เอกสารประกอบการสอน
รายวิชา การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

วิฑูรย์ พึ่งรัตนา

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

2556

เอกสารประกอบการสอน
รายวิชา การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ดร.วิฑูรย์ พึ่งรัตนา

ปร.ด. (คณิตศาสตร์)

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

2556

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนรายวิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลข รหัสวิชา 4094407 เล่มนี้ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นเอกสารหลักสำหรับการเรียนการสอนในรายวิชาดังกล่าว โดยเนื้อหาในเอกสารเล่มนี้เกี่ยวข้องกับการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาในลักษณะต่าง ๆ ซึ่งแบ่งออกเป็น 7 บท ประกอบไปด้วยความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข คำตอบของสมการตัวแปรเดียว ระบบสมการเชิงเส้น ระบบสมการไม่เชิงเส้น การประมาณค่าในช่วง อนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข และผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ในแต่ละบท ผู้เขียนได้ใส่ตัวอย่างโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ที่เขียนโดยใช้โปรแกรมภาษา SCILAB เข้ามาเพื่อเป็นตัวอย่างให้นักศึกษาได้เรียนรู้กระบวนการการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์ และนำความรู้ประยุกต์สู่การแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้จริง

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารประกอบการสอนเล่มนี้จะมีส่วนช่วยส่งเสริมและพัฒนาการเรียนการสอนในรายวิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลขได้ดียิ่งขึ้น หากมีข้อบกพร่องประการใด ผู้เขียนขอน้อมรับและขออภัยไว้ ณ ที่นี้ด้วย

วิฑูรย์ พึ่งรัตนา

5 เมษายน 2556

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

แผนการบริหารการสอนประจำวิชา

รหัสวิชา **4094407**

รายวิชา **การวิเคราะห์เชิงตัวเลข** 3(3-0-6)

Numerical Analysis

คำอธิบายรายวิชา

การวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อน คำตอบเชิงตัวเลขของสมการ คำตอบเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น การประมาณค่าในช่วง การหาปริพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข

วัตถุประสงค์ทั่วไป

1. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อน
2. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจและสามารถหาคำตอบของสมการเชิงเส้น สมการไม่เชิงเส้น ระบบสมการเชิงเส้น และระบบสมการไม่เชิงเส้นโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้
3. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนาม และนำไปใช้ได้
4. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการประมาณค่าในช่วงโดยใช้ฟังก์ชันสไปลน์ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดและนำไปใช้ได้
5. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลขของฟังก์ชันได้
6. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขของฟังก์ชันได้
7. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้
8. เพื่อให้นักศึกษาเกิดทักษะเกี่ยวกับกระบวนการคิด การวิเคราะห์อย่างเป็นระบบเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และสามารถประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาได้

เนื้อหา

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข 6 คาบ

ความคลาดเคลื่อน

ตัวอย่างปัญหาความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์

บทที่ 2 คำตอบของสมการตัวแปรเดียว 9 คาบ

ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว

ระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน

ระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด

ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง

ระเบียบวิธีของนิวตัน

บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น 9 คาบ

เมทริกซ์และเวกเตอร์

การมีผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

วิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

เทคนิคการเลือกตัวยืน

ระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล

บทที่ 4 ระบบสมการไม่เชิงเส้น 3 คาบ

ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว

ระเบียบวิธีของนิวตัน

บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง 9 คาบ

การประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนาม

การประมาณค่าในช่วงโดยพหุนามเป็นช่วง

การประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

บทที่ 6 อนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข 6 คาบ

อนุพันธ์เชิงตัวเลข

ปริพันธ์จำกัดเขตเชิงตัวเลข

บทที่ 7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 3 คาบ

ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์

ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา

วิธีสอนและกิจกรรม

1. วิธีสอนแบบบรรยาย โดยเริ่มบรรยายจากประเด็นปัญหาที่เกิดขึ้น จากนั้นจึงอธิบายหลักการและวิธีการแก้ปัญหาเหล่านั้น พร้อมทั้งยกตัวอย่างปัญหาต่าง ๆ เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และเห็นภาพชัดเจน

2. มอบหมายงานกลุ่ม โดยให้ผู้เรียนจับกลุ่มศึกษาหัวข้อต่าง ๆ ที่ผู้สอนมอบหมายให้และมีการจัดให้นำเสนอผลการศึกษาหน้าชั้นเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนได้ฝึกการนำเสนอ

3. มอบหมายแบบฝึกหัดไปทำเป็นการบ้าน

4. มอบหมายหัวข้อให้ผู้เรียนอ่านล่วงหน้า

5. ทดสอบย่อยท้ายชั่วโมงและสอบวัดผลกลางภาค/ปลายภาค

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. หนังสืออ่านประกอบ
3. เครื่องฉายภาพ LCD โปรเจคเตอร์
4. เครื่องคิดเลข

การวัดผลและการประเมินผล

การวัดผล

1. คะแนนระหว่างภาคเรียน ร้อยละ 70 แบ่งเป็น

1.1 พฤติกรรมการเรียน	ร้อยละ 10
1.2 แบบฝึกหัด และแบบทดสอบย่อย	ร้อยละ 15
1.3 งานกลุ่มและการนำเสนอ	ร้อยละ 10
1.4 สอบกลางภาค	ร้อยละ 35

2. คะแนนสอบปลายภาคเรียน ร้อยละ 30

การประเมินผล

อิงเกณฑ์ และ อิงกลุ่ม

ต่ำกว่าร้อยละ 40 ระดับคะแนน E และร้อยละ 80 ขึ้นไป ระดับคะแนน A

ระดับคะแนน D D+ C C+ B B+ ใช้วิธีอิงกลุ่ม

แผนการบริหารการสอนประจำบทที่ 1

หัวข้อเนื้อหา

1. ความคลาดเคลื่อน
2. ตัวอย่างปัญหาความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเข้าใจหลักการคำนวณเบื้องต้นของคอมพิวเตอร์ และทราบถึงปัจจัยต่าง ๆ ที่ก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์
2. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนประเภทต่าง ๆ ได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ผู้สอนบรรยายเนื้อหาที่เกี่ยวกับหลักการทำงานเบื้องต้นของคอมพิวเตอร์ ตลอดจนวิธีการคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนชนิดต่าง ๆ และยกตัวอย่างให้เห็นปัญหาของความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์ รวมทั้งวิธีการหลีกเลี่ยงปัญหาเหล่านั้น
2. ผู้สอนมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดวิเคราะห์ในปัญหาต่าง ๆ
3. ผู้สอนให้ทำแบบทดสอบย่อยในช่วงท้ายชั่วโมง เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำโจทย์ปัญหาในเรื่องที่ได้เรียนรู้มา อีกทั้งยังเป็นการให้ผู้เรียนได้มีโอกาสซักถามหากมีประเด็นข้อสงสัยเพิ่มเติม
4. มีการมอบหมายแบบฝึกหัดให้ผู้เรียนได้ทำเป็นการบ้าน
5. มีการมอบหมายหัวข้อให้ผู้เรียนได้ไปอ่านล่วงหน้า

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคิดเลข
3. แบบทดสอบย่อย
4. แบบฝึกหัด

การวัดผลและการประเมินผล

1. ความตรงต่อเวลา และความตั้งใจในระหว่างเรียน

2. ให้ทำแบบทดสอบย่อยท้ายชั่วโมง
3. ให้แบบฝึกหัดไปทำเป็นการบ้าน

บทที่ 1
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

การคำนวณเชิงตัวเลขนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะประมาณค่าคำตอบของปัญหาต่าง ๆ ให้ได้ค่าที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ในส่วนของการคำนวณเกี่ยวกับจำนวนจริงในเครื่องคิดเลขและคอมพิวเตอร์นั้น เครื่องจะคำนวณโดยประมาณค่าจำนวนจริงด้วยจำนวนตรรกยะที่มีตัวเลขจำกัด เช่น ผลบวกของ $\sqrt{2}$ กับ $\frac{1}{3}$ เขียนได้เป็น $\sqrt{2}+\frac{1}{3}$ ซึ่งเรียกว่า *ผลลัพธ์จริง* (exact value) โดยไม่สามารถเขียนให้เป็นเลขจำนวนเดียวได้ ถ้าจะให้เครื่องคำนวณบวกจำนวนดังกล่าวเครื่องคำนวณจะประมาณค่าของ $\sqrt{2}$ และ $\frac{1}{3}$ แยกกันแล้วจึงบวกกัน ถ้าเครื่องสามารถทำได้ถึงทศนิยม 7 หลัก ค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ เป็น 1.4142136 และค่าประมาณของ $\frac{1}{3}$ เป็น 0.3333333 ดังนั้นรวมกันได้เป็น 1.7475469 ค่านี้เป็นค่าประมาณของผลลัพธ์จริง $\sqrt{2}+\frac{1}{3}$ การที่คอมพิวเตอร์ต้องประมาณค่าของจำนวนจริงแทนที่จะใช้ค่าจริงก็เพราะว่าคอมพิวเตอร์มีที่เก็บตัวเลขจำกัด ค่าจริงของ $\sqrt{2}$ กับ $\frac{1}{3}$ เป็นทศนิยมไม่รู้จบ คอมพิวเตอร์จึงไม่สามารถเก็บค่าจริงได้

โดยปกติเครื่องคอมพิวเตอร์จะเก็บจำนวนเป็น 2 แบบ คือจำนวนเต็ม (integer number) และจำนวนจุดลอย (floating point number) จำนวนเต็มที่มีค่าระหว่างค่าบวกและค่าลบของจำนวนเต็มใหญ่สุด (ที่เครื่องจะเก็บไว้ได้) คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ในแบบจำนวนเต็ม การเก็บแบบนี้ไม่มีความคลาดเคลื่อน คอมพิวเตอร์จะคำนวณได้เที่ยงตรงถ้าผลลัพธ์ไม่เกินค่าสูงสุดที่จะเก็บไว้ได้ แต่ถ้าจำนวนที่จะเก็บมีขนาดใหญ่กว่าค่าสูงสุด คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ในรูปของจำนวนจุดลอยรวมทั้งจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม คอมพิวเตอร์ก็จะเก็บไว้ในรูปจำนวนจุดลอยเช่นเดียวกัน ซึ่งการคำนวณโดยใช้จำนวนจุดลอยจะได้ผลลัพธ์เป็นเพียงค่าประมาณเท่านั้น

จำนวนจุดลอยคือจำนวนที่เขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$\pm 0.d_1 d_2 \cdots d_n \times b^s, \quad m \le s \le M \tag{1.1}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ

$$1 \le d_1 \le b-1$$
$$0 \le d_k \le b-1, \quad k = 2,3,\ldots,n$$

จำนวน b เป็นฐานของระบบ (ในเอกสารเล่มนี้จะศึกษาเฉพาะจำนวนในระบบเลขฐานสิบเท่านั้น) d_1, $d_2,\ldots,d_n$ จะเป็นตัวเลขในระบบ เรียกว่า *เศษส่วน (fraction)* หรือ *แมนทิสซา (mantissa)* n เป็นค่าบอกจำนวนตัวเลขที่เขียนแสดง และจำนวน s เป็นกำลังของฐานเรียกว่า *ตัวกำลัง* หรือ *แคแรกเทอริสติค* (characteristic) ตัวอย่างการเขียนจำนวนในรูปจำนวนจุดลอย เช่น

118.35 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยในระบบเลขฐานสิบได้เป็น 0.11835×10^3

-95.472 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยในระบบเลขฐานสิบได้เป็น -0.95472×10^2

0.00003547 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยในระบบเลขฐานสิบได้เป็น 0.3547×10^{-4}

1.1 ความคลาดเคลื่อน

การคำนวณในคอมพิวเตอร์โดยใช้จำนวนจุดลอยแทนจำนวนจริงนั้น จะทำให้มีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น ความคลาดเคลื่อนอาจเกิดขึ้นตั้งแต่เริ่มแรกของการประมาณค่าและอาจเกิดจากการประมาณค่าในระหว่างการคำนวณ เมื่อนำตัวเลขนี้ไปคำนวณหลาย ๆ ครั้ง ความคลาดเคลื่อนก็จะขยายมากขึ้น ดังนั้นจึงควรศึกษาให้เข้าใจถึงธรรมชาติอันนี้เพื่อที่จะรู้ว่าผลลัพธ์สุดท้ายจากการคำนวณนั้นมีความแม่นยำเพียงไร

เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน จะให้นิยามค่าของความคลาดเคลื่อนประเภทต่าง ๆ ดังนี้ (ค่าของความคลาดเคลื่อน เรียกสั้น ๆ ว่า *ค่าคลาดเคลื่อน*)

1) *ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์* (absolute error) แทนด้วยสัญลักษณ์ E_{abs} นิยามดังนี้

$$E_{\text{abs}} = \left| \text{ค่าจากการทำงาน} \; - \; \text{ค่าจริง} \right|$$

2) *ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์* (relative error) แทนด้วยสัญลักษณ์ E_{rel} นิยามดังนี้

$$E_{\text{rel}} = \left| \frac{\text{ค่าจากการทำงาน} \; - \; \text{ค่าจริง}}{\text{ค่าจริง}} \right|$$

3) *ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ* (percentage error) แทนด้วยสัญลักษณ์ E_{per} นิยามดังนี้

$$E_{\text{per}} = E_{\text{rel}} \times 100$$

ความคลาดเคลื่อนอาจเกิดขึ้นได้จากหลายปัจจัย (อำพล ธรรมเจริญ, 2553) ยกตัวอย่างเช่น

1) *ความคลาดเคลื่อนจากข้อมูลเบื้องต้น* ในการวัดทางวิทยาศาสตร์ซึ่งเป็นแหล่งของข้อมูลที่จะนำมาคำนวณมักจะมีความคลาดเคลื่อนอยู่เสมอ สิ่งนี้เป็นเรื่องธรรมชาติและคอมพิวเตอร์ไม่มีส่วนเกี่ยวข้องแต่ผู้คำนวณต้องไม่ลืมที่จะระมัดระวังและระลึกถึงในการแปรผลขั้นสุดท้าย วิธีที่จะทำให้แน่ใจว่าผลลัพธ์ขั้นสุดท้ายเชื่อถือได้เพียงใด วิธีหนึ่งก็โดยการวิเคราะห์ความไว (sensitivity analysis) คือ วิเคราะห์ว่าถ้าข้อมูลเปลี่ยนไปเล็กน้อยแล้วผลขั้นสุดท้ายจะเปลี่ยนไปอย่างไร

2) *ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ* (round-off error) คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นเพราะใช้จำนวนจุดลอยแทนจำนวนจริง

3) *ความคลาดเคลื่อนตัดปลาย* (truncation error) ในบางวิธีการคำนวณคำตอบที่แท้จริงของปัญหามีขั้นตอนการคำนวณมากถึงอนันต์ขั้นตอน เพื่อให้ปฏิบัติได้ง่ายจำต้องตัดทอนขั้นตอนการ

ทำงานลงให้มีจำนวนจำกัด จึงทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นได้ ยกตัวอย่างเช่น เมื่อจะหาค่าของ

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

เมื่อบวกพจน์ต่าง ๆ ทางขวามือเข้าด้วยกันจำนวนหนึ่ง (ที่เหลือตัดทิ้ง) ความคลาดเคลื่อนก็จะเกิดขึ้นลักษณะเช่นนี้เรียกว่า ความคลาดเคลื่อนตัดปลาย ความคลาดเคลื่อนลักษณะเช่นนี้เป็นเรื่องที่เกิดขึ้นเสมอ วิธีการคำนวณต่างกันจะเกิดความคลาดเคลื่อนต่างกัน ดังนั้นในการศึกษาวิธีการคำนวณจึงเป็นประเด็นสำคัญที่จะต้องพิจารณา เพื่อที่จะสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนและเลือกหาวิธีการที่เหมาะสมที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยในการประมาณค่าของคำตอบ

4) *ความคลาดเคลื่อนแพร่ขยาย* (propagated error) ในการคำนวณแต่ละขั้นนอกจากความคลาดเคลื่อนที่อาจเกิดจากการคำนวณเองแล้ว ความคลาดเคลื่อนที่มีอยู่เดิมอาจถูกขยายเพิ่มมากขึ้นจากการกระทำ บวก ลบ คูณ และหารในคอมพิวเตอร์ บางครั้งความคลาดเคลื่อนจะถูกขยายต่อเนื่องกันจนกระทั่งผลลัพธ์สุดท้ายผิดพลาดโดนสิ้นเชิง ซึ่งเป็นเรื่องที่ต้องระมัดระวัง กล่าวได้ว่า วิธีการที่ความคลาดเคลื่อนถูกขยายเพิ่มมากขึ้นอย่างไม่จำกัดเป็นวิธีการที่ *ไม่มีความเสถียร* (unstable) ในวิธีการที่ดีนั้นความคลาดเคลื่อนเดิมจะน้อยลง ๆ กล่าวได้ว่าเป็นวิธีการที่ *มีความเสถียร* (stable)

5) *ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความผิดพลาดของมนุษย์* เมื่อเขียนโปรแกรมให้คอมพิวเตอร์ทำงานและมีคนป้อนข้อมูลเข้าไป ความผิดพลาดอาจเกิดขึ้นจากตัวผู้ป้อนเอง กล่าวคือ โปรแกรมอาจมีบางส่วนผิดพลาดซึ่งคอมพิวเตอร์อาจตรวจไม่พบหรือป้อนข้อมูลผิด ผลลัพธ์ที่ออกมาก็ผิดพลาด วิธีแก้ข้อนี้อยู่ที่ตัวผู้คำนวณเองที่จะต้องระมัดระวังการเขียนโปรแกรมและการป้อนข้อมูล รวมทั้งต้องมีการตรวจสอบโดยอาจมีการทดลองโปรแกรมกับปัญหาง่าย ๆ ที่ทราบคำตอบอยู่แล้ว และเมื่อคำนวณจริงได้ผลขั้นสุดท้ายแล้วก็ควรพิจารณาเปรียบเทียบ หรือตรวจดูว่าผลลัพธ์สอดคล้องกับทฤษฎีหรือไม่น่าเชื่อเพียงไร

ลองพิจารณาความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการใช้จำนวนจุดลอย จากสมการ (1.1) จะได้ว่าจำนวนจุดลอยเขียนอยู่ในรูป

$$\pm 0.d_1 d_2 \cdots d_n \times b^s, \quad m \le s \le M$$

เมื่อ $d_1 \neq 0$ จำนวนที่เขียนโดยจำนวนจุดลอยดังกล่าว เรียกว่า *จำนวนเครื่อง* (machine number) จำนวนเครื่องไม่สามารถมีค่าเป็นจำนวนจริงได้ทั้งหมด จำนวนจริงนั้นจะมีค่าอยู่ระหว่างจำนวนเครื่องสองจำนวน คอมพิวเตอร์จะใช้จำนวนเครื่องจำนวนหนึ่งประมาณค่าจำนวนจริงโดยมีวิธีการอย่างใดอย่างหนึ่งดังนี้

1) *การตัด* (chopping) เป็นวิธีการที่ใช้จำนวนเครื่องที่มีค่าน้อยกว่าจำนวนจริงมาประมาณค่า นั่นคือตัดตัวเลขที่เกินกว่าที่คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ได้ทิ้งไปในทุกกรณี

2) *การปัดเศษ* (rounding) เป็นวิธีการที่ใช้จำนวนเครื่องที่มีค่าใกล้จำนวนจริงมากที่สุดมาประมาณค่าจำนวนจริงนั้น ในกรณีที่เสมอกัน คือตัวที่จะตัดมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของฐาน ให้เลือกจำนวนเครื่องที่ตัวเลขตัวสุดท้ายเป็นเลขคู่ วิธีนี้เป็นเช่นเดียวกับที่ใช้กันอยู่ในการคิดเลขตามปกติ ตัวอย่างเช่น สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้ระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซาเพียง 4 ตำแหน่ง ดังนั้น

จำนวนจริง 1.20847 ถูกแทนด้วยจำนวนเครื่องเป็น 0.1208×10^1

จำนวนจริง 12.0857 ถูกแทนด้วยจำนวนเครื่องเป็น 0.1209×10^2

จำนวนจริง 120.85 ถูกแทนด้วยจำนวนเครื่องเป็น 0.1208×10^3 (ไม่ใช่ 0.1209×10^3)

ความคลาดเคลื่อนจากการใช้จำนวนจุดลอยเป็นค่าประมาณของจำนวนจริง ไม่ว่าจะเป็นวิธีที่ 1 หรือวิธีที่ 2 เรียกว่า *ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ*

หมายเหตุ ตัวเลขหลังจุดทศนิยมในจำนวนจุดลอย เรียกว่า *ตัวเลขนัยสำคัญ* เช่น

$$0.002504 = 0.2504 \times 10^{-2}$$

มีตัวเลขนัยสำคัญ 4 ตัว การนับตัวเลขนัยสำคัญบางทีอาจนับได้ง่ายโดยเริ่มจากเลขตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 1 สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้ระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง จงหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ ของ 11.5528 (โดยใช้วิธีการปัดเศษ)

วิธีทำ จากค่า 11.5528 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยได้เป็น 0.115528×10^2 เนื่องจากคอมพิวเตอร์นี้มีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง ดังนั้นค่าจากการทำงาน คือ 0.1155×10^2

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} E_{abs} &= \left|\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}\right| \\ &= \left|0.1155 \times 10^2 - 11.5528\right| \\ &= 0.0028 \end{aligned}$$

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} E_{rel} &= \left|\frac{\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}}{\text{ค่าจริง}}\right| \\ &= \frac{0.0028}{11.5528} \\ &= 2.4236 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} E_{per} &= E_{\text{rel}} \times 100 \\ &= 2.4236 \times 10^{-4} \times 100 \\ &= 2.4236 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้ระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง จงหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ ของค่าจากการคำนวณ $47.5581 - 9.3342$ (โดยใช้วิธีการปัดเศษ)

วิธีทำ ค่าจริง คือ $47.5581 - 9.3342 = 38.2239$

พิจารณาหาค่าจากการทำงาน

จากค่า 47.5581 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยได้เป็น 0.475581×10^2 เครื่องจะเก็บเป็น 0.4756×10^2 และค่า 9.3342 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยคือ 0.93342×10^1 เครื่องจะเก็บเป็น 0.9334×10^1 พิจารณาค่า $0.4756 \times 10^2 - 0.9334 \times 10^1 = 47.56 - 9.334 = 38.226$ เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยได้เป็น 0.38226×10^2 ดังนั้นค่าจากการทำงานคือ 0.3823×10^2 เพราะฉะนั้น

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} E_{abs} &= \left|\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}\right| \\ &= \left|0.3823 \times 10^2 - 38.2239\right| \\ &= 0.0061 \end{aligned}$$

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มีค่าดังนี้

$$E_{rel} = \left|\frac{\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}}{\text{ค่าจริง}}\right|$$

$$= \frac{0.0061}{38.2239}$$

$$= 1.5959 \times 10^{-4}$$

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} E_{per} &= E_{\text{rel}} \times 100 \\ &= 1.5959 \times 10^{-4} \times 100 \\ &= 1.5959 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้ระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง จงหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ ของค่าจากการคำนวณ $9357.55 + 877.65$ (โดยใช้วิธีการปัดเศษ)

วิธีทำ ค่าจริง คือ $9357.55 + 877.65 = 10235.2$

พิจารณาหาค่าจากการทำงาน

จากค่า 9357.55 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยได้เป็น 0.935755×10^4 เครื่องจะเก็บเป็น 0.9358×10^4 และค่า 877.65 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยคือ 0.87765×10^3 เครื่องจะเก็บเป็น 0.8776×10^3 พิจารณาค่า $0.9358 \times 10^4 + 0.8776 \times 10^3 = 9358 + 877.6 = 10235.6$ เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยได้เป็น 0.102356×10^5 ดังนั้นค่าจากการทำงานคือ 0.1024×10^5 เพราะฉะนั้น

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} E_{abs} &= \left|\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}\right| \\ &= \left|0.1024 \times 10^5 - 10235.2\right| \\ &= 4.8 \end{aligned}$$

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} E_{rel} &= \left|\frac{\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}}{\text{ค่าจริง}}\right| \\ &= \frac{4.8}{10235.2} \\ &= 4.6897 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} E_{per} &= E_{\text{rel}} \times 100 \\ &= 4.6897 \times 10^{-4} \times 100 \\ &= 4.6897 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

1.2 ตัวอย่างปัญหาความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์

ความคลาดเคลื่อนนั้นนอกจากจะมาจากการเก็บจำนวนเป็นจำนวนเครื่องแล้วในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน เช่น การบวก ลบ คูณ หาร ก็อาจมีค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นอีกได้ (อำพล ธรรมเจริญ, 2553) สมมุติว่า คอมพิวเตอร์ใช้จำนวนจุดลอยในระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง โดยใช้วิธีการตัด ในตัวอย่างดังต่อไปนี้

1) ความคลาดเคลื่อนจากการบวก หรือลบของจำนวนสองจำนวนซึ่งจำนวนหนึ่งมีค่ามาก และอีกจำนวนหนึ่งมีค่าน้อย เช่น สมมุติว่าจะบวกจำนวน 100 เข้ากับ 0.05 เริ่มแรกคอมพิวเตอร์จะเก็บตัวเลขเข้าเครื่อง ดังนี้

$$100 = 0.1000 \times 10^3$$
$$0.05 = 0.5000 \times 10^{-1}$$

คอมพิวเตอร์ยังไม่สามารถบวกกันได้ เพราะว่าตัวยกกำลังยังไม่เท่ากัน คอมพิวเตอร์จะแปลงให้มีกำลังเท่ากันแล้วจึงบวกกัน ดังนี้

$$100 = 0.1000 \times 10^3$$
$$0.05 = 0.00005 \times 10^3$$
$$\text{ผลลัพธ์ } = 0.10005 \times 10^3$$

แต่คอมพิวเตอร์สามารถเก็บตัวเลขได้เพียงทศนิยม 4 ตำแหน่งเท่านั้น ดังนั้นผลลัพธ์ในคอมพิวเตอร์จะเป็น 0.1000×10^3 เท่ากับว่าไม่ได้ทำการบวกเลย

ความคลาดเคลื่อนดังกล่าวเป็นเรื่องธรรมดาที่เกิดขึ้นเสมอ ๆ และดูเหมือนว่าเป็นเรื่องไม่สำคัญนักเพราะ

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์} = \left| \frac{(0.10005 - 0.1000) \times 10^3}{100.05} \right| = \frac{5}{10005}$$

ซึ่งคิดเป็นค่าคลาดเคลื่อนร้อยละประมาณ 0.05 ซึ่งนับว่าไม่มากนัก แต่ในบางครั้งก็เป็นเรื่องสำคัญดังตัวอย่างการบวกเพื่อหาค่าของ

$$100 + 0.01 + 0.02 + 0.03 + 0.04 + 0.05 + 0.06 + 0.07 + 0.08 + 0.09$$

คอมพิวเตอร์จะทำการบวกตามธรรมดาจากซ้ายไปขวา ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ 100 แต่ค่าจริงของผลบวกเป็น 100.45 ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จะเป็น $\frac{45}{10045}$ ซึ่งคิดเป็นค่าคลาดเคลื่อนร้อยละประมาณ 0.448 ซึ่งก็นับว่ามาก ถ้าหากว่าลองบวกจำนวนที่น้อย อย่างเช่น 0.09 ไปเรื่อย ๆ สัก 100 ครั้ง คราวนี้ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจะเป็นเรื่องสำคัญมาก

