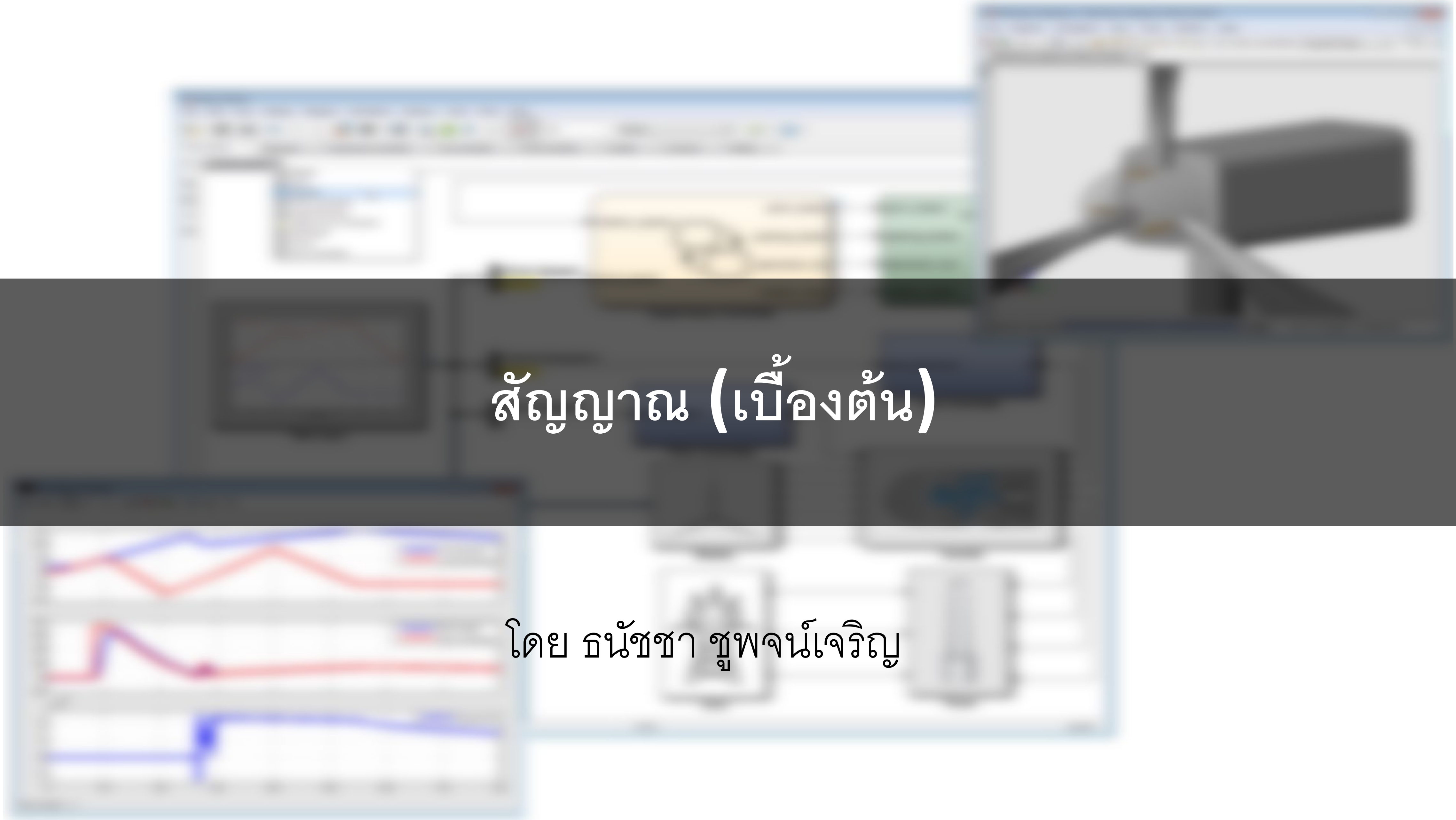
Agenda

- Notion of Signals
    - Continuous-time & Discrete-time
    - Analog & Digital
    - Certainty
- Notion of dynamical systems
    - Inputs, Outputs, States, Parameters
    - Time, Signal, Subsystem
- Type of System
    - State
    - Time
    - Linearity
    - Parameters
    - Certainty



สัญญาณ (เบื้องต้น)

โดย ธนัชชา ชูพจน์เจริญ

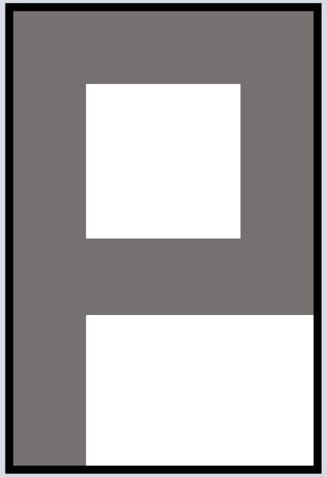
นิยาม

ลักษณะ

ตัวอย่าง

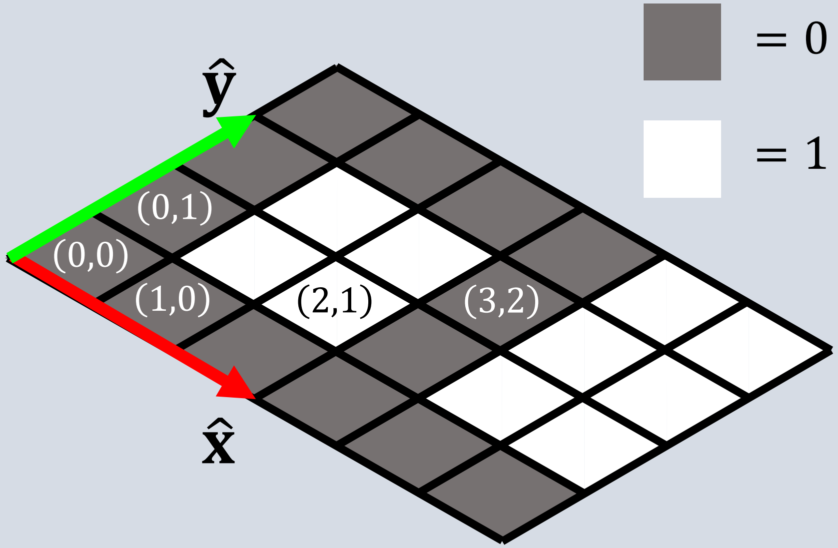
“***สัญญาณ***คือฟังก์ชันที่อธิบายถึงข้อมูลที่ขึ้นอยู่กับปริภูมิ (space) หรือ เวลา (time) หรือทั้งคู่”

