การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 6 : การกรองสัญญาณพื้นฐาน และแผนภาพโบเด (Basic Filtering & Bode plot)

กระบวนการกรองสัญญาณ (filtering) คือการลดทอนสัญญาณที่อยู่ในย่านความถี่ (band) ที่ไม่ต้องการให้น้อยลง

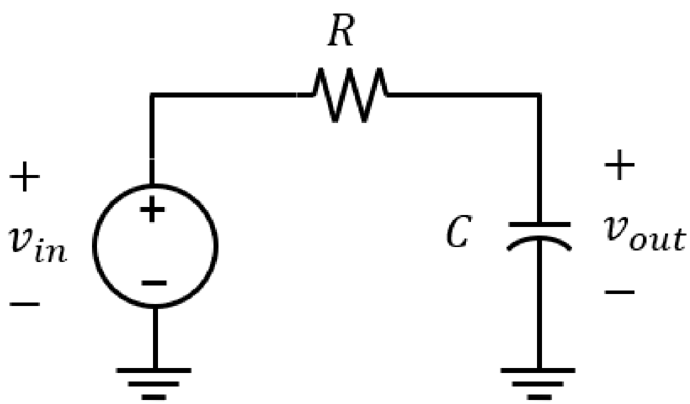
Pass Band : ย่านความถี่ของสัญญาณที่ตัวกรอง (filter) ให้ผ่าน

Stop Band : ย่านความถี่ของสัญญาณที่ตัวกรองไม่ให้ผ่าน

Cutoff Frequency : ความถี่ ณ ขอบเขตระหว่างการให้สัญญาณผ่านและไม่ผ่าน

เราจะเริ่มศึกษาพื้นฐานของกระบวนการกรองสัญญาณจากตัวกรองแบบอนาล็อกอันดับที่หนึ่ง (first-order analog filter)

กำหนดให้วงจร RC อันดับที่หนึ่ง (first-order RC circuit) เป็นดังต่อไปนี้



โดยที่

R คือความต้านทาน (resistance) ของตัวต้านทาน

C คือความจุ (capacitance) ของตัวเก็บประจุ

v_{in} คือแรงดันไฟฟ้าอินพุต (input voltage)

v_{out} คือแรงดันไฟฟ้าเอ้าท์พุต (output voltage)

เราสามารถใช้กฎของ Kirchoff ในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

$$v_{\text{in}} = Ri + v_c$$

$$i = C\frac{dv_c}{dt}$$

$$v_{\text{out}} = v_c$$

หรือ

$$v_{\text{in}} = RC\frac{dv_{\text{out}}}{dt} + v_{\text{out}}$$

เราสามารถวิเคราะห์ระบบโดยใช้โดเมนของลาปลาซเพื่อหาฟังก์ชันถ่ายโอน (**transfer function**) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}\{v_{\text{in}}\} = \boldsymbol{L}\left\{RC\frac{dv_{\text{out}}}{dt} + v_{\text{out}}\right\} \\
&V_{\text{in}}(s) = RCsV_{\text{out}}(s) + V_{\text{out}}(s) \\
&G(s) = \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} \ = \frac{1}{RCs+1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}} = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}
\end{aligned}
$$

โดยที่ $G(s)$ คือฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจร และ $\omega_c = \dfrac{1}{RC}$

เราจะกำหนดให้อินพุตอยู่ในรูปของฟังก์ชันคลื่นไซน์ที่มีแอมพลิจูดเท่ากับ R_{in} **และมุมเฟส** ϕ_{in} ซึ่งเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&v_{\text{in}}(t) = R_{\text{in}}\cos(\omega t + \phi_{\text{in}}) : \ \cos(A \pm B) = \text{cosAcosB} \mp \text{sinAsinB} \\
&v_{\text{in}}(t) = R_{\text{in}}\cos(\phi_{\text{in}})\cos(\omega t) - R_{\text{in}}\sin(\phi_{\text{in}})\sin(\omega t) \\
&V_{\text{in}}(s) = R_{\text{in}}\left(\frac{\cos(\phi_{\text{in}})s - \sin(\phi_{\text{in}})\omega}{s^2+\omega^2}\right)
\end{aligned}
$$

