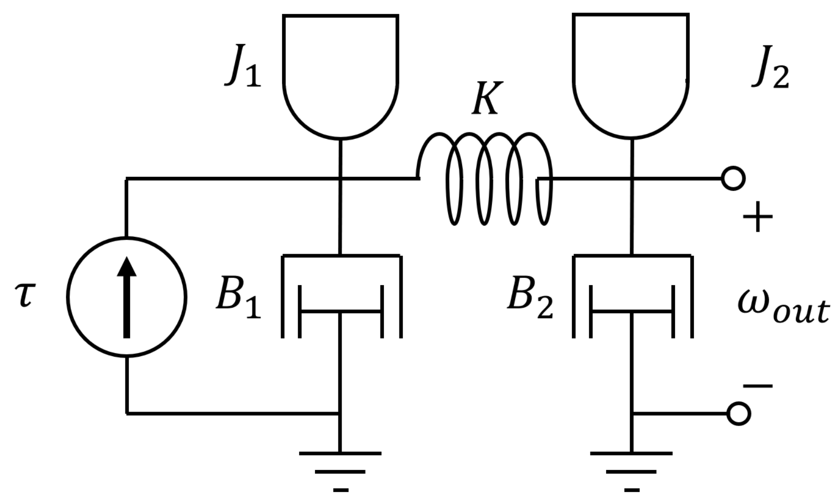
การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 9 : ความกว้างแถบความถี่ของระบบพลวัต (Bandwidth of Dynamical System)

ตราบใดที่ระบบพลวัตเป็น LTI เราสามารถที่จะทำการวิเคราะห์เชิงความถี่ ไม่ว่าจะเป็นระบบทางกายภาพจเป็นระบบไฟฟ้า ระบบเครื่องกล หรือระบบอื่นๆ

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ระบบทางกลแบบหมุนเป็นดังแผนภาพวงจรดังกล่าว



โดยที่

τ คือแรงบิดอินพุตที่กระทำกับเพลาที่หนึ่ง

ω_{out} คือความเร็วเชิงมุมของเพลาที่สองที่มีเซนเซอร์วัดความเร็วติดอยู่ (ชื่อตัวแปรคล้ายกับตัวแปรอิสระ ω แต่มีความหมายคนละแบบ)

J_1 คือความเฉื่อยของเพลาที่หนึ่ง

J_2 คือความเฉื่อยของเพลาที่สอง

B_1 คือสัมประสิทธิ์ความฝืดเชิงมุมของตลับปืนที่ทำกับเพลาที่หนึ่ง

B_2 คือสัมประสิทธิ์ความฝืดเชิงมุมของตลับปืนที่ทำกับเพลาที่สอง

K คือค่าคงที่ของสปริงเชิงมุมระหว่างเพลาที่หนึ่งและเพลาที่สอง

เราสามารถหาสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$J_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\omega_1) = \tau - B_1\omega_1 + \tau_s$$

$$J_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\omega_2) = -\tau_s - B_2\omega_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\tau_s) = K(\omega_2 - \omega_1)$$

$$\omega_{\mathrm{out}} = \omega_2$$

เราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยแปลงเป็นระบบสมการเชิงเส้นในโดเมนของลาปลาซ

$$\begin{aligned} J_1 s\,\Omega_1(s) &= \mathrm{T}(s) - B_1\Omega_1(s) + \mathrm{T}_s(s) \\ J_2 s\,\Omega_2(s) &= -\mathrm{T}_s(s) - B_2\Omega_2(s) \\ s\,\mathrm{T}_s(s) &= K(\Omega_2(s) - \Omega_1(s)) \end{aligned}$$

เมื่อทำการจัดรูป เราจะได้สมการ

$$\begin{aligned} (J_1 s + B_1)\Omega_1(s) - \mathrm{T}_s(s) &= \mathrm{T}(s) \\ (J_2 s + B_2)\Omega_2(s) + \mathrm{T}_s(s) &= 0 \\ K\Omega_1(s) - K\Omega_2(s) + s\,\mathrm{T}_s(s) &= 0 \end{aligned}$$

