สัญญาณและระบบแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time Signal & System)

ตอนที่ 5 : การทำให้เป็นเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discretization)

ระบบทางกายภาพส่วนใหญ่เป็นระบบแบบเวลาต่อเนื่อง เราได้ทำการจำลอง วิเคราะห์ และออกแบบระบบที่มีเวลาแบบต่อเนื่อง แต่**ในโลกความเป็นจริง แพลตฟอร์มที่ใช้ในการคำนวณนั้นไม่สามารถทำให้เป็นแบบเวลาต่อเนื่องได้ เราจึงต้องทำการประมาณให้เป็นเวลาไม่ต่อเนื่อง (discretization)**

หากเราออกแบบระบบควบคุมแบบ LTI ที่อยู่ในโดเมนของเวลาดังต่อไปนี้

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(i(t)) = e(t)$$
$$c(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \cdot i(t)$$

โดยที่

e คืออินพุต

c คือเอ้าท์พุต

K_p กับ K_i คือค่าคงที่

เราสามารถประมาณระบบนี้ได้โดยการประมาณอนุพันธ์ของ i

เราจะกำหนด Δt เป็นระยะเวลาในแต่ละช่วงการคำนวณ ยิ่งช่วงการคำนวณน้อย การคำนวณก็จะละเอียดและแม่นยำมากขึ้น แต่การคำนวณที่มากขึ้นจะใช้พลังในการคำนวณมากขึ้นด้วยเช่นกัน

วิธีการแรกที่สามารถใช้ประมาณอนุพันธ์คือการหาผลต่างข้างหน้า (Forward Difference/ Euler's method) ซึ่งเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(i(t_n)) \approx \frac{i(t_{n+1}) - i(t_n)}{\Delta t} = \frac{i[n+1] - i[n]}{\Delta t}$$

วิธีการที่สองคือการหาผลต่างข้างหลัง (Backward Difference) ซึ่งเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(i(t_n)) \approx \frac{i(t_n) - i(t_{n-1})}{\Delta t} = \frac{i[n] - i[n-1]}{\Delta t}$$

วิธีการสุดท้ายคือการหาผลต่างกึ่งกลาง (Central Difference) ซึ่งเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(i(t_n)) \approx \frac{i[n+1] - i[n-1]}{\Delta t}$$

หากเราใช้วิธีผลต่างข้างหน้า เราจะสามารถประมาณระบบควบคุมได้ดังต่อไปนี้

$$i[n+1] = i[n] + \Delta t \cdot e[n]$$
$$c[n] = K_p \cdot e[n] + K_i \cdot i[n]$$

นอกจากการประมาณในโดเมนของเวลา เราสามารถประมาณฟังก์ชันถ่ายโอนในโดเมนของลาปลาซได้เช่นกัน **การทำให้เป็นเวลาไม่ต่อเนื่องในโดเมนของลาปลาซคือการแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนจากโดเมนของลาปลาซให้เป็นโดเมนของ Z** ซึ่งมีวิธีหลักทั้ง 3 วิธีดังนี้

วิธีแรกในการประมาณคือ การหาผลต่างข้างหน้า ซึ่งเราจะประมาณตัวแปร s ให้เป็นค่าดังต่อไปนี้

$$s \approx \frac{z-1}{\Delta t}$$

วิธีที่สองในการประเมาณคือ การหาผลต่างข้างหลัง ซึ่งเขียนความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$s \approx \frac{1-z^{-1}}{\Delta t}$$

วิธีทีสุดท้ายคือ การแปลงแบบสองเส้น (bilinear transformation/Tustin' method) หาผลต่างข้างหลัง ซึ่งเขียนความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$s \approx \frac{2}{\Delta t}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

ตัวอย่างที่ 1: ตัวกรอง low-pass อันดับที่หนึ่ง

กำหนดให้ตัวกรองถูกออกแบบดังต่อไปนี้

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

เราประมาณโดยใช้วิธีแปลงแบบสองเส้น $s \approx \dfrac{z-1}{\Delta t}$ ซึ่งทำให้เราได้ฟังก์ชันถ่ายโอนในโดเมนของ Z

$$G(z) = \frac{\omega_c}{\left(\frac{z-1}{\Delta t}\right)+\omega_c}$$

$$G(z) = \frac{\omega_c \Delta t}{z+(\omega_c \Delta t - 1)}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\omega_c \Delta t}{z+(\omega_c \Delta t - 1)}$$