“สัญญาณคือฟังก์ชันที่อธิบายถึงข้อมูลที่ขึ้นอยู่กับ ปริภูมิ (space) หรือ เวลา (time) หรือทั้งคู่”



กำหนดให้ p เป็นสัญญาณที่อธิบายภาพทางซ้ายมือ

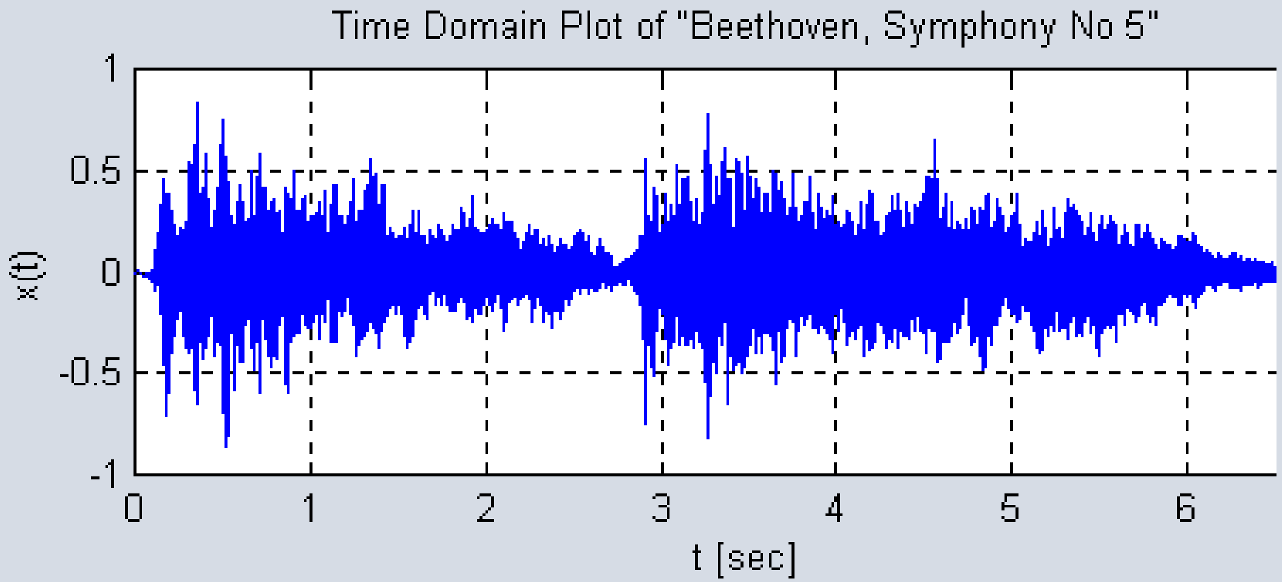
$$p: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \{0,1\}$$
$$\mathcal{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$$
$$\mathcal{Y} = \{0,1,2,3\}$$



$$p(x,y)\big|_{\substack{x=2\\y=1}} = p(2,1) = 1$$
$$p(x,y)\big|_{\substack{x=3\\y=2}} = p(3,2) = 0$$

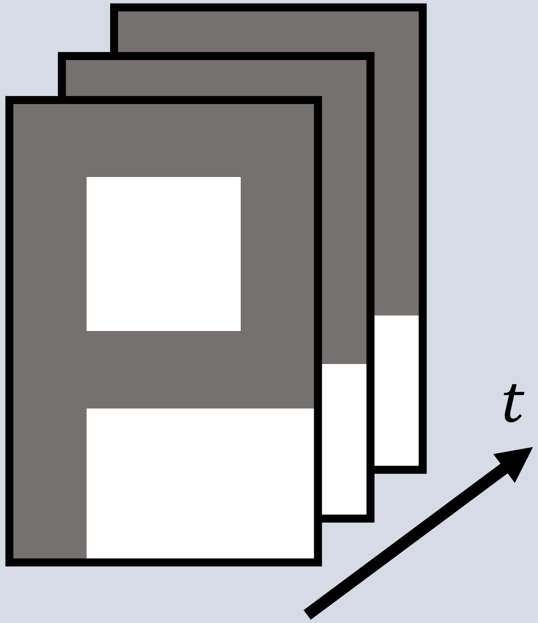
ตัวแปรปริภูมิ x และ y เป็นตัวแปรอิสระ (independent variables) ซึ่งไม่ได้ขึ้นอยู่กับค่าอื่นๆ

“สัญญาณคือฟังก์ชันที่อธิบายถึงข้อมูลที่ขึ้นอยู่กับ ปริภูมิ (space) หรือ เวลา (time) หรือทั้งคู่”

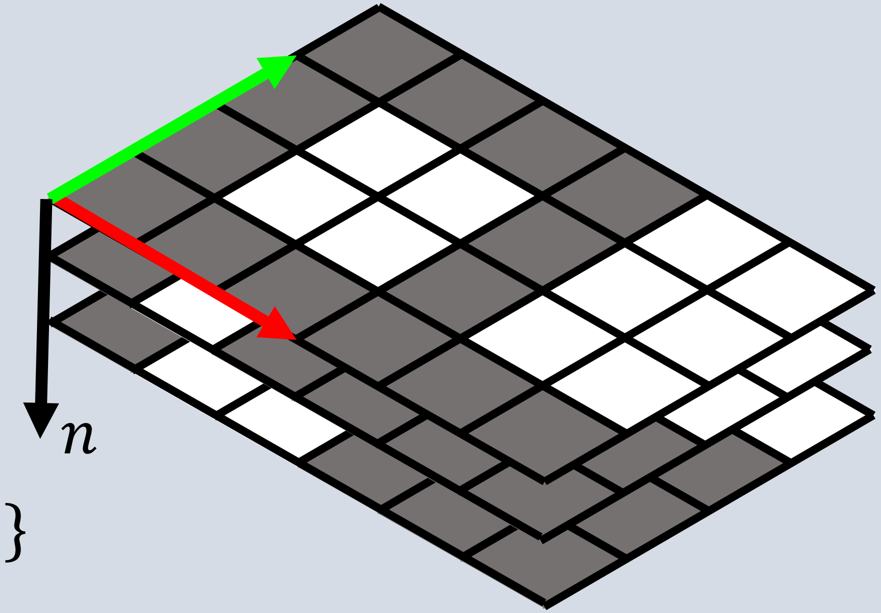


$$x: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \{a \in \mathbb{R} \mid -1 \leq a \leq 1\}$$

