ความน่าจะเป็นและสัญญาณสุ่ม (Probability & Random Signal)

ตอนที่ 6 : ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่มหลายตัว (Relationship between Multiple Random Variables)

ค่าแปรปรวนร่วมเกี่ยว (Covariance)

ค่าของตัวแปรสุ่มสองตัวสามารถแปรปรวนร่วมกันได้ เราเรียกค่านี้ว่าค่าแปรปรวนร่วมเกี่ยว (covariance)

หากเรากำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม ค่าแปรปรวนร่วมเกี่ยว $\mathrm{Cov}\{X,Y\}$ หรือ σ_{XY} ของตัวแปร X และ Y จะถูกนิยามดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}\{X,Y\} = \mathrm{E}\{(X-\mu_X)\cdot(Y-\mu_Y)\}\\
&= \mathrm{E}\{X\cdot Y - \mu_X\cdot Y - X\cdot\mu_Y + \mu_X\cdot\mu_Y\}\\
&= \mathrm{E}\{X\cdot Y\} - \mu_X\cdot \mathrm{E}\{Y\} - \mu_Y\cdot E\{X\} + \mu_X\cdot\mu_Y\\
&= \mathrm{E}\{X\cdot Y\} - \mu_X\cdot\mu_Y
\end{aligned}
$$

ซึ่งความแปรปรวนร่วมเกี่ยวจะมีสมบัติดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}\{X,Y\} = \mathrm{Cov}\{Y,X\}\\
&|\mathrm{Cov}\{X,Y\}| \le \sqrt{\mathrm{Var}\{X\}\cdot\mathrm{Var}\{Y\}}
\end{aligned}
$$

ค่าแปรปรวนร่วมเกี่ยวนั้นอธิบายถึงความแปรปรวนที่สองตัวแปรนั้นแปรเปลี่ยนไปในทางเดียวกัน

ค่าสหสัมพันธ์ (Correlation)

อีกหนึ่งค่าที่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่มสองตัวได้คือค่าสหสัมพันธ์ (correlation)

หากเรากำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม ค่าสหสัมพันธ์ของตัวแปรสุ่มทั้งสอง ρ_{XY} หรือ $\mathrm{Cor}\{X,Y\}$ จะถูกนิยามดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\rho_{XY} = \mathrm{Cor}\{X,Y\} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}\\
&-1 \le \mathrm{Cor}\{X,Y\} \le 1
\end{aligned}
$$

หากเรามีชุดข้อมูลเป็นคู่อันดับ $\langle x, y\rangle$ เราสามารถใช้ฟังก์ชัน corrcoef เพื่อคำนวณหาค่าสหสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลชุด x และข้อมูลชุด y ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นเมตริกซ์ดังต่อไปนี้

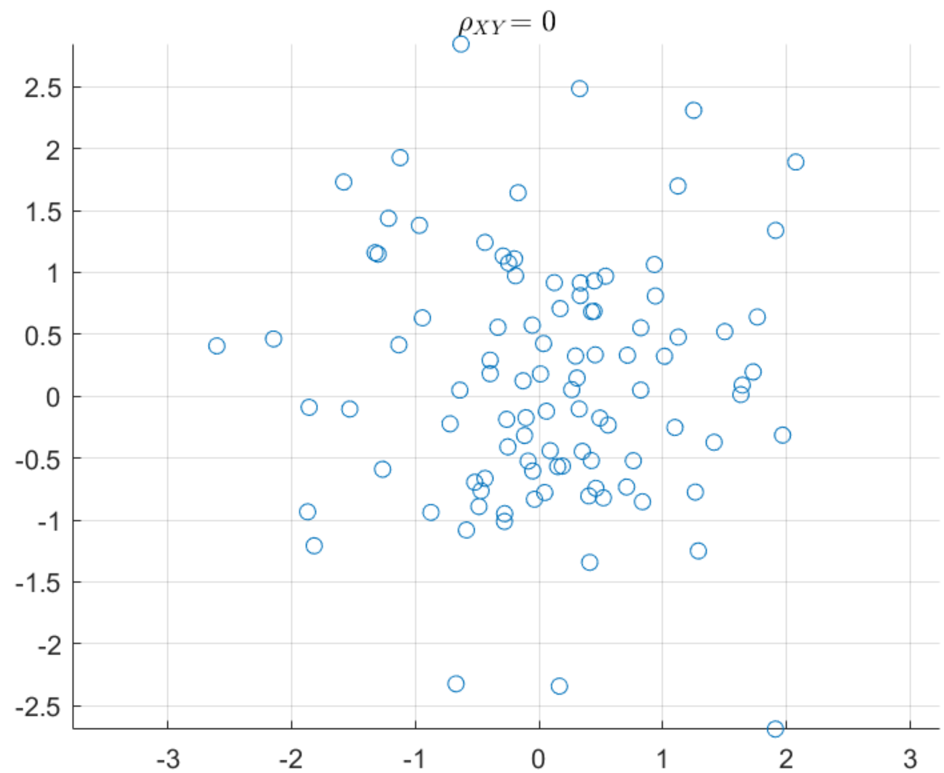
$$
\mathrm{corrcoef}(X,Y) = \begin{bmatrix} \mathrm{Cor}\{X,X\} & \mathrm{Cor}\{X,Y\} \\ \mathrm{Cor}\{X,Y\} & \mathrm{Cor}\{Y,Y\} \end{bmatrix}
$$

