)\\
&V_{\text{out}}(s) = \frac{K_1}{s+\omega_c} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+\omega^2} = \frac{K_1(s^2+\omega^2) + (K_2 s + K_3)(s+\omega_c)}{(s+\omega_c)(s^2+\omega^2)}
\end{aligned}
$$

เราสามารถจับสัมประสิทธิ์เพื่อที่จะได้ระบบสมการเชิงเส้นดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&K_1 + K_2 = 0\\
&K_3 + \omega_c K_2 = \omega_c R_{\text{in}}\cos(\phi_{\text{in}})\\
&\omega^2 K_1 + \omega_c K_3 = -\omega_c \omega R_{\text{in}}\sin(\phi_{\text{in}})
\end{aligned}
$$

เราจะได้ว่าสัมประสิทธิ์แต่ละตัวจะมีความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&K_1 = -\frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}\left[\omega\sin(\phi_{\text{in}}) + \omega_c\cos(\phi_{\text{in}})\right]\\
&K_2 = \frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}\left[\omega\sin(\phi_{\text{in}}) + \omega_c\cos(\phi_{\text{in}})\right] \quad 0.\\
&K_3 = \frac{R_{\text{in}}\omega_c\omega}{\omega^2+\omega_c^2}\left[\omega\cos(\phi_{\text{in}}) - \omega_c\sin(\phi_{\text{in}})\right]
\end{aligned}
$$

เมื่อเราแทนค่า K_1 , K_2 , และ K_3 ในผลรวม เราจะสามารถเขียน $V_{\text{out}}(s)$ ในรูปต่อไปนี้

$$V_{\text{out}}(s) = -\frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}[\omega\sin(\phi_{\text{in}})+\omega_c\cos(\phi_{\text{in}})]\left(\frac{1}{s+\omega_c}\right)+\frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}\left(\frac{[\omega\sin(\phi_{\text{in}})+\omega_c\cos(\phi_{\text{in}})]s+[\omega\cos(\phi_{\text{in}})-\omega_c\sin(\phi_{\text{in}})]\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

หากเราใช้หลักการหาลาปลาซผกผันดังต่อไปนี้

$$\boldsymbol{L}^{-1}\left(\frac{as+b\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\omega t+\tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right)\right)$$

เราสามารถหาเอ้าท์พุตในรูปของผลรวมของผลตอบสนองแบบชั่วครู่และผลตอบสนองแบบคงตัวในโดเมนของเวลาได้ดังต่อไปนี้

$$v_{\text{out}}(t) = v_t(t)+v_s(t)$$

$$v_t(t) = -\frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}[\omega\sin(\phi_{\text{in}})+\omega_c\cos(\phi_{\text{in}})]e^{-\omega_c t}$$

$$v_s(t) = R_{\text{out}}\cos(\omega t+\phi_{\text{out}})$$

$$R_{\text{out}} = \frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}\sqrt{[\omega\sin(\phi_{\text{in}})+\omega_c\cos(\phi_{\text{in}})]^2+[\omega\cos(\phi_{\text{in}})-\omega_c\sin(\phi_{\text{in}})]^2} = \frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}\sqrt{\omega^2+\omega_c^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}R_{\text{in}}$$

$$\phi_{\text{out}} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c\sin(\phi_{\text{in}})-\omega\cos(\phi_{\text{in}})}{\omega\sin(\phi_{\text{in}})+\omega_c\cos(\phi_{\text{in}})}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\tan(\phi_{\text{in}})-\frac{\omega}{\omega_c}}{1+\frac{\omega}{\omega_c}\tan(\phi_{\text{in}})}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(\phi_{\text{in}}-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right)\right) = \phi_{\text{in}}-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

เมื่อเวลาผ่านไป ผลตอบสนองแบบชั่วครู่จะลู่เข้าสู่ศูนย์เนื่องจาก

$$\lim_{t\to\infty}\{v_t(t)\} = -\frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}[\omega\sin(\phi_{\text{in}})+\omega_c\cos(\phi_{\text{in}})]\lim_{t\to\infty}\{e^{-\omega_c t}\} = 0$$

เราจึงวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของความถี่กับผลตอบสนองแบบคงตัวเท่านั้น

$$v_{\text{out}}(t) = R_{\text{out}}\cos(\omega t+\phi_{\text{out}})$$

หากเราวิเคราะห์ที่แอมพลิจูดของคลื่นเอ้าท์พุต เราจะได้ได้ความสัมพันธ์ในเชิงของความถี่เชิงมุมดังต่อไปนี้

$$R_{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}R_{\text{in}}$$

เพื่อการวิเคราะห์ความสามารถในการลอดทอนสัญญาณ เราสามารถหาอัตราส่วนขนาดในเดซิเบลได้ดังต่อไปนี้

$$|G(\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right) = -10\log_{10}\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

เนื่องจากฟังก์ชันดังกล่าวขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ ω_c เราจึงไม่สามารถวาดกราฟขึ้นมาได้ เพื่อให้การวิเคราะห์นั้นไม่ขึ้นอยู่กับค่า ω_c **เราสามารถทำการวิเคราะห์ความถี่ในรูปแบบความถี่สัมพัทธ์ (relative frequency) โดยกำหนดให้ความถี่สัมพัทธ์ของตัวอย่างเทียบกับ** ω_c **เราจะได้ความถี่สัมพัทธ์**ดังต่อไปนี้

$$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_c}$$

ค่าของความถี่สัมพัทธ์คือความสัมพันธ์ที่เป็นอัตราส่วนระหว่างความถี่ และค่าที่เลือกที่จะเปรียบเทียบ