วิธีแก้ความคลาดเคลื่อนลักษณะนี้ก็คือ พยายามหลีกเลี่ยงการบวก (หรือ ลบ) ด้วยจำนวนที่ต่างกันมาก ๆ ดังตัวอย่างที่กล่าวมา อาจทำได้โดยการบวกค่าน้อย ๆ เข้าด้วยกันก่อน ดังนี้ (กระทำในคอมพิวเตอร์)

$$0.01 + 0.02 + 0.03 + 0.04 + 0.05 + 0.06 + 0.07 + 0.08 + 0.09 = 0.00045 \times 10^3$$

แล้วบวกเข้ากับ 100 ได้ผลลัพธ์เป็น 0.1004×10^3 หรือ 100.4 ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จะเป็น $\frac{5}{10045}$ หรือค่าคลาดเคลื่อนร้อยละประมาณ 0.049 เท่านั้น

2) ความคลาดเคลื่อนเกิดจากการลบจำนวนสองจำนวนซึ่งมีค่าใกล้เคียงกัน จะเหลือตัวเลขนัยสำคัญ (ตัวเลขที่แสดงความแม่นยำ) น้อยตัว เช่น $1.35742 - 1.35614 = 0.00128$ แต่ถ้าคำนวณโดยใช้จำนวนจุดลอยในคอมพิวเตอร์ จะได้ $0.1357 \times 10^1 - 0.1356 \times 10^1 = 0.1000 \times 10^{-2}$ ซึ่งมีตัวเลขนัยสำคัญเพียง 1 ตัว และถ้าหาความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จะได้

$$\left| \frac{0.00128 - 0.001}{0.00128} \right| = 0.2188$$

หรือค่าคลาดเคลื่อนร้อยละประมาณ 21.88 ซึ่งมีค่ามาก ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งมีการลบกันระหว่างจำนวนที่มีค่าใกล้เคียงกันสองจำนวน ถ้าไม่ระวังอาจจะเกิดความผิดพลาดได้เช่น เมื่อจะหาค่า $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ Δx มีค่าน้อย ๆ (ในการหาค่าอนุพันธ์) จะได้ $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ถ้า $x_1 = 1.4280$ และ $x_2 = 1.4285$ คาดว่า $\Delta x = 0.0005 = 0.5 \times 10^{-3}$ แต่จากการคำนวณของคอมพิวเตอร์ได้ $\Delta x = 0.1428 \times 10^1 - 0.1428 \times 10^1 = 0$ ผลก็คือคอมพิวเตอร์จะเตือนกลับมาว่า ความผิดพลาดเกิดขึ้นเนื่องจากตัวหารเป็น 0

วิธีแก้ความคลาดเคลื่อนแบบนี้ กระทำได้โดยพยายามหลีกเลี่ยงการลบกันของสองจำนวนที่มีค่าใกล้เคียงกัน ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $\cos^2 x - \sin^2 x$ คำนวณได้โดยใช้ฟังก์ชันที่เป็นเอกลักษณ์แทน ในที่นี้คือ ฟังก์ชัน $\cos 2x$ ในกรณีที่หาฟังก์ชันเอกลักษณ์ได้ยาก อาจแปลงฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ลบกันเกิดเป็นฟังก์ชันใหม่ แล้วจึงคำนวณค่าจากฟังก์ชันใหม่นี้

3) Overflow และ Underflow เกิดขึ้นเมื่อจำนวนมีค่าใหญ่เกินไปหรือมีค่าเล็กเกินไปกว่าที่คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ในรูปจำนวนจุดลอยได้ สมมุติว่าคอมพิวเตอร์สามารถเก็บจำนวนได้ในช่วง 10^{-9} ถึง 10^9 ถ้าคูณเลขสองจำนวนคือ 0.3450×10^8 กับ 0.1000×10^5 ได้ 0.3450×10^{12} คอมพิวเตอร์จะบอกว่า overflow เกิดขึ้นและหยุดไม่ทำการคำนวณต่อไป ในกรณี underflow บางทีคอมพิวเตอร์จะบอกว่าเกิด underflow และหยุดการคำนวณ แต่คอมพิวเตอร์บางเครื่องจะถือว่าจำนวนนั้นมีค่าเป็น 0 และไม่บอกความผิดพลาดนั้น เช่น เมื่อจะหาค่า $A \times B \times C$ โดยที่

$$A = 0.1000 \times 10^{-6}$$

$$B = 0.2000 \times 10^{-5}$$

$$C = 0.3000 \times 10^{7}$$

คอมพิวเตอร์จะหาค่า $A \times B$ ก่อน ได้ 0.2000×10^{-12} ซึ่งคอมพิวเตอร์จะเก็บไว้เป็นค่า 0 เมื่อคูณกับ C ก็จะเป็น 0 ถ้าเขียนคำสั่งให้ A คูณกับ C ก่อน จึงคูณกับ B จะได้ค่าเป็น 0.6000×10^{-6} ซึ่งเป็นค่าที่ถูกต้อง ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า การเขียนคำสั่งที่ดีอาจช่วยลดความผิดพลาดได้

4) ความคลาดเคลื่อนการปัดเศษจากการคูณและการหาร ตามปกติเมื่อคูณหรือหารจำนวนสองจำนวน ตัวเลขของผลลัพธ์จะมากกว่าตัวเลขของจำนวนเดิมและบางทีมากเกินกว่าที่คอมพิวเตอร์

จะเก็บไว้ได้ นั่นคือเกิดความคลาดเคลื่อนที่เรียกว่า ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ ซึ่งเกิดขึ้นบ่อย ๆ แม้ว่าจำนวนเริ่มแรกสองจำนวนจะไม่มีความคลาดเคลื่อนเลย ดังตัวอย่างเช่น

$3062 \times 5591 = 17119642$ คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้เป็น 0.1711×10^8

$\dfrac{1}{3} = 0.333\dot{3}$ คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้เป็น 0.3333×10^0

5) การหารด้วยเลขจำนวนน้อย มีลักษณะคล้ายกับการคูณด้วยเลขจำนวนมาก ทำให้ความคลาดเคลื่อนที่มีมาแต่เดิมขยายใหญ่ขึ้น ตัวอย่างเช่น จะหาค่าของ $C = \frac{A}{B}$ เมื่อ $A = 0.2000 \times 10^2$ และ $B = 0.1000 \times 10^{-4}$ สมมุติว่าค่า B คลาดเคลื่อนมาแต่เดิมเป็น 0.1001×10^{-4} ซึ่งถือว่าคลาดเคลื่อนเล็กน้อย เพราะค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เท่ากับ 10^{-8} และค่าคลาดเคลื่อนร้อยละเป็นเพียงร้อยละ 0.10 แต่ถ้านำค่านี้ไปคำนวณได้ค่า $\frac{A}{B} = 0.1998 \times 10^7$ เทียบกับค่าจริงซึ่งเท่ากับ 0.2000×10^7 ปรากฏว่ามีค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เท่ากับ $0.0002 \times 10^7 = 2000$ ซึ่งเป็นตัวเลขมาก แต่ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละเป็นเพียงร้อยละ 0.10 เท่าเดิม ถ้านำจำนวนดังกล่าวไปคำนวณต่อไป ความคลาดเคลื่อนจะแพร่ขยายมากขึ้น เช่น ต้องการหาค่า $0.2005 \times 10^7 - \frac{A}{B}$ ค่าจริงคือ 0.5000×10^4 ค่าจากการคำนวณคือ 0.7000×10^4 ดังนั้น ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละเท่ากับ $\frac{0.2}{0.5} \times 100 = 40$ มากกว่าเดิม 400 เท่า

ที่ได้ยกตัวอย่างมานี้เพื่อต้องการให้ระมัดระวังในการใช้คอมพิวเตอร์ ในการคำนวณตัวเลขที่ยกมาเป็นการขยายเกินความจริง ที่จริงแล้วความคลาดเคลื่อนของคอมพิวเตอร์มีไม่มากเท่ากับตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น

6) ความคลาดเคลื่อนจากการพิมพ์ผลลัพธ์ ถึงแม้ว่าการคำนวณในคอมพิวเตอร์จะถูกต้อง แต่การพิมพ์ผลลัพธ์อาจทำให้ผู้ใช้เข้าใจผิดได้ เช่น ถ้าผลที่จริง ๆ เป็น 0.13498 แต่ถ้าคำสั่งพิมพ์ใช้แบบ (format) $F6.3$ นั่นคือคอมพิวเตอร์จะพิมพ์ 0.135 (บางเครื่องเป็น 0.134) ในกรณีนี้ ถ้านำค่า 0.135 ไปคำนวณต่อไปความคลาดเคลื่อนจะขยายมากขึ้น ดังนั้นการรู้จักถึงลักษณะการทำงานของคอมพิวเตอร์ที่ใช้จะทำให้คำนวณได้แม่นยำขึ้น

ข้อควรระวังทั่ว ๆ ไปสำหรับผู้ที่จะคำนวณโดยคอมพิวเตอร์หรือเครื่องคิดเลขก็คือ ข้อมูลที่ใส่เข้าไปต้องมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด เช่น ถ้าจะคำนวณค่าใด ๆ ที่ต้องใช้ค่า π ควรเขียนค่านี้จากค่าที่เครื่องเก็บไว้ ถ้าไม่มี ควรประมาณด้วย 3.1415927 ไม่ใช่ $\frac{22}{7}$

1.3 บทสรุป

ในบทนี้ ได้กล่าวถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์ รวมทั้งความคลาดเคลื่อนที่อาจเกิดขึ้นจากการคำนวณนั้น ซึ่งอาจเกิดได้ในหลายปัจจัย โดยได้ชี้ให้เห็นถึงความคลาดเคลื่อนในประเด็นต่าง ๆ ว่าอาจเกิดขึ้นได้อย่างไร มีที่มาจากแหล่งใดบ้าง ซึ่งจะทำให้ตระหนักถึง

อยู่เสมอเมื่อมีการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์ อีกทั้งยังจะช่วยให้เรียนรู้วิธีแก้ไขอย่างถูกต้องในการที่จะหลีกเลี่ยงสิ่งที่จะก่อให้เกิดการแพร่ขยายของความคลาดเคลื่อนอีกด้วย ซึ่งจะส่งผลให้ได้ผลลัพธ์จากการคำนวณที่มีความเที่ยงตรงและแม่นยำมากยิ่งขึ้น

1.4 คำถามทบทวน

ข้อ 1 - 2 สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้จำนวนจุดลอยในระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง

1. จงแปลงจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปจำนวนจุดลอย โดยใช้วิธีการปัดเศษ

   1.1) 352.265

   1.2) 0.000052455

   1.3) -556.7894

   1.4) 3.549875×10^4

   1.5) 65.01587×10^{-5}

   1.6) $\dfrac{11}{4598}$

   1.7) 6π

   1.8) $\sin(2.3456)$

   1.9) $e^{17.556}$

2. จงหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าคลาดเคลื่อนร้อยละของค่าจากการคำนวณต่อไปนี้ (โดยใช้วิธีการปัดเศษ)

   2.1) $21.398 - 3.0184$

   2.2) $1334 + 0.9215$

   2.3) $(121.375 - 0.327) - 199.67$

   2.4) $2405.3 + 0.085476 + 0.094578$

   2.5) 311.56×4.7533

   2.6) $\dfrac{645.75}{0.00015378}$

3. จงคำนวณค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ ทั้งข้างซ้ายและข้างขวาของสมการเพื่อเปรียบเทียบกัน พร้อมทั้งอธิบายผลที่ได้

3.1) $2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x,\ x = 5.9936$

3.2) $\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\ x = 0.35791, y = 1.95754$

4. จงหาวิธีหลีกเลี่ยงการลบกันของสองฟังก์ชัน

4.1) $\dfrac{\sin x}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

4.2) $\dfrac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

แผนการบริหารการสอนประจำบทที่ 2

หัวข้อเนื้อหา

1. ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว
2. ระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน
3. ระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด
4. ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง
5. ระเบียบวิธีของนิวตัน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายเหตุผลและความจำเป็นที่ต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาคำตอบของสมการตัวแปรเดียว

2. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว ระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน ระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง และระเบียบวิธีของนิวตัน ในการหาคำตอบของสมการตัวแปรเดียว

3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเลือกใช้ระเบียบวิธีที่เหมาะสมกับลักษณะปัญหาในแบบต่าง ๆ ได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ผู้สอนบรรยายเนื้อหาที่เกี่ยวกับการหาคำตอบของสมการตัวแปรเดียว โดยใช้วิธีตรง และวิธีการหาคำตอบโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในหลาย ๆ รูปแบบ พร้อมทั้งยกตัวอย่างให้เห็นเป็นลำดับขั้นตอนในแต่ละระเบียบวิธี

2. ผู้สอนมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดวิเคราะห์ในปัญหาต่าง ๆ

3. ผู้สอนให้ทำแบบทดสอบย่อยในช่วงท้ายชั่วโมง เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำโจทย์ปัญหาในเรื่องที่ได้เรียนรู้มา อีกทั้งยังเป็นการให้ผู้เรียนได้มีโอกาสซักถามหากมีประเด็นข้อสงสัยเพิ่มเติม

4. มีการมอบหมายแบบฝึกหัดให้ผู้เรียนได้ทำเป็นการบ้าน

5. มีการมอบหมายหัวข้อให้ผู้เรียนได้ไปอ่านล่วงหน้า

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคิดเลข
3. แบบทดสอบย่อย
4. แบบฝึกหัด

การวัดผลและการประเมินผล

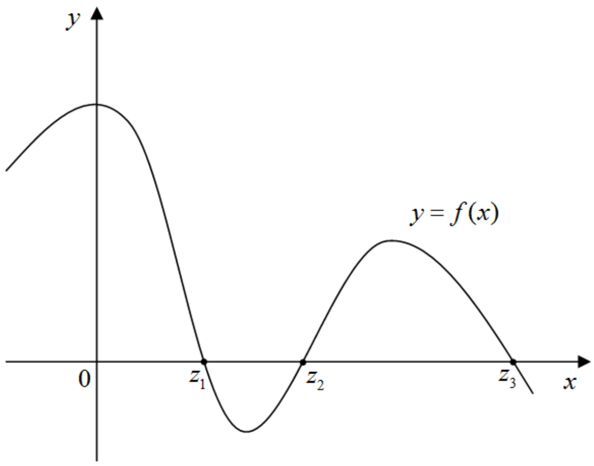
1. ความตรงต่อเวลา และความตั้งใจในระหว่างเรียน
2. ให้ทำแบบทดสอบย่อยท้ายชั่วโมง
3. ให้แบบฝึกหัดไปทำเป็นการบ้าน

บทที่ 2

คำตอบของสมการตัวแปรเดียว

ในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์หรือแม้กระทั่งในทางคณิตศาสตร์เอง สิ่งที่พบอยู่เสมอ ก็คือ การหาคำตอบของสมการ $f(x)=0$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ตัวอย่างเช่น $f(x)=x^2-7x-8$ เป็นต้น

คำตอบ (solution) ของสมการ $f(x)=0$ คือ ค่า z ที่สอดคล้องกับสมการ กล่าวคือ เมื่อแทนค่า z ในสมการแล้วจะได้ $f(z)=0$ หากพิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังภาพที่ 2.1 จะพบว่าจุดที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเป็นศูนย์ก็คือ จุดที่กราฟของฟังก์ชันตัดแกน x นั่นเอง ดังนั้นค่า z_1 เป็นคำตอบของสมการ $f(x)=0$ เช่นเดียวกับค่า z_2 และ z_3 ก็เป็นคำตอบของสมการ $f(x)=0$ เช่นกัน



ภาพที่ 2.1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$

บางทีอาจเรียก z ว่า *ตัวศูนย์* (zero) ของฟังก์ชัน f หรือเรียกว่าเป็น *ค่าราก* (root) หรือ *ผลเฉลย* ของสมการ $f(x)=0$ ก็ได้

การหาคำตอบของสมการต่าง ๆ ที่ได้เคยศึกษามาแล้ว เช่น สมการพหุนามดีกรีสอง

$$x^2-7x-8=0 \tag{2.1}$$

หาคำตอบได้คือ $z_1=-1$ และ $z_2=8$ แต่ถ้าเป็นสมการดังเช่น

$$e^x-5x+1=0 \tag{2.2}$$

จะเห็นว่าไม่เป็นการง่ายที่จะหาคำตอบของสมการ (2.2) นี้

การแสดงว่าจำนวนใดเป็นคำตอบ กระทำได้โดยการแทนค่าตัวไม่ทราบค่าด้วยจำนวนนั้น แล้วดูว่าสมการเป็นจริงหรือไม่ เช่นสมการ (2.1) ถ้าแทน x ด้วย -1 จะได้

$$(-1)^2 - 7(-1) - 8 = 1 + 7 - 8 = 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

แสดงว่า -1 เป็นคำตอบของสมการ (2.1) ถ้าแทน x ด้วย 8 ในสมการ (2.1) ก็จะได้ว่าเป็นจริงเช่นเดียวกัน

ในบทนี้จะกล่าวถึงการหาค่าของคำตอบ (หรือ การประมาณค่าของคำตอบ) ของสมการที่มีตัวแปรเดียวและสมการเดียวโดยใช้ *ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข* (numerical method) ในการหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ นั้น สมการของ $f(x)$ จะอยู่ในรูปต่าง ๆ กัน เช่น เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี n หรือฟังก์ชันอดิศัย หรือฟังก์ชันผสม ดังเช่น $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$, $2x + \ln x - 1 = 0$, $e^x + \sin x = 5$ เป็นต้น ซึ่งฟังก์ชันเหล่านี้ไม่มีวิธีหาคำตอบโดยตรง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาใช้ในการหาคำตอบซึ่งจะเป็นเพียงค่าประมาณของคำตอบเท่านั้น

การกระทำซ้ำถือได้ว่าเป็นหัวใจของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข กล่าวคือ เมื่อจะหาคำตอบของสมการใดสมการหนึ่ง จะเริ่มต้นที่จุดใดจุดหนึ่งซึ่งไม่ใช่คำตอบ แล้วมีวิธีการ (หรือ สูตร) ที่จะเลื่อนจุดนั้นให้เข้าไปใกล้กับคำตอบมากขึ้น เรียกการกระทำเช่นนี้ว่า *วิธีทำซ้ำ* (iteration) เมื่อกระทำซ้ำ ๆ กันมากครั้ง ค่าที่ได้ก็จะเป็นค่าประมาณของคำตอบ โดยทั่วไปของวิธีทำซ้ำจะมีสูตรซึ่งจุดต่อไปขึ้นอยู่กับจุดที่มาก่อนหน้าเรียกว่า *ฟังก์ชันเวียน* (recursive function) มีลักษณะดังนี้

$$x_{i+1} = g(x_0, x_1, \ldots, x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

สำหรับค่า $x_0, x_1, x_2, \ldots$ เรียกว่า *ลำดับ* (sequence) หรือเขียนว่า $\{x_i\}$ ก็ได้ ลำดับนี้อาจจะ *ลู่เข้า* (converge) สู่ค่าที่ต้องการหรือไม่ก็ได้ (กรณีไม่ลู่เข้า เรียกว่า *ลู่ออก*) วิธีทำซ้ำจะได้ผลก็ต่อเมื่อลำดับลู่เข้าสู่ค่าซึ่งเป็นคำตอบ ดังนั้นในการสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำหรือหาสูตร (2.3) สิ่งแรกที่จะต้องพิจารณาก็คือมีทางลู่เข้าหรือไม่ และโดยทั่วไปจะพิจารณาถึงสิ่งต่อไปนี้

1. ระเบียบวิธีทำซ้ำนำไปสู่คำตอบที่แท้จริงหรือไม่ และมีเงื่อนไขอย่างไร
2. อัตราการลู่เข้าสู่คำตอบ เร็วหรือช้าเพียงใด
3. แรงงานที่ใช้มีมากหรือน้อย

ในหัวข้อต่อไปจากนี้ จะนำเสนอระเบียบวิธีทำซ้ำที่เป็นพื้นฐานบางวิธีที่ใช้สำหรับประมาณค่าคำตอบของสมการที่มีตัวแปรเดียว ซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมในระเบียบวิธีอื่น ๆ นอกเหนือจากเอกสารเล่มนี้ได้ที่เอกสารอ้างอิง (อำพล ธรรมเจริญ, 2533) และ (Burden & Faires, 2005)

2.1 ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว (Simple Iteration Method)

ระเบียบวิธีนี้มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า *ระเบียบวิธีซ้ำเดิมโดยจุดตรึง* (fixed point iteration method) ในการหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยระเบียบวิธีนี้ อันดับแรกจะต้องแปลงสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูป

$$x = g(x)$$

โดยมีสมบัติว่า สำหรับค่า x ใด ๆ ถ้า $x = g(x)$ แล้วจะต้องได้ว่า $f(x) = 0$

สามารถเขียนฟังก์ชัน $g(x)$ ได้หลายแบบ ตัวอย่างเช่น สมการ

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

สามารถเขียนในรูปแบบต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$x = g(x) = \frac{x^2 - 8}{7}$$

หรือ $$x = g(x) = \sqrt{7x + 8}$$

หรือ $$x = g(x) = -\sqrt{7x + 8}$$

หรือ $$x = g(x) = \frac{8}{x} + 7$$

หรือ $$x = g(x) = \frac{8}{x - 7}$$

หรือ $$x = g(x) = x^2 - 6x - 8$$

จะเห็นว่าทุกแบบสามารถแปลงกลับได้เป็น $x^2 - 7x - 8 = 0$

ดังนั้น ถ้ามี z ที่ทำให้ $z = g(z)$ จะได้ว่า $f(z) = 0$ นั่นคือ z เป็นคำตอบของสมการที่ต้องการ

วิธีการหาค่า z มีดังนี้ เริ่มต้นลองแทนค่า x_0 ในฟังก์ชัน g ได้ค่า $g(x_0)$ (ถ้าได้ $g(x_0) = x_0$ ดังนั้นค่า x_0 ก็จะเป็นคำตอบ) สมมุติว่าได้ $g(x_0) = x_1 \neq x_0$ จากนั้นก็จะนำค่า x_1 ไปแทนในฟังก์ชัน g อีกครั้ง กระทำดังนี้ไปเรื่อย ๆ กล่าวคือ

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

ซึ่งจะได้ลำดับของค่า x_i คือได้ $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ซึ่งจะเขียนว่า $\{x_i\}$ ถ้าหากปรากฏว่าลำดับนี้ลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง ค่าดังกล่าวนั้นก็จะเป็นคำตอบของสมการที่ต้องการ เพราะว่าเมื่อ x_{n+1} กับ x_n มีค่าต่างกันน้อยมาก (สมมุติว่าเกือบเท่ากัน) จะได้ $x_n \approx g(x_n)$ นั่นคือ x_n เป็นคำตอบโดยประมาณ

ฟังก์ชัน g นี้เรียกว่า *ฟังก์ชันวิธีทำซ้ำ* (iteration function) จุด z ซึ่งมีสมบัติว่า $z = g(z)$ เรียกว่าเป็น *จุดตรึง* (fixed point) ของฟังก์ชัน g

ตัวอย่างที่ 1 จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 6x + 5 = 0$ โดยระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว (สมการนี้มี 2 คำตอบคือ 1 และ 5)

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 6x + 5$ สร้างฟังก์ชัน g ได้หลายวิธี ซึ่งอาจให้ผลลัพธ์ที่ต่างกัน ฟังก์ชัน g แบบหนึ่งได้ดังนี้ จาก $x^2 - 6x + 5 = 0$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$x = \frac{x^2 + 5}{6}$$

นั่นคือ จะให้

$$g(x) = \frac{x^2 + 5}{6}$$

ดังนั้นได้สูตรสำหรับกระทำซ้ำ คือ

$$x_{i+1} = g(x_i) = \frac{x_i^2 + 5}{6}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

เริ่มต้นจะกำหนดให้ค่า $x_0 = 2$ (เลือกค่าใดก็ได้) จะได้

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 5}{6} = \frac{2^2 + 5}{6} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 5}{6} = \frac{(1.5)^2 + 5}{6} = 1.2083333$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 5}{6} = \frac{(1.2083333)^2 + 5}{6} = 1.0766782$$

$$x_4 = \frac{x_3^2 + 5}{6} = \frac{(1.0766782)^2 + 5}{6} = 1.0265393$$

$$x_5 = \frac{x_4^2 + 5}{6} = \frac{(1.0265393)^2 + 5}{6} = 1.0089638$$

$$x_6 = \frac{x_5^2 + 5}{6} = \frac{(1.0089638)^2 + 5}{6} = 1.0030013$$

$$x_7 = \frac{x_6^2 + 5}{6} = \frac{(1.0030013)^2 + 5}{6} = 1.0010019$$

$$x_8 = \frac{x_7^2 + 5}{6} = \frac{(1.0010019)^2 + 5}{6} = 1.0003341$$

$$x_9 = \frac{x_8^2 + 5}{6} = \frac{(1.0003341)^2 + 5}{6} = 1.0001114$$

$$x_{10} = \frac{x_9^2 + 5}{6} = \frac{(1.0003341)^2 + 5}{6} = 1.0000371$$

$$x_{11} = \frac{x_{10}^2 + 5}{6} = \frac{(1.0000371)^2 + 5}{6} = 1.0000124$$

$$x_{12} = \frac{x_{11}^2 + 5}{6} = \frac{(1.0000124)^2 + 5}{6} = 1.0000041$$

$$x_{13} = \frac{x_{12}^2 + 5}{6} = \frac{(1.0000041)^2 + 5}{6} = 1.0000014$$

$$x_{14} = \frac{x_{13}^2 + 5}{6} = \frac{(1.0000014)^2 + 5}{6} = 1.0000005$$

จะเห็นว่าลำดับ $\{x_i\}$ จะลู่เข้าสู่ค่า 1 ซึ่งเป็นคำตอบจริง (ในที่นี้ $x_{14} = 1.0000005$ เป็นคำตอบโดยประมาณ)

ถ้าหากเริ่มต้นด้วย $x_0 = 6$ จะได้ผลดังนี้

$$x_1 = \frac{6^2 + 5}{6} = 6.8333333$$

$$x_2 = \frac{(6.8333333)^2 + 5}{6} = 8.6157407$$

$$x_3 = \frac{(8.6157407)^2 + 5}{6} = 13.2051648$$

$$x_4 = \frac{(13.2051648)^2 + 5}{6} = 29.8960627$$

$$x_5 = \frac{(29.8960627)^2 + 5}{6} = 149.7957607$$

พบว่าครั้งนี้ลำดับ $\{x_i\}$ ไม่ลู่เข้าสู่คำตอบ

จะเห็นได้ว่าบางทีนั้นระเบียบวิธีดังกล่าวลู่เข้า บางทีก็ลู่ออก ดังนั้นจึงจะต้องมาวิเคราะห์ว่าเมื่อไรที่ระเบียบวิธีจะลู่เข้าหรือลู่ออก ซึ่งต้องอาศัยความรู้จากทฤษฎีค่าระหว่างกลาง (intermediate value theorem) และทฤษฎีค่ากลาง (mean value theorem) ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 (ทฤษฎีค่าระหว่างกลาง) ให้ $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ α เป็นจำนวนจริง ถ้า $g(x) \leq \alpha \leq g(y)$ เมื่อ $x, y \in [a, b]$ แล้วจะมีจุด ξ ภายในช่วง $[a, b]$ ซึ่งทำให้ $g(\xi) = \alpha$

