สัญญาณและระบบแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time Signal & System)

ตอนที่ 3 : นิยามของการแปลง Z (Definition of Z-transform)

บางครั้งเราทำการออกแบบ วิเคราะห์ และ สังเคราะห์ระบบในโดเมนของความถี่ แต่กระบวนการเหล่านี้ล้วนแต่มีสมมุติฐานอย่างเดียวกันซึ่งคือระบบนั้นจะต้องเป็นระบบแบบเวลาต่อเนื่อง **หากเราต้องนำหลักการวิเคราะห์และสังเคราะห์มาใช้กับระบบแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง เราจำเป็นต้องศึกษาการแปลง Z (Z-transformation)**

หากเราพิจารณาสัญญาณที่มีเวลาไม่ต่อเนื่อง $y_s[n]$ ในรูปของเวลาต่อเนื่อง $y(t)$ ที่ถูกสุ่มตัวอย่างด้วยคาบการสุ่ม Δt เราจะสามารถเขียนสมการได้ดังต่อไปนี้

$$y(t) = y[0]\delta(t) + y[1]\delta(t-\Delta t) + y[2]\delta(t-2\Delta t) + \cdots$$

เราสามารถแปลงสัญญาณให้อยู่ในโดเมนของลาปลาซได้ดังต่อไปนี้

$$Y(s) = y[0] + y[1]\mathrm{e}^{-s\cdot\Delta t} + y[2]\mathrm{e}^{-s\cdot 2\Delta t} + \cdots$$

เราจะกำหนดให้ ตัวแปรอิสระ $z = \mathrm{e}^{s\Delta t}$ เมื่อนำความสัมพันธ์นี้ไปแทนค่าในสัญญาณในโดเมนของลาปลาซ เราจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$Y(z) = y[0] + y[1]z^{-1} + y[2]z^{-2} + \cdots$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n},\ \ n \geq 0$$

ดังนั้นสัญญาณจะสามารถถูกเขียนอยู่ในรูปของตัวแปรอิสระ z การแปลงดังกล่าวถูกเรียกว่า การแปลง Z (Z-transform) เรานิยามการแปลง Z ได้ดังต่อไปนี้

$$\mathbf{Z}\{y[n]\} = Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n}$$

การแปลง Z สามารถถูกมองเป็นการแปลงลาปลาซสำหรับระบบและสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องได้

ตัวอย่างที่ 1 : $y[n] = \theta[n]$

กำหนดให้สัญญาณ $y[n]$ เป็นฟังก์ชันขั้นเฮวิไซด์ (Heavidise's step function) เราสามารถแปลงฟังก์ชันดังกล่าวโดยใช้นิยามของการแปลง Z ได้ดังต่อไปนี้

$$\mathbf{Z}\{y[n]\} = Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta[n]z^{-n}$$

$$\mathbf{Z}\{y[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$