ข้อสังเกตของความถี่มีดังต่อไปนี้

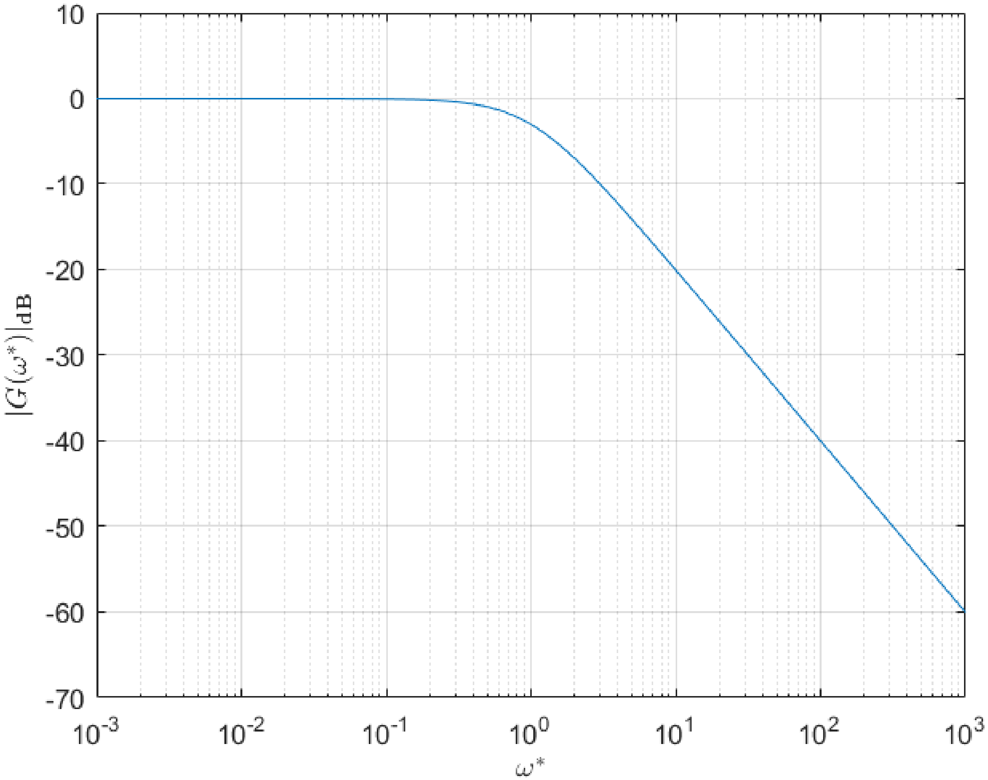
1. ความถี่ ω โดยทั่วไปอาจถูกมองว่าเป็นลบได้
2. ความถี่สัมพัทธ์ ω^* จะเป็นบวกเสมอ
3. เพื่อการวิเคราะห์ในย่านความถี่ที่กว้าง เสกลของความถี่ในกราฟมักจะเป็นเสกลล็อกการิทึม (log-scale)

จากความถี่สัมพัทธ์ที่กำหนด เราจะสามารถเขียนอัตราส่วนขนาดที่ขึ้นอยู่กับความถี่สัมพัทธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$|G(\omega^*)|_{\mathrm{dB}} = -10\log_{10}\left(1 + (\omega^*)^2\right)$$

ซึ่งเราสามารถกราฟความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

```
clf;
ax = axes;
w = 10.^(-3:0.1:3);
semilogx(ax,w,-10*log10(1+w.^2));
grid(ax,'on');
axis(ax,[min(w) max(w) -70 10]);
xlabel('$\omega^*$','Interpreter',"latex")
ylabel('$|G(\omega^*)|_\mathbf{dB}$','Interpreter',"latex")
```



ข้อสังเกตของกราฟมีดังต่อไปนี้

1. เสกลที่ถูกใช้ในตัวแปร ω^* **เป็นเสกลล็อกการิทึม** พื้นที่กราฟระหว่าง 10^k และ 10^{k+1} จะถูกแบ่งเป็น 10 ช่องย่อยๆ ซึ่งระยะห่างจะเป็นไปตามเสกลของล็อกการิทึม เส้นของตาราง (grid) ที่ถูกตีมีค่าตรงกับค่า $a \cdot 10^k$ โดยที่ $a = \{1, 2, \cdots, 9\}$
2. เสกลที่ถูกใช้ในแกนแนวตั้งเป็นเสกลเชิงเส้น แต่ตัวแปรในแนวตั้งมีค่าเป็นเดซิเบล หากเรามองในมุมมองของอัตราส่วนขนาด(ปกติ) เสกลนี้ถือว่าเป็นเสกลล็อกการิทึมเช่นกัน แต่ถ้าหากมองในมุมมองของอัตราส่วนขนาดในเดซิเบล เสกลนี้ถือว่าเป็นเสกลเชิงเส้น

เราจะสังเกตได้ว่าอัตราส่วนขนาดในเดซิเบลมีค่าใกล้เคียงกับ $0\,\mathrm{dB}$ หรือ 1 ในช่วงที่ $\omega^* < 1$ หรือ $\omega < \omega_c$ **การที่อัตราส่วนขนาดมีค่าใกล้เคียงกับ 1 หมายความว่าแอมพลิจูดของคลื่นเอ้าท์พุตมีขนาดใกล้เคียงกับแอมพลิจูดของคลื่นอินพุต** ในทางกลับกัน **เราจะสังเกตได้ว่าในช่วงที่ $\omega^* > 1$ หรือ $\omega > \omega_c$ อัตราส่วนขนาดมีค่าน้อยกว่า $0\,\mathrm{dB}$ ซึ่งหมายความว่าแอมพลิจูดของคลื่นเอ้าท์พุตจะยิ่งถูกลดทอน** นอกจากนี้ เราจะสังเกตได้ว่าอัตราส่วนขนาดในเดซิเบลมีค่าลดลงด้วยอัตรา 20 เดซิเบลต่อการขยายความถี่สิบเท่า หรือ $20\left[\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{decade}}\right]$ ซึ่งหมายความว่าสัญญาณจะถูกลดทอนมากขึ้นเมื่อความถี่เพิ่มขึ้น เราสามารถสรุปได้ว่า **ระบบดังกล่าวเป็นตัวกรองแบบ low-pass ที่ทำการกรองให้สัญญาณที่มีความถี่ต่ำกว่า ω_c ผ่าน** (มีแอมพลิจูดที่ใกล้เคียงกับอินพุต) **และกรองสัญญาณที่มีความถี่สูงกว่า ω_c ออก** (แอมพลิจูดถูกลดทอนอย่างมาก) เราจะเรียก ω_c ว่าเป็นความถี่ตัด (cutoff frequency)

เพื่อความชัดเจนในการกำหนดย่านความถี่ที่ตัวกรองให้ผ่าน เราสามารถใช้นิยามของอัตราส่วนพลังของระบบในการกำหนด ซึ่งอัตราส่วนพลัง $|G(\omega^*)|^2$ สามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$|G(\omega^*)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega^*)^2}$$

