

การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 7 : โดเมนของความถี่และอิมพีแดนซ์(Frequency Domain & Impedance)

เดิมทีระบบจะถูกเขียนวิเคราะห์โดเมนของลาปลาซ

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

โดยที่ s เป็นความถี่เชิงซ้อนซึ่งเป็นตัวแปรอิสระ (independent variable) ในโดเมนของลาปลาซ

ความถี่เชิงซ้อนประกอบไปด้วย 2 องค์ประกอบได้แก่ส่วนที่เป็นจำนวนจริงและส่วนที่เป็นจำนวนจินตภาพซึ่งเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$s = \sigma + j\omega$$

จากเนื้อหาเรื่องขั้วและศูนย์ (poles & zeros) จำนวนจริง σ จะสัมพันธ์กับผลตอบสนองแบบชั่วคราว แต่ถ้าเราไม่ต้องการที่จะวิเคราะห์ผลตอบสนองแบบชั่วคราว เราสามารถตัดพจน์ที่เป็นจำนวนจริงออกไป ทำให้ความถี่เชิงซ้อนจะกลายเป็นความถี่ธรรมดาหรือ $s \rightarrow j\omega$ ดังนั้นเราสามารถแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนจากโดเมนของลาปลาซให้กลายเป็นโดเมนของความถี่โดยการแทนค่า s ด้วยจำนวนจินตภาพ $j\omega$ ตัวแปรอิสระจะถูกเปลี่ยนจาก s ให้กลายเป็น ω เช่น

$$G(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad : \text{โดเมนของลาปลาซ}$$

$$G(\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c} \quad : \text{โดเมนของความถี่}$$

เราสามารถประยุกต์หลักการนี้กับกฎของโอห์มเพื่อหาความสัมพันธ์ในแต่ละโดเมน

ชิ้นส่วน	โดเมนของเวลา	โดเมนของลาปลาซ	โดเมนของความถี่
inductor	$v = L \frac{d}{dt}(i)$	$V(s) = L s I(s) = Z_L(s) \cdot I(s)$	$V(\omega) = j\omega L I(\omega) = Z_L(\omega) \cdot I(s)$
resistor	$v = R i$	$V(s) = R I(s) = Z_R(s) \cdot I(s)$	$V(\omega) = R I(\omega) = Z_R(\omega) \cdot I(s)$
capacitor	$v = \frac{1}{C} \int (i) dt$	$V(s) = \frac{1}{C s} I(s) = Z_C(s) \cdot I(s)$	$V(\omega) = \frac{1}{j\omega C} I(\omega) = Z_C(\omega) \cdot I(s)$

ถึงแม้ว่าแรงดันไฟฟ้าของแต่ละชิ้นส่วนจะมีความสัมพันธ์เชิงอนุพันธ์ (ต้องใช้สมการเชิงอนุพันธ์ในการแก้ความสัมพันธ์) แต่แรงดันไฟฟ้าในโดเมนอื่น ๆ มีลักษณะอยู่ในรูปของผลคูณซึ่งการแปลงระบบให้อยู่ในโดเมนของลาปลาซหรือโดเมนของความถี่ทำให้เราสามารถประยุกต์ใช้พีชคณิตเชิงเส้น (linear algebra) ในการวิเคราะห์ระบบ ผลลัพธ์ที่แสดงถึงแรงดันไฟฟ้าสามารถเขียนอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$V(s) = Z(s) \cdot I(s) \quad : \text{โดเมนของลาปลาซ}$$

$$V(\omega) = Z(\omega) \cdot I(\omega) \quad : \text{โดเมนของความถี่}$$

เราเรียก $Z(\cdot)$ ว่าอิมพีแดนซ์ (impedance) ซึ่งเป็นค่าที่สื่อถึงการตอบสนองของชิ้นส่วนซึ่งขึ้นอยู่กับความถี่สัญญาณที่ป้อนให้กับระบบด้วย โดยทั่วไป อิมพีแดนซ์ในโดเมนของความถี่จะประกอบไปด้วย ความต้านทาน $\text{Re}(Z)$ (resistance) และ รีแอกแตนซ์ $\text{Im}(Z)$ (reactance)

