การวิเคราะห์เชิงความถี่

ตอนที่ 4 : ผลตอบสนองแบบชั่วครู่ และ ผลตอบสนองแบบคงตัว (Transient Response & Steady-state Response)

ระบบพลวัตแบบ LTI (Linear Time-Invariant) และ SISO (Single-Input Single Output) สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,t^n}(y(t)) + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}(y(t)) + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(y(t)) + a_0 y(t) = b_m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\,t^m}(u(t)) + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\,t^{m-1}}(u(t)) + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(u(t)) + b_0 u(t)$$

สมการดังกล่าวจะมีผลเฉลยเป็น $y(t)$ ซึ่งตามหลักการแก้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น **ผลเฉลยนี้จะประกอบไปด้วย 2 ส่วนซึ่งก็คือ ผลเฉลยเชิงเอกพันธุ์ $y_h(t)$ และ ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(t)$**

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

ผลเฉลยเชิงเอกพันธุ์คือผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่มีอินพุตหรือสมการเชิงเอกพันธุ์ (solution of the homoegeneous equation) ซึ่งเมื่อเอาผลเฉ,ยนี้ไปแทนค่าในสมการ เราจะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,t^n}(y_h(t)) + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}(y_h(t)) + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(y_h(t)) + a_0 y_h(t) = 0$$

ไม่ว่าจะขยายผลเฉลยนี้มากน้อยเพียงใด ผลลัพธ์จากการแทนค่าของสมการเชิงอนุพันธ์จะทำให้ได้ 0 เสมอ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นเชิงเส้นจะมีผลเฉลยเชิงเอกพันธุ์พ่วงอยู่ด้วยเสมอ

ส่วนที่จะทำให้สมการเชิงอนุพันธ์เป็นจริงได้นั้นคือผลเฉลยเฉพาะ $y_p(t)$

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,t^n}(y_p(t)) + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}(y_p(t)) + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(y_p(t)) + a_0 y_p(t) = b_m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\,t^m}(u(t)) + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\,t^{m-1}}(u(t)) + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(u(t)) + b_0 u(t)$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นจะประกอบไปด้วย 2 องค์ประกอบนี้เสมอ

ตัวอย่างที่ 1

หากเรากำหนดให้ สมการเชิงอนุพันธ์เป็นดังต่อไปนี้

$$\dot{y} + k \cdot y = u$$
$$u(t) = t$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่

เนื่องจากผลเฉลยประกอบไปด้วย y_h และ y_p เราสามารถแก้สมการได้โดยการสร้างสมการเชิงเอกพันธุ์จากสมการที่กำหนดมาให้เพื่อที่จะนำไปแก้หา y_h เมื่อนำ y_h ไปแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ เราจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\dot{y}_h + k \cdot y_h = 0$$

จากนั้นเราทำการแก้สมการได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}_h = -k \cdot y_h \\
&\frac{1}{y_h}\dot{y}_h = -k \\
&\int \left(\frac{1}{y_h}\dot{y}_h\right) \mathrm{d}\,t = \int (-k) \mathrm{d}\,t \\
&\ln(y_h) = -k \cdot t + C_1 \\
&y_h = \mathrm{e}^{-k\cdot t + C} = C \cdot \mathrm{e}^{-k\cdot t}
\end{aligned}
$$

เราจะได้ว่า

$$y_h(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-k\cdot t}$$

จากนั้น เราสามารถที่จะเดารูปแบบของ y_p ให้อยู่ในรูปที่คล้ายกับ $u(t)$ ได้ เนื่องจาก $u(t)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่ง เราจะเดาให้ y_p อยู่ในรูปพหุนามกำลังหนึ่งกังต่อไปนี้

$$y_p(t) = A \cdot t + B$$

เมื่อเราเอาไปแทนสมการเชิงอนุพันธ์ เราจะได้สมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(A \cdot t + B) + k \cdot (A \cdot t + B) = t \\
&A + k \cdot A \cdot t + k \cdot B = t
\end{aligned}
$$

หากเราจับคู่ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ เราจะได้ระบบสมการดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&k \cdot A = 1 \\
&A + k \cdot B = 0
\end{aligned}
$$

เมื่อเราแก้ระบบสมการดังกล่าวเราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&A = \frac{1}{k} \\
&B = -\frac{A}{k} \\
&B = -\frac{1}{k^2}
\end{aligned}
$$

$$y_p(t) = \frac{1}{k}t - \frac{1}{k^2}$$

ดังนั้นผลเฉ,ยของสมการเชิงอนุพันธ์จะเขียนอยู่ในรูปผลบวกของ y_h และ y_p ดังต่อไปนี้

$$y(t) = \left[C \cdot \mathrm{e}^{-k\cdot t}\right] + \left[\frac{1}{k}t - \frac{1}{k^2}\right]$$

ในเชิงของระบบพลวัต ตัวระบบเองนั้นถูกจำลองในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นก็คือ ผลตอบสนอง (response) ของระบบ

ระบบพลวัตแบบ LTI (Linear Time-Invariant) และ SISO (Single-Input Single Output) นั้นจะประกอบไปด้วยผลตอบสนอง 2 ส่วนด้วยกัน ซึ่งได้แก่