ย่านของสัญญาณที่ให้ผ่าน (pass-band) ω_p จะถูกกำหนดให้เป็นย่านของสัญญาณที่ทำให้อัตราส่วนพลังระบบมีค่ามากกว่าครึ่งของอัตราส่วนพลัง ณ อินพุตคงที่ (หรือ $\omega^* = 0$) หรือ

$$\omega_p \in \left\{ \omega : |G(\omega)|^2 > \frac{1}{2}|G(0)|^2 \right\}$$

หากเรานำอัตราส่วนพลังของตัวอย่างมาคำนวณหาย่านของสัญญาณที่ให้ผ่าน เราจะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+(\omega^*)^2} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(0)^2} \\
&(\omega^*)^2 > 1 \\
&-1 < \omega^* < 1
\end{aligned}$$

นั่นเลยเป็นที่มาของการกำหนดความถี่ตัดที่ $\omega^* = 1$ เรากำหนดนิยามของความถี่ตัดอย่างเป็นทางการได้ดังต่อไปนี้

ความถี่ตัด (cutoff frequency) คือขอบเขตของความถี่ที่เกิดการเปลี่ยนแปลงระหว่างการขยายกับการลดทอน อัตราส่วนพลัง ณ ความถี่ตัดจะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

หากเราวิเคราะห์ที่มุมเฟสของคลื่นเอ้าท์พุต เราจะได้ความสัมพันธ์ในเชิงของความถี่เชิงมุมดังต่อไปนี้

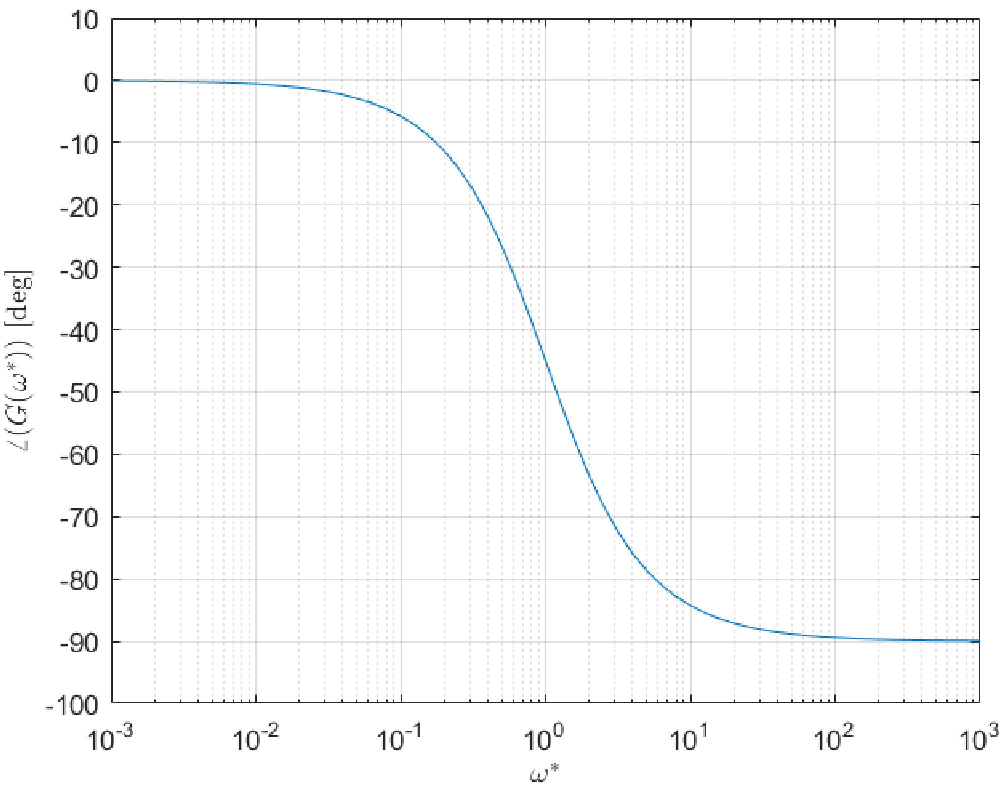
$$\phi_{\text{out}} = \phi_{\text{in}} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

เพื่อการวิเคราะห์การล่าช้าของสัญญาณ เราสามารถหาเฟสการเลื่อนได้ดังต่อไปนี้

$$\angle(G(\omega^*)) = -\tan^{-1}(\omega^*)$$

ซึ่งเราสามารถกราฟความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

```
clf
ax = axes;
w = 10.^(-3:0.1:3);
semilogx(ax,w,-atan(w)*180/pi);
grid(ax,'on');
axis(ax,[min(w) max(w) -100 10]);
xlabel('$\omega^*$','Interpreter',"latex")
ylabel('$\angle(G(\omega^*))$ [deg]','Interpreter',"latex")
```



เราจะสังเกตได้ว่าเฟสการเลื่อนของระบบจะมีมากขึ้นเพื่อความถี่เพิ่มขึ้น และเฟสการเลื่อนมีค่ามากที่สุดที่ -90 องศา

เฟสการเลื่อนของระบบมีบทบาทต่อเสถียรภาพของระบบซึ่งเราจะศึกษาต่อในวิชาวิศวกรรมระบบควบคุม

การกราฟความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อนเมื่อเทียบกับความถี่ในเสกลที่กล่าวไป ถูกเรียกว่า แผนภาพโบเด/โบด (Bode plot) ซึ่งเป็นแผนภาพมาตรฐานในการวิเคราะห์เชิงความถี่

การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 7 : โดเมนของความถี่และอิมพีแดนซ์(Frequency Domain & Impedance)

เดิมทีระบบจะถูกเขียนวิเคราะห์โดเมนของลาปลาซ

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

โดยที่ s เป็นความถี่เชิงซ้อนซึ่งเป็นตัวแปรอิสระ (indepedent variable) ในโดเมนของลาปลาซ

ความถี่เชิงซ้อนประกอบไปด้วย 2 องค์ประกอบได้แก่ส่วนที่เป็นจำนวนจริงและส่วนที่เป็นจำนวนจินตภาพซึ่งเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$s = \sigma + j\omega$$