ทฤษฎีบท 2 (ทฤษฎีค่ากลาง) ถ้า $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a, b) แล้วจะมีจุด ξ ในช่วง (a, b) โดยที่

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

จากทฤษฎีบททั้งสองข้างต้น ทำให้ได้มาซึ่งทฤษฎีบทที่สำคัญซึ่งสามารถบอกเงื่อนไขสำหรับการลู่เข้าของระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียวได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3 ถ้า $g:[a,b]\to[a,b]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว g จะมีจุดตรึง $z\in[a,b]$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า $g:[a,b]\to[a,b]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a,b) และมีจำนวนบวก M ซึ่ง $|g'(x)|\le M<1$ ทุกค่าของ x ในช่วง (a,b) แล้วลำดับ $\{x_i|\,x_i=g(x_{i-1}), i=1,2,\ldots\}$ เมื่อ x_0 อยู่ในช่วง (a,b) จะลู่เข้าสู่จุดตรึง z ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ $x=g(x)$

จะเห็นว่าเงื่อนไข $M<1$ เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ (sufficient condition) ไม่ใช่เงื่อนไขที่จำเป็น (necessary condition) กล่าวคือ ถึงแม้ว่า $M>1$ (คือ $|g'(\xi)|>1$ สำหรับ ξ บางค่า) ลำดับ $\{x_i\}$ ก็อาจลู่เข้าสู่คำตอบได้เช่นกัน

จากตัวอย่างที่ 1 ได้ฟังก์ชัน g เป็น

$$g(x)=\frac{x^2+5}{6}\quad \text{ดังนั้น}\quad g'(x)=\frac{x}{3}$$

จะเห็นว่า $|g'(x)|<1$ เมื่อ $-3<x<3$ และจะพบว่าถ้า $-3<x<3$ จะได้ว่า

$$-3<\frac{5}{6}<\frac{x^2+5}{6}<\frac{7}{3}<3$$

นั่นคือ ถ้า $x\in[-3,3]$ แล้ว $g(x)\in[-3,3]$ ดังนั้นเมื่อกำหนดจุดเริ่มต้น $x_0=2$ ซึ่งอยู่ในช่วง $[-3,3]$ ระเบียบวิธีจึงให้ค่าของลำดับที่ลู่เข้าสู่คำตอบนั่นเอง

สำหรับคำตอบอีกค่าหนึ่งคือ $x=5$ อยู่นอกช่วงที่ทำให้ $|g'(x)|<1$ และเมื่อเริ่มต้นที่จุดใดก็ตาม ค่าที่ได้จากสูตรสำหรับกระทำซ้ำก็จะลู่ออกจากจุดที่เป็นคำตอบ ด้วยเหตุนี้จึงใช้ฟังก์ชัน g สำหรับหาคำตอบ $x=5$ ไม่ได้ แต่ถ้าใช้ฟังก์ชัน g เป็น

$$g(x)=\sqrt{6x-5}$$

นั่นคือ จะได้สูตรสำหรับกระทำซ้ำคือ

$$x_{i+1}=\sqrt{6x_i-5},\ \ i=0,1,2,\ldots$$

และเมื่อเลือกจุดเริ่มต้น $x_0=6$ ลำดับ $\{x_i\}$ จะลู่เข้าหาคำตอบที่ต้องการ ที่เป็นเช่นนี้เพราะว่า

$$|g'(x)|=\frac{3}{\sqrt{6x-5}}$$

มีค่าน้อยกว่า 1 ในช่วง $x>\frac{7}{3}$ และเมื่อพิจารณาช่วง $[2.4,10]$ จะพบว่าถ้า $2.4\le x\le 10$ จะได้ $2.4\le\sqrt{6x-5}\le 10$ นั่นคือ ถ้า $x\in[2.4,10]$ แล้ว $g(x)=\sqrt{6x-5}\in[2.4,10]$ ดังนั้นมีจุดตรึงในช่วง $[2.4,10]$ และค่า $|g'(x)|<1$ ทุกค่าของ x ในช่วงนี้ ดังนั้นเมื่อเริ่มต้นที่จุด $x_0=6$ ซึ่งอยู่ในช่วงดังกล่าว ระเบียบวิธีจึงให้ค่าของลำดับที่ลู่เข้าสู่คำตอบนั่นเอง หากลองกระทำซ้ำดูจะพบว่าระเบียบวิธีลู่เข้าสู่คำตอบจริงดังที่ได้วิเคราะห์มาข้างต้น ซึ่งจะเห็นค่าของลำดับ $\{x_i\}$ ได้จากตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงลำดับจากการกระทำซ้ำโดยระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว

i	x_i	$f(x_i)$	i	x_i	$f(x_i)$
0	6.0000000	5.0000000	12	5.0019017	0.0076104
1	5.5677644	2.5934138	13	5.0011409	0.0045648
2	5.3297829	1.4278885	14	5.0006845	0.0027384
3	5.1941022	0.8140845	15	5.0004107	0.0016429
4	5.1151357	0.4737990	16	5.0002464	0.0009857
5	5.0686107	0.2791501	17	5.0001478	0.0005914
6	5.0409983	0.1656741	18	5.0000887	0.0003548
7	5.0245388	0.0987573	19	5.0000532	0.0002129
8	5.0147017	0.0590227	20	5.0000319	0.0001277
9	5.0088132	0.0353306	21	5.0000192	0.0000766
10	5.0052851	0.0211685	22	5.0000115	0.0000460
11	5.0031701	0.0126904	23	5.0000069	0.0000276

หมายเหตุ ผลลัพธ์ที่แสดงในตารางที่ 2.1 ได้มาจากการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เขียนขึ้นโดยใช้โปรแกรมภาษา SCILAB (สามารถศึกษาโปรแกรมภาษา SCILAB เพิ่มเติมได้ที่เอกสารอ้างอิง (ปิยะ โควินท์ทวีวัฒน์, 2551)) ซึ่งมีโค้ดโปรแกรม ดังนี้

```
function []=ProA(x0,N)
x=x0;
fx=x*x-6*x+5;
printf('i        x(i)        f(x(i))\n");
printf('%d      %3.7f      %3.7f\n",0,x,fx);
for i=1:N
   x=sqrt(6*x-5);
   fx=x*x-6*x+5;
   printf('%d      %3.7f      %3.7f\n",i,x,fx);
end
endfunction
```

ตัวอย่างการใช้งานชุดคำสั่งและผลลัพธ์ที่ได้

```
-->getf('ProA.sci')
-->ProA(6,10)            //หมายถึง จุดเริ่มต้น x0 = 6 กระทำซ้ำ 10 รอบ
i        x(i)          f(x(i))
0      6.0000000     5.0000000
1      5.5677644     2.5934138
2      5.3297829     1.4278885
3      5.1941022     0.8140845
4      5.1151357     0.4737990
5      5.0686107     0.2791501
6      5.0409983     0.1656741
7      5.0245388     0.0987573
8      5.0147017     0.0590227
9      5.0088132     0.0353306
10      5.0052851     0.0211685
```

สรุปวิธีการที่ได้ศึกษาข้างต้นเป็นขั้นตอนวิธีได้ดังนี้

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว

1. แปลงสมการ $f(x) = 0$ ให้อยู่ในรูป $x = g(x)$ (อาจเขียนได้หลายแบบ)
2. กำหนดสูตรสำหรับกระทำซ้ำเป็น $x_{i+1} = g(x_i)$ สำหรับ $i = 0, 1, 2, \ldots$
3. กำหนดจุดเริ่มต้น x_0 ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $|g'(x_0)| < 1$
4. ในการที่จะหยุดการกระทำซ้ำนั้น อาจพิจารณาได้จากเงื่อนไขดังนี้
   4.1 กำหนดจำนวนครั้งสูงสุดของการกระทำซ้ำ คือ ให้ $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ เมื่อ N มีค่าแน่นอน
   4.2 หยุดการกระทำซ้ำเมื่อ $|x_{i+1} - x_i|$ มีค่าน้อย ๆ (ใกล้ศูนย์เพียงพอตามที่ต้องการ)
   4.3 หยุดการกระทำซ้ำเมื่อ $|f(x_i)|$ มีค่าน้อย ๆ (ใกล้ศูนย์เพียงพอตามที่ต้องการ)

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงการหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ โดยระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = e^x - 3x$ แปลงสมการ $f(x) = 0$ ให้อยู่ในรูป $x = g(x)$ ได้ดังนี้

$$x = \frac{e^x}{3}$$

นั่นคือ จะให้

$$g(x) = \frac{e^x}{3}$$

ดังนั้นสูตรสำหรับการกระทำซ้ำคือ

$$x_{i+1} = g(x_i) = \frac{e^{x_i}}{3}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

วิเคราะห์หาจุดเริ่มต้นที่เหมาะสมได้ดังนี้ จาก $g(x) = \frac{e^x}{3}$ จะได้ $g'(x) = \frac{e^x}{3}$ ดังนั้น ให้ $|g'(x)| < 1$ จะได้

$$\frac{e^x}{3} < 1$$

ใส่ ln ทั้งสองข้างของอสมการ จะได้ $\ln e^x - \ln 3 < 0$ ดังนั้น

$$x < \ln 3 \approx 1.0986123$$

นั่นคือจุดเริ่มต้นควรจะอยู่ในช่วง $x < 1.0986123$ ดังนั้นจึงเลือกให้ $x_0 = 0$ เป็นจุดเริ่มต้น จากนั้นดำเนินการคำนวณได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$x_1 = \frac{e^0}{3} = 0.3333333$$

$$x_2 = \frac{e^{0.3333333}}{3} = 0.4652041$$

$$x_3 = \frac{e^{0.4652041}}{3} = 0.5307797$$

$$x_4 = \frac{e^{0.5307797}}{3} = 0.5667525$$

$$x_5 = \frac{e^{0.5667525}}{3} = 0.5875113$$

$$x_6 = \frac{e^{0.5875113}}{3} = 0.5998348$$

$$x_7 = \frac{e^{0.5998348}}{3} = 0.6072726$$

$$x_8 = \frac{e^{0.6072726}}{3} = 0.6118062$$

$$x_9 = \frac{e^{0.6118062}}{3} = 0.6145862$$

$$x_{10} = \frac{e^{0.6145862}}{3} = 0.6162971$$

$$x_{11} = \frac{e^{0.6162971}}{3} = 0.6173525$$

$$x_{12} = \frac{e^{0.6173524}}{3} = 0.6180043$$

$$x_{13} = \frac{e^{0.6180043}}{3} = 0.6184073$$

$$x_{14} = \frac{e^{0.6184073}}{3} = 0.6186566$$

$$x_{15} = \frac{e^{0.6186566}}{3} = 0.6188108$$

$$x_{16} = \frac{e^{0.6188108}}{3} = 0.6189062$$

$$x_{17} = \frac{e^{0.6189062}}{3} = 0.6189653$$

$$x_{18} = \frac{e^{0.6189653}}{3} = 0.6190019$$

$$x_{19} = \frac{e^{0.6190019}}{3} = 0.6190245$$

$$x_{20} = \frac{e^{0.6190245}}{3} = 0.6190385$$

$$x_{21} = \frac{e^{0.6190385}}{3} = 0.6190472$$

$$x_{22} = \frac{e^{0.6190472}}{3} = 0.6190526$$

$$x_{23} = \frac{e^{0.6190526}}{3} = 0.6190559$$

$$x_{24} = \frac{e^{0.6190559}}{3} = 0.6190580$$

สังเกตว่าในการกระทำซ้ำครั้งที่ 23 ค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด x_{24} คือ

$$f(0.6190580) = e^{0.6190580} - 3(0.6190580) = 0.0000038$$

ซึ่งมีค่าใกล้ศูนย์พอสมควร ดังนั้นคำตอบโดยประมาณคือ 0.6190580

ตัวอย่างที่ 3 จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 2x - 3 = 0$ โดยระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียวและให้จุดเริ่มต้น $x_0 = 2$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x - 3$ พิจารณาว่าควรจะกำหนดฟังก์ชันกระทำซ้ำแบบใดจึงทำให้ระเบียบวิธีลู่เข้าสู่คำตอบเมื่อกำหนดจุดเริ่มต้น $x_0 = 2$

<u>กรณีที่ 1</u> กำหนดให้ $x = \dfrac{x^2 - 3}{2}$ นั่นคือ $g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}$

ดังนั้นจะได้

$$g'(x) = x$$

พบว่า $|g'(2)| = 2 > 1$ แสดงว่า หากกำหนด $g(x)$ ในแบบนี้ ระเบียบวิธีอาจจะไม่ลู่เข้าสู่คำตอบ

<u>กรณีที่ 2</u> กำหนดให้ $x = \sqrt{2x+3}$ นั่นคือ $g(x) = \sqrt{2x+3}$
ดังนั้นจะได้

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

พบว่า

$$|g'(2)| = \frac{1}{\sqrt{2(2)+3}} = 0.377964 < 1$$

แสดงว่าการกำหนด $g(x) = \sqrt{2x+3}$ ทำให้ระเบียบวิธีลู่เข้าสู่คำตอบแน่นอน ดังนั้นสูตรสำหรับกระทำซ้ำคือ

$$x_{i+1} = \sqrt{2x_i+3}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

เมื่อเริ่มต้น $x_0 = 2$ ได้ค่าต่าง ๆ ดังนี้

$$x_1 = \sqrt{2(2)+3} = 2.6457513$$

$$x_2 = \sqrt{2(2.6457513)+3} = 2.8794969$$

$$x_3 = \sqrt{2(2.8794969)+3} = 2.9595597$$

$$x_4 = \sqrt{2(2.9595597)+3} = 2.9864895$$

$$x_5 = \sqrt{2(2.9864895)+3} = 2.9954931$$

$$x_6 = \sqrt{2(2.9954931)+3} = 2.9984973$$

$$x_7 = \sqrt{2(2.9984973)+3} = 2.9994991$$

$$x_8 = \sqrt{2(2.9994991)+3} = 2.9998330$$

$$x_9 = \sqrt{2(2.9998330)+3} = 2.9999443$$

$$x_{10} = \sqrt{2(2.9999443)+3} = 2.9999814$$

$$x_{11} = \sqrt{2(2.9999814)+3} = 2.9999938$$

$$x_{12} = \sqrt{2(2.9999938)+3} = 2.9999979$$

$$x_{13} = \sqrt{2(2.9999979) + 3} = 2.9999993$$

$$x_{14} = \sqrt{2(2.9999993) + 3} = 2.9999998$$

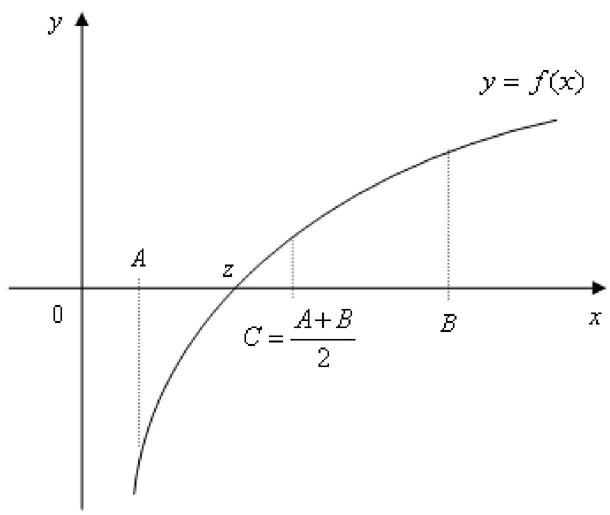
พิจารณาค่าของ f ที่จุด x_{14} จะได้ว่า

$$f(2.9999998) = (2.9999998)^2 - 2(2.9999998) - 3 = -0.0000009$$

ซึ่งมีค่าใกล้ศูนย์พอสมควร ดังนั้นคำตอบโดยประมาณคือ 2.9999998

2.2 ระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน (Bisection Method)

ระเบียบวิธีแบ่งสองส่วนนี้ใช้ได้เฉพาะสมการที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว โดยมีวิธีการดังนี้ เมื่อจะหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ จะเริ่มจากจุด 2 จุด ให้เป็นจุด A และจุด B โดยที่ต้องมีเงื่อนไขว่า $f(A) < 0$ และ $f(B) > 0$ ดังนั้นถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้วจะมีคำตอบระหว่างจุด A และ B แน่นอน ต่อไปให้จุด C เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง A กับ B จะเห็นได้ว่าจุดได้เลื่อนเข้าไปใกล้คำตอบมากขึ้น (ดังภาพที่ 2.2) ต่อไปใช้จุด C แทนจุด A หรือ B แล้วแต่ว่า $f(C)$ น้อยกว่าหรือมากกว่า 0 แล้วกระทำดังนี้ไปเรื่อย ๆ จุด C จะมีค่าใกล้คำตอบเข้าไปเรื่อย ๆ



ภาพที่ 2.2 การหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน

สรุปขั้นตอนวิธีดังที่ได้กล่าวมาข้างต้นได้ดังนี้

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน

1. กำหนด $f(x)$ จากนั้นเลือกจุดเริ่มต้น A และ B โดยที่ $f(A) < 0$ และ $f(B) > 0$

2. คำนวณค่า C จากสูตร $C = \dfrac{A+B}{2}$

3. คำนวณค่า $f(C)$ และพิจารณาค่า $f(C)$ ดังนี้

- ถ้า $f(C) < 0$ ให้ $A = C$

- ถ้า $f(C) > 0$ ให้ $B = C$

จากนั้นย้อนกลับไปทำขั้นตอนที่ 2

ระเบียบวิธีแบ่งสองส่วนนี้ เป็นระเบียบวิธีที่ลู่เข้าแน่นอนถ้าหาจุดเริ่มต้นสองจุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังที่กล่าวมาได้ งานที่ทำในแต่ละครั้งของการกระทำซ้ำมากกว่าระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว เพราะต้องคำนวณทั้งค่า C และ $f(C)$ อีกทั้งต้องทดสอบว่าค่า $f(C)$ นั้นมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าศูนย์ โดยทั่วไปเป็นที่นิยมใช้แต่ไม่มากนักเพราะระเบียบวิธีนี้ลู่เข้าช้า

ตัวอย่างที่ 4 จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $(0, 1)$ โดยระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน
วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = e^x - 3x$
พบว่า $f(0) = 1 > 0$ และ $f(1) = e - 3 < 0$ ดังนั้นให้จุดเริ่มต้น $A = 1$ และ $B = 0$

<u>รอบที่ 1</u> จากค่า $A = 1$ และ $B = 0$ คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = \frac{A+B}{2} = \frac{1+0}{2} = 0.5$$

และได้ค่า

$$f(C) = f\,(0.5) = e^{0.5} - 3(0.5) = 0.1487213$$

เนื่องจากค่า $f(C) > 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า B ใหม่เป็น $B = C = 0.5$ (ค่า A คงเดิม)

<u>รอบที่ 2</u> ค่า $A = 1$ และ $B = 0.5$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = \frac{1+0.5}{2} = \frac{1.5}{2} = 0.75$$

และได้ค่า

$$f(C) = f\,(0.75) = e^{0.75} - 3(0.75) = -0.1329999$$

เนื่องจากค่า $f(C) < 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า A ใหม่เป็น $A = C = 0.75$ (ค่า B คงเดิม)

<u>รอบที่ 3</u> ค่า $A = 0.75$ และ $B = 0.5$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = \frac{0.75+0.5}{2} = \frac{1.25}{2} = 0.625$$

และได้ค่า

$$f(C) = f\,(0.625) = e^{0.625} - 3(0.625) = -0.0067540$$

เนื่องจากค่า $f(C) < 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า A ใหม่เป็น $A = C = 0.625$

<u>รอบที่ 4</u> ค่า $A = 0.625$ และ $B = 0.5$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = \frac{0.625 + 0.5}{2} = 0.5625$$

และได้ค่า

$$f(C) = f\,(0.5625) = e^{0.5625} - 3(0.5625) = 0.0675547$$

เนื่องจากค่า $f(C) > 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า B ใหม่เป็น $B = C = 0.5625$

<u>รอบที่ 5</u> ค่า $A = 0.625$ และ $B = 0.5625$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = \frac{0.625 + 0.5625}{2} = 0.59375$$

และได้ค่า

$$f(C) = f\,(0.59375) = e^{0.59375} - 3(0.59375) = 0.0295161$$

เนื่องจากค่า $f(C) > 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า B ใหม่เป็น $B = C = 0.59375$

<u>รอบที่ 6</u> ค่า $A = 0.625$ และ $B = 0.59375$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = \frac{0.625 + 0.59375}{2} = 0.609375$$

และได้ค่า

$$f(C) = f\,(0.609375) = e^{0.609375} - 3(0.609375) = 0.0111565$$

เนื่องจากค่า $f(C) > 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า B ใหม่เป็น $B = C = 0.609375$

<u>รอบที่ 7</u> ค่า $A = 0.625$ และ $B = 0.609375$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = \frac{0.625 + 0.609375}{2} = 0.6171875$$

และได้ค่า

$$f(C) = f\,(0.6171875) = e^{0.6171875} - 3(0.6171875) = 0.0021447$$

เนื่องจากค่า $f(C) > 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า B ใหม่เป็น $B = C = 0.6171875$

รอบที่ 8 ค่า $A = 0.625$ และ $B = 0.6171875$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = \frac{0.625 + 0.6171875}{2} = 0.6210938$$

และได้ค่า

$$f(C) = f\,(0.6210938) = e^{0.6210938} - 3(0.6210938) = -0.0023189$$

เนื่องจากค่า $f(C) < 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า A ใหม่เป็น $A = C = 0.6210938$

ในรอบต่อ ๆ ไป หาได้โดยแทนค่าในทำนองเดียวกันนี้ ได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำโดยระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน

รอบที่	A	B	C	$f(C)$
1	1.0000000	0.0000000	0.5000000	0.1487213
2	1.0000000	0.5000000	0.7500000	-0.1330000
3	0.7500000	0.5000000	0.6250000	-0.0067540
4	0.6250000	0.5000000	0.5625000	0.0675547
5	0.6250000	0.5625000	0.5937500	0.0295161
6	0.6250000	0.5937500	0.6093750	0.0111565
7	0.6250000	0.6093750	0.6171875	0.0021447
8	0.6250000	0.6171875	0.6210938	-0.0023189
9	0.6210938	0.6171875	0.6191406	-0.0000907
10	0.6191406	0.6171875	0.6181641	0.0010261
11	0.6191406	0.6181641	0.6186523	0.0004675
12	0.6191406	0.6186523	0.6188965	0.0001884
13	0.6191406	0.6188965	0.6190186	0.0000488
14	0.6191406	0.6190186	0.6190796	-0.0000209
15	0.6190796	0.6190186	0.6190491	0.0000140
16	0.6190796	0.6190491	0.6190643	-0.0000035
17	0.6190643	0.6190491	0.6190567	0.0000052
18	0.6190643	0.6190567	0.6190605	0.0000009

จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีที่ใช้ลู่เข้าสู่คำตอบ ในรอบที่ 18 ค่า $f(C) = 0.0000009$ ซึ่งมีค่าใกล้ศูนย์พอสมควร ดังนั้นคำตอบโดยประมาณคือ 0.6190605

หมายเหตุ ผลลัพธ์ที่แสดงในตารางที่ 2.2 ได้มาจากการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เขียนขึ้นโดยใช้โปรแกรมภาษา SCILAB ซึ่งมีโค้ดโปรแกรม ดังนี้

```
function []=ProB(A,B,N)
printf(' i          A          B          C          f(C)\n");
for i=1:N
    C=(A+B)/2;
    fC=exp(C)-3*C;
    printf('%d     %3.7f     %3.7f     %3.7f     %3.7f\n",i,A,B,C,fC);
    if fC<0 then
        A=C;
    elseif fC>0 then
        B=C;
    end
end
endfunction
```

ตัวอย่างการใช้งานชุดคำสั่งและผลลัพธ์ที่ได้

-->getf('ProB.sci')

-->ProB(1,0,8)   //หมายถึง จุดเริ่มต้น $A=1$ และ $B=0$ กระทำซ้ำ 8 รอบ

i	A	B	C	f(C)
1	1.0000000	0.0000000	0.5000000	0.1487213
2	1.0000000	0.5000000	0.7500000	-0.1330000
3	0.7500000	0.5000000	0.6250000	-0.0067540
4	0.6250000	0.5000000	0.5625000	0.0675547
5	0.6250000	0.5625000	0.5937500	0.0295161
6	0.6250000	0.5937500	0.6093750	0.0111565
7	0.6250000	0.6093750	0.6171875	0.0021447
8	0.6250000	0.6171875	0.6210938	-0.0023189

2.3 ระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด (False Position Method)

ระเบียบวิธีนี้จะคล้ายกับระเบียบวิธีแบ่งสองส่วนต่างกันเพียงสูตรในการหาค่า C เท่านั้น กล่าวคือ ในระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิดจะเริ่มต้นที่จุดสองจุด A และ B โดยที่ $f(A) < 0$ และ

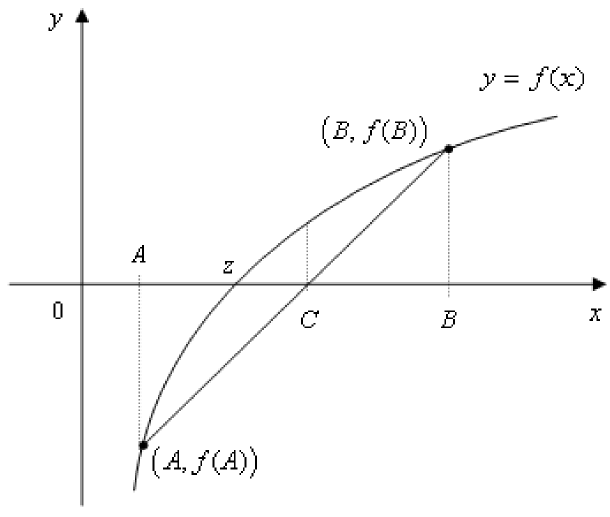
$f(B) > 0$ ต่อไปเขียนเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด $(A, f(A))$ และ $(B, f(B))$ แน่นอนว่าเส้นตรงจะตัดแกน x สมมุติว่าเป็นจุด C จุดนี้จะอยู่ระหว่าง A กับ B จะเห็นว่าจุดได้เลื่อนเข้าไปใกล้คำตอบมากขึ้น (ดังภาพที่ 2.3) ต่อไปใช้จุด C แทนจุด A หรือ B แล้วแต่ว่า $f(C)$ น้อยกว่าหรือมากกว่าศูนย์ แล้วดำเนินการดังนี้ไปเรื่อย ๆ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ลำดับของจุด C จะลู่เข้าสู่คำตอบของสมการ $f(x) = 0$ แน่นอน

