ความน่าจะเป็นและสัญญาณสุ่ม (Probability & Random Signal)

ตอนที่ 4 : ค่าคาดหวัง ค่าแปรปรวน และ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Expected Value, Variance, & Standard Deviation)

ค่าคาดหวัง (Expected Value)

หนึ่งในคุณลักษณะของการแจกแจงของความน่าจะเป็นคือค่าคาดหวัง **ค่าคาดหวังนี้ถูกใช้ในการประมาณเหตุการณ์ที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดโดยอ้างอิงจากฟังก์ชันการแจกแจง**

หากตัวแปรสุ่ม X เป็นแบบไม่ต่อเนื่อง เราสามารถคำนวนหาค่าคาดหวัง $\mathrm{E}\{X\}$ หรือ μ_X ได้ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{E}\{X\} = \mu_X = \sum_{\mathrm{all}\ x} x \cdot f_X(x)$$

ยกตัวอย่างเช่น ค่าคาดหวังของผลรวมของหน้าของลูกเต๋า 2 อันที่ถูกทอยสามารถคำนวณได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\mu_X = \mathrm{E}\{X\} &= \sum_{x=2}^{12} x \cdot \left(\frac{6-|x-7|}{36}\right)\\ &= \sum_{x=2}^{7} x \cdot \left(\frac{6-(7-x)}{36}\right) + \sum_{x=8}^{12} x \cdot \left(\frac{6-(x-7)}{36}\right)\\ &= \sum_{x=2}^{7} x \cdot \left(\frac{x-1}{36}\right) + \sum_{x=8}^{12} x \cdot \left(\frac{13-x}{36}\right) = 7\end{aligned}$$

```
x2_7 = 2:7;
x8_12 = 8:12;
mu_X = sum(x2_7.*(x2_7-1)/36)+sum(x8_12.*(13-x8_12)/36);
```

หากตัวแปรสุ่ม X เป็นแบบต่อเนื่อง เราสามารถคำนวนหาค่าคาดหวัง $\mathrm{E}\{X\}$ หรือ μ_X ได้ดังต่อไปนี้ในรูปแบบของสมการปริพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{x \cdot f_X(x)\} \mathrm{d}\, x$$

จากนิยามของค่าคาดหวัง คุณสมบัติของค่าคาดหวังมีดังต่อไปนี้

กำหนดให้ k เป็นค่าคงที่ ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงของค่าคงที่จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันแรงดล (impulse function) ดังนี้

$$f_X(x) = \delta(x-k)$$

ดังนั้นเราสามารถหาค่าคาดหวังของค่าคงที่ได้ดังนี้

$$\mathrm{E}\{k\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{x \cdot \delta(x-k)\} \mathrm{d}\, x = \int_{-\infty}^{\infty} \{(x+k) \cdot \delta(x)\} \mathrm{d}\, x = k$$

สาเหตุที่เราสามารถหาปริพันธ์เป็นเพราะคุณสมบัติของฟังก์ชันแรงดลดังต่อไปนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x) \cdot \delta(x)\} \mathrm{d}\, x = f(0)$$

นอกจากนี้เราสามารถคำนวรหาค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มที่ถูกคูณด้วยค่าคงที่ $Y = k \cdot X$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\{Y\} = \mathrm{E}\{k \cdot X\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \{(k \cdot x) \cdot f_X(x)\} \mathrm{d}\, x = k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \{x \cdot f_X(x)\} \mathrm{d}\, x \\
&= k \cdot \mathrm{E}\{X\}
\end{aligned}
$$

หลักการเดียวกันนี้สามารถใช้ในการพิสูจน์หาค่าคาดหวังของผลบวกของหลายฟังก์ชันได้ดังนี้

$$Y = g(X) + h(X)$$

$$\mathrm{E}\{Y\} = \mathrm{E}\{g(X) + h(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{(g(x) + h(x)) \cdot f_X(x)\} \mathrm{d}\, x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{g(x) \cdot f_X(x)\} \mathrm{d}\, x + \int_{-\infty}^{\infty} \{h(x) \cdot f_X(x)\} \mathrm{d}\, x$$

$$= \mathrm{E}\{g(X)\} + \mathrm{E}\{h(X)\}$$

ด**ัังนั้นเราสามารถสรุปเป็นสมบัติได้ดังนี้**

$$
\begin{bmatrix}
\text{ตัวแปรสุ่ม} & \text{ค่าคาดหวัง} \\
k & k \\
k \cdot X & k \cdot \mathrm{E}\{X\} \\
g(X) + h(X) & \mathrm{E}\{g(X)\} + \mathrm{E}\{h(X)\}
\end{bmatrix}
$$