จากนั้น เราสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยแก้สมการในโดเมนของลาปลาซ ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

เราสามารถนำอินพุตไปคูณกับฟังก์ชันถ่ายโอนและแยกพจน์ให้อยู่ในรูปผลบวกโดยใช้เทคนิค partial fraction

$$
\begin{aligned}
&\text{จาก } \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \frac{\omega_c}{s+\omega_c} \ \textbf{ และ } \ V_{\text{in}}(s) = R_{\text{in}}\left(\frac{\cos(\phi_{\text{in}})s - \sin(\phi_{\text{in}})\omega}{s^2+\omega^2}\right) \\
&V_{\text{out}}(s) = \left(\frac{\omega_c}{s+\omega_c}\right)R_{\text{in}}\left(\frac{\cos(\phi_{\text{in}})s - \sin(\phi_{\text{in}})\omega}{s^2+\omega^2}\right) \\
&V_{\text{out}}(s) = \frac{K_1}{s+\omega_c} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+\omega^2} = \frac{K_1(s^2+\omega^2) + (K_2 s + K_3)(s+\omega_c)}{(s+\omega_c)(s^2+\omega^2)}
\end{aligned}
$$

เราสามารถจับสัมประสิทธิ์เพื่อที่จะได้ระบบสมการเชิงเส้นดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&K_1 + K_2 = 0 \\
&K_3 + \omega_c K_2 = \omega_c R_{\text{in}}\cos(\phi_{\text{in}}) \\
&\omega^2 K_1 + \omega_c K_3 = -\omega_c \omega R_{\text{in}}\sin(\phi_{\text{in}})
\end{aligned}
$$

เราจะได้ว่าสัมประสิทธิ์แต่ละตัวจะมีความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&K_1 = -\frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}\left[\omega\sin(\phi_{\text{in}}) + \omega_c\cos(\phi_{\text{in}})\right] \\
&K_2 = \frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}\left[\omega\sin(\phi_{\text{in}}) + \omega_c\cos(\phi_{\text{in}})\right] \quad 0. \\
&K_3 = \frac{R_{\text{in}}\omega_c\omega}{\omega^2+\omega_c^2}\left[\omega\cos(\phi_{\text{in}}) - \omega_c\sin(\phi_{\text{in}})\right]
\end{aligned}
$$

เมื่อเราแทนค่า K_1 , K_2 , และ K_3 ในผลรวม เราจะสามารถเขียน $V_{\text{out}}(s)$ ในรูปต่อไปนี้

$$V_{\text{out}}(s) = -\frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}[\omega\sin(\phi_{\text{in}}) + \omega_c\cos(\phi_{\text{in}})]\left(\frac{1}{s+\omega_c}\right) + \frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}\left(\frac{[\omega\sin(\phi_{\text{in}}) + \omega_c\cos(\phi_{\text{in}})]s + [\omega\cos(\phi_{\text{in}}) - \omega_c\sin(\phi_{\text{in}})]\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

หากเราใช้หลักการหาลาปลาซผกผันดังต่อไปนี้

$$\boldsymbol{L}^{-1}\left(\frac{as+b\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right)\right)$$