ในการหาสูตรคำนวณค่า C จะพิจารณาเส้นตรงที่ผ่านจุด $(A, f(A))$ และ $(B, f(B))$ จะมีสมการเป็น

$$y - f(A) = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}(x - A)$$

เมื่อ $y = 0$ (นั่นคือ เส้นตรงตัดแกน x) จะได้สูตรการหาค่า C เป็น

$$C = x = A - \frac{B - A}{f(B) - f(A)} f(A)$$



ภาพที่ 2.3 การหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด

สรุปขั้นตอนวิธีดังที่ได้กล่าวมาข้างต้นได้ดังนี้

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด

1. กำหนด $f(x)$ จากนั้นเลือกจุดเริ่มต้น A และ B โดยที่ $f(A) < 0$ และ $f(B) > 0$
2. คำนวณค่า C จากสูตร $C = A - \dfrac{B - A}{f(B) - f(A)} f(A)$
3. คำนวณค่า $f(C)$ และพิจารณาค่า $f(C)$ ดังนี้
   - ถ้า $f(C) < 0$ ให้ $A = C$ และ $f(A) = f(C)$

- ถ้า $f(C) > 0$ ให้ $B = C$ และ $f(B) = f(C)$

จากนั้นย้อนกลับไปทำขั้นตอนที่ 2

สามารถปรับปรุงให้ระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิดนี้ลู่เข้าเร็วขึ้นได้หลายวิธี ซึ่งวิธีการหนึ่งก็คือ ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง (กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.4) และมีวิธีอื่น ๆ อีก เช่น ระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิดปรับปรุง (modified false position method) และระเบียบวิธีของมุลเลอร์ (Muller's method) เป็นต้น ซึ่งสามารถศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง (อำพล ธรรมเจริญ, 2553) และ (Burden & Faires, 2005)

ตัวอย่างที่ 5 จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $(0,1)$ โดยระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด
วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = e^x - 3x$
พบว่า $f(0) = 1 > 0$ และ $f(1) = e - 3 = -0.2817182 < 0$ ดังนั้นให้ $A = 1$ และ $B = 0$
<u>**รอบที่ 1**</u> ค่า $A = 1$ และ $B = 0$ โดยที่ $f(A) = f(1) = -0.2817182$ และ $f(B) = f(0) = 1$ คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = A - \frac{B - A}{f(B) - f(A)} f(A)$$

$$= 1 - \frac{0 - 1}{1 + 0.2817182}(-0.2817182)$$

$$= 0.7802027$$

และได้ค่า

$$f(C) = f(0.7802027) = e^{0.7802027} - 3(0.7802027) = -0.1586936$$

เนื่องจากค่า $f(C) < 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า A ใหม่เป็น $A = C = 0.7802027$

<u>**รอบที่ 2**</u> ค่า $A = 0.7802027$ และ $B = 0$ โดยที่ $f(A) = f(0.7802027) = -0.1586936$ และ $f(B) = f(0) = 1$ คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = 0.7802027 - \frac{0 - 0.7802027}{1 + 0.1586936}(-0.1586936)$$

$$= 0.6733469$$

และได้ค่า

$$f(C) = f(0.6733469) = e^{0.6733469} - 3(0.6733469) = -0.0592517$$

เนื่องจากค่า $f(C) < 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า A ใหม่เป็น $A = C = 0.6733469$

<u>รอบที่ 3</u> ค่า $A = 0.6733469$ และ $B = 0$ โดยที่ $f(A) = f(0.6733469) = -0.0592517$ และ $f(B) = f(0) = 1$ คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = 0.6733469 - \frac{0 - 0.6733469}{1 + 0.0592517}(-0.0592517)$$

$$= 0.6356816$$

และได้ค่า

$$f(C) = f(0.6356816) = e^{0.6356816} - 3(0.6356816) = -0.0187360$$

เนื่องจากค่า $f(C) < 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า A ใหม่เป็น $A = C = 0.6356816$

<u>รอบที่ 4</u> ค่า $A = 0.6356816$ และ $B = 0$ โดยที่ $f(A) = f(0.6356816) = -0.0187360$ และ $f(B) = f(0) = 1$ คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = 0.6356816 - \frac{0 - 0.6356816}{1 + 0.0187360}(-0.0187360)$$

$$= 0.6239905$$

และได้ค่า

$$f(C) = f(0.6239905) = e^{0.6239905} - 3(0.6239905) = -0.0056106$$

เนื่องจากค่า $f(C) < 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า A ใหม่เป็น $A = C = 0.6239905$

<u>รอบที่ 5</u> ค่า $A = 0.6239905$ และ $B = 0$ โดยที่ $f(A) = f(0.6239905) = -0.0056106$ และ $f(B) = f(0) = 1$ คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = 0.6239905 - \frac{0 - 0.6239905}{1 + 0.0056106}(-0.0056106)$$

$$= 0.6205091$$

และได้ค่า

$$f(C) = f(0.6205091) = e^{0.6205091} - 3(0.6205091) = -0.0016526$$

เนื่องจากค่า $f(C) < 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า A ใหม่เป็น $A = C = 0.6205091$

<u>รอบที่ 6</u> ค่า $A = 0.6205091$ และ $B = 0$ โดยที่ $f(A) = f(0.6205091) = -0.0016526$ และ

$f(B) = f(0) = 1$ คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = 0.6205091 - \frac{0 - 0.6205091}{1 + 0.0016526}(-0.0016526)$$

$$= 0.6194853$$

และได้ค่า

$$f(C) = f\left(0.6194853\right) = e^{0.6194853} - 3(0.6194853) = -0.0004844$$

เนื่องจากค่า $f(C) < 0$ ดังนั้นต้องเปลี่ยนค่า A ใหม่เป็น $A = C = 0.6194853$

ในรอบต่อ ๆ ไป หาได้โดยแทนค่าในทำนองเดียวกันนี้ ได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำโดยระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด

รอบที่	A	B	C	$f(C)$
1	1.0000000	0.0000000	0.7802027	-0.1586936
2	0.7802027	0.0000000	0.6733469	-0.0592517
3	0.6733469	0.0000000	0.6356816	-0.0187360
4	0.6356816	0.0000000	0.6239905	-0.0056106
5	0.6239905	0.0000000	0.6205091	-0.0016526
6	0.6205091	0.0000000	0.6194853	-0.0004844
7	0.6194853	0.0000000	0.6191854	-0.0001418
8	0.6191854	0.0000000	0.6190976	-0.0000415
9	0.6190976	0.0000000	0.6190719	-0.0000121
10	0.6190719	0.0000000	0.6190644	-0.0000036
11	0.6190644	0.0000000	0.6190622	-0.0000010
12	0.6190622	0.0000000	0.6190616	-0.0000003

จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีที่ใช้ลู่เข้าสู่คำตอบ ในรอบที่ 12 ค่า $f(C) = -0.0000003$ ซึ่งมีค่าใกล้ศูนย์พอสมควร ดังนั้นคำตอบโดยประมาณคือ 0.6190622

หมายเหตุ ผลลัพธ์ที่แสดงในตารางที่ 2.3 ได้มาจากการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เขียนขึ้นโดยใช้โปรแกรมภาษา SCILAB ซึ่งมีโค้ดโปรแกรม ดังนี้

```
function []=ProC(A,B,N)
fA=exp(A)-3*A;
fB=exp(B)-3*B;
printf('i           A           B           C           f(C)\n");
for i=1:N
    C=A-(B-A)*fA/(fB-fA);
    fC=exp(C)-3*C;
    printf('%d     %3.7f     %3.7f      %3.7f      %3.7f\n",i,A,B,C,fC);
    if fC<0 then
        A=C;
        fA=fC;
    elseif fC>0 then
        B=C;
        fB=fC;
    end
end
endfunction
```

ตัวอย่างการใช้งานชุดคำสั่งและผลลัพธ์ที่ได้

```
-->getf('ProC.sci')
-->ProC(1,0,6)
```
//หมายถึง จุดเริ่มต้น $A = 1$ และ $B = 0$ กระทำซ้ำ 6 รอบ

i	A	B	C	f(C)
1	1.0000000	0.0000000	0.7802027	-0.1586936
2	0.7802027	0.0000000	0.6733469	-0.0592517
3	0.6733469	0.0000000	0.6356816	-0.0187360
4	0.6356816	0.0000000	0.6239905	-0.0056106
5	0.6239905	0.0000000	0.6205091	-0.0016526
6	0.6205091	0.0000000	0.6194853	-0.0004844

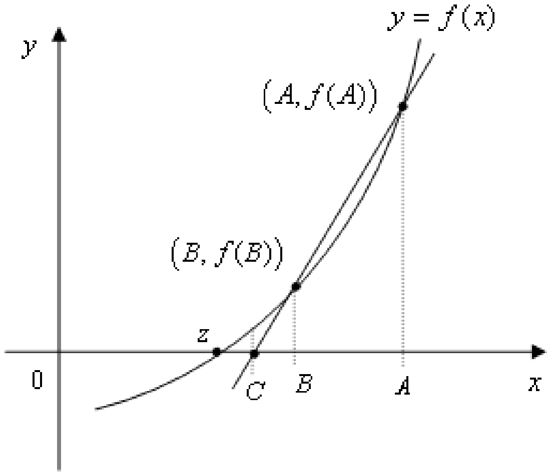
2.4 ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง (Secant Method)

ระเบียบวิธีนี้ต้องใช้จุดเริ่มต้นสองจุด (A และ B) เช่นเดียวกับระเบียบวิธีแบ่งสองส่วนและระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด แต่ว่าจุดสองจุดนั้นไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า $f(A) < 0$ และ

$f(B) > 0$ จากนั้นคำนวณหาจุดต่อไป C ได้จากจุดที่เส้นตรงที่ผ่านจุด $(A, f(A))$ และ $(B, f(B))$ ตัดกับแกน x (ดังภาพที่ 2.4) โดยทราบมาแล้วว่าจุดที่เส้นตรงดังกล่าวตัดแกน x มีสมการเป็น

$$x = A - \frac{B - A}{f(B) - f(A)} f(A)$$

นั่นคือเป็นสูตรเดียวกันกับระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด



ภาพที่ 2.4 การหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง

สรุปขั้นตอนวิธีดังที่กล่าวมาได้ดังนี้

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง

1. กำหนด $f(x)$ จากนั้นเลือกจุดเริ่มต้น A และ B (จุดใดก็ได้) และหาค่า $f(A)$ และ $f(B)$
2. คำนวณค่า C จากสูตร $C = A - \dfrac{B - A}{f(B) - f(A)} f(A)$
3. ปรับจุดใหม่โดยให้ $A = B$ และ $B = C$
4. ให้ $f(A) = f(B)$ และหาค่า $f(B)$

   จากนั้นย้อนกลับไปทำขั้นตอนที่ 2

ตัวอย่างที่ 6 จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $(0, 1)$ โดยระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = e^x - 3x$

<u>รอบที่ 1</u> ให้จุดเริ่มต้นสองจุดคือ $A = 0$ และ $B = 1$

จะได้ $f(A) = f(0) = 1$ และ $f(B) = f(1) = -0.2817182$

คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = 0 - \frac{1-0}{-0.2817182-1}(1)$$

$$= 0.7802027$$

และได้ค่า $f(C) = f\left(0.7802027\right) = e^{0.7802027} - 3(0.7802027) = -0.1586936$
ให้ $A = B = 1$ และ $B = C = 0.7802027$

<u>**รอบที่ 2**</u> ค่า $A = 1$ และ $B = 0.7802027$
จะได้ $f(A) = f(1) = -0.2817182$ และ $f(B) = f(0.7802027) = -0.1586936$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = 1 - \frac{0.7802027-1}{-0.1586936-(-0.2817182)}(-0.2817182)$$

$$= 0.4966786$$

และได้ค่า $f(C) = f\left(0.4966786\right) = e^{0.4966786} - 3(0.4966786) = 0.1532185$
ให้ $A = B = 0.7802027$ และ $B = C = 0.4966786$

<u>**รอบที่ 3**</u> ค่า $A = 0.7802027$ และ $B = 0.4966786$
จะได้ $f(A) = f(0.7802027) = -0.1586936$ และ $f(B) = f(0.4966786) = 0.1532185$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = 0.7802027 - \frac{0.4966786-0.7802027}{0.1532185-(-0.1586936)}(-0.1586936)$$

$$= 0.6359522$$

และได้ค่า $f(C) = f\left(0.6359522\right) = e^{0.6359522} - 3(0.6359522) = -0.0190368$
ให้ $A = B = 0.4966786$ และ $B = C = 0.6359522$

<u>**รอบที่ 4**</u> ค่า $A = 0.4966786$ และ $B = 0.6359522$
จะได้ $f(A) = f(0.4966786) = 0.1532185$ และ $f(B) = f(0.6359522) = -0.0190368$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = 0.4966786 - \frac{0.6359522-0.4966786}{-0.0190368-0.1532185}(0.1532185)$$

$$= 0.6205604$$

และได้ค่า $f(C) = f\,(0.6205604) = e^{0.6205604} - 3(0.6205604) = -0.0017111$
ให้ $A = B = 0.6359522$ และ $B = C = 0.6205604$

<u>รอบที่ 5</u> ค่า $A = 0.6359522$ และ $B = 0.6205604$
จะได้ $f(A) = f(0.6359522) = -0.0190368$ และ $f(B) = f(0.6205604) = -0.0017111$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = 0.6359522 - \frac{0.6205604 - 0.6359522}{-0.0017111 - (-0.0190368)}(-0.0190368)$$

$$= 0.6190403$$

และได้ค่า $f(C) = f\,(0.6190403) = e^{0.6190403} - 3(0.6190403) = 0.0000240$
ให้ $A = B = 0.6205604$ และ $B = C = 0.6190403$

<u>รอบที่ 6</u> ค่า $A = 0.6205604$ และ $B = 0.6190403$
จะได้ $f(A) = f(0.6205604) = -0.0017111$ และ $f(B) = f(0.6190403) = 0.0000240$
คำนวณค่า C ได้ดังนี้

$$C = 0.6205604 - \frac{0.6190403 - 0.6205604}{0.0000240 - (-0.0017111)}(-0.0017111)$$

$$= 0.6190613$$

และได้ค่า $f(C) = f\,(0.6190613) = e^{0.6190613} - 3(0.6190613) = -2.9306854 \times 10^{-8}$ ซึ่งมีค่าใกล้ศูนย์พอสมควร ดังนั้นคำตอบโดยประมาณคือ 0.6190613

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 6 สรุปค่าต่าง ๆ ในแต่ละรอบได้ดังตารางที่ 2.4

ตารางที่ 2.4 แสดงค่าต่าง ๆ ในตัวอย่างที่ 6 โดยระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง

รอบที่	A	B	C	$f(C)$
1	0.0000000	1.0000000	0.7802027	-0.1586936
2	1.0000000	0.7802027	0.4966786	0.1532185
3	0.7802027	0.4966786	0.6359522	-0.0190368
4	0.4966786	0.6359522	0.6205604	-0.0017111
5	0.6359522	0.6205604	0.6190403	0.0000240
6	0.6205604	0.6190403	0.6190613	-0.0000000

จะเห็นได้ว่า ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งลู่เข้าเร็วกว่าระเบียบวิธีก่อนหน้านี้ ทั้งระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว ระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน และระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด แต่อย่างไรก็ตามก็มีบางทีระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งนี้อาจไม่ลู่เข้าได้

จากตัวอย่างที่ 6 สามารถเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยใช้โปรแกรมภาษา SCILAB ซึ่งแสดงโค้ดโปรแกรมไว้ ดังนี้

```
function []=ProD(A,B,N)
fA=exp(A)-3*A;
fB=exp(B)-3*B;
printf('i          A          B          C          f(C)\n");
for i=1:N
    C=A-(B-A)*fA/(fB-fA);
    fC=exp(C)-3*C;
    printf('%d     %3.7f     %3.7f      %3.7f      %3.7f\n",i,A,B,C,fC);
    A=B;
    B=C;
    fA=fB;
    fB=fC;
end
endfunction
```

ตัวอย่างการใช้งานชุดคำสั่งและผลลัพธ์ที่ได้

-->getf('ProD.sci')

-->ProD(0,1,6)   //หมายถึง จุดเริ่มต้น $A=0$ และ $B=1$ กระทำซ้ำ 6 รอบ

i	A	B	C	f(C)
1	0.0000000	1.0000000	0.7802027	-0.1586936
2	1.0000000	0.7802027	0.4966786	0.1532185
3	0.7802027	0.4966786	0.6359522	-0.0190368
4	0.4966786	0.6359522	0.6205604	-0.0017111
5	0.6359522	0.6205604	0.6190403	0.0000240
6	0.6205604	0.6190403	0.6190613	-0.0000000

2.5 ระเบียบวิธีของนิวตัน (Newton's Method)

ระเบียบวิธีของนิวตันเป็นวิธีการที่ใช้กันแพร่หลายวิธีการหนึ่ง จุดเริ่มต้นของระเบียบวิธีนี้มีเพียงจุดเดียว หลักการก็คือ เมื่อเริ่มต้นที่จุดหนึ่ง แล้วหาเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้น จุดต่อไปจะเป็นจุดที่เส้นสัมผัสเส้นโค้งตัดกับแกน x เมื่อได้จุดใหม่แล้วก็ดำเนินการต่อไปเช่นนี้เรื่อย ๆ สำหรับการหาสูตรสำหรับการกระทำซ้ำจะพิจารณาดังนี้

ในการหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ สมมุติว่าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุด เริ่มต้นที่จุด x_0 หาจุดบนเส้นโค้งได้เป็นจุด $(x_0, f(x_0))$ อนุพันธ์ที่จุดนี้มีค่า $f'(x_0)$ ดังนั้นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนี้จะมีสมการเป็น

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

หาจุดที่เส้นตรงตัดแกน x (นั่นคือให้ $y = 0$) จะได้

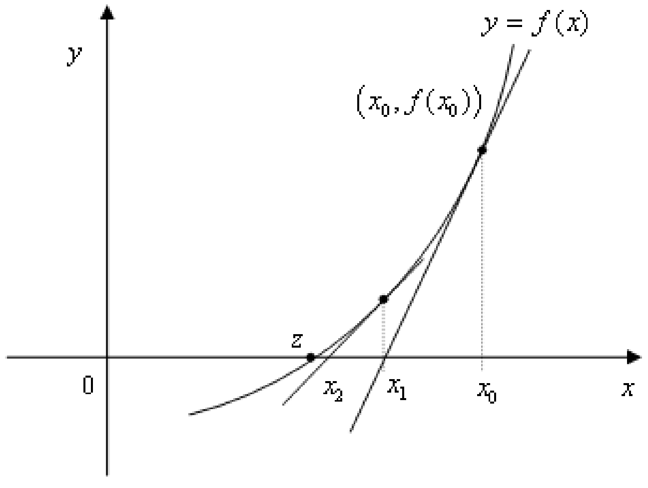
$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ให้จุด x ที่ได้เป็นจุดใหม่คือ x_1 (ดังภาพที่ 2.5) ดังนั้นจะได้

$$x_1 = x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

เมื่อดำเนินการเช่นนี้ต่อไปจะได้จุด $x_2, x_3, x_4, \ldots$ ดังนั้นสูตรสำหรับการกระทำซ้ำของระเบียบวิธีนี้คือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$



ภาพที่ 2.5 การหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยระเบียบวิธีของนิวตัน

การใช้ระเบียบวิธีของนิวตันนี้สิ่งที่สำคัญก็คือ จุดเริ่มต้น ถ้าจุดเริ่มต้นห่างจากคำตอบมากเกินไประเบียบวิธีอาจไม่ลู่เข้า ในกรณีที่ลู่เข้า ระเบียบวิธีนี้จะลู่เข้าเร็วมาก กล่าวคือ เร็วกว่าระเบียบวิธี

ก่อนหน้านี้ทั้งหมด บางทีอาจใช้ระเบียบวิธีนี้ร่วมกับระเบียบวิธีอื่น ๆ ก่อน จนได้จุดซึ่งแน่ใจว่าจะลู่เข้า แล้วจึงใช้ระเบียบวิธีของนิวตันก็ได้

ทั้งนี้ อาจแสดงการได้มาของสูตรสำหรับการกระทำซ้ำของระเบียบวิธีของนิวตันอีกวีธีหนึ่ง ดังนี้ เริ่มต้นที่จุด x_0 จะหาค่า x_1 โดยที่ $x_1 = x_0 + h$ เมื่อ h มีค่าที่เหมาะสม ลำดับต่อไปจะกระจายฟังก์ชัน f โดยอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด x_0 ได้เป็น

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots$$

พิจารณาค่าของ f ที่จุด x_1 จะได้

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots \quad (2.4)$$

ต้องการให้ค่าของฟังก์ชันที่จุดใหม่มีค่าเท่ากับหรือใกล้เคียงกับศูนย์มากที่สุด ดังนั้นสมมุติให้ค่าของฟังก์ชันที่จุด x_1 เป็นศูนย์ (นั่นคือ $f(x_1) = 0$) และถ้าใช้เพียงสองพจน์ (ตัดพจน์อื่นทิ้ง) ของอนุกรม (2.4) จะได้

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

จาก $x_1 - x_0 = h$ จะได้ว่า $h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ นั่นคือ

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ในกรณีทั่วไปจะได้สูตรสำหรับการกระทำซ้ำคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

นั่นคือเป็นสูตรเดียวกันกับระเบียบวิธีของนิวตันนั่นเอง

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเลือกใช้สามพจน์ (พจน์อื่นตัดทิ้ง) ของอนุกรมเทย์เลอร์ (2.4) และสมมุติให้ $f(x_1) = 0$ จะได้ว่า

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x_1 - x_0)^2$$

แก้สมการนี้ จะได้

$$x_1 = x_0 - \frac{-f'(x_0) \pm \sqrt{f'(x_0)^2 - 2f''(x_0)f(x_0)}}{f''(x_0)}$$

ในการณีทั่วไป จะได้สูตรสำหรับการกระทำซ้ำ ดังนี้

$$x_{i+1} = x_i - \frac{-f'(x_i) \pm \sqrt{f'(x_i)^2 - 2f''(x_i)f(x_i)}}{f''(x_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

ระเบียบวิธีที่ได้จากสูตรกระทำซ้ำนี้เรียกว่า *ระเบียบวิธีอันดับสาม* โดยที่เครื่องหมาย $\pm$ หน้า $\sqrt{\ }$ จะกำหนดโดยให้ตัวเศษของสูตรสำหรับการกระทำซ้ำมีค่าน้อยที่สุด

สรุปขั้นตอนวิธีดังที่กล่าวมาได้ดังนี้

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีของนิวตัน

1. กำหนด $f(x)$ และหาค่า $f'(x)$

2. กำหนดจุดเริ่มต้น x_0 โดยที่ $f'(x_0) \neq 0$

3. คำนวณหาจุดถัดไปจากสูตร $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีอันดับสาม

1. กำหนด $f(x)$ จากนั้นหาค่า $f'(x)$ และ $f''(x)$

2. กำหนดจุดเริ่มต้น x_0 โดยที่ $f''(x_0) \neq 0$

3. คำนวณหาจุดถัดไปจากสูตร $x_{i+1} = x_i - \frac{F_i}{f''(x_i)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$
โดยที่ $F_i = \min\{-f'(x_i) - \sqrt{f'(x_i)^2 - 2f''(x_i)f(x_i)}, -f'(x_i) + \sqrt{f'(x_i)^2 - 2f''(x_i)f(x_i)}\}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ โดยระเบียบวิธีของนิวตัน

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = e^x - 3x$ จะได้ $f'(x) = e^x - 3$
ดังนั้นสูตรสำหรับการกระทำซ้ำคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{x_i} - 3x_i}{e^{x_i} - 3}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>**รอบที่ 1**</u> ให้จุดเริ่มต้น $x_0 = 0$ จะได้จุดต่อไปคือ

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{e^{x_0} - 3x_0}{e^{x_0} - 3} \\ &= 0 - \frac{e^0 - 3(0)}{e^0 - 3} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

และได้ค่า $f(x_1) = f(0.5) = e^{0.5} - 3(0.5) = 0.1487213$

รอบที่ 2 คำนวณจุดต่อไปได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{e^{x_1} - 3x_1}{e^{x_1} - 3} \\ &= 0.5 - \frac{e^{0.5} - 3(0.5)}{e^{0.5} - 3} \\ &= 0.6100597 \end{aligned}$$

และได้ค่า $f(x_2) = f(0.6100597) = e^{0.6100597} - 3(0.6100597) = 0.0103622$

รอบที่ 3 คำนวณจุดต่อไปได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{e^{x_2} - 3x_2}{e^{x_2} - 3} \\ &= 0.6100597 - \frac{e^{0.6100597} - 3(0.6100597)}{e^{0.6100597} - 3} \\ &= 0.6189968 \end{aligned}$$

และได้ค่า $f(x_3) = f(0.6189968) = e^{0.6189968} - 3(0.6189968) = 0.0000737$

รอบที่ 4 คำนวณจุดต่อไปได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{e^{x_3} - 3x_3}{e^{x_3} - 3} \\ &= 0.6189968 - \frac{e^{0.6189968} - 3(0.6189968)}{e^{0.6189968} - 3} \\ &= 0.6190613 \end{aligned}$$

และได้ค่า $f(x_4) = f(0.6190613) = e^{0.6190613} - 3(0.6190613) = 3.8634413 \times 10^{-9}$
ซึ่งมีค่าใกล้ศูนย์ถึงทศนิยม 8 ตำแหน่ง ดังนั้นคำตอบโดยประมาณคือ 0.6190613

จากตัวอย่างที่ 7 จะพบว่าระเบียบวิธีของนิวตันนี้ลู่เข้าเร็วกว่าระเบียบวิธีอื่น ๆ อย่างเห็นได้ชัด ในส่วนของโค้ดโปรแกรมของการกระทำซ้ำในตัวอย่างที่ 7 สามารถเขียนได้ ดังนี้

```
function []=ProE(x0,N)
fx=exp(x0)-3*x0;
printf('i          x(i)          f(x(i))\n");
printf('%d          %3.7f          %3.7f\n",0,x0,fx);
for i=1:N
    fp=exp(x0)-3;
    x0=x0-fx/fp;
    fx=exp(x0)-3*x0;
    printf('%d          %3.7f          %3.7f\n",i,x0,fx);
end
endfunction
```

ตัวอย่างการใช้งานชุดคำสั่งและผลลัพธ์ที่ได้

```
-->getf('ProE.sci')
-->ProE(0,4)                //หมายถึง จุดเริ่มต้น x0 = 0 กระทำซ้ำ 4 รอบ
i         x(i)          f(x(i))
0      0.0000000      1.0000000
1      0.5000000      0.1487213
2      0.6100597      0.0103622
3      0.6189968      0.0000737
4      0.6190613      0.0000000
```

ตัวอย่างที่ 8 จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - \sin x = 0$ โดยระเบียบวิธีของนิวตัน

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = x^2 - \sin x$ จะได้ $f'(x) = 2x - \cos x$