“สัญญาณคือฟังก์ชันที่อธิบายถึงข้อมูลที่ขึ้นอยู่กับ ปริภูมิ (space) หรือ เวลา (time) หรือทั้งคู่”



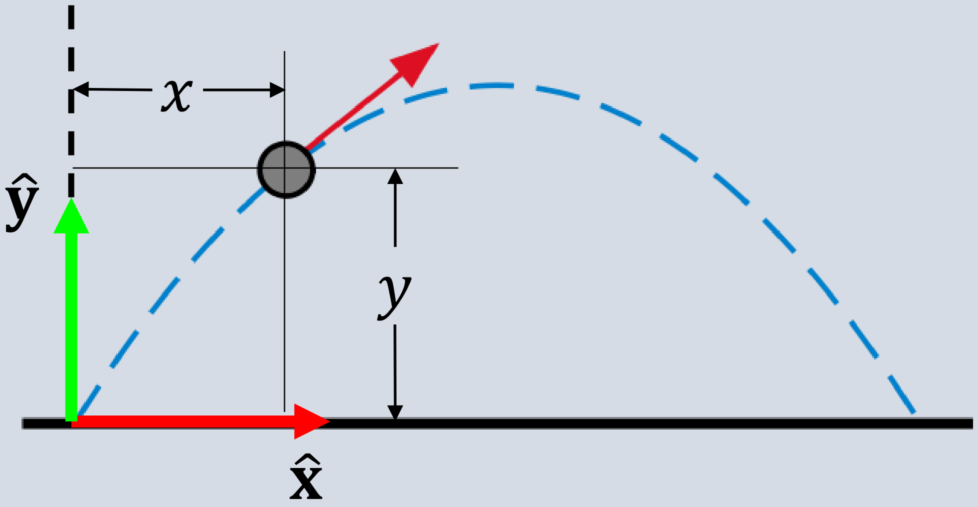
$$p: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$$
$$\mathcal{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$$
$$\mathcal{Y} = \{0,1,2,3\}$$



$$p(x,y,n)\Big|_{\substack{x=1\\ y=0\\ n=1}} = p(1,0,1) = 1$$

ตัวแปรปริภูมิ x และ y เป็นตัวแปรอิสระ (independent variables) ซึ่งไม่ได้ขึ้นอยู่กับค่า t และค่า t ก็เป็นตัวแปรอิสระเหมือนกัน

“สัญญาณคือฟังก์ชันที่อธิบายถึงข้อมูลที่ขึ้นอยู่กับ ปริภูมิ (space) หรือ เวลา (time) หรือทั้งคู่”



$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t \end{bmatrix}$$

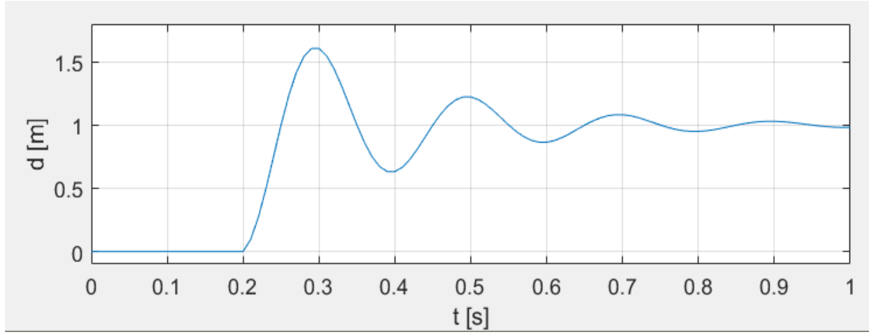
$$\mathbf{p}: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2$$

ตัวแปรปริภูมิ x และ y เป็นตัวแปรตาม (dependent variables) ที่ขึ้นอยู่กับค่า t

“สัญญาณคือฟังก์ชันที่อธิบายถึงข้อมูลที่ขึ้นอยู่กับ ปริภูมิ (space) หรือ เวลา (time) หรือทั้งคู่”

ว่าด้วยเรื่องของความต่อเนื่องของเวลา

สัญญาณมีค่าตลอดเวลาในช่วงเวลา



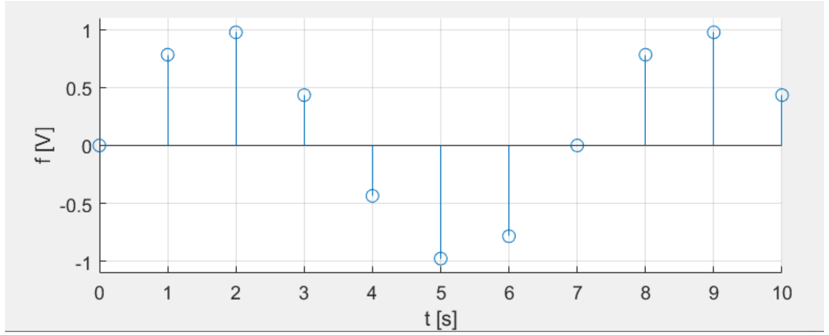
ตย. : ปริมาณของกระแสไฟที่ไหลเข้าเตาหมูกระทะไฟฟ้า