เมื่อเราได้ฟังก์ชันถ่ายโอนในโดเมนของ Z เราสามารถแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนกลับไปยังโดเมนของเวลาแบบไม่ต่อเนื่องได้

เนื่องจากระบบเป็นอันดับที่หนึ่ง เราสามารถเขียนตัวกรองของเราในรูปแบบปริภูมิสถานะดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x[n+1] &= a \cdot x[n] + b \cdot u[n] \\ y[n] &= c \cdot x[n] + d \cdot u[n] \end{aligned}$$

โดยที่

$x \in \mathfrak{R}$ เป็นสถานะ

$u \in \mathfrak{R}$ เป็นสัญญาณอินพุตที่โดนกรอง

$y \in \mathfrak{R}$ เป็นสัญญาณเอ้าท์พุตที่ได้มาจากการกรอง

ส่วน a, b, c, และ d เป็นค่าคงที่ที่ต้องหา หรืออีกความหมายหนึ่งก็คือ เราจำเป็นต้องหาว่าระบบแบบเวลาไม่ต่อเนื่องใดที่ทำให้ฟังก์ชันถ่ายโอนมีลักษณะเดียวกันกับตัวกรองที่ออกแบบมา

$$
\begin{aligned}
x[n+1] &= a\cdot x[n] + b\cdot u[n]\\
y[n] &= c\cdot x[n] + d\cdot u[n]
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\omega_c \Delta t}{z + (\omega_c \Delta t - 1)}
$$

เราจะสามารถแก้โจทย์นี้ได้หลายวิธี โดยปกติการคำนวณนี้สามารถใช้การแปลง Z ผกผัน (Inverse Z-transform) แต่การทำในรูปแบบนั้นอาจจะทำให้เขียนในรูปปริภูมิสถานะได้ลำบาก เราจึงใช้การแปลง Z จากปริภูมิสถานะไปเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนแทนซึ่งเราจะสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Z}\{x[n+1]\} = \mathbf{Z}\{a\cdot x[n] + b\cdot u[n]\}\\
&z^1 \cdot X(z) = a\cdot X(z) + b\cdot U(z)\\
&X(z) = \frac{b}{z-a}\cdot U(z)\\
&\mathbf{Z}\{y[n]\} = \mathbf{Z}\{c\cdot x[n] + d\cdot u[n]\}\\
&Y(z) = c\cdot X(z) + d\cdot U(z) = \left(\frac{b\cdot c}{z-a} + d\right)\cdot U(z)
\end{aligned}
$$

จากโจทย์การแปลง เราได้เปลี่ยนรูปให้การเป็นโจทย์การหาสัมประสิทธิ์ของเศษส่วนดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b\cdot c}{z-a} + d = \frac{\omega_c \Delta t}{z + (\omega_c \Delta t - 1)}\\
&a = 1 - \omega_c \Delta t\\
&b = \omega_c \Delta t\\
&c = 1\\
&d = 0
\end{aligned}
$$

เราสามารถกำหนดให้

$$
\begin{aligned}
&a = 1 - \omega_c \Delta t\\
&b = \omega_c \Delta t\\
&c = 1\\
&d = 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้นเราจะได้รูปแบบปริภูมิสถานะดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&x[n+1] = (1 - \omega_c \Delta t)\cdot x[n] + (\omega_c \Delta t)\cdot u[n]\\
&y[n] = x[n]
\end{aligned}
$$

ระบบที่ได้เป็นระบบแบบเวลาไม่ต่อเนื่องซึ่งมาจากระบบแบบเวลาต่อเนื่องดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(x(t)) = -\omega_c \cdot x(t) + \omega_c \cdot u(t)\\
&y(t) = x(t)
\end{aligned}
$$

เราจะเทียบระบบแบบเวลาต่อเนื่องกับระบบที่ถูกประมาณให้เวลาไม่ต่อเนื่อง ณ ช่วงการคำนวณที่แตกต่างกันไป