ดังนั้นสูตรสำหรับการกระทำซ้ำคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - \sin x_i}{2x_i - \cos x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>รอบที่ 1</u> ให้จุดเริ่มต้น $x_0 = 1$ จะได้จุดต่อไปคือ

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - \sin x_0}{2x_0 - \cos x_0}$$

$$= 1 - \frac{1^2 - \sin 1}{2(1) - \cos 1}$$

$$= 0.8913960$$

และได้ค่า $f(x_1) = f(0.8913960) = (0.8913960)^2 - \sin(0.8913960) = 0.0166372$

<u>รอบที่ 2</u> คำนวณจุดต่อไปได้ ดังนี้

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - \sin x_1}{2x_1 - \cos x_1}$$

$$= 0.8913960 - \frac{(0.8913960)^2 - \sin(0.8913960)}{2(0.8913960) - \cos(0.8913960)}$$

$$= 0.8769848$$

และได้ค่า $f(x_2) = f(0.8769848) = (0.8769848)^2 - \sin(0.8769848) = 0.0002881$

<u>รอบที่ 3</u> คำนวณจุดต่อไปได้ ดังนี้

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - \sin x_2}{2x_2 - \cos x_2}$$

$$= 0.8769848 - \frac{(0.8769848)^2 - \sin(0.8769848)}{2(0.8769848) - \cos(0.8769848)}$$

$$= 0.8767263$$

และได้ค่า $f(x_3) = f(0.8767263) = (0.8767263)^2 - \sin(0.8767263) = 9.4231422 \times 10^{-8}$
ซึ่งมีค่าใกล้ศูนย์ถึงทศนิยม 7 ตำแหน่ง ดังนั้นคำตอบโดยประมาณคือ 0.8767263

ตัวอย่างที่ 9 จงหาคำตอบของสมการ $2x^3 - 4\cos x + 1 = 0$ โดยระเบียบวิธีของนิวตัน
วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = 2x^3 - 4\cos x + 1$ จะได้ $f'(x) = 6x^2 + 4\sin x$
ดังนั้นสูตรสำหรับการกระทำซ้ำคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2x_i^3 - 4\cos x_i + 1}{6x_i^2 + 4\sin x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>รอบที่ 1</u> ให้จุดเริ่มต้น $x_0 = 5$ จะได้จุดต่อไปคือ

$$x_1 = x_0 - \frac{2x_0^3 - 4\cos x_0 + 1}{6x_0^2 + 4\sin x_0}$$

$$= 5 - \frac{2(5)^3 - 4\cos(5) + 1}{6(5)^2 + 4\sin(5)}$$

$$= 3.2905173$$

และได้ค่า $f(x_1) = f(3.2905173) = 2(3.2905173)^3 - 4\cos(3.2905173) + 1 = 76.2119039$

รอบที่ 2 คำนวณจุดต่อไปได้ ดังนี้

$$x_2 = x_1 - \frac{2x_1^3 - 4\cos x_1 + 1}{6x_1^2 + 4\sin x_1}$$

$$= 3.2905173 - \frac{2(3.2905173)^3 - 4\cos(3.2905173) + 1}{6(3.2905173)^2 + 4\sin(3.2905173)}$$

$$= 2.1065792$$

และได้ค่า $f(x_2) = f(2.1065792) = 2(2.1065792)^3 - 4\cos(2.1065792) + 1 = 21.7386891$

รอบที่ 3 คำนวณจุดต่อไปได้ ดังนี้

$$x_3 = x_2 - \frac{2x_2^3 - 4\cos x_2 + 1}{6x_2^2 + 4\sin x_2}$$

$$= 2.1065792 - \frac{2(2.1065792)^3 - 4\cos(2.1065792) + 1}{6(2.1065792)^2 + 4\sin(2.1065792)}$$

$$= 1.3835357$$

และได้ค่า $f(x_3) = f(1.3835357) = 2(1.3835357)^3 - 4\cos(1.3835357) + 1 = 5.5519755$

รอบที่ 4 คำนวณจุดต่อไปได้ ดังนี้

$$x_4 = x_3 - \frac{2x_3^3 - 4\cos x_3 + 1}{6x_3^2 + 4\sin x_3}$$

$$= 1.3835357 - \frac{2(1.3835357)^3 - 4\cos(1.3835357) + 1}{6(1.3835357)^2 + 4\sin(1.3835357)}$$

$$= 1.0233709$$

และได้ค่า $f(x_4) = f(1.0233709) = 2(1.0233709)^3 - 4\cos(1.0233709) + 1 = 1.0615657$

รอบที่ 5 คำนวณจุดต่อไปได้ ดังนี้

$$x_5 = x_4 - \frac{2x_4^3 - 4\cos x_4 + 1}{6x_4^2 + 4\sin x_4}$$

$$= 1.0233709 - \frac{2(1.0233709)^3 - 4\cos(1.0233709) + 1}{6(1.0233709)^2 + 4\sin(1.0233709)}$$

$$= 0.9139221$$

และได้ค่า $f(x_5) = f(0.9139221) = 2(0.9139221)^3 - 4\cos(0.9139221) + 1 = 0.0841354$

<u>รอบที่ 6</u> คำนวณจุดต่อไปได้ ดังนี้

$$x_6 = x_5 - \frac{2x_5^3 - 4\cos x_5 + 1}{6x_5^2 + 4\sin x_5}$$

$$= 0.9139221 - \frac{2(0.9139221)^3 - 4\cos(0.9139221) + 1}{6(0.9139221)^2 + 4\sin(0.9139221)}$$

$$= 0.9036355$$

และได้ค่า $f(x_6) = f(0.9036355) = 2(0.9036355)^3 - 4\cos(0.9036355) + 1 = 0.0007077$

<u>รอบที่ 7</u> คำนวณจุดต่อไปได้ ดังนี้

$$x_7 = x_6 - \frac{2x_6^3 - 4\cos x_6 + 1}{6x_6^2 + 4\sin x_6}$$

$$= 0.9036355 - \frac{2(0.9036355)^3 - 4\cos(0.9036355) + 1}{6(0.9036355)^2 + 4\sin(0.9036355)}$$

$$= 0.9035475$$

และได้ค่า $f(x_7) = f(0.9035475) = 2(0.9035475)^3 - 4\cos(0.9035475) + 1 = 5.5026906 \times 10^{-8}$ ซึ่งมีค่าใกล้ศูนย์ถึงทศนิยม 7 ตำแหน่ง ดังนั้นคำตอบโดยประมาณคือ 0.9035475

2.6 บทสรุป

ในบทนี้ ได้นำเสนอระเบียบวิธีทำซ้ำในแบบต่าง ๆ สำหรับใช้ประมาณค่าของคำตอบของสมการตัวแปรเดียว ได้แก่ ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว ระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน ระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง และระเบียบวิธีของนิวตัน ซึ่งระเบียบวิธีเหล่านี้มีประโยชน์อย่างมาก เพราะในกระบวนการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มักจะประกอบด้วยขั้นตอนที่จำเป็นต้องหาคำตอบของสมการทั้งสิ้น หากมีความเข้าใจในระเบียบวิธีเหล่านี้อย่างแท้จริง อาจช่วยส่งผลให้เกิดการพัฒนาไปสู่ระเบียบวิธีใหม่ ๆ หรือหากผลลัพธ์ที่ได้เกิดความผิดพลาดหรือไม่ลู่เข้าสู่คำตอบที่ต้องการ ก็จะสามารถทราบถึงสาเหตุ ตลอดจนมีวิธีการในการแก้ไขอย่างถูกต้องได้ ยิ่งไปกว่านั้น องค์ความรู้ที่ได้ในบทนี้ ยังเป็นรากฐานที่สำคัญสำหรับช่วยแก้ปัญหาในระดับสูงที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ซึ่งจะได้ศึกษากันในบทต่อ ๆ ไปด้วย

2.7 คำถามทบทวน

1. จงหาคำตอบอีกค่าหนึ่งของสมการ $e^x - 3x = 0$ โดยระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว ระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน ระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิด ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง และระเบียบวิธีของนิวตัน พร้อมทั้งอภิปรายผลที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีทั้ง 5 แบบนี้

2. จงใช้ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว โดยใช้ฟังก์ชันกระทำซ้ำและจุดเริ่มต้นดังที่กำหนดให้ จงวิเคราะห์ว่าจะได้ค่าที่ลู่เข้าสู่คำตอบในช่วงที่กำหนดหรือไม่

2.1 สมการ $x^2 - 5x + 1 = 0$, $g(x) = \dfrac{x^2+1}{5}$ จุดเริ่มต้น $x_0 = 0.8$ คำตอบในช่วง $[0, 1]$

2.2 สมการ $2x^2 - 3x = 0$, $g(x) = \dfrac{2x^2}{3}$ จุดเริ่มต้น $x_0 = 1.2$ คำตอบในช่วง $[1, 2]$

2.3 สมการ $e^x - x - 2 = 0$, $g(x) = e^x - 2$ จุดเริ่มต้น $x_0 = 1.5$ คำตอบในช่วง $[1, 2]$

3. จากสมการ $x^2 - x - 3 = 0$ จงแปลงสมการนี้เป็นรูปของ $x = g(x)$ อย่างน้อย 4 แบบ แล้วจงตรวจสอบว่าในการสร้างฟังก์ชันกระทำซ้ำโดยระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว ถ้าให้จุดเริ่มต้น $x_0 = 1$ กรณีใดทำให้ระเบียบวิธีลู่เข้าสู่คำตอบแน่นอนบ้าง

4. จงใช้ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียวในการหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

4.1 $x^2 - 9x + 14 = 0$

4.2 $x^3 - 15x - 5 = 0$

4.3 $2.5x^2 - 3.7x + 1.2 = 0$

4.4 $3x^2 - e^x = 0$

4.5 $x - \cos x = 0$

5. จงเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณหาคำตอบของสมการ $x^3 + 1.5x^2 - 3x - 10 = 0$ โดยระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว

6. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้โดยระเบียบวิธีแบ่งสองส่วน ระเบียบวิธีแก้ตำแหน่งผิดและระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง

6.1 $2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = 0$ คำตอบอยู่ในช่วง $[1, 1.5]$

6.2 $e^x - 3x^2 = 0$ คำตอบอยู่ในช่วง $[3, 4]$

6.3 $e^x - 3x^2 = 0$ คำตอบอยู่ในช่วง $[0.5, 1.5]$

6.4 $2\tan x - x = 1$ คำตอบอยู่ในช่วง $[0.5, 1]$

6.5 $x^2 - 5.7\sin x + 1 = 0$ คำตอบอยู่ในช่วง $[0, 1]$

7. จงใช้ระเบียบวิธีของนิวตันในการหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

7.1 $x = 4\sin x$

7.2 $x^3 = \sin x + 7$

7.3 $5\sin x = 3.5 - 2x$

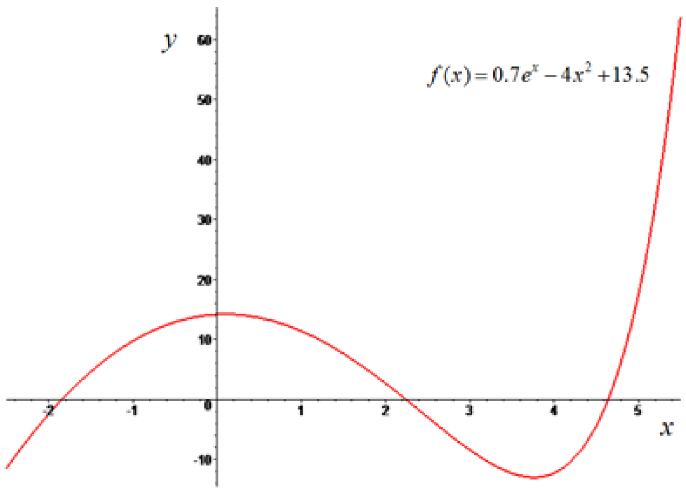
7.4 $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$

7.5 $4e^{3x} - 5.9x^4 = 0$

7.6 $\sin(3x) - e^x + 5 = 0$

8. จงเลือกใช้ระเบียบวิธีที่เหมาะสมในการหาคำตอบทั้งหมดของสมการ $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$

9. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 0.7e^x - 4x^2 + 13.5$ ดังรูป



จงหาคำตอบทั้งหมดของสมการ $f(x) = 0$ โดยเลือกใช้ระเบียบวิธีที่เหมาะสม

10. ในการหาค่าของ $\sqrt{R}$ โดยระเบียบวิธีของนิวตัน จงแสดงว่าสูตรสำหรับการกระทำซ้ำคือ

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{R}{x_i}\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

11. จงเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณหาคำตอบของสมการ $x^3 - 3.5x - 12 = 0$ โดยระเบียบวิธีของนิวตันและระเบียบวิธีอันดับสาม พร้อมทั้งอภิปรายผลลัพธ์ที่ได้

แผนการบริหารการสอนประจำบทที่ 3

หัวข้อเนื้อหา

1. เมทริกซ์และเวกเตอร์
2. การมีผลเฉลยของระบบสมการเชิงส้น
3. วิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น
4. เทคนิคการเลือกตัวยืน
5. ระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายเหตุผลและความจำเป็นที่ต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

2. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบต่าง ๆ ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นได้

3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเลือกใช้ระเบียบวิธีที่เหมาะสมกับลักษณะปัญหาในแบบต่าง ๆ ได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ผู้สอนบรรยายเนื้อหาที่เกี่ยวกับพื้นฐานสำหรับการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นในหลาย ๆ รูปแบบ รวมทั้งระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่าง ๆ ที่ใช้ในการหาผลเฉลย พร้อมทั้งยกตัวอย่างให้เห็นเป็นลำดับขั้นตอนในแต่ละระเบียบวิธี

2. ผู้สอนมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดวิเคราะห์ในปัญหาต่าง ๆ

3. ผู้สอนให้ทำแบบทดสอบย่อยในช่วงท้ายชั่วโมง เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำโจทย์ปัญหาในเรื่องที่ได้เรียนรู้มา อีกทั้งยังเป็นการให้ผู้เรียนได้มีโอกาสซักถามหากมีประเด็นข้อสงสัยเพิ่มเติม

4. มีการมอบหมายแบบฝึกหัดให้ผู้เรียนได้ทำเป็นการบ้าน

5. มีการมอบหมายหัวข้อให้ผู้เรียนได้ไปอ่านล่วงหน้า

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน

2. เครื่องคิดเลข

3. แบบทดสอบย่อย

4. แบบฝึกหัด

การวัดผลและการประเมินผล

1. ความตรงต่อเวลา และความตั้งใจในระหว่างเรียน

2. ให้ทำแบบทดสอบย่อยท้ายชั่วโมง

3. ให้แบบฝึกหัดไปทำเป็นการบ้าน

บทที่ 3
ระบบสมการเชิงเส้น

ปัญหาพื้นฐานที่พบอยู่เสมอ อย่างหนึ่งก็คือ การแก้สมการเชิงเส้นที่มีหลายสมการและหลายตัวแปร (ตัวไม่ทราบค่า) ซึ่งเรียกว่า *ระบบสมการเชิงเส้น* (system of linear equations) มีรูปแบบทั่วไปสำหรับ m สมการ และมีตัวแปร n ตัว ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.1}$$

ค่า $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ที่สอดคล้องกับสมการทุกสมการ เรียกว่าเป็นคำตอบ หรือผลเฉลยของระบบสมการ ระบบสมการอาจมีผลเฉลยเดียว หลายผลเฉลย หรือไม่มีผลเฉลยก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ระบบสมการ 2 สมการ 2 ตัวแปร ดังนี้

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$$

มีเพียงผลเฉลยเดียว คือ $x_1 = -4$ และ $x_2 = 3$ ลองแทนค่าในระบบสมการจะพบว่า

$$\begin{aligned} 2(-4) + 3(3) &= 1 \quad \text{เป็นจริง} \\ -4 + 3 &= -1 \quad \text{เป็นจริง} \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นจริงทั้งสองสมการ (ถ้าแทนค่าแล้วมีบางสมการไม่เป็นจริง จุดนั้นจะไม่ใช่ผลเฉลย)

ในทางเรขาคณิต จะเขียนแทนสมการที่มีสองตัวแปรด้วยเส้นตรง มีสองสมการก็คือมีเส้นตรงสองเส้น จุดที่เส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นตัดกันจะเป็นผลเฉลยของระบบสมการ เพราะว่าจุดนั้นสอดคล้องกับทั้งสองสมการ

สำหรับสมการที่มีสองตัวแปร ถ้าระบบสมการนั้นประกอบด้วยสมการเดียว จุดทุกจุดบนเส้นตรงจะสอดคล้องกับสมการ นั่นคือ ได้ผลเฉลยหลายผลเฉลย ถ้าระบบสมการประกอบด้วยสองสมการ หากเขียนเป็นเส้นตรง ถ้าเส้นตรงสองเส้นนั้นตัดกันก็แสดงว่ามีผลเฉลยเดียวคือจุดตัดที่เส้นตรงตัดกัน ถ้าเส้นตรงสองเส้นนั้นขนานกันและไม่ทับกันก็แสดงว่าระบบสมการไม่มีผลเฉลย ถ้าเส้นตรงสอง

เส้นทับกันเป็นเส้นเดียว ก็แสดงว่าระบบสมการมีหลายผลเฉลย ในกรณีที่สมการมีสองตัวแปรแต่ระบบสมการประกอบด้วยสามสมการหรือมากกว่า ถ้าเส้นตรงทั้งหมดตัดกันที่จุดเดียวก็แสดงว่าระบบสมการนั้นมีผลเฉลยเดียว แต่โดยทั่วไป ถ้าระบบสมการมีจำนวนสมการมากกว่าจำนวนตัวแปรมักคาดว่าระบบสมการนั้นไม่มีผลเฉลย

3.1 เมทริกซ์และเวกเตอร์

เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงระบบสมการเชิงเส้น จะกล่าวถึงสัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทนระบบสมการคือ *เมทริกซ์* (matrix) และกล่าวถึงสมบัติที่สำคัญที่จะนำไปใช้

เมทริกซ์เป็นจำนวนที่เขียนอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่แทนเมทริกซ์เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1.1 & 0.5 \\ 2.2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \ \text{และ} \ C = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.2 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ประกอบด้วย *แถว* (rows) และ*สดมภ์* (columms) ถ้าเมทริกซ์มีแถว m แถว และมี n สดมภ์ จะกล่าวว่าเป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และเรียกว่าเป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ถ้า $m = n$ เรียกว่าเป็น *เมทริกซ์จัตุรัสอันดับ* n (square matrix of order n) จากตัวอย่างจะพบว่า A เป็น 2×3 เมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 3 (ขนาด 3×3) และ C เป็น 3×1 เมทริกซ์ แต่ละจำนวนในเมทริกซ์ (อาจเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน) เรียกว่า *สมาชิก* (element) ของเมทริกซ์ ใช้สัญลักษณ์ a_{ij} แทนสมาชิก (ของเมทริกซ์ A) ที่อยู่ในแถวที่ i และอยู่ในสดมภ์ที่ j จากเมทริกซ์ A จะพบว่า $a_{11} = 1$ และ $a_{23} = 5$ เป็นต้น

เมทริกซ์ที่มีแถวเดียว อาจเรียกว่า *เวกเตอร์แถว* (row vector) เมทริกซ์ที่มีสดมภ์เดียว อาจเรียกว่า *เวกเตอร์สดมภ์* (column vector) หรือ *เวกเตอร์* เฉย ๆ เช่น เมทริกซ์ C เป็นเวกเตอร์ ใช้สัญลักษณ์ตัวพิมพ์หนาแทนเวกเตอร์ เช่น $\mathbf{x} = C$ เป็นเวกเตอร์ สมาชิกในแต่ละตำแหน่งในเวกเตอร์เรียกว่า *ส่วนประกอบ* (component) ของเวกเตอร์นั้น

ในกรณีทั่วไป เขียนสัญลักษณ์แสดงเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ได้ดังนี้

$$\text{เมทริกซ์} \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

หรืออาจเขียนสั้น ๆ ได้เป็น $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

การเท่ากันของเมทริกซ์ ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน จะกล่าวว่า เมทริกซ์ A เท่ากับเมทริกซ์ B (เขียนแทนด้วย $A = B$) ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ ทุกค่า

$i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$ กล่าวคือ เมทริกซ์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและมีสมาชิกที่อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนสเกลาร์ ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ c เป็นจำนวน *สเกลาร์* (scalar) (จำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน) ผลคูณ cA จะเป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของ A คูณกับ c คือ

$$cA = [ca_{ij}]_{m\times n}$$

การบวกและลบเมทริกซ์ ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ผลบวก (ลบ) ของ A กับ B จะเป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยผลบวก (ลบ) ของสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันของ A และ B คือ

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} \quad \text{และ} \quad A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

หมายเหตุ เมทริกซ์ที่จะบวกหรือลบกันได้จะต้องเป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & -3+2 & 0+2 \\ 5-2 & 2+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

และ

$$3A - B = \begin{bmatrix} 3-1 & -9-2 & 0-2 \\ 15+2 & 6-0 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 & -2 \\ 17 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

การคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์ ให้ A เป็น $m\times n$ เมทริกซ์ และ B เป็น $n\times p$ เมทริกซ์ คือ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ ผลคูณของ A กับ B เขียนแทนด้วย AB เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times p$ ที่ประกอบด้วยสมาชิก ดังนี้

$$AB = [c_{ij}]_{m\times p} \quad \text{เมื่อ} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \text{ทุกๆ } i, j$$

หมายเหตุ ถ้าจำนวนสดมภ์ของ A ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ B จะคูณกันไม่ได้

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

จะได้

$$AB = \begin{bmatrix} (2)(3) + (-2)(4) + (5)(5) \\ (3)(3) + (3)(4) + (1)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \end{bmatrix}$$

และ

$$AC = \begin{bmatrix} (2)(-1) + (-2)(1) + (5)(3) & (2)(2) + (-2)(0) + (5)(-2) \\ (3)(-1) + (3)(1) + (1)(3) & (3)(2) + (3)(0) + (1)(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

สมบัติเกี่ยวกับการบวก การลบ และการคูณเมทริกซ์ ให้ a, b เป็นสเกลาร์ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ และสมมุติว่าการบวก การลบ และการคูณต่อไปนี้เป็นไปได้ จะได้สมบัติดังนี้

1) $A + B = B + A$

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

3) $a(A + B) = aA + aB$

4) $(a + b)A = aA + bA$

5) $(A + B)C = AC + BC$

6) $A(B + C) = AB + AC$

7) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$

8) $A(BC) = (AB)C$

หมายเหตุ AB อาจไม่เท่ากับ BA

การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวของเมทริกซ์ (elementary row-operations on matrices) คือการดำเนินการแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบดังต่อไปนี้ กำหนดสัญลักษณ์ R_i แทนแถวที่ i ของเมทริกซ์

1. สลับแถวที่ i กับแถวที่ j เขียนแทนด้วย $R_i \longleftrightarrow R_j$

2. คูณแถวที่ i ด้วยจำนวนที่ไม่เท่ากับศูนย์ เขียนแทนด้วย $kR_i,\ k \neq 0$

3. คูณแถวที่ i ด้วยจำนวนคงที่แล้วนำไปบวกกับแถวที่ j โดยที่ $i \neq j$ เขียนแทนด้วย $kR_i + R_j$

กล่าวได้ว่า เมทริกซ์ A สมมูลแบบแถวกับเมทริกซ์ B ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกับ A จำนวนครั้งที่จำกัด ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \sim B$

3.2 การมีผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

จากระบบสมการ (3.1) อาจเขียนในรูปสมการของเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$A\mathsf{x} = \mathsf{b}$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathsf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ \text{และ} \ \mathsf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

เรียกเมทริกซ์ A ว่าเป็น*เมทริกซ์สัมประสิทธิ์* เรียก x ว่าเป็น*เวกเตอร์ตัวไม่ทราบค่า* และเรียก b ว่าเป็น*เมทริกซ์ค่าคงตัว* และสร้างเมทริกซ์ที่ประกอบด้วย A และ b ได้ดังนี้

$$[A : \mathsf{b}]$$

เรียกว่า *เมทริกซ์แต่งเติม* (augmented matrix) ของระบบสมการ $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$

ทฤษฎีบท 1 สำหรับระบบสมการที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับจำนวนสมการ ถ้าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์มีตัวผกผันแล้วระบบสมการมีผลเฉลยชุดเดียว

ตัวอย่างที่ 3 ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

ให้ $\mathsf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ เขียนระบบสมการในรูปสมการของเมทริกซ์คือ $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ มีตัวผกผันคือ $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ดังนั้นได้ผลเฉลยเป็น

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

คือ $x_1 = 1$ และ $x_2 = 2$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ (มี 1 ผลเฉลย หรือ 1 ชุด)

แม้ว่าการแก้สมการโดยใช้ตัวผกผันคูณจะดูง่าย แต่ก็ไม่นิยมใช้วิธีนี้ในการแก้สมการ ทั้งนี้ เพราะการหาตัวผกผันของเมทริกซ์ A กระทำได้ไม่ง่ายนัก และการคูณเมทริกซ์ต้องใช้แรงงานมาก นอกจากนี้ ถ้าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A เป็นเมทริกซ์ที่ไม่มีตัวผกผัน ระบบสมการอาจมีหลายผลเฉลย หรือไม่มีผลเฉลยก็ได้ ปกติแล้วจะใช้วิธีอื่นในการหาผลเฉลยของระบบสมการ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

ระบบสมการบางรูปแบบหาผลเฉลยได้ง่าย และอาจแปลงระบบสมการให้อยู่ในแบบที่หาผลเฉลยได้ง่าย โดยที่ระบบสมการใหม่นั้นสมมูลกับระบบสมการเดิม

เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป (reduced row echelon form) คือเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งอยู่ในรูปแบบดังนี้

1. สมาชิกตัวแรกของแถวที่ไม่เป็นศูนย์เท่ากับ 1 เรียกสมาชิกตัวแรกนี้ว่า *ตัวนำหนึ่ง*
2. ถ้าตัวนำหนึ่งในแถวที่ i อยู่ในสดมภ์ที่ j ตัวนำหนึ่งในแถวที่ $i+1$ จะอยู่ในสดมภ์ที่ $k > j$
3. สมาชิกแถวอื่นในสดมภ์ที่มีตัวนำหนึ่งจะเป็นศูนย์

ถ้ามีสมบัติเพียงสองข้อแรก เรียกว่า *เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว* ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว

ทฤษฎีบท 2 เมทริกซ์ใด ๆ สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูปได้ โดยการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว และเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูปเพียงแบบเดียว

ทฤษฎีบท 3 ให้ $[A : \mathbf{b}]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ และ $[R : \mathbf{c}]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ $R\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ถ้า $[A : \mathbf{b}] \sim [R : \mathbf{c}]$ แล้วระบบสมการ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ กับระบบสมการ $R\mathbf{x} = \mathbf{c}$ จะมีผลเฉลยชุดเดียวกัน