เราสามารถหาเอ้าท์พุตในรูปของผลรวมของผลตอบสนองแบบชั่วครู่และผลตอบสนองแบบคงตัวในโดเมนของเวลาได้ดังต่อไปนี้

$$v_{\text{out}}(t) = v_t(t) + v_s(t)$$

$$v_t(t) = -\frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}[\omega\sin(\phi_{\text{in}}) + \omega_c\cos(\phi_{\text{in}})]e^{-\omega_c t}$$

$$v_s(t) = R_{\text{out}}\cos(\omega t + \phi_{\text{out}})$$

$$R_{\text{out}} = \frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}\sqrt{[\omega\sin(\phi_{\text{in}}) + \omega_c\cos(\phi_{\text{in}})]^2 + [\omega\cos(\phi_{\text{in}}) - \omega_c\sin(\phi_{\text{in}})]^2} = \frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}\sqrt{\omega^2+\omega_c^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}R_{\text{in}}$$

$$\phi_{\text{out}} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c\sin(\phi_{\text{in}}) - \omega\cos(\phi_{\text{in}})}{\omega\sin(\phi_{\text{in}}) + \omega_c\cos(\phi_{\text{in}})}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\tan(\phi_{\text{in}}) - \frac{\omega}{\omega_c}}{1+\frac{\omega}{\omega_c}\tan(\phi_{\text{in}})}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(\phi_{\text{in}} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right)\right) = \phi_{\text{in}} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

เมื่อเวลาผ่านไป ผลตอบสนองแบบชั่วครู่จะลู่เข้าสู่ศูนย์เนื่องจาก

$$\lim_{t\to\infty}\{v_t(t)\} = -\frac{R_{\text{in}}\omega_c}{\omega^2+\omega_c^2}[\omega\sin(\phi_{\text{in}}) + \omega_c\cos(\phi_{\text{in}})]\lim_{t\to\infty}\left\{e^{-\omega_c t}\right\} = 0$$

เราจึงวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของความถี่กับผลตอบสนองแบบคงตัวเท่านั้น

$$v_{\text{out}}(t) = R_{\text{out}}\cos(\omega t + \phi_{\text{out}})$$

หากเราวิเคราะห์ที่แอมพลิจูดของคลื่นเอ้าท์พุต เราจะได้ได้ความสัมพันธ์ในเชิงของความถี่เชิงมุมดังต่อไปนี้

$$R_{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}R_{\text{in}}$$

เพื่อการวิเคราะห์ความสามารถในการลอดทอนสัญญาณ เราสามารถหาอัตราส่วนขนาดในเดซิเบลได้ดังต่อไปนี้

$$|G(\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right) = -10\log_{10}\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

เนื่องจากฟังก์ชันดังกล่าวขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ ω_c เราจึงไม่สามารถวาดกราฟขึ้นมาได้ เพื่อให้การวิเคราะห์นั้นไม่ขึ้นอยู่กับค่า ω_c **เราสามารถทำการวิเคราะห์ความถี่ในรูปแบบความถี่สัมพัทธ์ (relative frequency) โดยกำหนดให้ความถี่สัมพัทธ์ของตัวอย่างเทียบกับ ω_c เราจะได้ความถี่สัมพัทธ์**ดังต่อไปนี้

$$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_c}$$

ค่าของความถี่สัมพัทธ์คือความสัมพันธ์ที่เป็นอัตราส่วนระหว่างความถี่ และค่าที่เลือกที่จะเปรียบเทียบ