จากเนื้อหาเรื่องขั้วและศูนย์ (poles & zeros) จำนวนจริง σ จะสัมพันธ์กับผลตอบสนองแบบชั่วครู่ แต่**ถ้าเราไม่ต้องการที่จะวิเคราะห์ผลตอบสนองแบบชั่วครู่ เราสามารถตัดพจน์ที่เป็นจำนวนจริงออกไป** ทำ**ให้ความถี่เชิงซ้อนจะกลายเป็นความถี่ธรรมดาหรือ** $s \rightarrow j\omega$ ดังนั้นเราสามารถแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนจากโดเมนของลาปลาซให้กลายเป็นโดเมนของความถี่โดยการ**แทนค่า s ด้วยจำนวนจินตภาพ** $j\omega$ ตัวแปรอิสระจะถูกเปลี่ยนจาก s ให้กลายเป็น ω เช่น

$$G(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad : \text{โดเมนของลาปลาซ}$$

$$G(\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c} \quad : \text{โดเมนของความถี่}$$

เราสามารถประยุกต์หลักการนี้กับกฎของโอห์มเพื่อหาความสัมพันธ์ในแต่ละโดเมน

$$\begin{bmatrix} \text{ชิ้นส่วน} & \text{โดเมนของเวลา} & \text{โดเมนของลาปลาซ} & \text{โดเมนของความถี่} \\ \text{inductor} & v = L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(i) & V(s) = L\,s\,I(s) = Z_L(s)\cdot I(s) & V(\omega) = j\omega L\;\; I(\omega) = Z_L(\omega)\cdot I(s) \\ \text{resistor} & v = R\,i & V(s) = R\,I(s) = Z_R(s)\cdot I(s) & V(\omega) = R\,I(\omega) = Z_R(\omega)\cdot I(s) \\ \text{capacitor} & v = \frac{1}{C}\int (i)\mathrm{d}\,t & V(s) = \frac{1}{C\,s}\;I(s) = Z_C(s)\cdot I(s) & V(\omega) = \frac{1}{j\omega C}\;I(\omega) = Z_C(\omega)\cdot I(s) \end{bmatrix}$$

ถึงแม้ว่าแรงดันไฟฟ้าของแต่ละชิ้นส่วนจะมีความสัมพันธ์เชิงอนุพันธ์ (ต้องใช้สมการเชิงอนุพันธ์ในการแก้ความสัมพันธ์) แต่แรงดันไฟฟ้าในโดเมนอื่นๆมีลักษณะอยู่ในรูปของผลคูณซึ่ง**การแปลงระบบให้อยู่ในโดเมนของลาปลาซหรือโดเมนของความถี่ทำให้เราสามารถประยุกต์ใช้พีชคณิตเชิงเส้น (linear algebra)** ในการวิเคราะห์ระบบ ผลคูณที่แสดงถึงแรงดันไฟฟ้าสามารถเขียนอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$V(s) = Z(s)\cdot I(s) \quad : \text{โดเมนของลาปลาซ}$$
$$V(\omega) = Z(\omega)\cdot I(\omega) : \text{โดเมนของความถี่}$$

เราเรียก $Z(\cdot)$ ว่าอิมพีแดนซ์ (impedance) ซึ่งเป็นค่าที่สื่อถึงการตอบสนองของชิ้นส่วนซึ่งขึ้นอยู่กับความถี่สัญญาณที่ป้อนให้กับระบบด้วย โดยทั่วไป อ**ิมพีแดนซ์ในโดเมนของความถี่จะประกอบไปด้วย ความต้านทาน** $\mathrm{Re}(Z)$ (resistance) **และ รีแอคแตนซ์** $\mathrm{Im}(Z)$ **(reactance)**

$$Z = \mathrm{Re}(Z) + j \cdot \mathrm{Im}(Z)$$

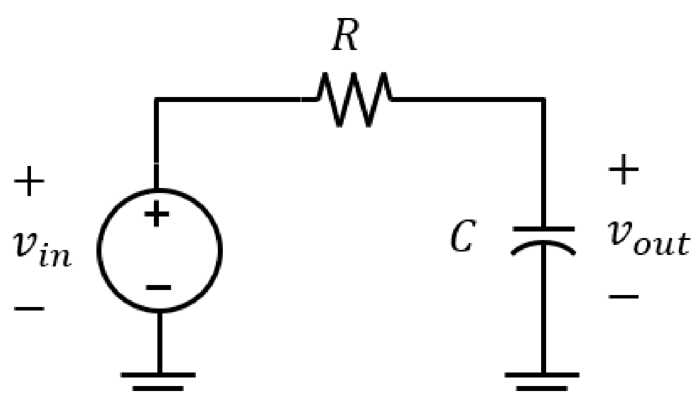
สำหรับกฎของโอห์ม เราจะได้อิมพีแดนซ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \text{ชิ้นส่วน} & \text{อิมพีแดนซ์}(\omega) \\ \text{inductor} & Z_L = j\,\omega L \\ \text{resistor} & Z_R = R \\ \text{capacitor} & Z_C = \dfrac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

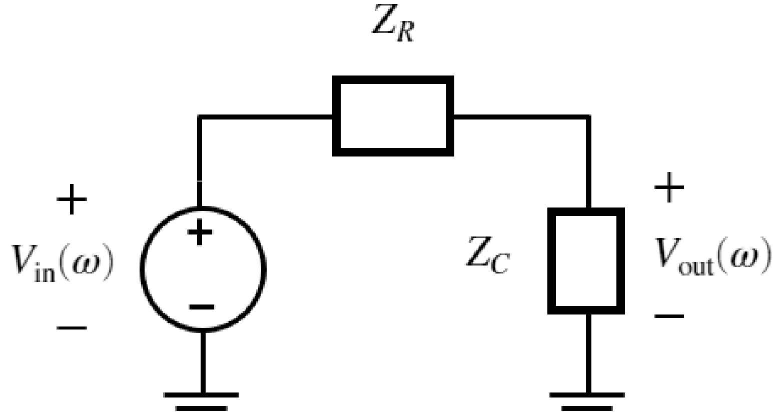
ความสะดวกของการคำนวณในโดเมนความถี่คือการที่เราสามารถแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้กลายเป็นสมการเชิงพีชคณิตและสามารถประยุกต์ใช้เทคนิคการรวมวงจรได้โดยตรง

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้วงจร RC อันดับที่หนึ่ง (first-order RC circuit) เป็นดังต่อไปนี้



แทนที่เราจะจำลองระบบในโดเมนของเวลา เราสามารถจำลองระบบในโดเมนความถี่โดยตรง เราสามารถมองชิ้นส่วนที่เป็นแพสซีฟ (passive component) ให้เป็นเหมือนตัวต้านทาน ซึ่งสามารถวาดเป็นแผนผังได้ดังนี้