การดำเนินการหาผลเฉลย วิธีการหนึ่งในการหาผลเฉลยของระบบสมการ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ก็คือ การใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวเปลี่ยนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว หรือเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป ซึ่งเป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการที่สมมูลกัน (ทราบจากทฤษฎีบท 2 และ 3 แล้วว่าสามารถดำเนินการดังที่กล่าวมาได้และผลเฉลยก็ยังเป็นชุดเดิมแน่นอน) มีขั้นตอนดังนี้

1. จากระบบสมการ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ $[A : \mathbf{b}]$

2. ดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมจนกระทั่งได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว

3. เขียนผลเฉลยจากเมทริกซ์แต่งเติมที่ได้

ขั้นตอนวิธีดังกล่าวมีชื่อว่า *วิธีตัดออกของเกาส์* (Gaussian elimination method) แต่ถ้าในขั้นที่ 2 ได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป วิธีดังกล่าวมีชื่อเฉพาะว่า *วิธีของเกาส์และชอร์ดอง* (Gauss-Jordan method)

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้

$$2x_1 - 2x_2 = 6$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

วิธีทำ เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \vdots & 6 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

ดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกับเมทริกซ์นี้ จนกระทั่งได้เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป (เป็นวิธีของเกาส์และชอร์ดอง) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{13}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลยเป็น

$$x_1 = \frac{13}{8},\ x_2 = \frac{11}{8} \text{ และ } x_3 = \frac{1}{8}$$

อาจเขียนผลเฉลยได้ง่าย ๆ จากเมทริกซ์แบบอื่น ๆ เช่นเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน หรือเมทริกซ์ที่เมื่อทำการสลับแถว (หรือสดมภ์) แล้วจะอยู่ในรูปเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน ดังตัวอย่างเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & \vdots & -6 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & -4 \end{bmatrix}$$

เขียนผลเฉลยได้เป็น

$$
\begin{aligned}
z &= -\frac{4}{2} = -2 \\
y &= \frac{2-z}{-1} = \frac{2+2}{-1} = -4 \\
x &= \frac{-6-3y-z}{2} = \frac{-6+12+2}{2} = 4
\end{aligned}
$$

3.3 วิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณหาผลเฉลยของระบบสมการนั้นไม่จำเป็นต้องให้ได้เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูปในเมทริกซ์สุดท้าย การคำนวณหาผลเฉลยสามารถกระทำได้โดยง่ายจากเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน (ถ้าทำโดยคอมพิวเตอร์) เมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบนได้มาในระหว่างการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป ดังนั้นจึงใช้แรงงานน้อยกว่า วิธีการดังกล่าวนี้มีชื่อว่า *วิธีตัดออกของเกาส์*

วิธีการซึ่งใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวนี้อาจเรียกว่าเป็น วิธีตรง ผลเฉลยที่ได้จะเป็นผลเฉลยที่แม่นตรง (exact solution) ถ้าไม่นับความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการปัดเศษ มีวิธีการที่จะลดความคลาดเคลื่อนนี้ให้น้อยที่สุดโดยการเลือกตัวยืนในการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว ซึ่งจะกล่าวต่อไป วิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการอีกวิธีหนึ่งก็คือ การกระทำซ้ำ วิธีการอย่างหลังนี้จะได้ผลเฉลยเพียงค่าประมาณเท่านั้น

วิธีตัดออกของเกาส์ เป็นวิธีที่นิยมใช้เป็นวิธีตรง คือใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเพื่อให้กลายเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวแล้วเขียนผลเฉลย วิธีการเป็นดังนี้ สมมุติว่าระบบสมการมีจำนวนตัวแปรและจำนวนสมการเท่ากัน (คาดว่าระบบสมการจะมีผลเฉลยชุดเดียว) ให้เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการคือ

$$[A : \mathbf{b}]$$

ต่อไปใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว พยายามทำให้เมทริกซ์แต่งเติมมีลักษณะเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว (หรือเกือบเป็นขั้นบันไดแบบแถว ตัวนำไม่จำเป็นต้องเป็น 1) ในรูป $[U : \mathbf{c}]$ แล้วเขียนผลเฉลยจากระบบสมการที่มี $[U : \mathbf{c}]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติม สรุปขั้นตอนวิธีได้ ดังนี้

1. เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n
\end{bmatrix}
$$

2. ใช้วิธีการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกระทำกับเมทริกซ์แต่งเติม จนกระทั่งได้เมทริกซ์ $[A : \mathbf{b}]$ อยู่ในรูปเมทริกซ์ (เกือบ) ขั้นบันไดแบบแถว คือ

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & \vdots & c_1 \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} & \vdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} & \vdots & c_n \end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์นี้สามารถเขียนระบบสมการและหาผลเฉลยได้ง่ายโดยการแทนค่าย้อนหลัง นั่นคือเขียนกลับเป็นระบบสมการได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n &= c_1 \\ u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ u_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

จากสมการสุดท้าย หาค่า x_n ได้เป็น

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$$

และจากสมการถัดขึ้นไป หาค่า x_{n-1} โดยการแทนค่า x_n ที่ได้จากสมการสุดท้าย และกระทำดังนี้ต่อไปจะได้

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{c_n}{u_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{c_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}} \\ &\vdots \\ x_2 &= \frac{c_2 - (u_{23}x_3 + u_{24}x_4 + \cdots + u_{2n}x_n)}{u_{22}} \\ x_1 &= \frac{c_1 - (u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n)}{u_{11}} \end{aligned}$$

มีข้อแม้ว่า u_{ii} ทุกตัวต้องไม่เป็นศูนย์ เงื่อนไขเป็นดังนี้

1. ถ้า $u_{ii} \neq 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ แสดงว่าระบบสมการมีผลเฉลย 1 ชุด

2. ถ้า $u_{ij} = 0$ และ $c_i \neq 0$ สำหรับ i บางค่า และทุกค่า $j \geq i$ แสดงว่าระบบสมการไม่มีผลเฉลย

3. ถ้า $u_{ij} = 0$ และ $c_i = 0$ สำหรับ i บางค่า และทุกค่า $j \geq i$ และไม่มีดังข้อ 2 แสดงว่าระบบสมการมีผลเฉลยจำนวนไม่จำกัด

โดยวิธีการจะเริ่มจากสดมภ์แรก แล้วเลือกสมาชิกตัวที่ไม่เป็นศูนย์ในสดมภ์ (จะเป็นตัวที่ทำให้สมาชิกอื่นในสดมภ์นั้นเป็นศูนย์) แล้วสลับแถว จากนั้นดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวเพื่อให้เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว แล้วพิจารณาสดมภ์ต่อไปจนกระทั่งครบทุกสดมภ์ ยกตัวอย่างเช่น พิจารณาระบบสมการ

$$2x + 4y - z = 2$$

$$x + 7y - 2z = -1$$

$$3x - y + z = 4$$

มีสมการ 3 สมการและมีตัวแปร 3 ตัว ซึ่งคาดว่าระบบสมการนี้จะมีผลเฉลยเพียงชุดเดียว เขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้เป็น

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 2 \\ 1 & 7 & -2 & \vdots & -1 \\ 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \end{array} \right]$$

มีการเขียนชื่อแถวไว้ด้วย เพื่อความสะดวกในการอ้างถึง จุดประสงค์คือ ต้องการทำให้เมทริกซ์อยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว เนื่องจาก $a_{11} \neq 0$ สามารถใช้แถวที่หนึ่งไปทำให้สมาชิกในสดมภ์ที่หนึ่งของแถวที่สองและแถวที่สามเป็นศูนย์ กล่าวคือ ใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว ดังนี้

$$R_2 := -\frac{1}{2}R_1 + R_2 \quad \text{หรือเขียนได้เป็น} \quad a_{2j} := -\frac{a_{21}a_{1j}}{a_{11}} + a_{2j},\ j = 1, 2, 3, 4$$

$$R_3 := -\frac{3}{2}R_1 + R_3 \quad \text{หรือเขียนได้เป็น} \quad a_{3j} := -\frac{a_{31}a_{1j}}{a_{11}} + a_{3j},\ j = 1, 2, 3, 4$$

หลังจากกระทำแล้วได้เมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 5 & -1.5 & \vdots & -2 \\ 0 & -7 & 2.5 & \vdots & 1 \end{array} \right]$$

แถวที่หนึ่งจะยังคงเดิม แต่แถวที่สองและสามจะเปลี่ยนไป แถวที่หนึ่งที่เป็นแถวหลักเพื่อให้แถวอื่น ๆ เปลี่ยนไปนี้เรียกว่า *แถวยืน* (pivotal row) และสมาชิก a_{11} ซึ่งเป็นตัวทำให้สมาชิกตัวอื่นเป็นศูนย์เรียกว่า *ตัวยืน* (pivot element) ต่อไปต้องการให้สมาชิก a_{32} เป็นศูนย์ เนื่องจาก $a_{22} \neq 0$ สามารถให้ a_{22} เป็นตัวยืนเพื่อทำให้ a_{32} เป็นศูนย์ได้ กล่าวคือ ใช้การดำเนินเบื้องต้นแบบแถว ดังนี้

$$R_3 := \frac{7}{5}R_2 + R_3 \quad \text{หรือเขียนได้เป็น} \quad a_{3j} := -\frac{a_{32}a_{2j}}{a_{22}} + a_{3j},\ j = 2, 3, 4$$

หลังจากกระทำแล้วได้เมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 5 & -1.5 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0.4 & \vdots & -1.8 \end{array}\right]$$

จะเห็นได้ว่าเมทริกซ์ที่ได้เป็นเมทริกซ์เกือบเป็นขั้นบันไดแบบแถว (ทางด้านซ้ายของผลแบ่งกั้น : เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน) ซึ่ง $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, 3$ สามารถเขียนผลเฉลยโดยการแทนค่าย้อนกลับได้ผลเฉลยของระบบสมการ ดังนี้

$$z = \frac{-1.8}{0.4} = -4.5$$

$$y = \frac{-2 + 1.5z}{5} = -1.75$$

$$x = \frac{2 - 4y + z}{2} = 2.25$$

จากตัวอย่างที่แสดงข้างต้นนี้ สามารถสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์อย่างง่าย ๆ ที่เขียนโดยใช้โปรแกรมภาษา SCILAB ได้ดังนี้

```
function [x]=ProGE(A,b)
A_b=[A b];
[m,n]=size(A);
for k=1:n-1
        for i=k+1:n
                for j=k+1:n+1
                        A_b(i,j)= A_b(i,j)- A_b(k,j)* A_b(i,k)/ A_b(k,k);
                end;
                for j=1:k
                        A_b(i,j)=0;
                end;
        end;
end;
```

```
x(n)= A_b(n,n+1)/ A_b(n,n);
for i=n-1:-1:1
        sumk=0;
        for k=i+1:n
                sumk=sumk+ A_b(i,k)*x(k);
        end;
        x(i)=( A_b(i,n+1)-sumk)/ A_b(i,i);
end;
endfunction
```

ตัวอย่างการใช้งานชุดคำสั่งและผลลัพธ์ที่ได้

```
-->A=[2,4,-1;1,7,-2;3,-1,1];
-->b=[2;-1;4];
-->getf('ProGE.sci')
-->ProGE(A,b)
    ans =
       2.25
    - 1.75
    - 4.5
```

3.4 เทคนิคการเลือกตัวยืน

3.4.1 การเลือกตัวยืนบางส่วนและการปรับสเกล

ในการเลือกตัวยืนตามวิธีตัดออกของเกาส์นั้น ตามทฤษฎีแล้วการเลือกแถวใดเป็นแถวยืนไม่มีผลทำให้ผลเฉลยเปลี่ยนแปลงตราบเท่าที่ตัวยืนมีค่าไม่เป็นศูนย์ แต่ในทางปฏิบัติถ้าตัวยืนมีค่าน้อยมากจะทำให้การคำนวณในคอมพิวเตอร์เกิดความคลาดเคลื่อนมาก ซึ่งทำให้ได้ผลเฉลยที่ไม่ถูกต้อง (อำพล ธรรมเจริญ, 2553) ดังตัวอย่างที่จะแสดงให้เห็นดังนี้

พิจารณาระบบสมการ

$$-0.001x + 1.00y = 1.00$$

$$1.00x + 1.00y = 2.001$$

ระบบสมการนี้มีผลเฉลยเป็น $x = 1.00$ และ $y = 1.001$

ถ้าให้ $a_{11} = -0.001$ เป็นตัวยืน การคำนวณจะเป็นดังนี้

$$a_{21} := 1.00 - \frac{(1.00)(-0.001)}{-0.001} = 0$$

$$a_{22} := 1.00 - \frac{(1.00)(1.00)}{-0.001} = 1001$$

$$b_2 := 2.001 - \frac{(1.00)(1.00)}{-0.001} = 1002.001$$

สมมุติว่าการคำนวณกระทำในระบบจำนวนจุดลอยฐานสิบและใช้ตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง (โดยวิธีการตัด) จะได้ $a_{22} = 0.1001 \times 10^4$ และ $b_2 = 0.1002 \times 10^4$ ดังนั้นสมการใหม่จะเป็น

$$-0.001x + 1.00y = 1.00$$

$$\left(0.1001 \times 10^4\right) y = 0.1002 \times 10^4$$

คำนวณค่า y ได้

$$y = \frac{0.1002 \times 10^4}{0.1001 \times 10^4} = 0.1000 \times 10^1 = 1.00$$

แทนค่า y ในสมการแรก ได้ $x = 0$ จะเห็นว่าผลเฉลยคลาดเคลื่อนมาก

ถ้าสลับแถวเป็น

$$1.00x + 1.00y = 2.001$$

$$-0.001x + 1.00y = 1.00$$

ให้ a_{11} เป็นตัวยืน เมื่อคำนวณโดยใช้จำนวนจุดลอยฐานสิบและใช้แมนทิสซา 4 ตำแหน่งเหมือนเดิม จะได้

$$1.00x + 1.00y = 2.001$$

$$1.001y = 1.002$$

ได้ค่า $y = 1.00$ เมื่อนำไปแทนค่าในสมการแรก จะได้ $x = 1.001$ จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้คลาดเคลื่อนไปเพียงเล็กน้อย

จากตัวอย่างจะเห็นว่าการที่ตัวยืนมีค่าน้อยอาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนมากการแก้ไขอาจทำได้โดยการเลือกตัวยืนเป็นตัวที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในสดมภ์ เรียกวิธีนี้ว่า *การเลือกตัวยืนบางส่วน* (partial pivoting) แต่การเลือกตัวยืนที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในสดมภ์เป็นตัวยืนนั้นยังมีข้อบกพร่อง สมมุติว่าถ้าคูณสมการแรกด้วย -2000 ระบบสมการจะเป็น

$$2.00x - 2000y = -2000$$

$$1.00x + 1.00y = 2.001$$

ถ้าเลือกตัวยืนตามวิธีดังกล่าวจะได้ $a_{11} = 2.00$ เป็นตัวยืน หากคำนวณโดยระบบจำนวนจุดลอยฐานสิบ โดยใช้ตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่งอย่างเดิม ผลที่ได้ก็จะเหมือนครั้งแรก คือได้ผลเฉลยเป็น $x = 0$ และ $y = 1.00$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

การแก้ไขที่ทำได้ก็คือ ก่อนที่จะเลือกตัวยืนต้องทำการ *ปรับสเกล* (scaling) ก่อน โดยการหารแต่ละแถวด้วยจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในแถวนั้น (ตัวหารต้องไม่อยู่ในสดมภ์ **b**) แล้วจึงดำเนินการเลือกตัวที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในสดมภ์เป็นตัวยืน วิธีการนี้เรียกว่า *วิธีปรับสเกลและเลือกตัวยืนบางส่วน* (scaled partial pivoting) ในการปรับสเกลจะหาจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในแต่ละแถวก่อนคือให้

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

โดยที่ $d_i = \max\{|a_{i1}|, |a_{i2}|, \ldots, |a_{in}|\},\ i = 1, 2, \ldots, n$ เรียก d ว่า *เวกเตอร์สเกล* (scale vector) การหารแต่ละแถวด้วย d_i จะหารเฉพาะตัวที่อยู่ในสดมภ์ที่จะเลือกตัวยืน การหาเวกเตอร์สเกลนี้ให้กระทำครั้งแรกครั้งเดียว ไม่ต้องหาใหม่อีกแม้ว่าหลังจากดำเนินการตามแถวแล้วจำนวนในแถวจะมีค่าเปลี่ยนไป การหาเวกเตอร์สเกลใหม่ไม่ได้ช่วยให้ความคลาดเคลื่อนลดน้อยลงเท่าไรนักและไม่คุ้มกับแรงงานที่เพิ่มขึ้น จะยกตัวอย่างเพื่อแสดงการปรับสเกล ดังนี้ เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการคือ

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & -2 & \vdots & -1 \\ 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \quad \text{จะได้} \quad \begin{matrix} d_1 = 4 \\ d_2 = 2 \\ d_3 = 3 \end{matrix}$$

เวกเตอร์สเกลคือ $d = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ในสดมภ์แรก หารด้วยจำนวนในเวกเตอร์สเกล ได้ $\frac{2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}$ ซึ่งพบว่าอัตราส่วนในแถวที่สามมีค่ามากที่สุด จึงเลือกแถวที่ 3 เป็นแถวยืน และสลับแถว (กับแถวที่ 1) แล้วดำเนินการต่อไปได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & -2 & \vdots & -1 \\ 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \overset{R_3 \leftrightarrow R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & 2 & -2 & \vdots & -1 \\ 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-\frac{2}{3}R_1+R_3}{\overset{-\frac{1}{3}R_1+R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 2.3333333 & -2.3333333 & \vdots & -2.3333333 \\ 0 & 4.6666667 & -1.6666667 & \vdots & 4.3333333 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก ค่าสัมบูรณ์ของแถวที่ 3 มากกว่าค่าสัมบูรณ์ในแถวที่ 2 (ในสดมภ์ที่ 2) ดังนั้นจึงต้องสลับแถวที่ 2 และแถวที่ 3 แล้วดำเนินการต่อไปได้ ดังนี้

$$\underset{\sim}{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 4.6666667 & -1.6666667 & \vdots & 4.3333333 \\ 0 & 2.3333333 & -2.3333333 & \vdots & -2.3333333 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-\frac{2.3333333}{4.6666667}R_2+R_3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 4.6666667 & -1.6666667 & \vdots & 4.3333333 \\ 0 & 0 & -1.5 & \vdots & -4.4999999 \end{bmatrix}$$

เขียนผลเฉลยได้ ดังนี้

$$z = \frac{-4.4999999}{-1.5} = 2.9999999$$

$$y = \frac{4.3333333 + 1.6666667(2.9999999)}{4.6666667} = 2$$

$$x = \frac{4 + 2 - 2.9999999}{3} = 1$$

วิธีปรับสเกลและเลือกตัวยืนบางส่วนนี้นับว่าเป็นวิธีที่ดี สามารถใช้ได้ดีกับระบบสมการทั่วไปที่มีขนาดไม่ใหญ่เกินไป อาจเลือกตัวยืนโดยเลือกจากสมาชิกของเมทริกซ์ที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดเรียกว่า *การเลือกตัวยืนรวม* (total pivoting) วิธีนี้ต้องใช้แรงงานมากและไม่ได้ทำให้ผลเฉลยดีกว่าการเลือกตัวยืนบางส่วนมากนัก จึงไม่ค่อยเป็นที่นิยมใช้ (อำพล ธรรมเจริญ, 2553)

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$2x - y + 6z = 1.2$$

$$-6x + 2y - 7z = 4.2$$

$$3x + y + 3z = 3.2$$

โดยวิธีการเลือกตัวยืนบางส่วน

วิธีทำ เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & \vdots & 1.2 \\ -6 & 2 & -7 & \vdots & 4.2 \\ 3 & 1 & 3 & \vdots & 3.2 \end{bmatrix}$$

ในสดมภ์ที่ 1 พิจารณาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนในแต่ละแถว พบว่า -6 มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุด ซึ่งอยู่ใน

แถวที่ 2 ดังนั้นจึงเลือกแถวที่ 2 เป็นแถวยืน สลับแถว (กับแถวที่ 1) แล้วดำเนินการต่อไปได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & \vdots & 1.2 \\ -6 & 2 & -7 & \vdots & 4.2 \\ 3 & 1 & 3 & \vdots & 3.2 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_1}{\sim} \begin{bmatrix} -6 & 2 & -7 & \vdots & 4.2 \\ 2 & -1 & 6 & \vdots & 1.2 \\ 3 & 1 & 3 & \vdots & 3.2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{2}R_1+R_3}{\overset{\frac{1}{3}R_1+R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} -6 & 2 & -7 & \vdots & 4.2 \\ 0 & -0.3333333 & 3.6666667 & \vdots & 2.6 \\ 0 & 2 & -0.5 & \vdots & 5.3 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก ค่าสัมบูรณ์ของแถวที่ 3 มากกว่าค่าสัมบูรณ์ในแถวที่ 2 (ในสดมภ์ที่ 2) ดังนั้นจึงต้องสลับแถวที่ 2 และแถวที่ 3 แล้วดำเนินการต่อไปได้ ดังนี้

$$\overset{R_3 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} -6 & 2 & -7 & \vdots & 4.2 \\ 0 & 2 & -0.5 & \vdots & 5.3 \\ 0 & -0.3333333 & 3.6666667 & \vdots & 2.6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{0.3333333}{2}R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} -6 & 2 & -7 & \vdots & 4.2 \\ 0 & 2 & -0.5 & \vdots & 5.3 \\ 0 & 0 & 3.5833334 & \vdots & 3.4833332 \end{bmatrix}$$

เขียนผลเฉลยได้ ดังนี้

$$z = \frac{3.4833332}{3.5833334} = 0.9720930$$

$$y = \frac{5.3 + 0.5(0.9720930)}{2} = 2.8930232$$

$$x = \frac{4.2 - 2(2.8930232) + 7(0.9720930)}{-6} = -0.8697674$$

ตัวอย่างที่ 6 จากระบบสมการเชิงเส้นในตัวอย่างที่ 5 จงหาผลเฉลยโดยวิธีปรับสเกลและเลือกตัวยืนบางส่วน

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 5 เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการคือ

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & \vdots & 1.2 \\ -6 & 2 & -7 & \vdots & 4.2 \\ 3 & 1 & 3 & \vdots & 3.2 \end{bmatrix}$$

ในขั้นแรกจะต้องทำการปรับสเกลก่อน พิจารณาหาค่าสัมบูรณ์ที่มากที่สุดในแต่ละแถว ได้ค่า d_1, d_2, d_3 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & \vdots & 1.2 \\ -6 & 2 & -7 & \vdots & 4.2 \\ 3 & 1 & 3 & \vdots & 3.2 \end{bmatrix} \quad \text{จะได้} \quad \begin{array}{l} d_1 = 6 \\ d_2 = 7 \\ d_3 = 3 \end{array}$$

ในสดมภ์ที่ 1 พิจารณาอัตราส่วนดังนี้ $\frac{2}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{3}$ พบว่าอัตราส่วนในแถวที่ 3 มีค่ามากที่สุด เลือกแถวที่ 3 เป็นแถวยืน สลับแถว (กับแถวที่ 1) แล้วดำเนินการต่อไปได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & \vdots & 1.2 \\ -6 & 2 & -7 & \vdots & 4.2 \\ 3 & 1 & 3 & \vdots & 3.2 \end{bmatrix} \overset{R_3 \leftrightarrow R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & \vdots & 3.2 \\ -6 & 2 & -7 & \vdots & 4.2 \\ 2 & -1 & 6 & \vdots & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-\frac{2}{3}R_1+R_3}{\overset{2R_1+R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & \vdots & 3.2 \\ 0 & 4 & -1 & \vdots & 10.6 \\ 0 & -1.6666667 & 4 & \vdots & -0.9333333 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก ค่าสัมบูรณ์ของแถวที่ 2 มากกว่าค่าสัมบูรณ์ในแถวที่ 3 (ในสดมภ์ที่ 2) ดังนั้นจึงดำเนินการต่อได้ ดังนี้

$$\overset{\frac{1.6666667}{4}R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & \vdots & 3.2 \\ 0 & 4 & -1 & \vdots & 10.6 \\ 0 & 0 & 3.5833333 & \vdots & 3.4833335 \end{bmatrix}$$

เขียนผลเฉลยได้ ดังนี้

$$z = \frac{3.4833335}{3.5833333} = 0.9720931$$

$$y = \frac{10.6 + 1(0.9720931)}{4} = 2.8930233$$

$$x = \frac{3.2 - 1(2.8930233) - 3(0.9720931)}{3} = -0.8697675$$

3.4.2 วิธีตัดออกโดยเลือกตัวยืนที่มีค่ามากที่สุดในแถว

วิธีนี้จะเลือกตัวสัมประสิทธิ์ที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในแถวเป็นตัวยืน กล่าวคือเริ่มต้นจากแถวแรกให้เป็นแถวยืน เลือกตัวที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในแถวให้เป็นตัวยืน ต่อไปดำเนินการตาม

แถวกับแถวถัดไปเพื่อทำให้สมาชิกในสดมภ์ใต้ตัวยืนเป็นศูนย์ การเลือกตัวยืนในแถวถัดไปก็กระทำเช่นเดียวกัน เมื่อกระทำครบทุกแถวแล้วก็จะเขียนผลเฉลยได้ ตัวอย่างเช่น พิจารณาระบบสมการที่มีเมทริกซ์แต่งเติมเป็น

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & -2 & \vdots & -1 \\ 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \end{array}\right]$$

ในแถวที่หนึ่งมี $a_{12} = 4$ เป็นสมาชิกที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุด จึงเลือก $a_{12} = 4$ เป็นตัวยืน ต่อไปใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวเพื่อทำให้สมาชิกใต้ตัวยืนเป็นศูนย์ ได้เมทริกซ์ใหม่เป็น

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & -1.5 & \vdots & -4.5 \\ 3.5 & 0 & 0.75 & \vdots & 5.75 \end{array}\right]$$

ต่อไปในแถวที่สอง เลือกสมาชิกที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดคือ $a_{23} = -1.5$ เป็นตัวยืน ดำเนินการทำให้สมาชิกอื่นใต้ตัวยืนเป็นศูนย์ ได้เมทริกซ์ใหม่เป็น

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & -1.5 & \vdots & -4.5 \\ 3.5 & 0 & 0 & \vdots & 3.5 \end{array}\right]$$

สำหรับแถวที่สามเป็นแถวสุดท้าย จึงสามารถเขียนผลเฉลยได้เลย ดังนี้

$$x = \frac{3.5}{3.5} = 1$$

$$z = \frac{-4.5}{-1.5} = 3$$

$$y = \frac{7 - (2)(1) + (1)(3)}{4} = 2$$

พบว่า ถ้าสลับสดมภ์ที่หนึ่งกับสดมภ์ที่สอง และสลับสดมภ์ที่สองกับสดมภ์ที่สาม จะได้เมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน ผลเฉลยที่เขียนจากเมทริกซ์ที่สลับสดมภ์แล้วนี้จะสลับตัวไม่ทราบค่า ผลเฉลยที่ถูกต้องก็ต้องสลับตัวไม่ทราบค่าย้อนกลับกับการสลับสดมภ์