ข้อสังเกตของความถี่มีดังต่อไปนี้

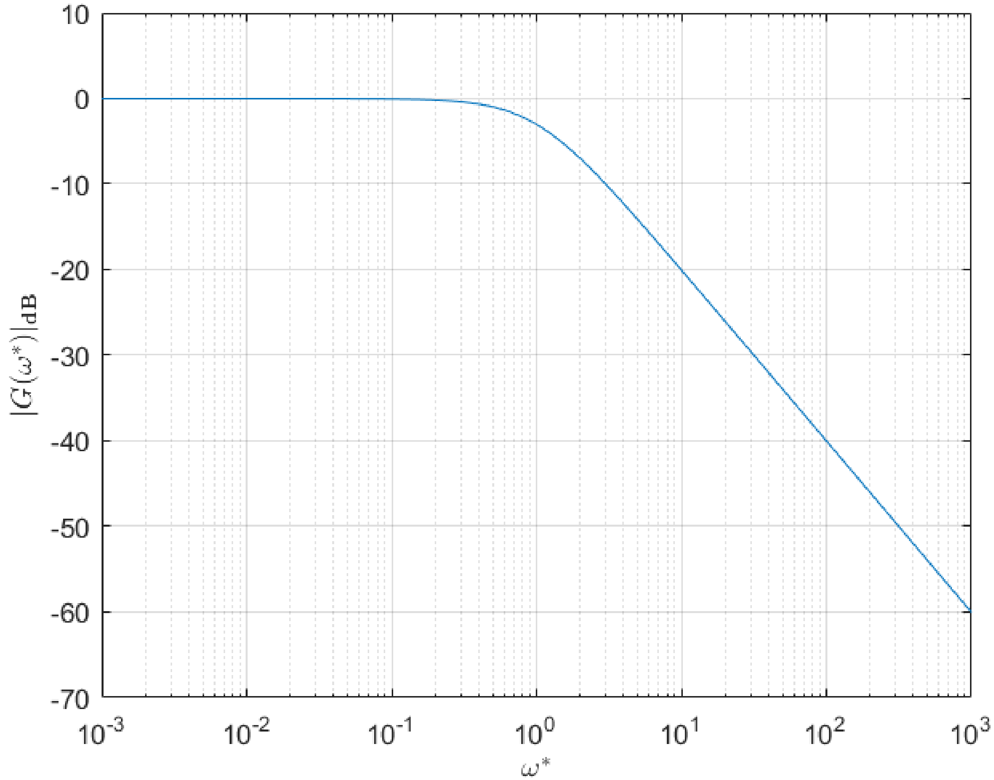
1. ความถี่ ω โดยทั่วไปอาจถูกมองว่าเป็นลบได้
2. ความถี่สัมพัทธ์ ω^* จะเป็นบวกเสมอ
3. เพื่อการวิเคราะห์ในย่านความถี่ที่กว้าง เสกลของความถี่ในกราฟมักจะเป็นเสกลล็อกการิทึม (log-scale)

จากความถี่สัมพัทธ์ที่กำหนด เราจะสามารถเขียนอัตราส่วนขนาดที่ขึ้นอยู่กับความถี่สัมพัทธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$|G(\omega^*)|_{\text{dB}} = -10\log_{10}\left(1 + (\omega^*)^2\right)$$

ซึ่งเราสามารถกราฟความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

```
clf;
ax = axes;
w = 10.^(-3:0.1:3);
semilogx(ax,w,-10*log10(1+w.^2));
grid(ax,'on');
axis(ax,[min(w) max(w) -70 10]);
xlabel('$\omega^*$','Interpreter',"latex")
ylabel('$|G(\omega^*)|_\mathbf{dB}$','Interpreter',"latex")
```



ข้อสังเกตของกราฟมีดังต่อไปนี้

1. เสกลที่ถูกใช้ในตัวแปร ω^* **เป็นเสกลล็อกการิทึม** พื้นที่กราฟระหว่าง 10^k และ 10^{k+1} จะถูกแบ่งเป็น 10 ช่องย่อยๆ ซึ่งระยะห่างจะเป็นไปตามเสกลของล็อกการิทึม เส้นของตาราง (grid) ที่ถูกตีมีค่าตรงกับค่า $a \cdot 10^k$ โดยที่ $a = \{1, 2, \cdots, 9\}$
2. เสกลที่ถูกใช้ในแกนแนวตั้งเป็นเสกลเชิงเส้น แต่ตัวแปรในแนวตั้งมีค่าเป็นเดซิเบล หากเรามองในมุมมองของอัตราส่วนขนาด(ปกติ) เสกลนี้ถือว่าเป็นเสกลล็อกการิทึมเช่นกัน แต่ถ้าหากมองในมุมมองของอัตราส่วนขนาดในเดซิเบล เสกลนี้ถือว่าเป็นเสกลเชิงเส้น