Continuous-time Signal $\mathbf{f}_c(t)$

$$\mathbf{f}_c : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$$

เซ็ตของจำนวนจริง

สัญญาณมีค่าแค่บางจังหวะ



ตย. : อุณหภูมิในเรือนกระจกที่ถูกวัดทุกเที่ยงวัน

Discrete-time Signal $\mathbf{f}_d[n]$

$$\mathbf{f}_d : \mathbb{Z} \to \mathcal{R}$$

เซ็ตของจำนวนเต็ม

การจำลองสัญญาณในโปรแกรม

Example : 1

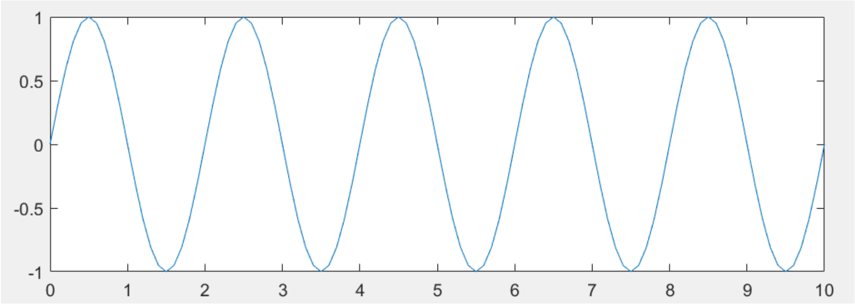
$$y(t) = A\sin(\omega t)$$

ประมาณเป็น

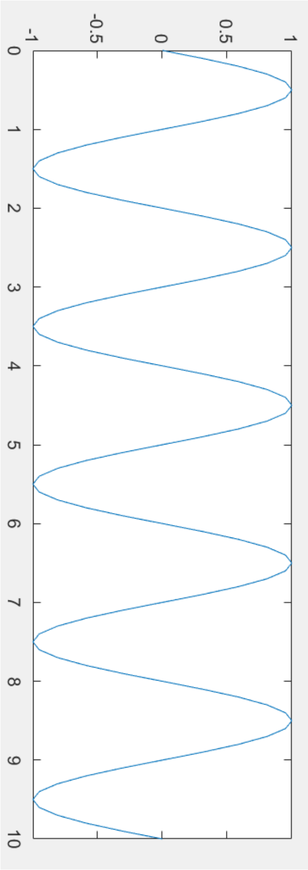
discrete-time

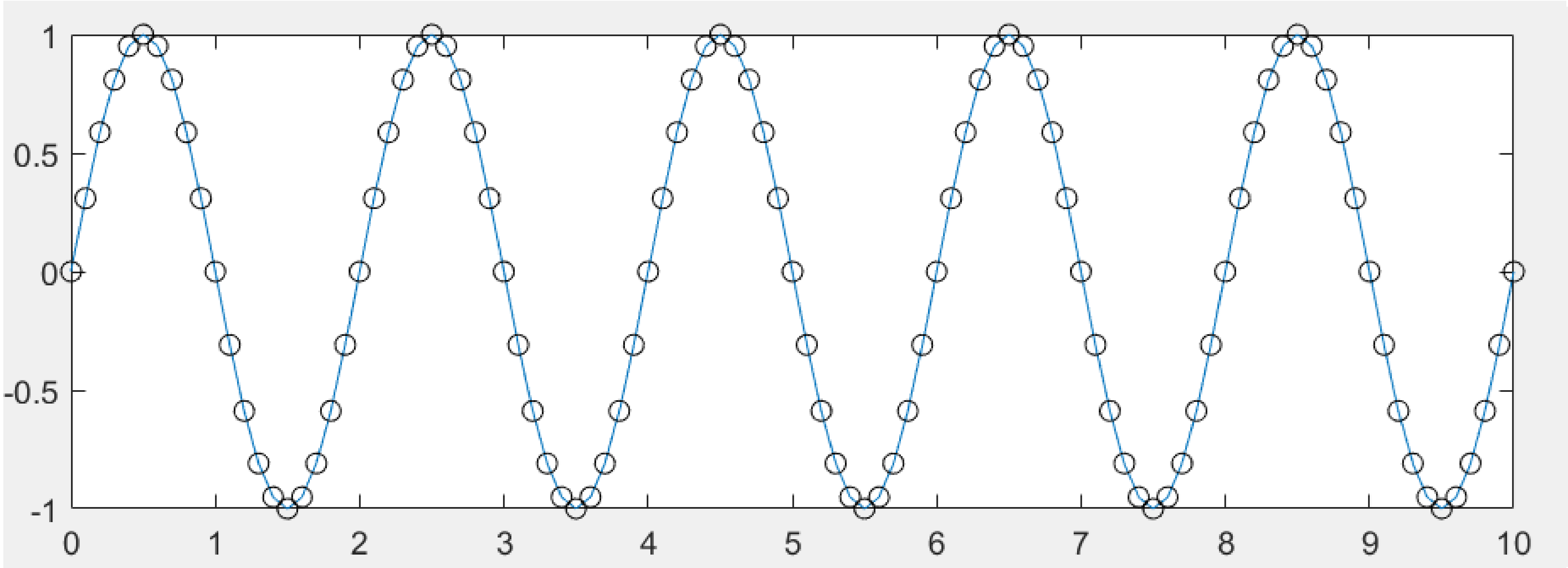
```
MATLAB Code:

>> t = (0:0.1:10)';
>> A = 1;
>> w = 2*pi* 0.5;
>> y = A*sin(w*t);
>> plot(t,y)
```

```
MATLAB Code:

>> t = (0:0.1:10)';
>> A = 1;
>> w = 1;
>> y = A*sin(w*t);
% y is a column vector
>> plot(t,y)
```