เราสามารถหลักการคำนวณของวงจรแบ่งแรงดัน (coltage divider) ในการหาแรงดันไฟฟ้าที่เอ้าท์พุต ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$V_{\text{out}}(\omega) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} V_{\text{in}}(\omega)$$

$$G(\omega) = \frac{V_{\text{out}}(\omega)}{V_{\text{in}}(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{1}{R\,C}}{j\omega + \frac{1}{R\,C}} = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}$$

โดยที่ $\omega_c = \dfrac{1}{R\,C}$

เราจะสังเกตได้ว่าการหาฟังก์ชันถ่ายโอนนั้นสามารถทำได้โดยใช้แค่กระบวนการทางพีชคณิต ในการวิเคราะห์ขั้นถัดไป เราจำเป็นต้องใช้ "เฟสเซอร์" ในการหาอัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อนของระบบ

ตอนที่ 8 : เฟสเซอร์-เฟสเวกเตอร์ (Phasor-Phase Vector)

จากบทเรียนที่ 6 มา เราจะสังเกตได้ว่าการวิเคราะห์คุณลักษณะของระบบจะเกิดขึ้นในโดเมนของความถี่(เชิงมุม) ω โดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. จำลองระบบในโดเมนของเวลา
2. แปลงแบบจำลองให้เป็นโดเมนของลาปลาซ (ความถี่เชิงซ้อน)
3. แก้หาเอ้าท์พุตในโดเมนของาปลาซ
4. แปลงผลเฉลยให้อยู่ในโดเมนของเวลา
5. วิเคราะห์แอมพลิจูดและเฟสการเลื่อนจากเอ้าท์พุตในโดมเนของเวลา

เราสามารถใช้ เฟสเวกเตอร์ หรือ เฟสเซอร์ (Phasor) เพื่อลดขั้นตอนการวิเคราะห์ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. จำลองระบบในโดเมนของความถี่ (จากบทเรียนที่ 7)
2. คำนวณหาอัตราส่วนขนาดโดยตรงจากเฟสเซอร์
3. คำนวณหาเฟสการเลื่อนโดยตรงจากเฟสเซอร์

การคำนวณโดยใช้เฟสเซอร์อาศัยหลักการของจำนวนเชิงซ้อน (complex number) และพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) เรากำหนดให้**เฟสเซอร์คือรูปแบบการนำเสนอของจำนวนเชิงซ้อนในพิกัดเชิงขั้ว**ซึ่งเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$z = |z|\, e^{-j\angle(z)}$$

โดยที่ z **เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ** $|z|$ **เป็นขนาดของเฟสเซอร์** z **และ** $\angle(z)$ **เป็นมุมของเฟสเซอร์** z

หากเราเขียนจำนวนเชิงซ้อนในพิกัดสี่เหลี่ยม (rectangular coordinate) **จำนวนเชิงซ้อนจะถูกเขียนอยู่ในรูปของผลบวกระหว่างองค์ประกอบที่เป็นจำนวนจริงและองค์ประกอบที่เป็นจำนวนจินตภาพ**

$$z = \mathrm{Re}(z) + j \cdot \mathrm{Im}(z)$$

เราสามารถหาขนาดและมุมของจำนวนเชิงซ้อนดังกล่าวโดยความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$
$$\angle(z) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$$

ในทางกลับกัน เราก็สามารถหาองค์ประกอบแต่ละส่วนจากขนาดและมุมโดยความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{Re}(z) = |z| \cdot \cos(\angle(z))$$
$$\mathrm{Im}(z) = |z| \cdot \sin(\angle(z))$$

ข้อดีของการใช้เฟสเซอร์คือการคูณและการหารกันของจำนวนเชิงซ้อนที่ง่าย หากเราต้องการคำนวณหาจำนวนผลคูณและผลหารจำนวนเชิงซ้อนสองค่า เราสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$z_1 = |z_1|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_1)}$$
$$z_2 = |z_2|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_2)}$$
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_1)} \cdot |z_2|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_2)} = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{-j\angle(z_1)-j\angle(z_2)} = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{-j(\angle(z_1)+\angle(z_2))}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_1)}}{|z_2|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_2)}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_1)+j\angle(z_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\mathrm{e}^{-j(\angle(z_1)-\angle(z_2))}$$

เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้าเราทำการคูณเฟสเซอร์สองค่า เราสามารถนำขนาดของเฟสเซอร์ทั้งสองมาคูณกันได้เลย และ เราสามารถนำมุมของเฟสเซอร์ทั้งสองมารวมกันได้เลย หากเราต้องการที่จะหารเฟสเซอร์ด้วยเฟสเซอร์อีกค่าหนึ่ง เราสามารถทำการหาขนาดของผลหารโดยการหารขนาดของแต่เฟสเซอร์ ส่วนการคำนวณหามุมนั้นทำโดยการเอามุมของเฟสเซอร์ตั้งต้นลบด้วยมุมของเฟสเซอร์อีกอัน

จากตัวอย่างในบทเรียนที่ 7 เราสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนในรูปของเศษส่วนของเฟสเซอร์และคำนวณหาอัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อนได้ดังต่อไปนี้

$$G(\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c} = \frac{\omega_c + j \cdot 0}{\omega_c + j\omega}$$
$$G(\omega) = \frac{\sqrt{\omega_c^2 + 0^2} \cdot \mathrm{e}^{-j\tan^{-1}\left(\frac{0}{\omega_c}\right)}}{\sqrt{\omega_c^2 + \omega^2} \cdot \mathrm{e}^{-j\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}} = \frac{\omega_c \cdot \mathrm{e}^{-j(0)}}{\sqrt{\omega_c^2 + \omega^2} \cdot \mathrm{e}^{-j\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$
$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \cdot \mathrm{e}^{-j\left(-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right)} = |G(\omega)| \cdot \mathrm{e}^{-j(\angle(G(\omega)))}$$

จากการคำนวณเบื้องต้น เราสามารถหาอัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อนได้พร้อมๆกัน ซึ่งเขียนเป็นสมการดังต่อไปนี้

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$
$$\angle(G(\omega)) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

เราจะสังเกตได้ว่าเราสามารถคำนวณหาอัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อนได้สะดวกขึ้นโดยข้ามขั้นตอนการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ **เทคนิคนี้ใช้ได้เฉพาะระบบที่เป็น LTI เท่านั้น**

