# การวิเคราะห์เชิงความถี่

## ตอนที่ 8 : เฟสเซอร์-เฟสเวกเตอร์ (Phasor-Phase Vector)

จากบทเรียนที่ 6 มา เราจะสังเกตได้ว่าการวิเคราะห์คุณลักษณะของระบบจะเกิดขึ้นในโดเมนของความถี่(เชิงมุม) $\omega$ โดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. จำลองระบบในโดเมนของเวลา
2. แปลงแบบจำลองให้เป็นโดเมนของลาปลาซ (ความถี่เชิงซ้อน)
3. แก้หาเอ้าท์พุตในโดเมนของาปลาซ
4. แปลงผลเฉลยให้อยู่ในโดเมนของเวลา
5. วิเคราะห์แอมพลิจูดและเฟสการเลื่อนจากเอ้าท์พุตในโดมเนของเวลา

เราสามารถใช้ เฟสเวกเตอร์ หรือ เฟสเซอร์ (Phasor) เพื่อลดขั้นตอนการวิเคราะห์ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. จำลองระบบในโดเมนของความถี่ (จากบทเรียนที่ 7)
2. คำนวณหาอัตราส่วนขนาดโดยตรงจากเฟสเซอร์
3. คำนวณหาเฟสการเลื่อนโดยตรงจากเฟสเซอร์

การคำนวณโดยใช้เฟสเซอร์อาศัยหลักการของจำนวนเชิงซ้อน (complex number) และพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) เรากำหนดให้**เฟสเซอร์คือรูปแบบการนำเสนอของจำนวนเชิงซ้อนในพิกัดเชิงขั้ว**ซึ่งเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$z = |z|\, e^{-j\angle(z)}$$

โดยที่ $z$ **เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ** $|z|$ **เป็นขนาดของเฟสเซอร์** $z$ **และ** $\angle(z)$ **เป็นมุมของเฟสเซอร์** $z$

หากเราเขียนจำนวนเชิงซ้อนในพิกัดสี่เหลี่ยม (rectangular coordinate) **จำนวนเชิงซ้อนจะถูกเขียนอยู่ในรูปของผลบวกระหว่างองค์ประกอบที่เป็นจำนวนจริงและองค์ประกอบที่เป็นจำนวนจินตภาพ**

$$z = \mathrm{Re}(z) + j \cdot \mathrm{Im}(z)$$

เราสามารถหาขนาดและมุมของจำนวนเชิงซ้อนดังกล่าวโดยความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$
$$\angle(z) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$$

ในทางกลับกัน เราก็สามารถหาองค์ประกอบแต่ละส่วนจากขนาดและมุมโดยความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{Re}(z) = |z| \cdot \cos(\angle(z))$$
$$\mathrm{Im}(z) = |z| \cdot \sin(\angle(z))$$

**ข้อดีของการใช้เฟสเซอร์คือการคูณและการหารกันของจำนวนเชิงซ้อนที่ง่าย** หากเราต้องการคำนวณหาจำนวนผลคูณและผลหารจำนวนเชิงซ้อนสองค่า เราสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$z_1 = |z_1|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_1)}$$

$$z_2 = |z_2|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_2)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_1)} \cdot |z_2|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_2)} = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{-j\angle(z_1) - j\angle(z_2)} = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{-j(\angle(z_1) + \angle(z_2))}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_1)}}{|z_2|\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_2)}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\mathrm{e}^{-j\angle(z_1) + j\angle(z_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\mathrm{e}^{-j(\angle(z_1) - \angle(z_2))}$$

**เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้าเราทำการคูณเฟสเซอร์สองค่า เราสามารถนำขนาดของเฟสเซอร์ทั้งสองมาคูณกันได้เลย และ เราสามารถนำมุมของเฟสเซอร์ทั้งสองมารวมกันได้เลย หากเราต้องการที่จะหารเฟสเซอร์ด้วยเฟสเซอร์อีกค่าหนึ่ง เราสามารถทำการหาขนาดของผลหารโดยการหารขนาดของแต่เฟสเซอร์ ส่วนการคำนวณหามุมนั้นทำโดยการเอามุมของเฟสเซอร์ตั้งต้นลบด้วยมุมของเฟสเซอร์อีกอัน**

จากตัวอย่างในบทเรียนที่ 7 เราสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนในรูปของเศษส่วนของเฟสเซอร์และคำนวณหาอัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อนได้ดังต่อไปนี้

$$G(\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c} = \frac{\omega_c + j \cdot 0}{\omega_c + j\omega}$$

$$G(\omega) = \frac{\sqrt{\omega_c^2 + 0^2} \cdot \mathrm{e}^{-j\tan^{-1}\left(\frac{0}{\omega_c}\right)}}{\sqrt{\omega_c^2 + \omega^2} \cdot \mathrm{e}^{-j\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}} = \frac{\omega_c \cdot \mathrm{e}^{-j(0)}}{\sqrt{\omega_c^2 + \omega^2} \cdot \mathrm{e}^{-j\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \cdot \mathrm{e}^{-j\left(-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right)} = |G(\omega)| \cdot \mathrm{e}^{-j(\angle(G(\omega)))}$$

จากการคำนวณเบื้องต้น เราสามารถหาอัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อนได้พร้อมๆกัน ซึ่งเขียนเป็นสมการดังต่อไปนี้

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

$$\angle(G(\omega)) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

เราจะสังเกตได้ว่าเราสามารถคำนวณหาอัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อนได้สะดวกขึ้นโดยข้ามขั้นตอนการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ **เทคนิคนี้ใช้ได้เฉพาะระบบที่เป็น LTI เท่านั้น**