จากนั้นเราสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการเวกเตอร์ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} J_1 s + B_1 & 0 & -1 \\ 0 & J_2 s + B_2 & 1 \\ K & -K & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1(s) \\ \Omega_2(s) \\ \mathrm{T}_s(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{T}(s)$$

เราสามารถคำนวณหาเอ้าท์พุต $\Omega_{\mathrm{out}}(s)$ ได้จากการหา $\Omega_2(s)$ ดังนั้น เราจะเขียนสมการความสัมพันธ์ได้ออกมาในรูปดังต่อไปนี้

$$\Omega_{\mathrm{out}}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1(s) \\ \Omega_2(s) \\ \mathrm{T}_s(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 s + B_1 & 0 & -1 \\ 0 & J_2 s + B_2 & 1 \\ K & -K & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{T}(s)$$

$$G(s) = \frac{\Omega_{\mathrm{out}}(s)}{\mathrm{T}(s)} = \frac{K}{(J_1 s + B_1)\left(J_2 s^2 + B_2 s + K\right) + (J_2 s + B_2)K}$$

$$G(s) = \frac{\dfrac{K}{J_1}}{s^3 + \left(\dfrac{B_1}{J_1} + \dfrac{B_2}{J_2}\right)s^2 + \left(\dfrac{K}{J_2} + \dfrac{K}{J_1} + \dfrac{B_1}{J_1}\dfrac{B_2}{J_2}\right)s + \left(\dfrac{B_1}{J_1}\dfrac{K}{J_2} + \dfrac{B_2}{J_2}\dfrac{K}{J_1}\right)}$$

$$G(s) = \frac{\kappa_1}{s^3 + (\beta_1 + \beta_2)s^2 + (\kappa_1 + \kappa_2 + \beta_1\beta_2)s + (\beta_1\kappa_2 + \beta_2\kappa_1)}$$

แปลงอะไรมายังไงวะงง ทำไมตัวกำลังสามกับสองถึงเป็น s= -jw

$$G(\omega) = \frac{\kappa_1}{-j\omega^3 - (\beta_1 + \beta_2)\omega^2 + j(\kappa_1 + \kappa_2 + \beta_1\beta_2)\omega + (\beta_1\kappa_2 + \beta_2\kappa_1)}$$

$$G(\omega) = \frac{\kappa_1}{\left((\beta_1\kappa_2 + \beta_2\kappa_1) - (\beta_1 + \beta_2)\omega^2\right) + j\left((\kappa_1 + \kappa_2 + \beta_1\beta_2)\omega - \omega^3\right)}$$