>> t =	>> y=
0	0
0.1	0.0998
0.2	0.1987
…	…
9.9	-0.4575
10.0	-0.5440




1
0.5
0
-0.5
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

ว่าด้วยเรื่องขนาดและมิติของสัญญาณ (Scalar/Bus)

$$y(t) = \sin(t)$$

$$y: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$$

สัญญาณแบบ scalar

ข้อควรระวัง : การเขียนโปรแกรมนั้นจะต่างกับการเขียนสมการทางคณิตศาสตร์ ถ้าเราต้องให้เวลาอยู่ในมิติที่ 1 ช่องของสัญญาณแบบ bus จะไปอยู่ในมิติที่ 2 แทน

$$\mathbf{y}(t) = \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

สัญญาณช่องที่ 1

สัญญาณช่องที่ 2

$$\mathbf{y}: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2$$

สัญญาณแบบ bus

```
MATLAB Code:

>> t = (0:0.1:10)';
>> v = 1;
>> y = [v*sin(t) v*cos(t)];
>> hold on;
>> plot(t,y(:,1))
>> plot(t,y(:,2))
>> legend('y_1','y_2')
```

```
MATLAB Code:

>> t = (0:0.1:10)';
>> v = 1;
>> y = [v*sin(t) v*cos(t)];
>> hold on;
>> plot(t,y(:,1))
>> plot(t,y(:,2))
>> legend('y_1','y_2')
```

>> t =	>> y=	
0	0	1.0000
0.1	0.0998	0.9950
0.2	0.1987	0.9801
…	…	…
9.9	-0.4575	-0.8892
10.0	-0.5440	-0.8391

ว่าด้วยเรื่องขนาดและมิติของสัญญาณ (Matrix)

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

vectorize

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{vec}\big(\mathbf{R}(t)\big) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

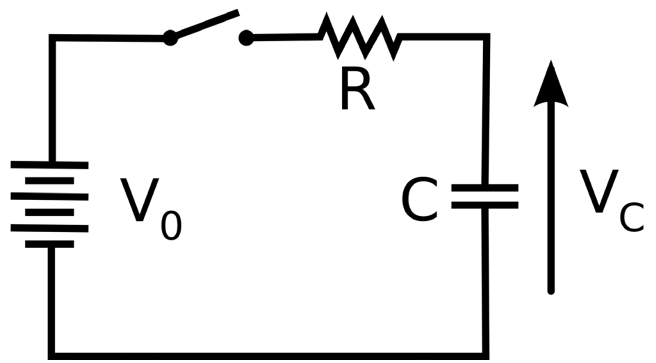
$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^{4}$$

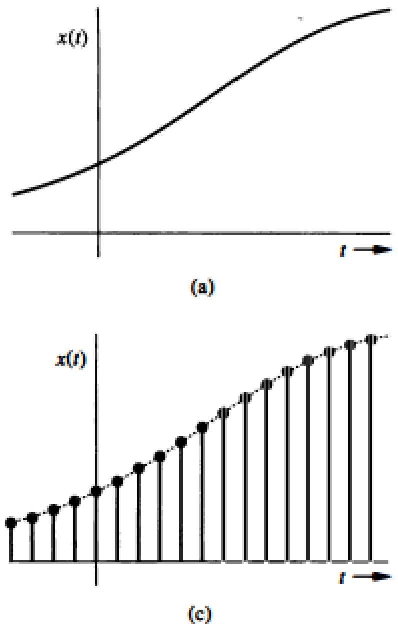
```
MATLAB Code:

>> N = 11;
>> t = linspace(0,10,N)';
>> R = cat(3,[cos(t) -sin(t)],
[sin(t) cos(t)]);
>> v = reshape(y,N,[]);
```

ว่าด้วยเรื่องของ ค่าของสัญญาณ

$$y: \mathcal{D} \rightarrow \boxed{\mathcal{R}}$$

สัญญาณที่มีค่าอยู่ในช่วงที่ต่อเนื่อง เรียกว่าสัญญาณอนาล็อก (Analog Signal)