เราจะสังเกตได้ว่าอัตราส่วนขนาดในเดซิเบลมีค่าใกล้เคียงกับ $0\,\mathrm{dB}$ หรือ 1 ในช่วงที่ $\omega^* < 1$ หรือ $\omega < \omega_c$ **การที่อัตราส่วนขนาดมีค่าใกล้เคียงกับ 1 หมายความว่าแอมพลิจูดของคลื่นเอ้าท์พุตมีขนาดใกล้เคียงกับแอมพลิจูดของคลื่นอินพุต** ในทางกลับกัน **เราจะสังเกตได้ว่าในช่วงที่ $\omega^* > 1$ หรือ $\omega > \omega_c$ อัตราส่วนขนาดมีค่าน้อยกว่า $0\,\mathrm{dB}$ ซึ่งหมายความว่าแอมพลิจูดของคลื่นเอ้าท์พุตจะยิ่งถูกลดทอน** นอกจากนี้ เราจะสังเกตได้ว่าอัตราส่วนขนาดในเดซิเบลมีค่าลดลงด้วยอัตรา 20 เดซิเบลต่อการขยายความถี่สิบเท่า หรือ $20\left[\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{decade}}\right]$ ซึ่งหมายความว่าสัญญาณจะถูกลดทอนมากขึ้นเมื่อความถี่เพิ่มขึ้น เราสามารถสรุปได้ว่า **ระบบดังกล่าวเป็นตัวกรองแบบ low-pass ที่ทำการกรองให้สัญญาณที่มีความถี่ต่ำกว่า ω_c ผ่าน** (มีแอมพลิจูดที่ใกล้เคียงกับอินพุต) **และกรองสัญญาณที่มีความถี่สูงกว่า ω_c ออก** (แอมพลิจูดถูกลดทอนอย่างมาก) เราจะเรียก ω_c ว่าเป็นความถี่ตัด (cutoff frequency)

เพื่อความชัดเจนในการกำหนดย่านความถี่ที่ตัวกรองให้ผ่าน เราสามารถใช้นิยามของอัตราส่วนพลังของระบบในการกำหนด ซึ่งอัตราส่วนพลัง $|G(\omega^*)|^2$ สามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$|G(\omega^*)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega^*)^2}$$

ย◌่านของสัญญาณที่ให้ผ่าน (pass-band) ω_p จะถูกกำหนดให้เป็นย่านของสัญญาณที่ทำให้อัตราส่วนพลังระบบมีค่ามากกว่าครึ่งของอัตราส่วนพลัง ณ อินพุตคงที่ (หรือ $\omega^* = 0$) หรือ

$$\omega_p \in \left\{\omega : |G(\omega)|^2 > \frac{1}{2}|G(0)|^2\right\}$$

หากเรานำอัตราส่วนพลังของตัวอย่างมาคำนวณหาย่านของสัญญาณที่ให้ผ่าน เราจะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+(\omega^*)^2} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(0)^2}\\
&(\omega^*)^2 > 1\\
&-1 < \omega^* < 1
\end{aligned}$$

นั่นเลยเป็นที่มาของการกำหนดความถี่ตัดที่ $\omega^* = 1$ เรากำหนดนิยามของความถี่ตัดอย่างเป็นทางการได้ดังต่อไปนี้

ความถี่ตัด (cutoff frequency) คือขอบเขตของความถี่ที่เกิดการเปลี่ยนแปลงระหว่างการขยายกับการลดทอน อัตราส่วนพลัง ณ ความถี่ตัดจะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

หากเราวิเคราะห์ที่มุมเฟสของคลื่นเอ้าท์พุต เราจะได้ความสัมพันธ์ในเชิงของความถี่เชิงมุมดังต่อไปนี้