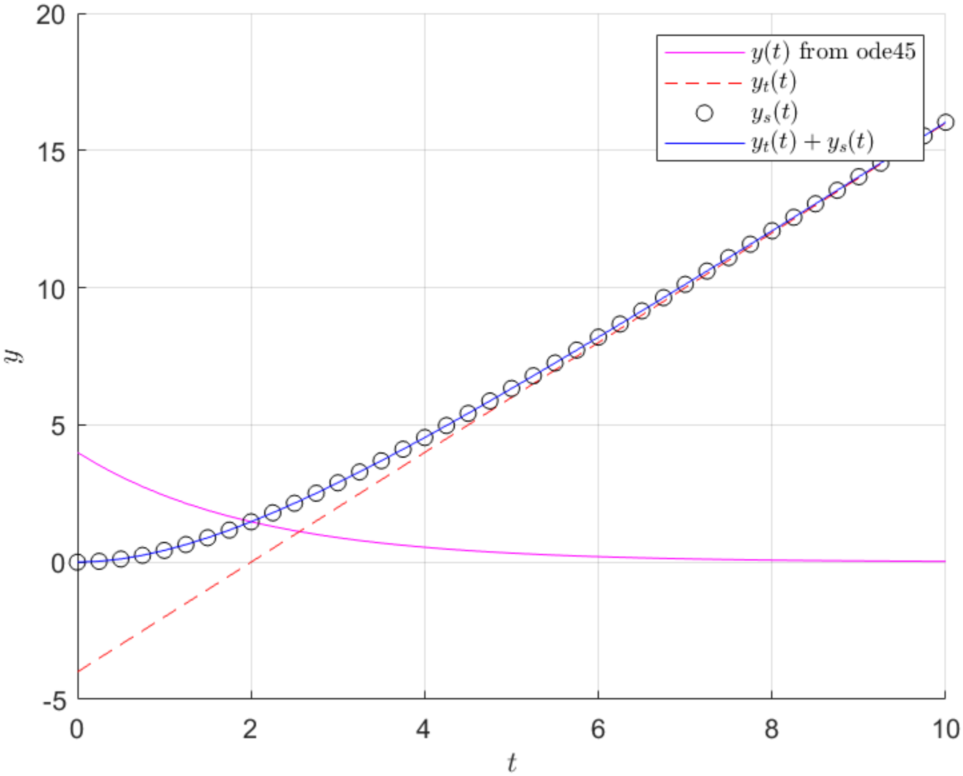
- ผลตอบสนองแบบชั่วครู่ **(transient response)** $y_t(t)$
- ผลตอบสนองแบบคงตัว **(steady-state response)** $y_s(t)$

ซึ่งในเชิงของสมการอนุพันธ์ ผลตอบสนองแบบชั่วครู่ก็คือผลเฉลยเชิงเอกพันธุ์ และผลตอบสนองแบบคงตัวคือผลเฉลยเฉพาะ นอกจากคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์แล้ว เราสามารถอธิบายความหมายของผลตอบสนองแต่ละส่วนในเชิงของระบบพลวัตได้อีกด้วย

เมื่อระบบพลวัตถูกกระตุ้นด้วยอินพุต ระบบจะเปลี่ยนไปตามธรรมชาติของระบบเอง ธรรมชาติของระบบนี้จะเกิดขึ้นทันทีและเป็นการเปลี่ยนแปลงที่"อาจ"จะเกิดขึ้นแค่ชั่วขณะ เนื่องระบบพลวัตมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาและมีสถานะที่ไม่อยากจะเปลี่ยนกระทันหันได้ ระบบจึงมีผลตอบสนองตามธรรมชาติของมัน

นอกจากนั้นระบบพลวัตเองก็ต้องเปลี่ยนแปลงไปตามอินพุต มันจึงไม่แปลกระบบจะมีผลตอบสนองแบบคงตัวที่มีลักษณะคล้ายกับอินพุต

```
k = 0.5;
t_max = 10;
tspan = [0 t_max];
y0 = 0;
u = @(t)t;
[t,y] = ode45(@(t,y)-k*y+u(t),tspan,y0); %[t,y] = ode45(odefun,tspan,y0), where tspan = [t0 tf
y_s = t/k-1/k^2;
y_t = (1/k^2+y0)*exp(-k*t);
clf
ax = axes;
hold(ax,'on');
grid(ax,'on')
plot(ax,t,y_t,'m')
plot(ax,t,y_s,'r--')
plot(ax,t,y_t+y_s,'ko')
plot(ax,t,y,'b')
xlabel('$t$','Interpreter',"latex");
ylabel('$y$','Interpreter',"latex");
legend({'$y(t)$ from ode45','$y_t(t)$','$y_s(t)$','$y_t(t)+y_s(t)$'},'Interpreter',"latex")
```



เมื่อเราทำการวิเคราะห์ระบบพลวัต **เราสามารถที่จะศึกษาในแต่ละส่วนของผลตอบสนองแยกกัน หากเราต้องการที่จะวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลา เราจะทำการศึกษาเฉพาะในส่วนของผลตอบสนองแบบชั่วครู่y_t(t)**

แต่เราต้องการที่จะวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงความถี่ เราจะทำการศึกษาเฉพาะในส่วนของผลตอบสนองแบบคงตัว y_s(t)