หากพิจารณาวิธีปรับสเกลและเลือกตัวยืนบางส่วนเปรียบเทียบกับวิธีเลือกตัวยืนที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในแถว วิธีแบบหลังจะมีข้อดีคือ ใช้แรงงานน้อยกว่าเพราะว่าไม่ต้องคำนวณการปรับสเกล และไม่ต้องหาจำนวนมากที่สุดในสดมภ์ ส่วนการกระทำอย่างอื่น ๆ มีจำนวนการกระทำพอ ๆ กัน (อำพล ธรรมเจริญ, 2553)

3.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel Iterative Method)

ได้เคยกล่าวถึงการกระทำซ้ำในการหาผลเฉลยของสมการที่มีตัวแปรเดียวมาแล้วในบทที่ 2 วิธีการดังกล่าวใช้ได้กับระบบสมการเชิงเส้นที่มีหลายตัวแปรด้วย วิธีการจะเป็นแบบเดียวกัน ดังนี้

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการและมี n ตัวแปร ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

ถ้า $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ จัดสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\
x_2 &= \frac{b_2 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{b_n - a_{11}x_1 - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}}{a_{nn}}
\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ แทนค่าทางขวามือจะได้ค่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ทางซ้ายมือเป็นค่าใหม่ นำค่าที่ได้นี้ไปแทนทางขวามือต่อไปอีกจะได้ค่าใหม่ ทำซ้ำดังนี้เรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ว่าค่าใหม่ใกล้เคียงกับค่าเดิม ซึ่งแสดงว่าค่าที่ได้จะลู่เข้าสู่ผลเฉลย หรืออาจเป็นไปได้ว่าจะไม่ลู่เข้าสู่ค่าใดเลย

วิธีการดังที่กล่าวมาเรียกว่า *ระเบียบวิธีทำซ้ำของจาโคบี* (Jacobi iteration method) ในการแทนค่าวิธีนี้จะใช้ค่าเดิมของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ แทนในทุกสมการ เมื่อครบแล้วจึงใช้ค่าชุดใหม่แทน แต่อาจแทนค่าได้อีกวิธีหนึ่ง เรียกว่า *ระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล* (Gauss-Seidel iterative method) กล่าวคือ สามารถแทนค่าทีละสมการ กำหนดค่าเริ่มต้น $x_2, \ldots, x_n$ แทนค่าทางขวามือของสมการแรกจะได้ค่า x_1 ใช้ค่า x_1 ที่ได้ใหม่นี้กับค่า $x_3, \ldots, x_n$ ของเดิมแทนในสมการที่สอง ได้ค่า x_2 ต่อไปใช้ค่า x_1, x_2 ที่ได้ใหม่กับ $x_4, \ldots, x_n$ ของเดิมแทนในสมการที่สาม จะได้ค่า x_3 กระทำดังนี้เรื่อย ๆ ไป

การเขียนระบบสมการ (3.5.1) ทำได้หลายแบบ อาจสลับสมการก่อนที่จะเขียนระบบสมการ (3.5.1) หรืออาจสลับลำดับของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ก็ได้ เช่นอาจหาค่า x_2 จากสมการแรก แล้วหา x_5 จากสมการที่สอง การเขียนระบบสมการ (3.5.1) ต่างกันมีผลในแง่ที่ว่าทำให้วิธีการได้ค่าที่ลู่เข้าหาผลเฉลยหรือไม่ ถ้าระบบสมการมีผลเฉลยจะมีแบบใดแบบหนึ่งของระบบสมการ (3.5.1) ที่จะได้ค่าลู่เข้าหา

ผลเฉลย ดังนั้นถ้าหากวิธีการไม่ได้ผลเฉลยก็อาจสลับแถวแล้วเขียนระบบสมการ (3.5.1) ใหม่อาจทำให้ได้ค่าที่ลู่เข้าหาผลเฉลยได้ มีข้อแนะนำในการจัดลำดับแถวของระบบสมการ คือพยายามจัดให้สมาชิกบนแนวทแยงหลักมีค่ามากที่สุด เชื่อกันว่าการจัดรูปแบบนี้จะทำให้การลู่เข้าดีขึ้น (อำพล ธรรมเจริญ, 2553)

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้

$$3x - y + z = 4$$

$$x - 2y = -3$$

$$x + y - 2z = -3$$

โดยระเบียบวิธีทำซ้ำของจาโคบีและระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล

วิธีทำ เขียนระบบสมการใหม่ได้ ดังนี้

$$x = \frac{4 + y - z}{3}$$
$$y = \frac{3 + x}{2}$$
$$z = \frac{3 + x + y}{2}$$

ให้จุดเริ่มต้นคือ $(0, 0, 0)$

ระเบียบวิธีทำซ้ำของจาโคบี

<u>รอบที่ 1</u>

$$x = \frac{4 + y - z}{3} = \frac{4 + 0 - 0}{3} = 1.3333333$$

$$y = \frac{3 + x}{2} = \frac{3 + 0}{2} = 1.5$$

$$z = \frac{3 + x + y}{2} = \frac{3 + 0 + 0}{2} = 1.5$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.33333, 1.5, 1.5)$

<u>รอบที่ 2</u>

$$x = \frac{4 + y - z}{3} = \frac{4 + 1.5 - 1.5}{3} = 1.3333333$$

$$y = \frac{3 + x}{2} = \frac{3 + 1.3333333}{2} = 2.1666666$$

$$z = \frac{3 + x + y}{2} = \frac{3 + 1.3333333 + 1.5}{2} = 2.9166666$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.3333333, 2.1666666, 2.9166666)$

รอบที่ 3

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+2.1666666-2.9166666}{3} = 1.0833333$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.3333333}{2} = 2.1666666$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.3333333+2.1666666}{2} = 3.25$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.0833333, 2.1666666, 3.25)$

รอบที่ 4

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+2.1666666-3.25}{3} = 0.9722222$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.0833333}{2} = 2.0416666$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.0833333+2.1666666}{2} = 3.125$$

ได้จุดใหม่เป็น $(0.9722222, 2.0416666, 3.125)$

รอบที่ 5

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+2.0416666-3.125}{3} = 0.9722222$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+0.9722222}{2} = 1.9861111$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+0.9722222+2.0416666}{2} = 3.0069444$$

ได้จุดใหม่เป็น $(0.9722222, 1.9861111, 3.0069444)$

รอบที่ 6

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+1.9861111-3.0069444}{3} = 0.9930556$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+0.9722222}{2} = 1.9861111$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+0.9722222+1.9861111}{2} = 2.9791666$$

ได้จุดใหม่เป็น $(0.9930556, 1.9861111, 2.9791666)$

รอบที่ 7

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+1.9861111-2.9791666}{3} = 1.0023148$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+0.9930556}{2} = 1.9965278$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+0.9930556+1.9861111}{2} = 2.9895834$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.0023148, 1.9965278, 2.9895834)$

รอบที่ 8

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+1.9965278-2.9895834}{3} = 1.0023148$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.0023148}{2} = 2.0011574$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.0023148+1.9965278}{2} = 2.9994213$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.0023148, 2.0011574, 2.9994213)$

รอบที่ 9

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+2.0011574-2.9994213}{3} = 1.0005787$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.0023148}{2} = 2.0011574$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.0023148+2.0011574}{2} = 3.0017361$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.0005787, 2.0011574, 3.0017361)$

ซึ่งพบว่าลู่เข้าสู่ผลเฉลย $(1, 2, 3)$

ระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล

รอบที่ 1

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+0-0}{3} = 1.3333333$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.3333333}{2} = 2.1666666$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.3333333+2.1666666}{2} = 3.25$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.3333333, 2.1666666, 3.25)$

รอบที่ 2

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+2.1666666-3.25}{3} = 0.9722222$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+0.9722222}{2} = 1.9861111$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+0.9722222+1.9861111}{2} = 2.9791666$$

ได้จุดใหม่เป็น $(0.9722222, 1.9861111, 2.9791666)$

รอบที่ 3

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+1.9861111-2.9791666}{3} = 1.0023148$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.0023148}{2} = 2.0011574$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.0023148+2.0011574}{2} = 3.0017361$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.0023148, 2.0011574, 3.0017361)$

รอบที่ 4

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+2.0011574-3.0017361}{3} = 0.9998071$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+0.9998071}{2} = 1.9999036$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+0.9998071+1.9999036}{2} = 2.9998554$$

ได้จุดใหม่เป็น $(0.9998071, 1.9999036, 2.9998554)$

รอบที่ 5

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+1.9999036-2.9998554}{3} = 1.0000161$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.0000161}{2} = 2.0000080$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.0000161+2.0000080}{2} = 3.0000120$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.0000161, 2.0000080, 3.0000120)$
จะพบว่าลู่เข้าสู่ผลเฉลย $(1, 2, 3)$ ซึ่งลู่เข้าเร็วกว่าระเบียบวิธีทำซ้ำของจาโคบี

จากตัวอย่างที่ 7 สามารถสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับระเบียบวิธีทำซ้ำของจาโคบีและระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล ได้ดังนี้

```
function []=ProJG(x0,y0,z0,N)
x=x0;y=y0;z=z0;
printf(' i                Jacobi                  Gauss-Seidel\n");
printf(' %d    %3.7f    %3.7f    %3.7f     %3.7f    %3.7f    %3.7f\n",
        0,x0,y0,z0,x0,y0,z0);
for i=1:N
        a=(4+y-z)/3;
        b=(3+x)/2;
        c=(3+x+y)/2;
        x=a;y=b;z=c;
        x0=(4+y0-z0)/3;
        y0=(3+x0)/2;
        z0=(3+x0+y0)/2;
printf(' %d    %3.7f    %3.7f    %3.7f     %3.7f    %3.7f    %3.7f\n",
        i,x,y,z,x0,y0,z0);
end
endfunction
```

ตัวอย่างการใช้งานชุดคำสั่งและผลลัพธ์ที่ได้

-->getf('ProJG.sci')

-->ProJG(0,0,0,6) //หมายถึง จุดเริ่มต้น $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ และ $z_0 = 0$ กระทำซ้ำ 6 รอบ

i	Jacobi			Gauss-Seidel		
0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1	1.3333333	1.5000000	1.5000000	1.3333333	2.1666667	3.2500000
2	1.3333333	2.1666667	2.9166667	0.9722222	1.9861111	2.9791667
3	1.0833333	2.1666667	3.2500000	1.0023148	2.0011574	3.0017361
4	0.9722222	2.0416667	3.1250000	0.9998071	1.9999035	2.9998553
5	0.9722222	1.9861111	3.0069444	1.0000161	2.0000080	3.0000121
6	0.9930556	1.9861111	2.9791667	0.9999987	1.9999993	2.9999990

3.6 บทสรุป

ในบทนี้ ได้ศึกษาระเบียบวิธีในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยแบ่งออกได้เป็น 2 แบบคือ แบบแรกเป็นระเบียบวิธีในการแก้ระบบสมการโดยทางตรง ประกอบด้วย วิธีตัดออกของเกาส์ วิธีของเกาส์และชอร์ดอง และแบบที่สองเป็นระเบียบวิธีในการแก้ระบบสมการโดยใช้การกระทำซ้ำ ประกอบด้วย ระเบียบวิธีทำซ้ำของจาโคบี และระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล ซึ่งระเบียบวิธีที่ได้นำเสนอในบทนี้ได้แสดงให้เห็นขั้นตอนและตัวอย่างเพื่อให้เกิดความเข้าใจพื้นฐานเป็นสำคัญ รวมทั้งเพื่อให้เรียนรู้วิธีแก้ไขหากเกิดความผิดพลาดระหว่างการคำนวณด้วย

3.7 คำถามทบทวน

1. จงเขียนผลเฉลย (ถ้ามี) จากเมทริกซ์แต่งเติม $[A : \mathbf{b}]$ ขั้นสุดท้ายต่อไปนี้

1.1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$ 1.2 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

1.3 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$ 1.4 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

2. จงเขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการต่อไปนี้และจงดำเนินการหาผลเฉลยโดยวิธีของเกาส์และชอร์ดอง

2.1 $\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ 2x - 2y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$ 2.2 $\begin{aligned} x + 2y + 2z &= -3 \\ 2x + y - z &= 2 \\ -x + y + z &= 2 \end{aligned}$

3. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้วิธีการเลือกตัวยืนบางส่วน และวิธีปรับสเกลและเลือกตัวยืนบางส่วน

3.1 $\begin{aligned} 2x - 3y - z &= -2 \\ 2x + y - 2z &= 6 \\ x + y - 5z &= 4 \end{aligned}$ 3.2 $\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ x - 2y + 2z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$

3.3 $\begin{aligned} 3x - y - z &= 3 \\ x + 2y + z &= 1 \\ 2x - 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$ 3.4 $\begin{aligned} x + 2y + 2z &= -3 \\ 2x + y - z &= 2 \\ -x + y + z &= 2 \end{aligned}$

3.5
$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ 2x - 2y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

4. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้วิธีตัดออกโดยเลือกตัวยืนที่มีค่ามากที่สุดในแถว

4.1
$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 5 \\ x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

4.2
$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 5 \\ x - 2y + 3z &= -1 \\ 3x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

5. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำของจาโคบีและระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล

5.1
$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 0 \\ 3y + 2z &= 1 \\ 3x + y - 2z &= 6 \end{aligned}$$

5.2
$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 5 \\ x - 2y + 3z &= -1 \\ 3x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

5.3
$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 3 \\ x + y + z &= 4 \\ x - 2y - z &= -2 \end{aligned}$$

แผนการบริหารการสอนประจำบทที่ 4

หัวข้อเนื้อหา

1. ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว
2. ระเบียบวิธีของนิวตัน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายเหตุผล และความจำเป็นที่ต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น
2. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว และระเบียบวิธีของนิวตัน ในการหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเลือกใช้ระเบียบวิธีที่เหมาะสมกับลักษณะปัญหาในแบบต่าง ๆ ได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ผู้สอนบรรยายเนื้อหาที่เกี่ยวกับระบบสมการไม่เชิงเส้น และประเด็นปัญหาในการหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น รวมทั้งวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในแบบต่าง ๆ พร้อมทั้งยกตัวอย่างให้เห็นเป็นลำดับขั้นตอนในแต่ละระเบียบวิธี
2. ผู้สอนมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดวิเคราะห์ในปัญหาต่าง ๆ
3. ผู้สอนให้ทำแบบทดสอบย่อยในช่วงท้ายชั่วโมง เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำโจทย์ปัญหาในเรื่องที่ได้เรียนรู้มา อีกทั้งยังเป็นการให้ผู้เรียนได้มีโอกาสซักถามหากมีประเด็นข้อสงสัยเพิ่มเติม
4. มีการมอบหมายแบบฝึกหัดให้ผู้เรียนได้ทำเป็นการบ้าน
5. มีการมอบหมายหัวข้อให้ผู้เรียนได้ไปอ่านล่วงหน้า

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคิดเลข
3. แบบทดสอบย่อย
4. แบบฝึกหัด

การวัดผลและการประเมินผล

1. ความตรงต่อเวลา และความตั้งใจในระหว่างเรียน
2. ให้ทำแบบทดสอบย่อยท้ายชั่วโมง
3. ให้แบบฝึกหัดไปทำเป็นการบ้าน

บทที่ 4
ระบบสมการไม่เชิงเส้น

ระบบสมการที่ไม่เป็นแบบเชิงเส้น (system of non-linear equations) เรียกสั้น ๆ ว่า *ระบบสมการไม่เชิงเส้น* ซึ่งมีหลายแบบ การวิเคราะห์เพื่อดูว่ามีผลเฉลย (คำตอบ) หรือไม่นั้น ไม่อาจกระทำได้ในกรณีทั่วไป และแม้แต่เป็นระบบสมการเฉพาะแบบ บางทีการวิเคราะห์ก็กระทำได้ยาก ในบทนี้จะเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาผลเฉลย (ถ้ามี) วิธีการจะคล้ายกับระเบียบวิธีในบทที่ 2 เพียงแต่ขยายขึ้นเป็นหลายสมการและมีตัวแปรหลายตัว

ระบบสมการไม่เชิงเส้นที่จะหาผลเฉลยมีแบบทั่วไปดังนี้

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

มีสมการ n สมการและมีตัวแปร n ตัว กำหนดให้

$$
\mathsf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \ \mathsf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \text{และ } \mathsf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

ดังนั้นระบบสมการ (4.1) เขียนในรูปสมการของฟังก์ชันเวกเตอร์ได้เป็น

$$
\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{0}
$$

ตัวอย่างเช่น ระบบสมการ $x^2 + y^2 = 2,\ y = x^2$ เขียนในแบบ $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{0}$ ได้โดยที่

$$
\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

และ

$$
f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2, \qquad f_2(x, y) = x^2 - y
$$

ผลเฉลยของระบบสมการ คือเวกเตอร์ z ที่แทนในระบบสมการแล้วได้ว่าสมการเป็นจริงทั้งสองสมการ เช่น ผลเฉลยของระบบสมการที่กล่าวมาข้างต้นคือ $(1,1)$ และ $(-1,1)$ คือเมื่อแทนค่าในสมการ จะได้

$$f_1(1,1) = 1^2 + 1^2 - 2 = 0 \quad \text{เป็นจริง}$$
$$f_2(1,1) = 1^2 - 1 = 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

นั่นคือเป็นจริงทั้งสองสมการ แสดงว่า $(1,1)$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ สำหรับจุด $(-1,1)$ แสดงได้ทำนองเดียวกัน

หมายเหตุ ในกรณีทั่วไปถ้าระบบสมการไม่เชิงเส้นมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปรแล้วคาดว่าจะมีผลเฉลย

4.1 ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว

ได้เคยใช้ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียวมาแล้วในบทที่ 2 สำหรับหาผลเฉลยของสมการที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว และใช้การกระทำซ้ำในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (ระเบียบวิธีทำซ้ำของจาโคบี และระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล) ในที่นี้จะใช้ระเบียบวิธีดังกล่าวในการหาผลเฉลยของระบบสมการที่ไม่เป็นแบบเชิงเส้นด้วย วิธีการเป็นดังนี้

จากระบบสมการไม่เชิงเส้น $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{0}$ เขียนระบบสมการใหม่ให้อยู่ในรูป

$$\mathsf{x} = \mathsf{g}(\mathsf{x})$$

โดยมีสมบัติว่า ผลเฉลยของระบบสมการนี้จะเป็นผลเฉลยของระบบสมการ $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{0}$

จุด z ซึ่งเป็นผลเฉลยของระบบสมการ คือ $\mathsf{z} = \mathsf{g}(\mathsf{z})$ เรียกว่า *จุดตรึง* ของฟังก์ชัน g จุดนี้จะเป็นผลเฉลยของสมการ $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{0}$ ด้วย

ในการหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว สูตรสำหรับการกระทำซ้ำจะเป็น

$$\mathsf{x}_{i+1} = \mathsf{g}(\mathsf{x}_i); \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

เริ่มต้นที่จุด x_0 และหา $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3, \ldots$ และคาดหวังว่าลำดับ $\{\mathsf{x}_i\}$ จะลู่เข้าหาจุดใดจุดหนึ่งซึ่งเป็นผลเฉลยของระบบสมการ $\mathsf{x} = \mathsf{g}(\mathsf{x})$ (เป็นจุดตรึง) ซึ่งเป็นผลเฉลยของระบบสมการ $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{0}$ ตามต้องการ เพื่อให้เห็นชัดเจนถึงวิธีการดังกล่าว จะแสดงตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาระบบสมการไม่เชิงเส้น

$$x^2 + y^2 - 2 = 0$$
$$x^2 - y = 0$$

กำหนดให้

$$\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+y^2-2 \\ x^2-y \end{bmatrix}$$

ซึ่งอาจเขียนสมการในรูป $\mathsf{x} = \mathsf{g}(\mathsf{x})$ ได้แบบหนึ่งคือ

$$\mathsf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2-y^2} \\ x^2 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\mathsf{g}(\mathsf{x}) = \begin{bmatrix} \sqrt{2-y^2} \\ x^2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสูตรสำหรับการกระทำซ้ำคือ

$$\mathsf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2-y_i^2} \\ x_i^2 \end{bmatrix}, \;\; i = 0,1,2,\ldots$$

ให้ $\mathsf{x}_0 = (0,0)$ เป็นจุดเริ่มต้น จะได้

$$\mathsf{x}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2-0^2} \\ 0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{x}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2-0^2} \\ \left(\sqrt{2}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{x}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2-2^2} \\ \left(\sqrt{2}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{-2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าในรอบนี้ค่าของ $x_3 = \sqrt{-2}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้ แสดงว่าฟังก์ชัน g ดังกล่าวใช้ในการหาผลเฉลยไม่ได้ ดังนั้นอาจต้องเปลี่ยนฟังก์ชัน g ใหม่ โดยจะทำการสลับสมการเพื่อหาค่า x และ y กล่าวคือ ให้ $x = \sqrt{y}$ (จากสมการที่สอง) และ $y = \sqrt{2-x^2}$ (จากสมการแรก) ได้เป็น

$$\mathsf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{y} \\ \sqrt{2-x^2} \end{bmatrix}$$

นั่นคือ จะได้สูตรสำหรับการกระทำซ้ำใหม่เป็น

$$\mathsf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} \sqrt{y}_i \\ \sqrt{2-x_i^2} \end{bmatrix}, \;\; i = 0,1,2,\ldots$$

ให้ $\mathsf{x}_0 = (0.01, 0)$ เป็นจุดเริ่มต้น คำนวณค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$\mathsf{x}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{0} \\ \sqrt{2 - 0.01^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.414178 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{x}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{1.414178} \\ \sqrt{2 - 0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.189192 \\ 1.414214 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{x}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{1.414214} \\ \sqrt{2 - 1.189192^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.189207 \\ 0.765389 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{x}_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.765389} \\ \sqrt{2 - 1.189207^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.874866 \\ 0.765367 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{x}_5 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.765367} \\ \sqrt{2 - 0.874866^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.874852 \\ 1.111130 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{x}_6 = \begin{bmatrix} \sqrt{1.111130} \\ \sqrt{2 - 0.874852^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.054102 \\ 1.111141 \end{bmatrix}$$

กระทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จะพบว่าลำดับ $\{\mathsf{x}_i\}$ ลู่เข้าหาผลเฉลย $(1, 1)$

จากตัวอย่างที่ 1 วิธีการดังกล่าวเป็นการแทนค่าทีละทุกส่วนประกอบของ x เป็นวิธีเดียวกับระเบียบวิธีทำซ้ำของจาโคบีในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งอาจจะใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดลก็ได้ กล่าวคือ ในการแทนค่าจะหาค่าของส่วนประกอบทีละส่วน แล้วใช้ค่าใหม่แทนในการหาค่าของส่วนประกอบต่อไป ซึ่งจะดีกว่าวิธีแทนค่าทีละทุกส่วนประกอบของ x

4.2 ระเบียบวิธีของนิวตัน

ในบทนี้ จะใช้ระเบียบวิธีของนิวตันเช่นเดียวกับการแก้สมการตัวแปรเดียว ในการหาผลเฉลยของระบบสมการ $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{0}$ ที่มี n สมการและมี n ตัวแปร และเมื่อฟังก์ชัน f ไม่เป็นแบบเชิงเส้น สูตรสำหรับการกระทำซ้ำหาได้ดังนี้ เริ่มต้นที่จุด x_0 และจะหาจุด x_1 โดยที่

$$\mathsf{x}_1 = \mathsf{x}_0 + \mathsf{h}$$

โดยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ จะได้

$$\mathsf{f}(\mathsf{x}_1) = \mathsf{f}(\mathsf{x}_0 + \mathsf{h}) = \mathsf{f}(\mathsf{x}_0) + \mathsf{f}'(\mathsf{x}_0)\mathsf{h} + O\left(\|\mathsf{h}\|^2\right)$$

ตัดพจน์กำลังสองออกและให้ $\mathsf{f}(\mathsf{x}_1) = 0$ ดังนั้น

$$0 = \mathsf{f}(\mathsf{x}_0) + \mathsf{f}'(\mathsf{x}_0)\mathsf{h}$$

ถ้า $\mathsf{f}'(\mathsf{x}_0)$ มีอินเวอร์สการคูณ จะได้

$$\mathsf{h} = -\left[\mathsf{f}'(\mathsf{x}_0)\right]^{-1}\mathsf{f}(\mathsf{x}_0)$$

นั่นคือ

$$\mathsf{x}_1 = \mathsf{x}_0 - \left[\mathsf{f}'(\mathsf{x}_0)\right]^{-1}\mathsf{f}(\mathsf{x}_0)$$

ในกรณีทั่วไปจะได้สูตรสำหรับการกระทำซ้ำคือ

$$\mathsf{x}_{i+1} = \mathsf{x}_i - \left[\mathsf{f}'(\mathsf{x}_i)\right]^{-1}\mathsf{f}(\mathsf{x}_i); \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

โดยที่ $\mathsf{f}'(\mathsf{x})$ มีชื่อเรียกว่า *เมทริกซ์จาโคเบียน* (Jacobian matrix) หมายถึง เมทริกซ์ของอนุพันธ์ย่อยของ f นิยามดังนี้

$$\mathsf{f}'(\mathsf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ระเบียบวิธีของนิวตันจะต้องมีจุดเริ่มต้น x_0 อยู่ไม่ไกลจากผลเฉลยมากเกินไป ระเบียบวิธีนี้จึงจะลู่เข้าหาจุดซึ่งเป็นผลเฉลยของระบบสมการ $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = 0$ โดยมีอัตราการลู่เข้าเป็นอันดับสอง

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีของนิวตัน

1. กำหนด $\mathsf{f}(\mathsf{x})$ และหาเมทริกซ์จาโคเบียน $\mathsf{f}'(\mathsf{x})$

2. กำหนด $\mathsf{x}_0 := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นจุดเริ่มต้น

3. สำหรับ $i = 0, 1, 2, \ldots$ กระทำดังนี้

3.1 หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (หาค่าเมทริกซ์ h_i)

$$\left[\mathsf{f}'(\mathsf{x}_i)\right]\mathsf{h}_i = -\mathsf{f}(\mathsf{x}_i)$$

3.2 ให้ $\mathsf{x}_{i+1} := \mathsf{x}_i + \mathsf{h}_i$

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาระบบสมการไม่เชิงเส้นดังนี้

$$x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$x^2 - y = 0$$

กำหนด

$$\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x^2 - y \end{bmatrix}$$

หาเมทริกซ์จาโคเบียนได้เป็น

$$\mathsf{f}'(\mathsf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{bmatrix}$$

<u>**รอบที่ 1**</u> ให้ $\mathsf{x}_0 = (1.5, 1.5)$ เป็นจุดเริ่มต้น จะได้ว่า $\mathsf{x}_1 = \mathsf{x}_0 + \mathsf{h}_0$ โดยที่ $\mathsf{h}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$\left[\mathsf{f}'(\mathsf{x}_0)\right] \mathsf{h}_0 = -\mathsf{f}(\mathsf{x}_0)$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 3.0 \\ 3.0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ -0.75 \end{bmatrix}$$

แก้ระบบสมการ จะได้

$$\mathsf{h}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3958333 \\ -0.4375000 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้จุดต่อไปคือ

$$\mathsf{x}_1 = \mathsf{x}_0 + \mathsf{h}_0 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3958333 \\ -0.4375000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1041667 \\ 1.0625000 \end{bmatrix}$$