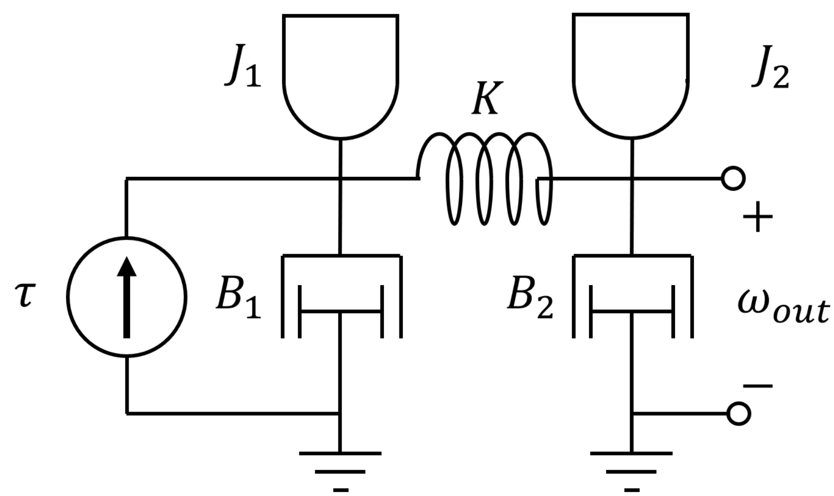
การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 9 : ความกว้างแถบความถี่ของระบบพลวัต (Bandwidth of Dynamical System)

ตราบใดที่ระบบพลวัตเป็น LTI เราสามารถที่จะทำการวิเคราะห์เชิงความถี่ ไม่ว่าจะเป็นระบบทางกายภาพเป็นระบบไฟฟ้า ระบบเครื่องกล หรือระบบอื่นๆ

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ระบบทางกลแบบหมุนเป็นดังแผนภาพวงจรดังกล่าว



โดยที่

τ คือแรงบิดอินพุตที่กระทำกับเพลาที่หนึ่ง

ω_{out} คือความเร็วเชิงมุมของเพลาที่สองที่มีเซนเซอร์วัดความเร็วติดอยู่ (ชื่อตัวแปรคล้ายกับตัวแปรอิสระ ω แต่มีความหมายคนละแบบ)

J_1 คือความเฉื่อยของเพลาที่หนึ่ง

J_2 คือความเฉื่อยของเพลาที่สอง

B_1 คือสัมประสิทธิ์ความฝืดเชิงมุมของตลับปืนที่ทำกับเพลาที่หนึ่ง

B_2 คือสัมประสิทธิ์ความฝืดเชิงมุมของตลับปืนที่ทำกับเพลาที่สอง

K คือค่าคงที่ของสปริงเชิงมุมระหว่างเพลาที่หนึ่งและเพลาที่สอง

เราสามารถหาสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$J_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\omega_1) = \tau - B_1\omega_1 + \tau_s$$
$$J_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\omega_2) = -\tau_s - B_2\omega_2$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\tau_s) = K(\omega_2 - \omega_1)$$
$$\omega_{\mathrm{out}} = \omega_2$$

เราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยแปลงเป็นระบบสมการเชิงเส้นในโดเมนของลาปลาซ

$$J_1 s\,\Omega_1(s) = \mathrm{T}(s) - B_1\Omega_1(s) + \mathrm{T}_s(s)$$
$$J_2 s\,\Omega_2(s) = -\mathrm{T}_s(s) - B_2\Omega_2(s)$$
$$s\,\mathrm{T}_s(s) = K(\Omega_2(s) - \Omega_1(s))$$

เมื่อทำการจัดรูป เราจะได้สมการ

$$(J_1 s + B_1)\Omega_1(s) - \mathrm{T}_s(s) = \mathrm{T}(s)$$
$$(J_2 s + B_2)\Omega_2(s) + \mathrm{T}_s(s) = 0$$
$$K\Omega_1(s) - K\Omega_2(s) + s\,\mathrm{T}_s(s) = 0$$

จากนั้นเราสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการเวกเตอร์ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} J_1 s + B_1 & 0 & -1 \\ 0 & J_2 s + B_2 & 1 \\ K & -K & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1(s) \\ \Omega_2(s) \\ \mathrm{T}_s(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{T}(s)$$

เราสามารถคำนวณหาเอ้าท์พุต $\Omega_{\mathrm{out}}(s)$ ได้จากการหา $\Omega_2(s)$ ดังนั้น เราจะเขียนสมการความสัมพันธ์ได้ออกมาในรูปดังต่อไปนี้

$$\Omega_{\mathrm{out}}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1(s) \\ \Omega_2(s) \\ \mathrm{T}_s(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 s + B_1 & 0 & -1 \\ 0 & J_2 s + B_2 & 1 \\ K & -K & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{T}(s)$$

$$G(s) = \frac{\Omega_{\mathrm{out}}(s)}{\mathrm{T}(s)} = \frac{K}{(J_1 s + B_1)\left(J_2 s^2 + B_2 s + K\right) + (J_2 s + B_2)K}$$

$$G(s) = \frac{\frac{K}{J_1}}{s^3 + \left(\frac{B_1}{J_1} + \frac{B_2}{J_2}\right)s^2 + \left(\frac{K}{J_2} + \frac{K}{J_1} + \frac{B_1}{J_1}\frac{B_2}{J_2}\right)s + \left(\frac{B_1}{J_1}\frac{K}{J_2} + \frac{B_2}{J_2}\frac{K}{J_1}\right)}$$

$$G(s) = \frac{\kappa_1}{s^3 + (\beta_1 + \beta_2)s^2 + (\kappa_1 + \kappa_2 + \beta_1\beta_2)s + (\beta_1\kappa_2 + \beta_2\kappa_1)}$$

แปลงอะไรมายังไงวะงง ทำไมตัวกำลังสามกับสองถึงเป็น s= -jw

$$G(\omega) = \frac{\kappa_1}{-j\omega^3 - (\beta_1+\beta_2)\omega^2 + j(\kappa_1+\kappa_2+\beta_1\beta_2)\omega + (\beta_1\kappa_2+\beta_2\kappa_1)}$$

$$G(\omega) = \frac{\kappa_1}{\left((\beta_1\kappa_2+\beta_2\kappa_1) - (\beta_1+\beta_2)\omega^2\right) + j\left((\kappa_1+\kappa_2+\beta_1\beta_2)\omega - \omega^3\right)}$$