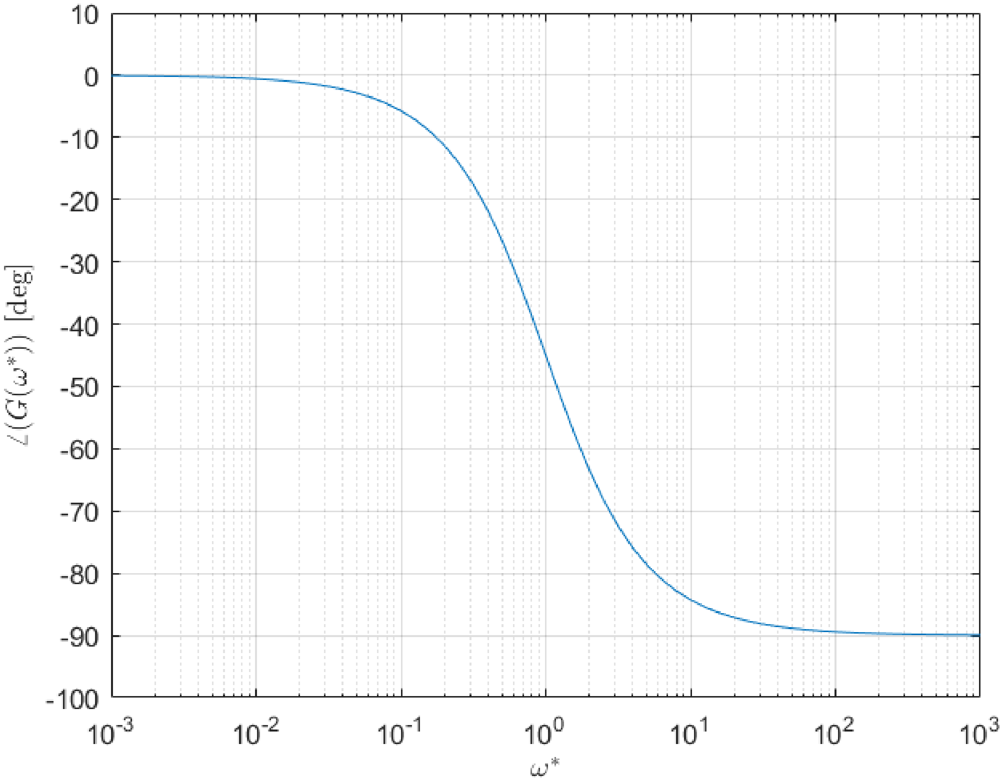
$$\phi_{\text{out}} = \phi_{\text{in}} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

เพื่อการวิเคราะห์การล่าช้าของสัญญาณ เราสามารถหาเฟสการเลื่อนได้ดังต่อไปนี้

$$\angle(G(\omega^*)) = -\tan^{-1}(\omega^*)$$

ซึ่งเราสามารถกราฟความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

```
clf
ax = axes;
w = 10.^(-3:0.1:3);
semilogx(ax,w,-atan(w)*180/pi);
grid(ax,'on');
axis(ax,[min(w) max(w) -100 10]);
xlabel('$\omega^*$','Interpreter',"latex")
ylabel('$\angle(G(\omega^*))$ [deg]','Interpreter',"latex")
```



เราจะสังเกตได้ว่าเฟสการเลื่อนของระบบจะมีมากขึ้นเพื่อความถี่เพิ่มขึ้น และเฟสการเลื่อนมีค่ามากที่สุดที่ -90 องศา

เฟสการเลื่อนของระบบมีบทบาทต่อเสถียรภาพของระบบซึ่งเราจะศึกษาต่อในวิชาวิศวกรรมระบบควบคุม

การกราฟความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนขนาดและเฟสการเลื่อนเมื่อเทียบกับความถี่ในเสกลที่กล่าวไป ถูกเรียกว่า แผนภาพโบเด/โบด (Bode plot) ซึ่งเป็นแผนภาพมาตรฐานในการวิเคราะห์เชิงความถี่