สัญญาณและระบบแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time Signal & System)

ตอนที่ 4 : สมบัติของการแปลง Z (Proterties of Z-transform)

หนึ่งในสมบัติของการแปลง Z คือ**สมบัติเชิงเส้น**ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\mathbf{Z}\{\alpha \cdot x[n] + \beta \cdot y[n]\} = \alpha \cdot X(z) + \beta \cdot Y(z)$$

อีกหนึ่งสมบัติการวิเคราะห์ต้องใช้บ่อยครั้งคือ**การทำให้สัญญาณล่าช้า** หากเรากำหนดให้สัญญาณ $x[n]$ ถูกทำให้ล่าช้า (delay) ไป k รอบการคำนวณ $y[n-k]$ เราสามารถคำนวณการการแปลง Z ของสัญญาณได้ดังต่อไปนี้

$$\mathbf{Z}\{y[n]\} = Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n}$$

$$\mathbf{Z}\{y[n-k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} y[n-k]z^{-n} = \sum_{n=0}^{k-1} y[n-k]z^{-n} + \sum_{n=k}^{\infty} y[n-k]z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} y[n-k]z^{-n}$$

$$\mathbf{Z}\{y[n-k]\} = \left(\sum_{n-k=0}^{\infty} y[n-k]z^{-(n-k)}\right)z^{-k} = z^{-k}Y(z)$$

เราสรุปได้ว่า ไม่ว่าสัญญาณจะเป็นลักษณะไหน **หากสัญญาณนั้นโดนทำให้ล่าช้าไป k รอบการคำนวณ เราสามารถหาการแปลง Z โดยนำ z^{-k} ไปคูณกับการแปลง Z ของสัญญาณที่ยังไม่ได้โดนทำให้ล่าช้า**

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ระบบคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่เป็นดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}(x[n] + u[n]) \\ x[n+1] &= u[n] \\ x[0] &= 0 \end{aligned}$$

เราสามารถหาการแปลง Z ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(y[n]) &= \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}(x[n] + u[n])\right) = \frac{1}{2}\mathbf{Z}(x[n]) + \frac{1}{2}\mathbf{Z}(u[n]) \\ \mathbf{Z}(x[n+1]) &= z^k \cdot \mathbf{Z}(x[n]) = \mathbf{Z}(u[n]) \\ \mathbf{Z}(x[n]) &= z^{-k}\mathbf{Z}(u[n]) \\ Y(z) &= \frac{1}{2}z^{-k}\mathbf{Z}(u[n]) + \frac{1}{2}\mathbf{Z}(u[n]) = \frac{1}{2}(z^{-k} + 1) \cdot U(z) \end{aligned}$$

เราสรุปได้ว่า การแปลง Z ของสัญญาณเอ้าท์พุต $Y(z)$ ขึ้นอยู่กับการแปลง Z ของสัญญาณอินพุตในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$Y(z) = \frac{1}{2}(z^{-k} + 1) \cdot U(z)$$

นอกจากนี้ เราสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนในโดเมนของ Z ได้ดังต่อไปนี้อีกด้วย

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{2}(z^{-k} + 1)$$