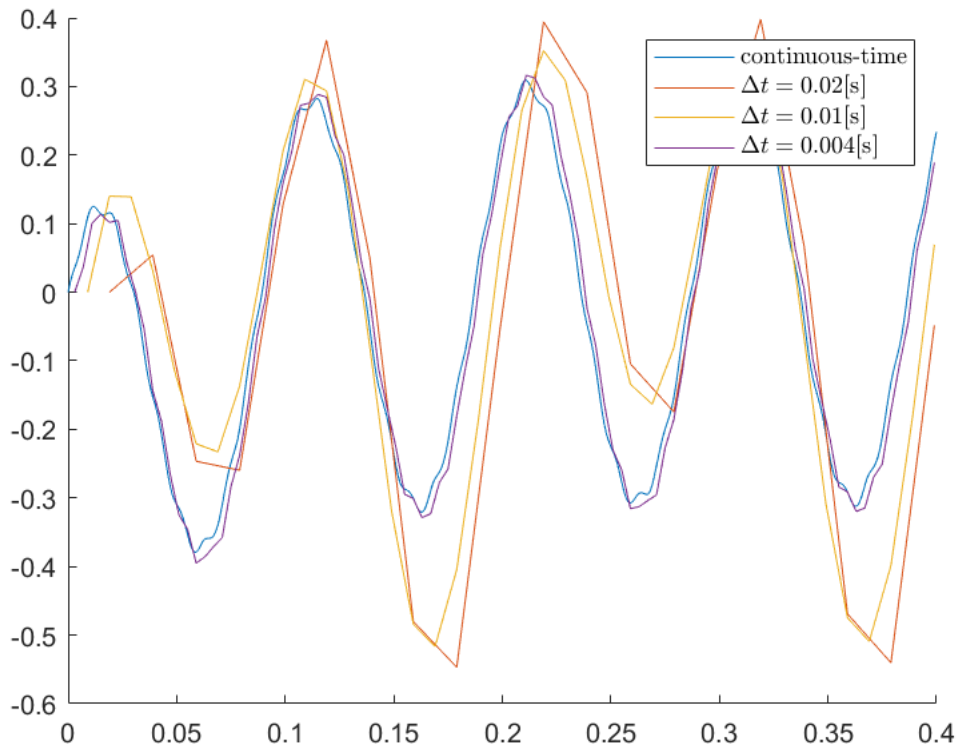
```
% generate signal with noise
R_in = 1;
R_noise = 0.3;
f_in = 10;
f_noise = 95;
```

```
w_in = 2*pi*f_in;
w_noise = 2*pi*f_noise;
phi_in = pi/6;
phi_noise = pi/2;
f = @(t)R_in*cos(w_in*t+phi_in);
w = @(t)R_noise*cos(w_noise*t+phi_noise);

w_c = 20;
t_max = 0.4;
y0 = 0;
[t,y] = ode45(@(t,y)w_c*(-y+f(t)+w(t)),[0:(1/1000):t_max],y0);

clf
ax = axes;
hold(ax,'on')
plot(ax,t,y)

%
time_step = 1/1000;
for f_s = [50 100 250]
    dt = 1/f_s;
    N = 400;
    t_u = [];
    t_y = [];
    u_out = [];
    y_out = [];
    t = 0;
    x = 0;
    for n = 1:N
        u = f(t)+w(t);
        t_u = [t_u;t];
        u_out = [u_out;u];
        if ~mod(n,dt/time_step)
            y = x;
            x = (1-w_c*dt)*x+w_c*dt*u;
            y_out = [y_out;y];
            t_y = [t_y;t];
        end
        t = t+time_step;
    end
    plot(ax,t_y,y_out)
end
legend({'continuous-time','$\Delta t=0.02$[s]','$\Delta t=0.01$[s]','$\Delta t=0.004$[s]'},'Int
```



เราจะสังเกตได้ว่า ยิ่งช่วงเวลาคำนวณน้อยมากเท่าไหร่ ระบบที่ถูกประมาณจะใกล้เคียงกับระบบแบบเวลาต่อเนื่องมากขึ้นเท่านั้น ดังนั้น การจำกัดช่วงการคำนวณที่คงที่และมีค่าน้อยเป็นส่วนสำคัญในการประยุกต์ใช้ **digital filter/controller**