$$Z = \text{Re}(Z) + j \cdot \text{Im}(Z)$$

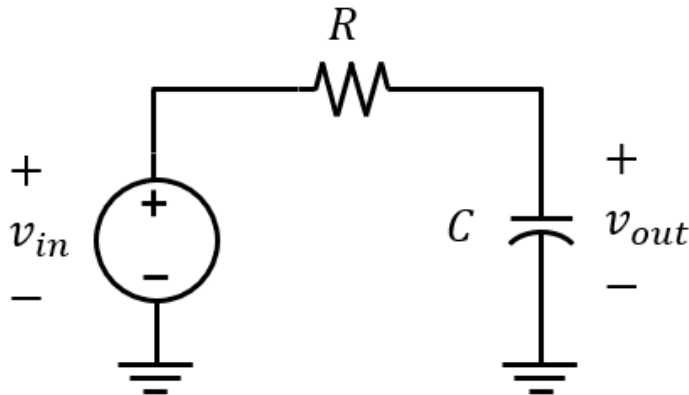
สำหรับกฎของโอห์ม เราจะได้อีมพีแดนซ์ดังต่อไปนี้

ชิ้นส่วน	อีมพีแดนซ์ (ω)
inductor	$Z_L = j \omega L$
resistor	$Z_R = R$
capacitor	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

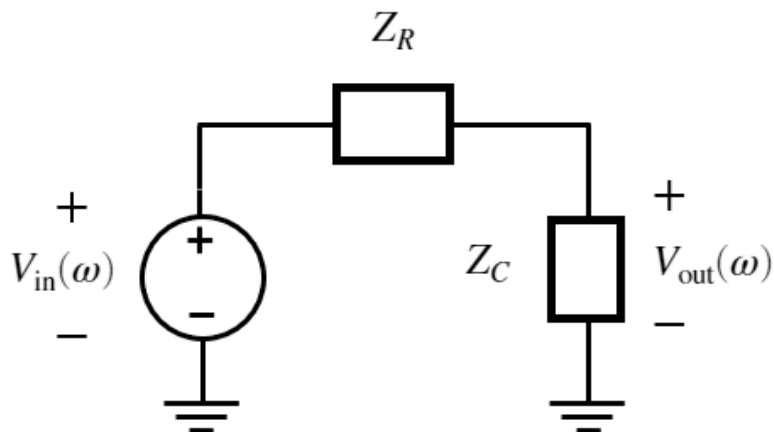
ความสะดวกของการคำนวณในโดเมนความถี่คือการที่เราสามารถแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้กลายเป็นสมการเชิงพีชคณิตและสามารถประยุกต์ใช้เทคนิคการรวมวงจรได้โดยตรง

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้วงจร RC อันดับหนึ่ง (first-order RC circuit) เป็นดังต่อไปนี้



แทนที่เราจะจำลองระบบในโดเมนของเวลา เราสามารถจำลองระบบในโดเมนความถี่โดยตรง เราสามารถมองชิ้นส่วนที่เป็นแพสซีฟ (passive component) ให้เป็นเหมือนตัวต้านทาน ซึ่งสามารถวาดเป็นแผนผังได้ดังนี้



เราสามารถหาค่าของแรงดัน (voltage divider) ในการหาแรงดันไฟฟ้าที่เอาต์พุต ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$V_{\text{out}}(\omega) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} V_{\text{in}}(\omega)$$

$$G(\omega) = \frac{V_{\text{out}}(\omega)}{V_{\text{in}}(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}} = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}$$

โดยที่ $\omega_c = \frac{1}{RC}$

เราจะสังเกตได้ว่าการหาฟังก์ชันถ่ายโอนนั้นสามารถทำได้โดยใช้แค่กระบวนการทางพีชคณิต ในการวิเคราะห์ขั้นถัดไป เราจำเป็นต้องใช้ "เฟสเซอร์" ในการหาอัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อนของระบบ