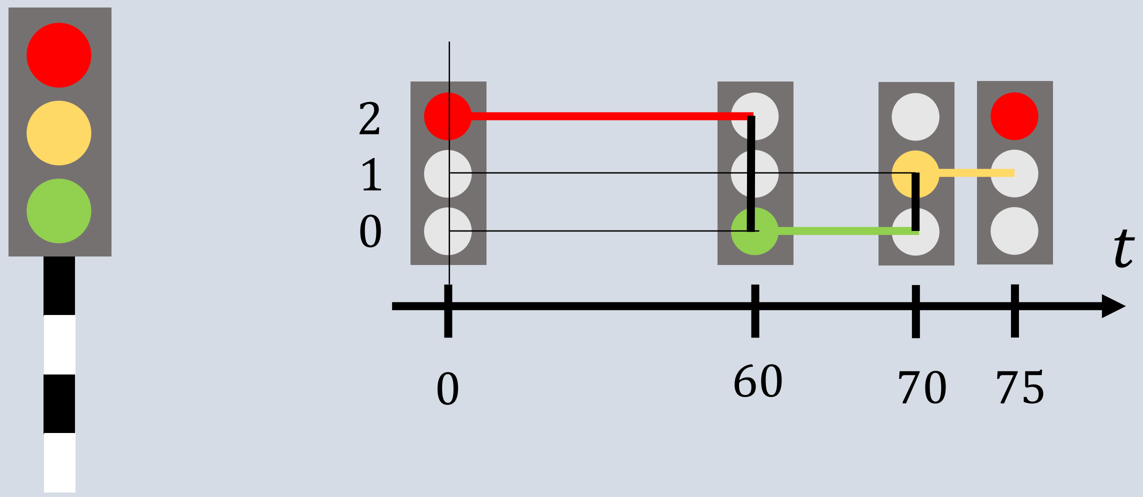




ว่าด้วยเรื่องของ ค่าของสัญญาณ

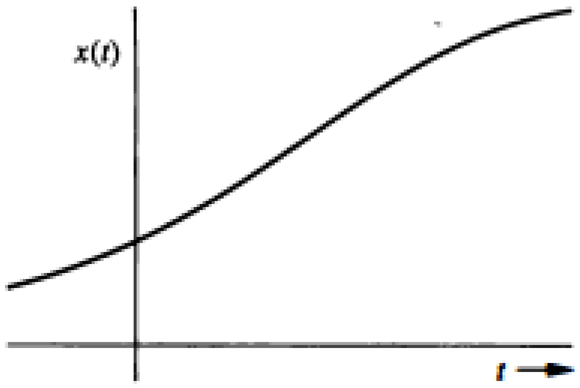
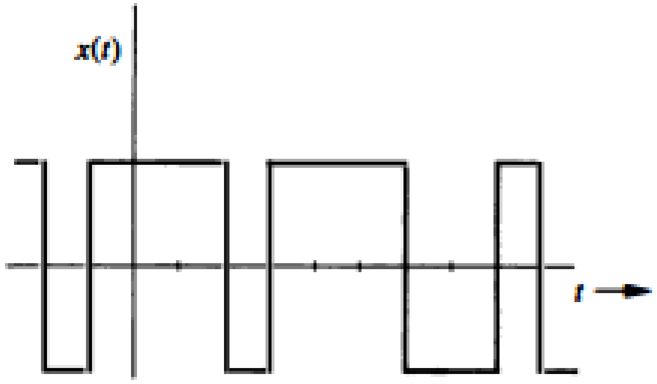
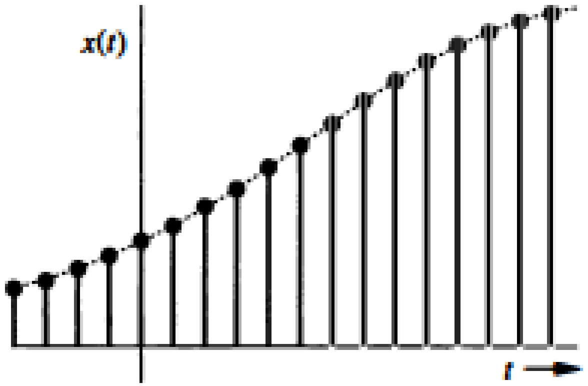
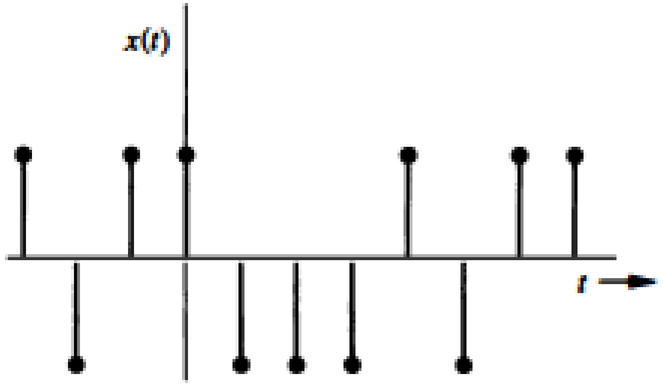
$$y: \mathcal{D} \to \boxed{\mathcal{R}}$$

สัญญาณที่มีค่าอยู่ใน เซ็ตที่นับได้และจำกัด เรียกว่า สัญญาณดิจิตอล (Digital Signal)



$$s: \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \{0,1,2\}$$

$$s(t) = \begin{cases} 2 & \text{if} \quad 0 \leq t < 60 \\ 0 & \text{if} \quad 60 \leq t < 70 \\ 1 & \text{if} \quad 70 \leq t < 75 \end{cases}$$

	Analog	Digital
Continuous-time	 (a)	 (b)
Discrete-time	 (c)	 (d)

ว่าด้วยเรื่องของ ความไม่แน่นอน

สัญญาณที่สามารถถูก**ระบุได้ชัดเจน**ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์และสามารถคำนวณหาได้ในทุกช่วงเวลา เรียกว่า สัญญาณเชิงกำหนด

Deterministic Signal

$$y[n] = \sin(n)$$

สัญญาณที่มีพฤติกรรมที่**ไม่สามารถถูกระบุได้ชัดเจน** เรียกว่า สัญญาณสุ่ม

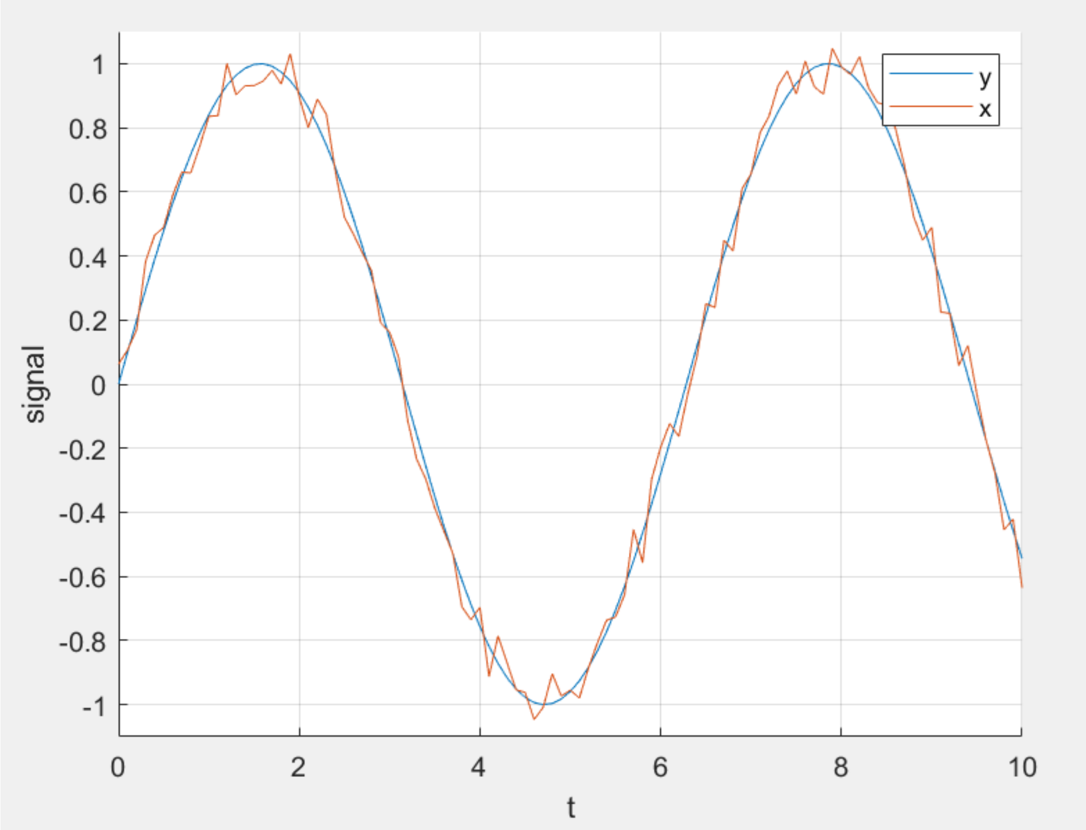
Random Signal

$$x[n] = \sin(n) + w[n]$$

$w \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$: Gaussian Distribution

Deterministic Signal & Random Signal

$$y[n] = \sin(n)$$



$$x[n] = \sin(n) + w[n]$$
$$w \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

ความต่อเนื่องของเวลา

Continuous-time

Discrete-time

ค่าของสัญญาณ

Analog

Digital

ความไม่แน่นอน

Deterministic

Random

Where does the signal come from ?