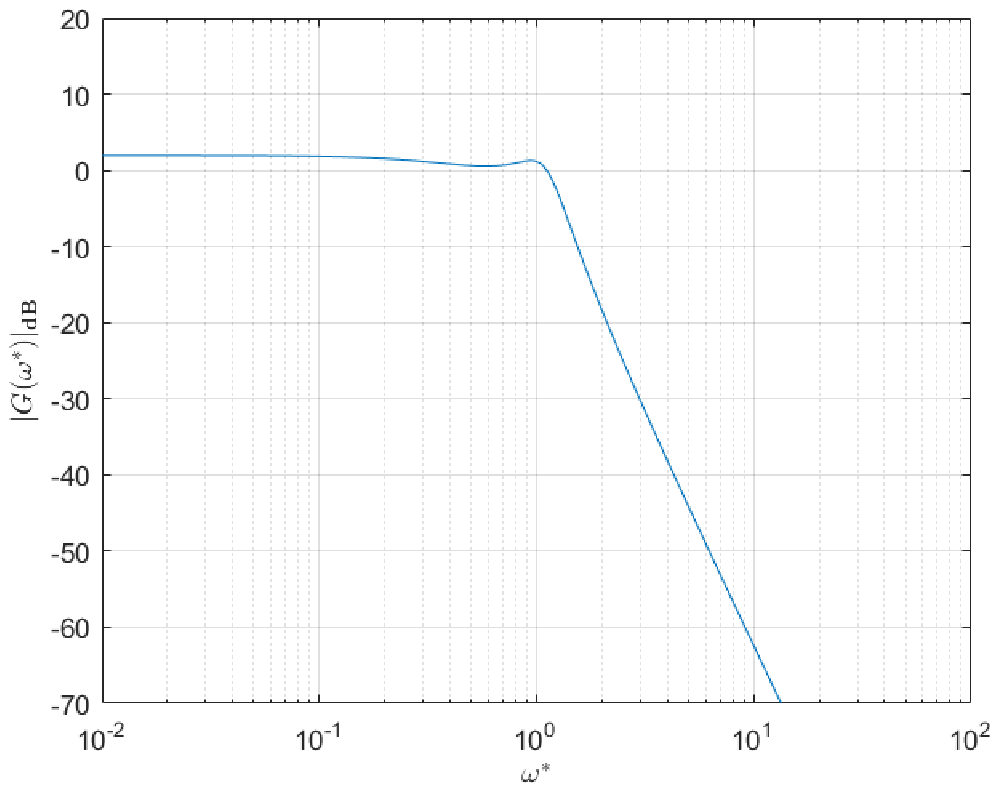
$$G(\omega) = \frac{\kappa_1}{\sqrt{\left((\beta_1\kappa_2+\beta_2\kappa_1) - (\beta_1+\beta_2)\omega^2\right)^2 + \left((\kappa_1+\kappa_2+\beta_1\beta_2)\omega - \omega^3\right)^2}\,\mathbf{e}^{j\left(\tan^{-1}\left(\frac{(\kappa_1+\kappa_2+\beta_1\beta_2)\omega-\omega^3}{(\beta_1\kappa_2+\beta_2\kappa_1)-(\beta_1+\beta_2)\omega^2}\right)\right)}}$$

$$G(\omega) = \frac{\kappa_1}{\sqrt{\left((\beta_1\kappa_2+\beta_2\kappa_1) - (\beta_1+\beta_2)\omega^2\right)^2 + \left((\kappa_1+\kappa_2+\beta_1\beta_2)\omega - \omega^3\right)^2}}\mathbf{e}^{j\left(-\tan^{-1}\left(\frac{(\kappa_1+\kappa_2+\beta_1\beta_2)\omega-\omega^3}{(\beta_1\kappa_2+\beta_2\kappa_1)-(\beta_1+\beta_2)\omega^2}\right)\right)}$$

เราจะได้อัตราส่วนขนาดดังต่อไปนี้

$$|G(\omega)| = \frac{\kappa_1}{\sqrt{\left((\beta_1\kappa_2+\beta_2\kappa_1) - (\beta_1+\beta_2)\omega^2\right)^2 + \left((\kappa_1+\kappa_2+\beta_1\beta_2)\omega - \omega^3\right)^2}}$$

```
w = 10.^(-2:0.01:2);
J_1 = 0.4;
J_2 = 1;
B_1 = 0.3;
B_2 = 0.5;
K = 0.3;
kappa_1 = B_1/J_1;
kappa_2 = B_2/J_2;
beta_1 = K/J_1;
beta_2 = K/J_2;
im = (kappa_1+kappa_2+beta_1*beta_2)*w-w.^3;
re = beta_1*kappa_2+beta_2*kappa_1-(beta_1+beta_2)*w.^2;
mag_G = kappa_1./sqrt(re.^2+im.^2);
pha_G = -atan(im./re);
clf;
ax = axes;
semilogx(ax,w,20*log10(mag_G));
grid(ax,'on');
hold(ax,'on');
DC_gain = kappa_1/(beta_1*kappa_2+beta_2*kappa_1);
% semilogx(ax,w,20*log10(DC_gain*ones(size(w))),'k--');
% semilogx(ax,w,20*log10(DC_gain/sqrt(2)*ones(size(w))),'k--');
axis(ax,[min(w) max(w) -70 20]);
xlabel('$\omega^*$','Interpreter',"latex")
ylabel('$|G(\omega^*)|_\mathbf{dB}$','Interpreter',"latex")
```



จากกราฟอัตราส่วนขนาดของฟังก์ถ่ายโอนเราจะสังเกตได้ว่าระบบมีพฤติกรรมที่คล้ายกับ ตัวกรอง low-pass แต่ระบบมีการขยายสัญญาณเพิ่มในช่วงที่ความถี่ต่ำเนื่องอัตราส่วนขนาดมีค่ามากกว่า $0\,\mathrm{dB}$ ระบบนี้จะตอบสนองดีในหนึ่งแต่จะตอบสนองน้อยกับอีกช่วงหนึ่ง ช่วงที่ระบบตอบสนองได้ดีนั้นคือ ความกว้างแถบความถี่ (bandwidth) ระบบ