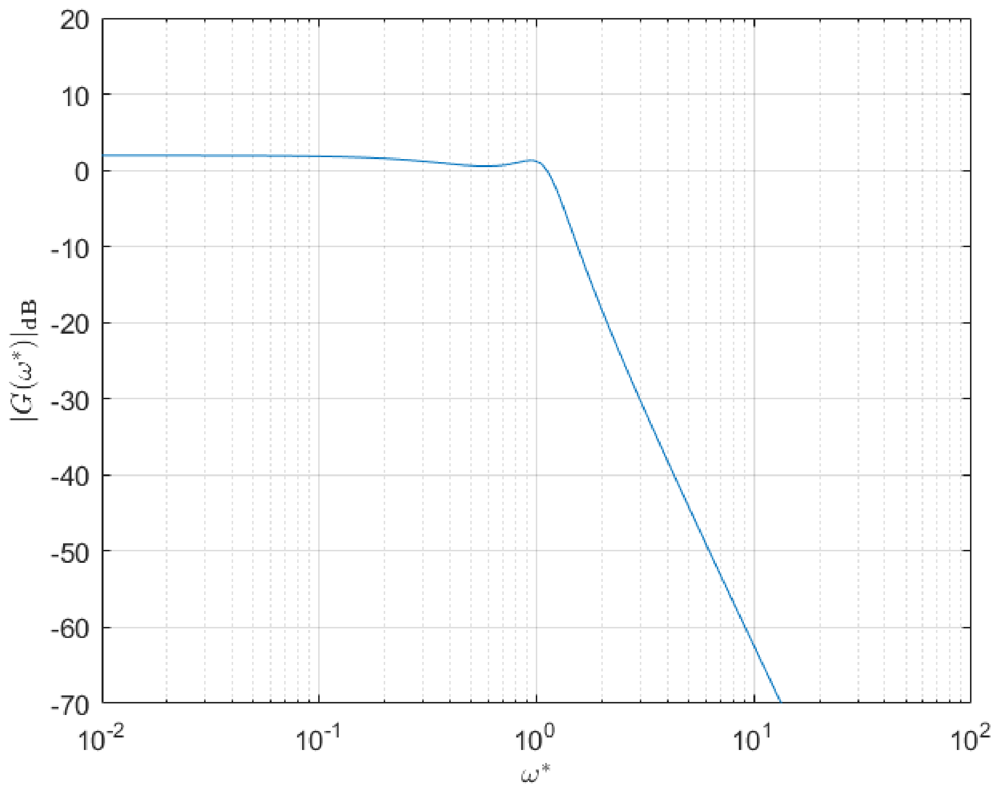
$$G(\omega) = \frac{\kappa_1}{\sqrt{\left((\beta_1\kappa_2 + \beta_2\kappa_1) - (\beta_1 + \beta_2)\omega^2\right)^2 + \left((\kappa_1 + \kappa_2 + \beta_1\beta_2)\omega - \omega^3\right)^2}\,\mathbf{e}^{j\left(\tan^{-1}\left(\frac{(\kappa_1+\kappa_2+\beta_1\beta_2)\omega-\omega^3}{(\beta_1\kappa_2+\beta_2\kappa_1)-(\beta_1+\beta_2)\omega^2}\right)\right)}}$$

$$G(\omega) = \frac{\kappa_1}{\sqrt{\left((\beta_1\kappa_2 + \beta_2\kappa_1) - (\beta_1 + \beta_2)\omega^2\right)^2 + \left((\kappa_1 + \kappa_2 + \beta_1\beta_2)\omega - \omega^3\right)^2}}\,\mathbf{e}^{j\left(-\tan^{-1}\left(\frac{(\kappa_1+\kappa_2+\beta_1\beta_2)\omega-\omega^3}{(\beta_1\kappa_2+\beta_2\kappa_1)-(\beta_1+\beta_2)\omega^2}\right)\right)}$$

เราจะได้อัตราส่วนขนาดดังต่อไปนี้

$$|G(\omega)| = \frac{\kappa_1}{\sqrt{\left((\beta_1\kappa_2 + \beta_2\kappa_1) - (\beta_1 + \beta_2)\omega^2\right)^2 + \left((\kappa_1 + \kappa_2 + \beta_1\beta_2)\omega - \omega^3\right)^2}}$$

```
w = 10.^(-2:0.01:2);
J_1 = 0.4;
J_2 = 1;
B_1 = 0.3;
B_2 = 0.5;
K = 0.3;
kappa_1 = B_1/J_1;
kappa_2 = B_2/J_2;
beta_1 = K/J_1;
beta_2 = K/J_2;
im = (kappa_1+kappa_2+beta_1*beta_2)*w-w.^3;
re = beta_1*kappa_2+beta_2*kappa_1-(beta_1+beta_2)*w.^2;
mag_G = kappa_1./sqrt(re.^2+im.^2);
pha_G = -atan(im./re);
clf;
ax = axes;
semilogx(ax,w,20*log10(mag_G));
grid(ax,'on');
hold(ax,'on');
DC_gain = kappa_1/(beta_1*kappa_2+beta_2*kappa_1);
% semilogx(ax,w,20*log10(DC_gain*ones(size(w))),'k--');
% semilogx(ax,w,20*log10(DC_gain/sqrt(2)*ones(size(w))),'k--');
axis(ax,[min(w) max(w) -70 20]);
xlabel('$\omega^*$','Interpreter',"latex")
ylabel('$|G(\omega^*)|_\mathbf{dB}$','Interpreter',"latex")
```