ซึ่ง $\mathrm{Cor}\{X,X\} = \mathrm{Cor}\{Y,Y\} = 1$

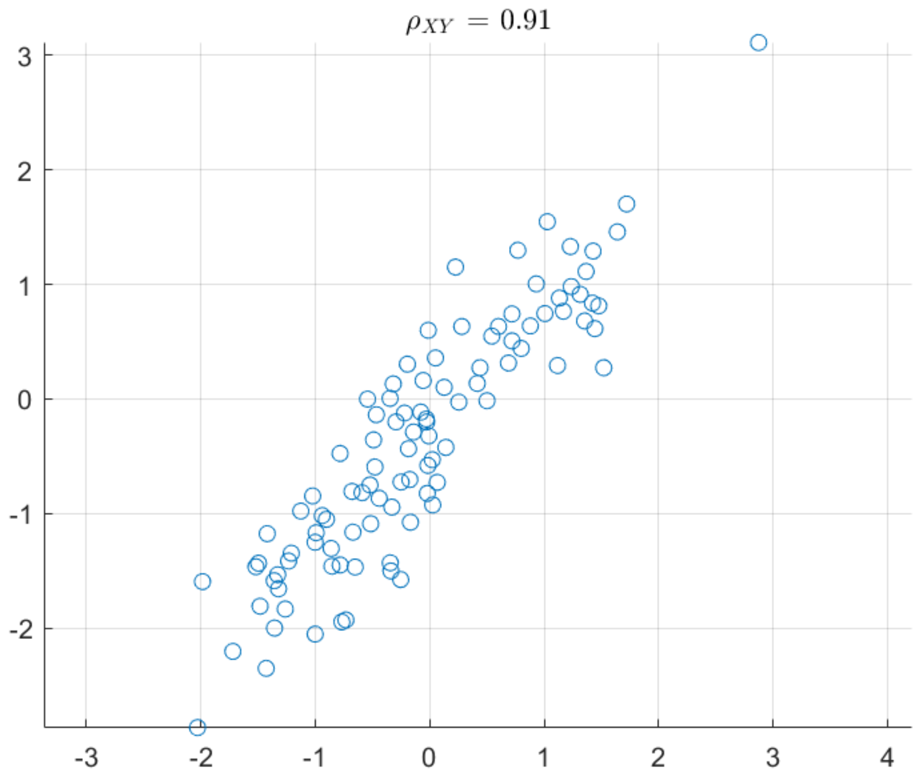
เราจะใช้สมาชิกตัวที่ไม่ได้อยู่ในแนวทแยงเท่านั้นเนื่องจากค่าสหพันธ์ของค่าเดียวกันจะมีผลเป็น 0 เสมอ

```
x = randn(1,100);
y = randn(1,100);
clf
ax = axes;
hold(ax,'on')
grid(ax,'on')
plot(ax,x,y,'o')
axis(ax,'equal')
```