การคำนวณ bandwidth ของระบบมีหลักการคล้ายกับการหาความถี่ตัดโดยเราจะวิเคราะห์หาความถี่ที่ทำให้อัตราส่วนพลังมีค่ามากกว่าครึ่งหนึ่งของอัตราส่วนพลัง ณ อินพุตคงที่ หรือเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$|G(\omega_B)|^2 > \frac{1}{2}|G(0)|^2$$

$$|G(\omega_B)| > \frac{1}{\sqrt{2}}|G(0)|$$

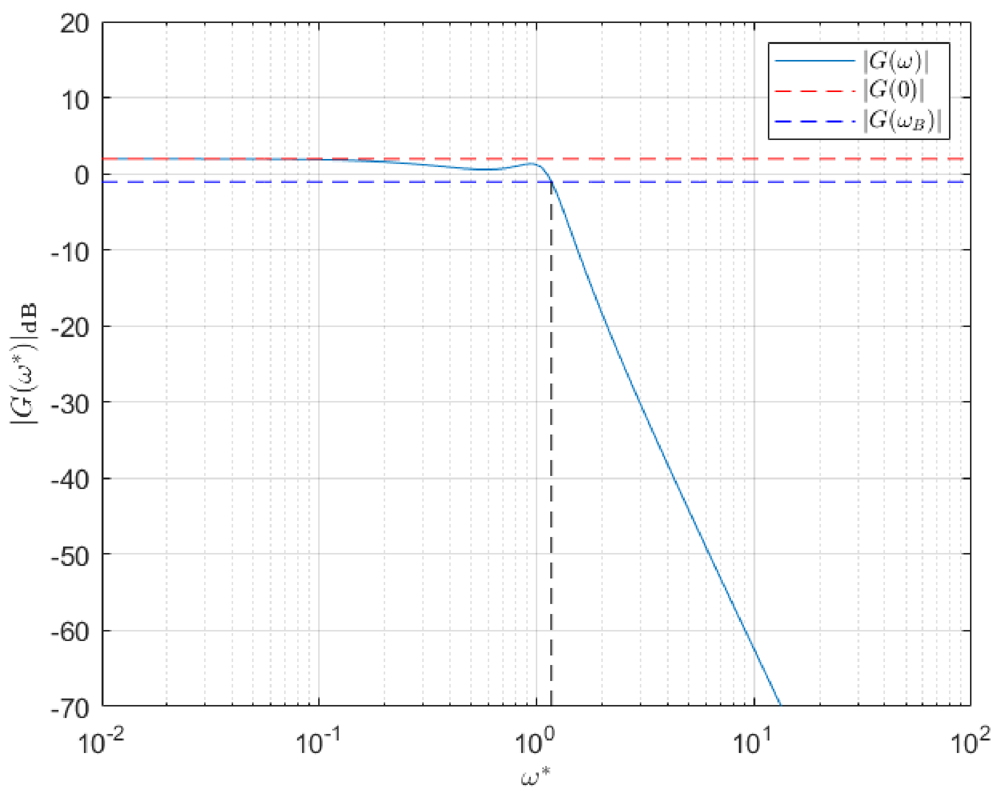
โดย ω_B คือ bandwidth ของระบบ

แทนที่เราจะคำนวณจากสมการ เราสามารถประมาณ bandwidth ของระบบได้ด้วยการตีเส้นในกราฟและหาจุดตัดระหว่างกราฟและเส้นนั้น โดนเส้นนี้จะเป็นเส้นที่มีขนาดเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **ของ** $|G(0)|$ หรือ

$$20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|G(0)|\right) = |G(0)|_{\mathrm{dB}} - 10\log_{10}(2) \approx |G(0)|_{\mathrm{dB}} - 3$$

```
w = 10.^(-2:0.01:2);
J_1 = 0.4;
J_2 = 1;
B_1 = 0.3;
B_2 = 0.5;
K = 0.3;
kappa_1 = B_1/J_1;
```

```
kappa_2 = B_2/J_2;
beta_1 = K/J_1;
beta_2 = K/J_2;
im = (kappa_1+kappa_2+beta_1*beta_2)*w-w.^3;
re = beta_1*kappa_2+beta_2*kappa_1-(beta_1+beta_2)*w.^2;
mag_G = kappa_1./sqrt(re.^2+im.^2);
pha_G = -atan(im./re);
clf;
ax = axes;
semilogx(ax,w,20*log10(mag_G));
grid(ax,'on');
hold(ax,'on');
DC_gain = kappa_1/(beta_1*kappa_2+beta_2*kappa_1);
semilogx(ax,w,20*log10(DC_gain*ones(size(w))),'r--');
semilogx(ax,w,20*log10(DC_gain/sqrt(2)*ones(size(w))),'b--');
plot(ax,[1.170798 1.170798],[-70 -1.0721],'k--')
axis(ax,[min(w) max(w) -70 20]);
xlabel('$\omega^*$','Interpreter',"latex")
ylabel('$|G(\omega^*)|_\mathbf{dB}$','Interpreter',"latex")
legend({'$|G(\omega)|$','$|G(0)|$','$|G(\omega_B)|$'},'Interpreter',"latex")
```



เราจะได้ว่า bandwidth ของระบบเครื่องกลนี้อยู่ที่ $1.170798 \left[\frac{\mathrm{rad}}{s}\right]$ หรือประมาณ $0.1863\,[\mathrm{Hz}]$

เราสามารถออกแบบตัวกรองสัญญาณจาก bandwidth ของระบบได้ เนื่องจากระบบจริงมีการตอบสนองในช่วงของ bandwidth เราสามารถกรองสัญญาณรบกวนที่มีความถี่สูงกว่า bandwidth ออกไปได้ ในกรณีตัวอย่าง เราสามารถออกแบบตัวกรอง low-pass ที่มีความถี่ตัดในบริเวณ $0.1863\,[\mathrm{Hz}]$

เราสามารถสรุปกระบวนการประมาณ bandwidth ได้ดังต่อไปนี้

1. กราฟแผนภาพโบเดในส่วนของ อัตราส่วนขยาด
2. คำนวณหา อัตราส่วนขนาด ณ อินพุตคงที่ $|G(0)|_{\mathrm{dB}}$
3. นำอัตราส่วนขนาด(ในเดซิเบล) ไปลบด้วย $10\log_{10}(2)$ หรือประมาณ $3\ \mathrm{dB}$
4. วาดเส้นแนวนอนในกราฟที่ค่าผลลบที่หามาได้
5. ดูจุดตักระหว่างกราฟและเส้นแนวนอน และหาพิกัดของความถี่ ณ จุดตัดนั้น