จากกราฟอัตราส่วนขนาดของฟังก์ถ่ายโอนเราจะสังเกตได้ว่าระบบมีพฤติกรรมที่คล้ายกับ ตัวกรอง low-pass แต่ระบบมีการขยายสัญญาณเพิ่มในช่วงที่ความถี่ต่ำเนื่องอัตราส่วนขนาดมีค่ามากกว่า $0\,\text{dB}$ ระบบนี้จะตอบสนองดีในหนึ่งแต่จะตอบสนองน้อยกับอีกช่วงหนึ่ง ช่วงที่ระบบตอบสนองได้ดีนั้นคือ ความกว้างแถบความถี่ (bandwidth) ระบบ

การคำนวณ bandwidth ของระบบมีหลักการคล้ายกับการหาความถี่ตัดโดยเราจะวิเคราะห์หาความถี่ที่ทำให้อัตราส่วนพลังมีค่ามากว่าครึ่งหนึ่งของอัตราส่วนพลัง ณ อินพุตคงที่ หรือเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$|G(\omega_B)|^2 > \frac{1}{2}|G(0)|^2$$

$$|G(\omega_B)| > \frac{1}{\sqrt{2}}|G(0)|$$

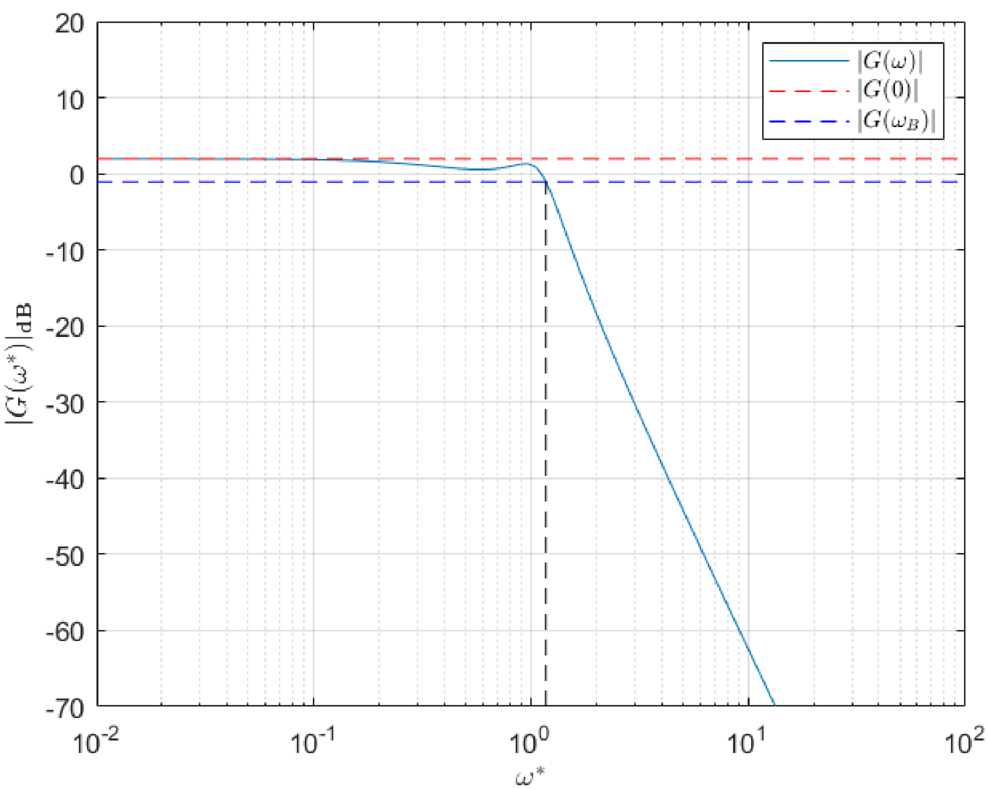
โดย ω_B คือ bandwidth ของระบบ

แทนที่เราจะคำนวณจากสมการ เราสามารถประมาณ bandwidth ของระบบได้ด้วยการตีเส้นในกราฟและหาจุดตัดระหว่างกราฟและเส้นนั้น โดนเส้นนี้จะเป็นเส้นที่มีขนาดเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ของ $|G(0)|$ หรือ

$$20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|G(0)|\right) = |G(0)|_{\text{dB}} - 10\log_{10}(2) \approx |G(0)|_{\text{dB}} - 3$$

```
w = 10.^(-2:0.01:2);
J_1 = 0.4;
J_2 = 1;
B_1 = 0.3;
B_2 = 0.5;
K = 0.3;
kappa_1 = B_1/J_1;
```

```
kappa_2 = B_2/J_2;
beta_1 = K/J_1;
beta_2 = K/J_2;
im = (kappa_1+kappa_2+beta_1*beta_2)*w-w.^3;
re = beta_1*kappa_2+beta_2*kappa_1-(beta_1+beta_2)*w.^2;