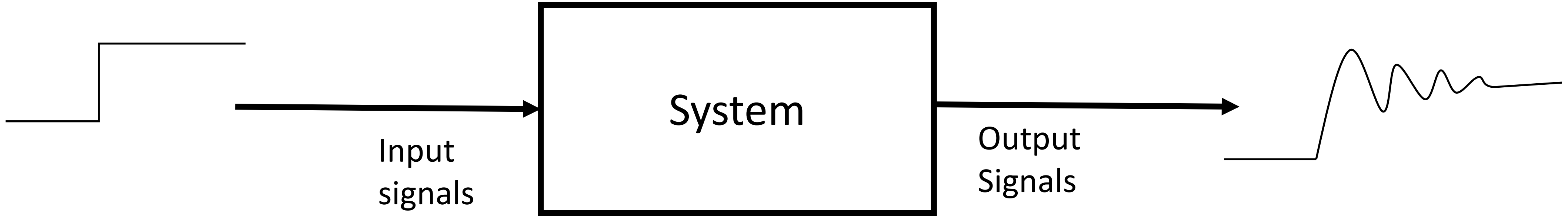
Ans : A ***“system”*** provides it !!!

- Acquire from the physical system via measurement tool
- Simulate by using some assumption

Dynamical System

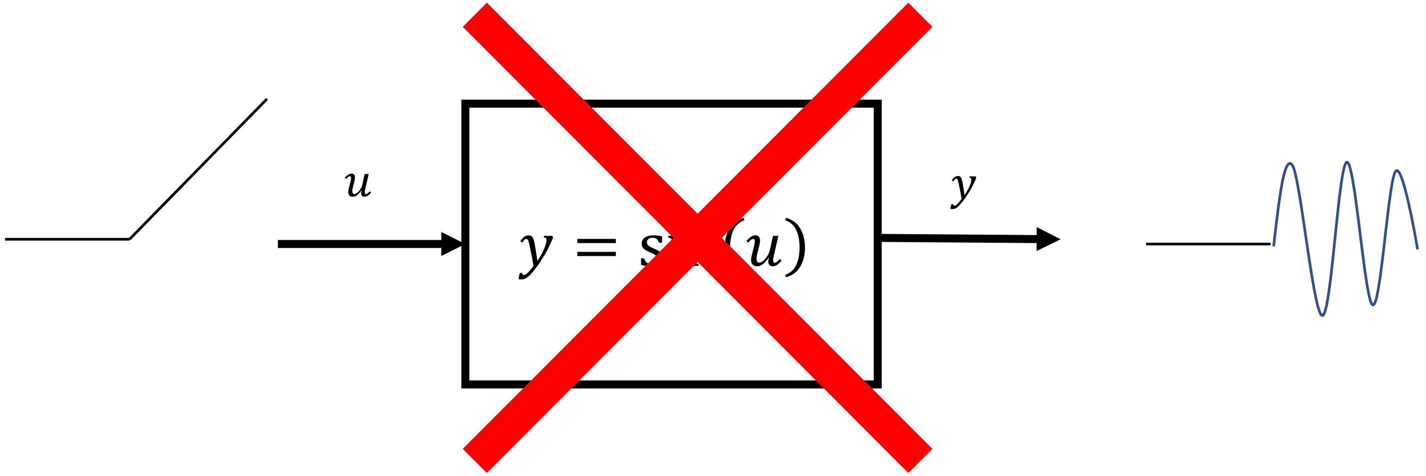
"A system in which a function describes the **evolution** of *something* over **time** "

Something that change over time : States



Systems : Examples

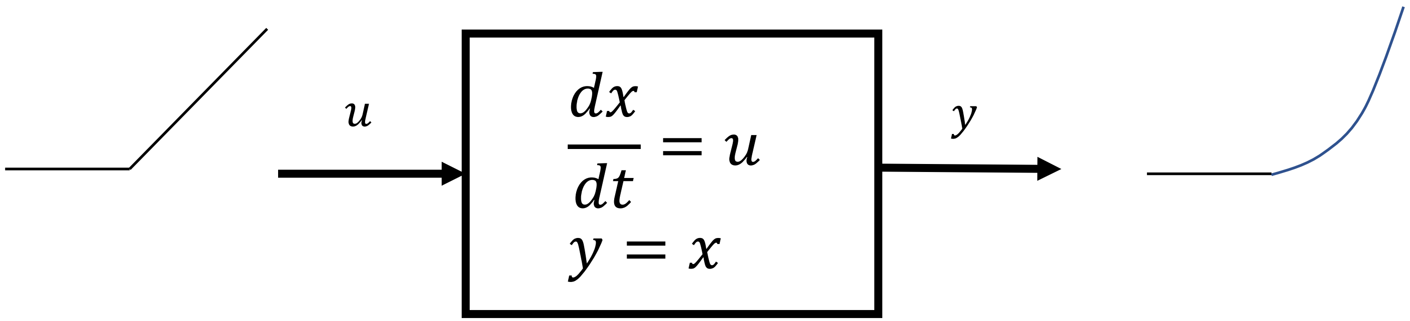
“A system in which a function describes the **evolution** of *something* over **time** "



This is not a dynamical system since there is **NO** evolution of states !!!
This is just a direct mathematic map from one domain to the other.

Systems : Examples

“A system in which a function describes the **evolution** of *something* over **time** "



This is a dynamical system since evolution occurs for state variable x.