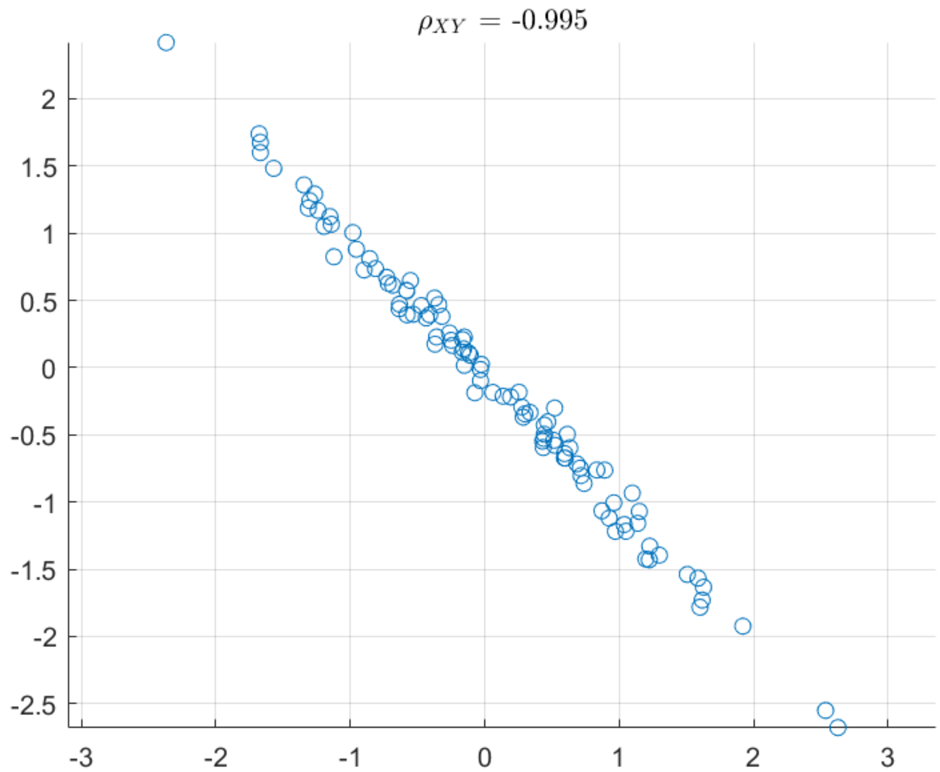
```
title(ax,'$\rho_{XY}$= 0','Interpreter',"latex")
```




```
x = randn(1,100);
y = x+0.5*(randn(size(x))-0.5);
clf
ax = axes;
hold(ax,'on')
grid(ax,'on')
plot(ax,x,y,'o')
axis(ax,'equal')
C = corrcoef(x,y);
title(ax,sprintf('$\\rho_{XY}$ = %.3f',C(1,2)),'Interpreter',"latex")
```




```
x = randn(1,100);
y = -x+0.1*(randn(size(x))-0.5);
clf
ax = axes;
hold(ax,'on')
grid(ax,'on')
plot(ax,x,y,'o')
axis(ax,'equal')
C = corrcoef(x,y);
title(ax,sprintf('$\\rho_{XY}$ = %.3f',C(1,2)),'Interpreter',"latex")
```



สมบัติของค่าคาดหวังและค่าแปรปรวน (Properties of Expected Value & Variance)

ในกรณีที่เรามีค่าที่ไม่แน่นอนมากกว่าหนึ่งค่ามาผสมรวมกัน เราจะได้ค่าที่มีความไม่แน่นอนใหม่ ทั้งค่าคาดหวังและค่าแปรปรวนก็จะเปลี่ยนตามด้วย

หากกำหนดให้ X, Y, และ Z เป็นตัวแปรสุ่ม และ Zเป็นผลรวมเชิงเส้นของตัวแปร X และ Y ดังต่อไปนี้

$$Z = \alpha \cdot X + \beta \cdot Y$$

เราสามารถคำนวณหาค่าคาดหวังของตัวแปร Z ดังต่อไปนี้

$$\mu_Z = E\{Z\} = \mathrm{E}\{\alpha \cdot X + \beta \cdot Y\} = \alpha \cdot \mu_X + \beta \cdot \mu_Y$$

นอกจากนี้ เราสามารถคำนวณหาค่าแปรปรวนของตัวแปร Z ดังต่อไปนี้

$$\sigma_Z^2 = \mathrm{Var}\{Z\} = \alpha^2 \cdot \sigma_X^2 + 2\alpha\beta \cdot \sigma_{XY} + \beta^2 \cdot \sigma_Y^2$$
$$\sigma_Z^2 = \mathrm{Var}\{Z\} = \alpha^2 \cdot \sigma_X^2 + 2\alpha\beta \cdot \rho_{XY} \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y + \beta^2 \cdot \sigma_Y^2$$