mag_G = kappa_1./sqrt(re.^2+im.^2);
pha_G = -atan(im./re);
clf;
ax = axes;
semilogx(ax,w,20*log10(mag_G));
grid(ax,'on');
hold(ax,'on');
DC_gain = kappa_1/(beta_1*kappa_2+beta_2*kappa_1);
semilogx(ax,w,20*log10(DC_gain*ones(size(w))),'r--');
semilogx(ax,w,20*log10(DC_gain/sqrt(2)*ones(size(w))),'b--');
plot(ax,[1.170798 1.170798],[-70 -1.0721],'k--')
axis(ax,[min(w) max(w) -70 20]);
xlabel('$\omega^*$','Interpreter',"latex")
ylabel('$|G(\omega^*)|_\mathbf{dB}$','Interpreter',"latex")
legend({'$|G(\omega)|$','$|G(0)|$','$|G(\omega_B)|$'},'Interpreter',"latex")
```



เราจะได้ว่า bandwidth ของระบบเครื่องกลนี้อยู่ที่ $1.170798 \left[\frac{\mathrm{rad}}{s}\right]$ หรือประมาณ $0.1863\ [\mathrm{Hz}]$

เราสามารถออกแบบตัวกรองสัญญาณจาก bandwidth ของระบบได้ เนื่องจากระบบจริงมีการตอบสนองในช่วงของ bandwidth เราสามารถกรองสัญญาณรบกวนที่มีความถี่สูงกว่า bandwidth ออกไปได้ ในกรณีตัวอย่าง เราสามารถออกแบบตัวกรอง low-pass ที่มีความถี่ตัดในบริเวณ $0.1863\ [\mathrm{Hz}]$

เราสามารถสรุปกระบวนการประมาณ bandwidth ได้ดังต่อไปนี้

1. กราฟแผนภาพโบเดในส่วนของ อัตราส่วนขยาด
2. คำนวณหา อัตราส่วนขนาด ณ อินพุตคงที่ $|G(0)|_{\mathrm{dB}}$
3. นำอัตราส่วนขนาด(ในเดซิเบล) ไปลบด้วย $10\log_{10}(2)$ หรือประมาณ $3\ \mathrm{dB}$
4. วาดเส้นแนวนอนในกราฟที่ค่าผลลบที่หามาได้
5. ดูจุดตัดกระหว่างกราฟและเส้นแนวนอน และหาพิกัดของความถี่ ณ จุดตัดนั้น