State Dependency

The output of the system varies according to the current state of the system

$$\frac{dx}{dt} = u(t)$$
$$y = x$$

Some calculation for exact $x(t)$

$$x(t=0) = x_0$$
$$dx = u(t)\, dt$$
$$\int_{x_0}^{x(t)} 1\, dx = \int_{\tau=0}^{t} u(t)\, d\tau$$

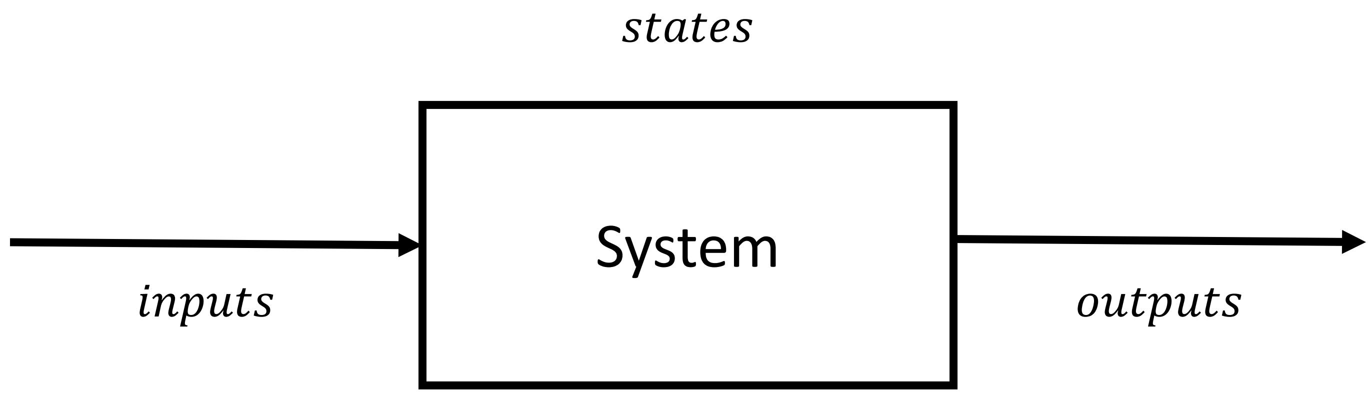
$$x(t) - x_0 = \int_{\tau=0}^{t} u(t)\, d\tau$$
$$x(t) = x_0 + \int_{\tau=0}^{t} u(t)\, d\tau$$

$$x(t) = x_0 + \int_{\tau=0}^{t} u(t)\, d\tau$$

As you can see, the value of x depends on both input signal u and initial states x_0

A unique u at time t doesn't always result in the same x .

Inputs, Outputs, States



Note : A system without inputs is called “unforced system”

Type of System : Categorized by State type

- A **continuous-state system** is a dynamical system whose states are continuous. (Model using differential/difference equation)

Example : Pendulum

$$\theta \in \mathbb{R}$$
$$ml^2\ddot{\theta} + mlg\sin(\theta) = u$$

- A **discrete-state system** is a system with states that take on values in a countable set (discrete states). (Model using state machine)

Example : Traffic light

$$s \in \{red, green, yellow\}$$

- A **hybrid-state system** is a system with both discrete and continuous states. (Hybrid State Machine)

Example : Bipedal Robot

$$\langle\vec{\theta}, s\rangle \in \langle\mathbb{R}^n, \{SS, DS\}\rangle$$

Place Holder for Image : Pendulum

Place Holder for Image : Traffic Light

Place Holder for Image : Bipedal robot

Type of System : Categorized by Time

- A **continuous-time** system refers to a continuous-state system that change continuously in time (Model using differential equation)

Example : Pendulum

$$\theta \in \mathbb{R}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mlg\sin(\theta) = u$$

- A **discrete-time** system is a continuous-state system that changes at given points in time. (Model using difference/recurrence equation)

Example : Population Model

$$x[n+1] = \alpha x[n] \cdot x[n+1]$$

Place Holder for
Image : Graph of Pendulum

Place Holder for
Image : Graph of Discrete Population

Type of System : Categorized by Linearity

- A **linear system** is a system that follows linear property.
  - Homogeneity

    If
    $$y = S(u)$$
    Then
    $$\alpha y = S(\alpha u)$$
  - Additivity

    If
    $$S(u_1 + u_2) = S(u_1) + S(u_2)$$

Example : RC Filter
$$RC\frac{dv}{dt} + v = u$$

- A **nonlinear system** is a system that is not linear.

Example : Pendulum
$$ml^2\ddot{\theta} + mlg\sin(\theta) = u$$

Place Holder for
Image : Linearity

Type of System : Categorized by Parameters

- A **lumped-parameter system** is a system that is modelled such that parameters are grouped as discrete entities. (Model using Ordinary differential equation)

Example : RC Filter

$$RC\frac{dv}{dt} + v = u$$

- A **distributed-parameter system** is a system that modelled such that parameters are distributed over some spatial domain (Model using Partial Differential Equation)

Example : Telegraph's equations

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L\frac{\partial I}{\partial t} - RI$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C\frac{\partial V}{\partial t} - GV$$

Place Holder for
Image : RC Filter

Place Holder for
Image : Transmission Line

Type of System : Categorized by Parameters

- A **deterministic system** is a system that is modelled such that its evolution is known with certainty.

Example : RC Filter

$$RC\frac{dv}{dt} + v = u$$

- A **probabilistic system** is a system that modelled such that its evolution cannot be predict perfectly.

Example : RC Filter with Disturbance

$$RC\frac{dv}{dt} + v = u + v$$

$$v \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Place Holder for
Image : RC Filter

Place Holder for
Image : Transmission Line

Why is it important to differentiate types of systems ?

- To understand the behavior of the system and ***model*** the system efficiently

- To set a proper scope for ***analysis***

- To ***synthesize*** a proper algorithm to process such system

Understanding the system helps dealing with its signals.

Summary

- Notion of Signals
  - Continuous-time & Discrete-time
  - Analog & Digital
  - Certainty
- Notion of dynamical systems
  - Inputs, Outputs, States, Parameters
  - Time, Signal, Subsystem
- Type of System
  - State
  - Time
  - Linearity
  - Parameters
  - Certainty