ค่าแปรปรวน (Variance)

อีกคุณลักษณะหนึ่งของการแจกแจงของความน่าจะเป็นคือค่าแปรปรวนซึ่งบอกถึงการกระจายตัวของค่าที่ตะวแปรสามารถเป็นได้ **ยิ่งค่าแปรปรวนมาก การแจกแจงความน่าจะเป็นก็จะกว้างตามไปด้วย ที่สำคัญที่สุดคือค่าแปรปรวนนั้นจะต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ**

หากกำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม เราสามารถคำนวณหาความแปรปรวน $\mathrm{Var}\{X\}$ หรือ σ_X^2 ได้กังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\sigma_X^2 = \mathrm{Var}\{X\} = \mathrm{E}\left\{(X - \mu_X)^2\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2\right\} \\
&= \mathrm{E}\{X^2\} - 2\mu_X \cdot E\{X\} + \mathrm{E}\left\{\mu_X^2\right\} \\
&= \mathrm{E}\{X^2\} - \mu_X^2
\end{aligned}
$$

ยกตัวอย่างเช่น ค่าแปรปรวนของผลรวมของหน้าของลูกเต๋า 2 อันที่ถูกทอยสามารถคำนวณได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\sigma_X^2 = \mathrm{Var}\{X\} = \mathrm{E}\{X^2\} - \mu_X^2 \\
&= \sum_{x=2}^{12} x^2 \cdot \left(\frac{6 - |x - 7|}{36}\right) - 7^2 \\
&= \sum_{x=2}^{7} x^2 \cdot \left(\frac{6 - (7 - x)}{36}\right) + \sum_{x=8}^{12} x^2 \cdot \left(\frac{6 - (x - 7)}{36}\right) - 49 \\
&= \sum_{x=2}^{7} x^2 \cdot \left(\frac{x - 1}{36}\right) + \sum_{x=8}^{12} x^2 \cdot \left(\frac{13 - x}{36}\right) - 49 = \frac{35}{6}
\end{aligned}
$$

```
x2_7 = 2:7;
x8_12 = 8:12;
```

```
mu_X = sum(x2_7.^2.*(x2_7-1)/36)+sum(x8_12.^2.*(13-x8_12)/36)-49;
```

จากนิยามของค่าแปรปรวนที่กล่าวมา เราสามารถหาสมบัติของค่าแปรปรวนได้ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ค่า k เป็นค่าคงที่ ค่าแปรปรวนนั้นจะเท่ากับศูนย์เนื่องจากค่าคงที่เป็นค่าที่ทราบอยู่แล้วและไม่แปรปรวน ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}\{k\} = \mathrm{E}\{k^2\} - k^2 = k^2 - k^2 = 0$$

อีกสมบัติหนึ่งที่เราสามารถพิสูจน์จากนิยามของค่าคาดหวังและค่าแปรปรวนคือค่าแปรปรวนของตัวแปรสุ่มที่ถูกคูณด้วยค่าคงที่ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
&\sigma_X^2 = \mathrm{Var}\{k \cdot X\} = \mathrm{E}\{(k \cdot X)^2\} - (k \cdot \mu_X)^2 \\
&= \mathrm{E}\{k^2 \cdot X^2\} - k^2 \cdot \mu_X^2 = k^2 \cdot \mathrm{E}\{X^2\} - k^2 \cdot \mu_X^2 \\
&= k^2 \cdot \left(\mathrm{E}\{X^2\} - \mu_X^2\right) = k^2 \cdot \mathrm{Var}\{X\}
\end{aligned}$$