<u>**รอบที่ 2**</u> จะได้ $\mathsf{x}_2 = \mathsf{x}_1 + \mathsf{h}_1$ โดยที่ $\mathsf{h}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$\left[\mathsf{f}'(\mathsf{x}_1)\right] \mathsf{h}_1 = -\mathsf{f}(\mathsf{x}_1)$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 2.2083334 & 2.1250000 \\ 2.2083334 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3480904 \\ -0.1566841 \end{bmatrix}$$

แก้ระบบสมการ จะได้

$$\mathsf{h}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0986872 \\ -0.0612500 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้จุดต่อไปคือ

$$\mathsf{x}_2 = \mathsf{x}_1 + \mathsf{h}_1 = \begin{bmatrix} 1.1041667 \\ 1.0625000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0986872 \\ -0.0612500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0054795 \\ 1.0012500 \end{bmatrix}$$

<u>รอบที่ 3</u> จะได้ $\mathsf{x}_3 = \mathsf{x}_2 + \mathsf{h}_2$ โดยที่ $\mathsf{h}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$[\mathsf{f}'(\mathsf{x}_2)]\,\mathsf{h}_2 = -\mathsf{f}(\mathsf{x}_2)$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 2.0109590 & 2.0025000 \\ 2.0109590 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0134906 \\ -0.0097390 \end{bmatrix}$$

แก้ระบบสมการ จะได้

$$\mathsf{h}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0054643 \\ -0.0012495 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้จุดต่อไปคือ

$$\mathsf{x}_3 = \mathsf{x}_2 + \mathsf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1.0054795 \\ 1.0012500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0054643 \\ -0.0012495 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000152 \\ 1.0000005 \end{bmatrix}$$

<u>ตรวจสอบ</u>

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{x}_3) = \mathsf{f}(1.0000152, 1.0000005) &= \begin{bmatrix} (1.0000152)^2 + (1.0000005)^2 - 2 \\ (1.0000152)^2 - 1.0000005 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.0000314 \\ 0.0000299 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ซึ่งมีค่าใกล้เวกเตอร์ศูนย์พอสมควร ดังนั้นผลเฉลยโดยประมาณของระบบสมการ คือ $x = 1.0000152$ และ $y = 1.0000005$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น

$$5x - \sin y + 1 = 0$$

$$4x^2 + 3y - 1.5 = 0$$

วิธีทำ กำหนด

$$\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x - \sin y + 1 \\ 4x^2 + 3y - 1.5 \end{bmatrix}$$

หาเมทริกซ์จาโคเบียนได้เป็น

$$\mathsf{f}'(\mathsf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\cos y \\ 8x & 3 \end{bmatrix}$$

<u>**รอบที่ 1**</u> ให้ $\mathsf{x}_0 = (0, 0.5)$ เป็นจุดเริ่มต้น จะได้ว่า $\mathsf{x}_1 = \mathsf{x}_0 + \mathsf{h}_0$ โดยที่ $\mathsf{h}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$[\mathsf{f}'(\mathsf{x}_0)]\,\mathsf{h}_0 = -\mathsf{f}(\mathsf{x}_0)$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 5 & -0.8775826 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5205745 \\ 0 \end{bmatrix}$$

แก้ระบบสมการ จะได้

$$\mathsf{h}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1041149 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้จุดต่อไปคือ

$$\mathsf{x}_1 = \mathsf{x}_0 + \mathsf{h}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1041149 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1041149 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

<u>**รอบที่ 2**</u> จะได้ $\mathsf{x}_2 = \mathsf{x}_1 + \mathsf{h}_1$ โดยที่ $\mathsf{h}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$[\mathsf{f}'(\mathsf{x}_1)]\,\mathsf{h}_1 = -\mathsf{f}(\mathsf{x}_1)$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 5 & -0.8775826 \\ -0.8329192 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0433596 \end{bmatrix}$$

แก้ระบบสมการ จะได้

$$\mathsf{h}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0026667 \\ -0.0151936 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้จุดต่อไปคือ

$$\mathsf{x}_2 = \mathsf{x}_1 + \mathsf{h}_1 = \begin{bmatrix} -0.1041149 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0026667 \\ -0.0151936 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1067816 \\ 0.4848064 \end{bmatrix}$$

<u>รอบที่ 3</u> จะได้ $\mathsf{x}_3 = \mathsf{x}_2 + \mathsf{h}_2$ โดยที่ $\mathsf{h}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$[\mathsf{f}'(\mathsf{x}_2)]\, \mathsf{h}_2 = -\mathsf{f}(\mathsf{x}_2)$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 5 & -0.8847652 \\ -0.8542528 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0000549 \\ -0.0000284 \end{bmatrix}$$

แก้ระบบสมการ จะได้

$$\mathsf{h}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0000133 \\ -0.0000133 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้จุดต่อไปคือ

$$\mathsf{x}_3 = \mathsf{x}_2 + \mathsf{h}_2 = \begin{bmatrix} -0.1067816 \\ 0.4848064 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0000133 \\ -0.0000133 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1067949 \\ 0.4847931 \end{bmatrix}$$

<u>ตรวจสอบ</u>

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{x}_3) = \mathsf{f}(-0.1067949, 0.4847931) &= \begin{bmatrix} 5(-0.1067949) - \sin(0.4847931) + 1 \\ 4(-0.1067949)^2 + 3(0.4847931) - 1.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.0000002 \\ -0.0000001 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ซึ่งมีค่าใกล้เวกเตอร์ศูนย์พอสมควร ดังนั้นผลเฉลยโดยประมาณของระบบสมการ คือ $x = -0.1067949$ และ $y = 0.4847931$

4.3 บทสรุป

ในบทนี้ ได้ศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับใช้ประมาณค่าของผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น ได้แก่ ระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว และระเบียบวิธีของนิวตัน ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่คล้าย ๆ กับระเบียบวิธีในบทที่ 2 แต่ดัดแปลงขยายมาสู่การแก้ปัญหาของระบบสมการไม่เชิงเส้น

4.4 คำถามทบทวน

1. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยระเบียบวิธีซ้ำเดิมเชิงเดียว

   1.1 $x^2 + x - y^2 = 1,\ y - \sin(x^2) = 0$

   1.2 $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ xyz = 1,\ x + y - z^2 = 0$

2. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยระเบียบวิธีของนิวตัน

   2.1 $3x^2 - 4y^2 + 7.5 = 0, x^2 - 3y - 1 = 0$

   2.2 $x^3 + 3y^2 = 21,\ x^2 + 2y + 2 = 0$

   2.3 $x^2 + xy^3 = 9,\ 3x^2y - y^3 = 4$

3. จงเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นในตัวอย่างที่ 2

แผนการบริหารการสอนประจำบทที่ 5

หัวข้อเนื้อหา

1. การประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนาม
2. การประมาณค่าในช่วงโดยพหุนามเป็นช่วง
3. การประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายเหตุผล และความจำเป็นที่ต้องใช้การประมาณค่าในช่วง
2. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายขั้นตอนวิธีของการประมาณค่าในช่วงแบบต่าง ๆ ได้
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเลือกใช้การประมาณค่าในช่วงในแบบที่เหมาะสมกับปัญหาต่าง ๆ ได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ผู้สอนบรรยายเนื้อหาที่เกี่ยวกับความสำคัญของการประมาณค่าในช่วง และหลักการเบื้องต้นของวิธีการประมาณค่าในช่วงแบบต่าง ๆ พร้อมทั้งยกตัวอย่างให้เห็นถึงปัญหาตลอดจนวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้การประมาณค่าในช่วง
2. ผู้สอนมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดวิเคราะห์ในปัญหาต่าง ๆ
3. ผู้สอนให้ทำแบบทดสอบย่อยในช่วงท้ายชั่วโมง เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำโจทย์ปัญหาในเรื่องที่ได้เรียนรู้มา อีกทั้งยังเป็นการให้ผู้เรียนได้มีโอกาสซักถามหากมีประเด็นข้อสงสัยเพิ่มเติม
4. มีการมอบหมายแบบฝึกหัดให้ผู้เรียนได้ทำเป็นการบ้าน
5. มีการมอบหมายหัวข้อให้ผู้เรียนได้ไปอ่านล่วงหน้า

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคิดเลข
3. แบบทดสอบย่อย
4. แบบฝึกหัด

การวัดผลและการประเมินผล

1. ความตรงต่อเวลา และความตั้งใจในระหว่างเรียน
2. ให้ทำแบบทดสอบย่อยท้ายชั่วโมง
3. ให้แบบฝึกหัดไปทำเป็นการบ้าน

บทที่ 5
การประมาณค่าในช่วง

การประมาณค่าในช่วงเป็นวิธีการเชิงตัวเลขซึ่งมีมานาน และมีความสำคัญมากวิธีการหนึ่งในสมัยก่อนที่จะมีเครื่องคิดเลขและคอมพิวเตอร์ การหาค่าของฟังก์ชันต้องดูจากตารางซึ่งได้ทำไว้ แต่เนื่องจากตารางทำได้ไม่ละเอียด ค่าที่ไม่มีในตารางก็จะต้องหาโดยวิธีที่เรียกว่า การประมาณค่าในช่วง ในสมัยปัจจุบันเครื่องคิดเลขและคอมพิวเตอร์ส่วนมากจะใช้วิธีคำนวณค่าของฟังก์ชันจากสูตรโดยตรง (หรืออาจจะประมาณค่าด้วยพหุนาม) แต่การศึกษาวิธีประมาณค่าในช่วงก็ยังมีความสำคัญอยู่มาก เพราะในบางเรื่องการคำนวณค่าของฟังก์ชันกระทำได้ยาก อาจจะกระทำได้เพียงบางจุดแล้วใช้วิธีประมาณค่าในช่วงหาค่าอื่น ๆ นอกจากนี้ เทคนิคและวิธีการรวมทั้งสูตรของการประมาณค่าในช่วงจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญของการศึกษาเรื่องอื่น ๆ เช่น เรื่องการหาอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลขในกรณีที่ไม่ทราบตัวฟังก์ชันแต่ทราบค่าเพียงบางจุดเท่านั้น

เพื่อให้เห็นถึงปัญหาได้ชัดเจนจะขอยกตัวอย่างแสดงดังนี้ สมมุติว่ามีฟังก์ชันอันหนึ่งแสดงค่าได้ดังตาราง

x	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
y	-0.85	0.08	-0.39	0.55	1.03

ประเด็นคำถามแรกก็คือ ถ้า $x = 0.6$ แล้ว y จะเป็นเท่าใด จะเห็นว่าไม่มีค่านี้ในตาราง คำถามนี้อาจตอบได้วิธีหนึ่งก็โดยการหาฟังก์ชันพหุนาม $y = p(x)$ ซึ่งมีดีกรี 4 ค่าของพหุนามจะสอดคล้องกับค่า (x_i, y_i) ทุกค่าในตาราง ในที่นี้พหุนามดังกล่าวคือ

$$p(x) = -10.67 + 44.8291666x - 64.5937499x^2 + 37.7864583x^3 - 7.6171875x^4$$

(วิธีหาพหุนามนี้จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป) เมื่อทราบพหุนามแล้วก็สามารถหาค่า y ได้โดยการแทนค่า x ในกรณีนี้จะได้ $y = p(0.6) = 0.1484375$ แต่ค่านี้เป็นเพียงค่าประมาณเท่านั้น เพราะไม่มีใครบอกได้ว่าฟังก์ชันจริง ๆ มีลักษณะเป็นอย่างไร

ประเด็นคำถามอีกอย่างหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับตารางที่แสดงข้อมูลก็คือ ถ้า $y = 0$ แล้ว x จะเป็นเท่าใด คำถามนี้ก็คือปัญหาการหาคำตอบของสมการ $p(x) = 0$ นั่นเอง การแก้สมการอาจกระทำได้ยาก และอาจจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข วิธีการอีกอย่างหนึ่งก็คือ หาฟังก์ชันพหุนามดีกรี 4 อันใหม่โดยมี y เป็นตัวแปรต้น คือให้ $x = q(y)$ เป็นพหุนามดีกรี 4 ของ y ซึ่งสอดคล้องกับทุกจุดบนตารางแล้วแทนค่า $y = 0$ ก็จะได้ค่า x ตามต้องการ

กำหนดให้ตารางของค่าของฟังก์ชันอันหนึ่งมีลักษณะเป็นดังนี้

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

โดยทั่วไปแล้ว ประเด็นปัญหาเกี่ยวกับการประมาณค่าในช่วงของข้อมูลดังตารางที่แสดงค่าเป็นดังนี้ (อำพล ธรรมเจริญ, 2553)

ประเด็นปัญหาข้อแรกคือ จะสามารถหาฟังก์ชันอันหนึ่งที่จะให้ค่าสอดคล้องตรงกับค่าตามตารางทุกค่าได้หรือไม่

ประเด็นปัญหาข้อที่สองคล้ายกับข้อแรก แต่ฟังก์ชันที่จะประมาณค่าไม่จำเป็นต้องตรงกับตารางทุกค่า ฟังก์ชันจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขที่จะเป็นฟังก์ชันประมาณค่าที่ดี กล่าวคือมีความคลาดเคลื่อนน้อย ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับสมมุติฐานที่ว่าตัวเลขในตารางนั้นก็เป็นเพียงค่าประมาณ เช่น ตัวเลขได้มาจากการทดลองซึ่งในการวัดมีความคลาดเคลื่อน

ประเด็นปัญหาข้อที่สามก็คล้ายกับสองข้อแรก ที่แตกต่างกันก็คือ ทราบฟังก์ชันที่ให้ค่าในตารางแต่การคำนวณค่าของฟังก์ชันโดยตรงกระทำได้ยาก ดังนั้นจึงประมาณด้วยฟังก์ชันที่ง่ายต่อการคำนวณ โดยปกติจะนิยมใช้พหุนามเป็นฟังก์ชันประมาณค่า ซึ่งจะกล่าวถึงในส่วนท้ายบท

มีแนวคิดอีกอย่างหนึ่งในการประมาณค่าในช่วงคือ ไม่ใช้ฟังก์ชันพหุนามอันเดียวในการประมาณค่าทุกช่วงแต่จะใช้พหุนามอันหนึ่งในการประมาณค่าในช่วงหนึ่งเท่านั้น วิธีการนี้พหุนามที่ใช้ไม่ต้องมีดีกรีสูงแต่ต้องใช้หลายอันมาต่อกันให้ครบทุกช่วง วิธีการนี้จะกล่าวถึงในหัวข้อหลัง

5.1 การประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนาม

ฟังก์ชันพหุนามดีกรี n เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a_n \neq 0$

สมมุติว่ามีตารางแสดงค่าของฟังก์ชันดังนี้

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

โดยให้สมมุติฐานว่าค่า x_i ไม่ซ้ำกัน จุด x_i เรียกว่า *โหนด* (node) จะพิจารณาหาฟังก์ชันพหุนามที่ผ่านจุด (x_i, y_i) ทุกจุด (ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$) ถ้า $n = 1$ คือมีจุดเดียว ดังนั้นพหุนามที่จะใช้ประมาณค่าคือ $p(x) = y_1$ พหุนามดังกล่าวมีดีกรีเป็นศูนย์ ถ้า $n = 2$ คือมีสองจุด เส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดจะเป็นกราฟของฟังก์ชันพหุนามที่มีดีกรีเป็น 1 นั่นคือ พหุนามที่ใช้ประมาณค่าคือ

$$p(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ทำให้อาจคิดได้ว่า ถ้ามี n จุด พหุนามที่มีกราฟผ่านจุดทั้ง n จุด จะเป็นพหุนามดีกรีไม่เกิน $n-1$ ซึ่งมีทฤษฎีบทที่สำคัญ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 สมมุติว่าค่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นค่าที่ไม่ซ้ำกันและสำหรับค่า $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ใด ๆ จะมีพหุนาม p ที่มีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ $n-1$ เพียงอันเดียวซึ่ง $p(x_i) = y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$

หมายเหตุ ทฤษฎีบท 1 นี้มีความสำคัญอยู่สองส่วนคือ ส่วนแรกกล่าวว่าจะมีพหุนามซึ่งมีดีกรีไม่เกิน $n-1$ ผ่านจุด (x_i, y_i) ทุกจุด อีกส่วนหนึ่งคือพหุนามดังกล่าวจะมีอยู่เพียงอันเดียว

5.1.1 พหุนามประมาณค่าแบบนิวตัน (Newton Interpolation Polynomial)

พิจารณาหาพหุนามดีกรี $n-1$ ซึ่งผ่านจุดทุกจุด วิธีการที่จะกล่าวต่อไปนี้มีชื่อว่า *วิธีการแบบนิวตัน* โดยเริ่มต้นจะกำหนด $p_0(x) = y_1$ ต่อไปให้ $p_1(x) = p_0(x) + c(x - x_1)$ ได้ว่า $p_1(x_1) = y_1$ และหาค่า c ได้โดยเงื่อนไข $p_1(x_2) = y_2$ ต่อไปให้ $p_2(x) = p_1(x) + c(x-x_1)(x-x_2)$ ได้ว่า $p_2(x_1) = y_1$ และ $p_2(x_2) = y_2$ หาค่า c ได้โดยเงื่อนไข $p_2(x_3) = y_3$ กระทำในทำนองนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ $p_{n-1}(x)$ ซึ่งเป็นพหุนามดีกรี $n-1$ นั่นคือได้

$$\begin{aligned} p(x) = p_{n-1}(x) &= a_1 + a_2(x-x_1) + a_3(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad + \cdots + a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

พหุนามนี้มีชื่อว่า *พหุนามประมาณค่าแบบนิวตัน* (Newton form) เมื่อแทนค่า (x_i, y_i) ลงในพหุนามประมาณค่าดังกล่าวจะได้ว่า

$$\begin{aligned} p(x_1) &= y_1 = a_1 \\ p(x_2) &= y_2 = a_1 + a_2(x_2 - x_1) \\ p(x_3) &= y_3 = a_1 + a_2(x_3 - x_1) + a_3(x_3-x_1)(x_3-x_2) \\ &\vdots \\ p(x_n) &= y_n = a_1 + a_2(x_n - x_1) + a_3(x_n - x_1)(x_n - x_2) \\ &\quad + \cdots + a_n(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

ดังนั้นได้ว่า

$$\begin{aligned} a_1 &= y_1 \\ a_2 &= \frac{y_2 - a_1}{x_2 - x_1} \\ a_3 &= \frac{y_3 - (a_1 + a_2(x_3 - x_1))}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{aligned}$$

ในกรณีทั่วไป เมื่อ $k = 1, 2, \ldots, n$ จะได้

$$a_k = \frac{y_k - [a_1 + a_2(x_k - x_1) + \cdots + a_{k-1}(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-2})]}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})}$$

มีวิธีการทำตารางเพื่อง่ายในการหาค่า $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ดังต่อไปนี้

จากที่ทราบค่า $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ต่อไปจะกำหนดสัญลักษณ์

$$y_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$y_{34} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

$$y_{45} = \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4}$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1,n} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

ค่า $y_{n-1,n}$ นี้เรียกว่า *ผลต่างหาร* (divided difference) ให้สังเกตว่า $a_2 = y_{12}$

ต่อไปกำหนดผลต่างหารเพิ่มขึ้นอีกอันดับหนึ่งคือ

$$y_{123} = \frac{y_{23} - y_{12}}{x_3 - x_1}$$

$$y_{234} = \frac{y_{34} - y_{23}}{x_4 - x_2}$$

$$y_{345} = \frac{y_{45} - y_{34}}{x_5 - x_3}$$

$$y_{456} = \frac{y_{56} - y_{45}}{x_6 - x_4}$$

$$\vdots$$

$$y_{n-2,n-1,n} = \frac{y_{n-1,n} - y_{n-2,n-1}}{x_n - x_{n-2}}$$

สามารถแสดงได้ว่า $a_3 = y_{123}$

ในกรณีทั่วไป กำหนดผลต่างหารเป็น

$$y_{i,\ldots,j} = \frac{y_{i+1,\ldots,j} - y_{i,\ldots,j-1}}{x_j - x_i}$$

สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $i < j \leq n$ เขียนเป็นตารางแสดงค่าได้ ดังนี้

ตารางที่ 5.1 แสดงค่าผลต่างหาร

i	x_i	y_i	$y_{i,i+1}$	$y_{i,i+1,i+2}$	$\cdots$	$y_{i,\dots,n-1}$	$y_{i,\dots,n}$
1	x_1	y_1					
			y_{12}				
2	x_2	y_2		y_{123}			
			y_{23}				
3	x_3	y_3		y_{234}			
			y_{34}				
--	--	---		y_{345}			

--	--	---	---	---		$y_{1,\dots,n-1}$	
							$y_{1,\dots,n}$
--	--	---	---	---		$y_{2,\dots,n}$	

--	--	---		$y_{n-2,n-1,n}$			
			$y_{n-1,n}$				
n	x_n	y_n					

การสร้างตารางเพื่อให้ได้ค่าตามสูตรที่กำหนด โดยเขียนค่า x_i ในคอลัมน์แรกและค่า y_i ในคอลัมน์ที่สองในแถวที่ตรงกัน แล้วจึงหาค่าผลต่างหาร $y_{i,i+1}$ และ $y_{i,i+1,i+2},\dots$ ในคอลัมน์ถัดไป โดยเขียนในระหว่างบรรทัดเพื่อให้เห็นการเชื่อมโยง

จะได้ว่าค่า $y_1, y_{12}, \dots, y_{1,\dots,n}$ ในตารางจะเป็นค่า $a_1, a_2, \dots, a_n$ นั่นเอง

ทฤษฎีบท 2 จากที่กำหนดผลต่างหารดังตารางที่ 5.1 สำหรับ $k = 1, 2, \dots, n$ จะได้ว่า

$$a_k = y_{12\dots k}$$

เนื่องจากค่า $y_{i,\dots,j}$ ขึ้นอยู่กับค่า $x_i, x_{i+1}, \dots, x_j$ ดังนั้นอาจเขียนสัญลักษณ์ว่า $y_{i,\dots,j} = f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j]$ โดยกำหนด

$$f[x_i] = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

และ

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j] = y_{i,i+1,\dots,j}; \quad i = 1, 2, \dots, n;\ i \le j = 1, 2, \dots, n$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_j] - f[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

$$a_k = f[x_1, \dots, x_k]$$

ค่าของผลต่างหารนี้ไม่เกี่ยวกับลำดับของจุด กล่าวคือจุดสลับกันก็ไม่ทำให้ค่าต่างกัน เช่น $f[x_1, x_2, x_3] = f[x_2, x_1, x_3]$ เหตุผลก็คือค่า $f[x_1, x_2, x_3]$ หรือ y_{123} เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^2 ของพหุนามที่ผ่านจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) และค่า $f[x_2, x_1, x_3]$ เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^2 ของพหุนามที่ผ่านจุดสามจุดชุดเดียวกัน ซึ่งเป็นพหุนามอันเดียวกัน ดังนั้นจึงได้ว่า $f[x_1, x_2, x_3] = f[x_2, x_1, x_3]$ ในกรณีทั่วไปจะเขียนเป็นทฤษฎีบทได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3 ผลต่างหาร $f[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง ถ้า $x_1, x_2, \ldots, x_k$ สลับที่กัน

แสดงการสร้างตารางผลต่างหารเพื่อหาค่า a_k ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ ในพหุนามประมาณค่าแบบนิวตันดังตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดตารางแสดงค่าของฟังก์ชันดังนี้

x	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
y	-0.85	0.08	-0.39	0.55	1.03

จงสร้างตารางแสดงค่าผลต่างหารและเขียนแสดงพหุนามประมาณค่าแบบนิวตัน

วิธีทำ พหุนามประมาณค่าแบบนิวตันอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} p(x) &= a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &\quad + a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \end{aligned}$$

ตารางแสดงค่าผลต่างหารเป็นดังนี้

i	x_i	y_i	$y_{i,i+1}$	$y_{i,i+1,i+2}$	$y_{i,i+1,i+2,i+3}$	y_{12345}
1	0.4	-0.85				
			2.325			
2	0.8	0.08		-4.375		
			-1.175		7.3177083	
3	1.2	-0.39		4.40625		-7.6171875
			2.35		-4.8697917	
4	1.6	0.55		-1.4375		
			1.2			
5	2.0	1.03				

สังเกตว่า

$$2.325 = \frac{0.08 - (-0.85)}{0.8 - 0.4}, \qquad -1.175 = \frac{-0.39 - 0.08}{1.2 - 0.8}$$

$$2.35 = \frac{0.55 - (-0.39)}{1.6 - 1.2}, \qquad 1.2 = \frac{1.03 - 0.55}{2.0 - 1.6}$$

$$-4.375 = \frac{-1.175 - 2.325}{1.2 - 0.4}, \qquad 4.40625 = \frac{2.35 - (-1.175)}{1.6 - 0.8}$$

$$-1.4375 = \frac{1.2 - 2.35}{2.0 - 1.2}, \qquad 7.3177083 = \frac{4.40625 - (-4.375)}{1.6 - 0.4}$$

และ

$$-4.8697917 = \frac{-1.4375 - 4.40625}{2.0 - 0.8}, \qquad -7.6171875 = \frac{-4.8697917 - 7.3177083}{2.0 - 0.4}$$

ดังนั้นได้พหุนามประมาณค่าแบบนิวตันคือ

$$\begin{aligned} p(x) = {} & -0.85 + 2.325(x - 0.4) - 4.375(x - 0.4)(x - 0.8) \\ & + 7.3177083(x - 0.4)(x - 0.8)(x - 1.2) \\ & - 7.6171875(x - 0.4)(x - 0.8)(x - 1.2)(x - 1.6) \end{aligned}$$

เมื่อกระจายผลคูณจะได้พหุนามดีกรีสี่ ดังนี้

$$p(x) = -10.67 + 44.8291666x - 64.5937499x^2 + 37.7864583x^3 - 7.6171875x^4$$

หมายเหตุ ในตัวอย่างที่ 1 จุดโหนด $x_1, x_2, \ldots, x_5$ เรียงลำดับจากน้อยไปมากและมีระยะห่างระหว่างจุดเท่า ๆ กัน แต่ที่จริงจุดโหนดไม่จำเป็นต้องเรียงลำดับจากน้อยไปมากและไม่จำเป็นต้องมีระยะห่างระหว่างจุดเท่ากัน

ข้อดีของการใช้พหุนามประมาณค่าแบบนิวตันก็คือ สามารถที่จะเพิ่มจุดและหาพหุนามประมาณค่าได้ง่าย กล่าวคือ ถ้าเดิมมีจุดอยู่จำนวนหนึ่งและคำนวณได้ค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนามประมาณค่าแบบนิวตัน ต่อมามีจุดเพิ่มอีกและต้องการจะหาพหุนาม สามารถจะทำได้โดยใช้ตารางเดิมเพียงแต่คำนวณค่าผลต่างหารเพิ่มขึ้นอีกแถวหนึ่งเท่านั้น โดยมีทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 4 ให้ $p_{n-1}(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n-1$ ประมาณค่าในช่วงระหว่างจุด n จุดคือ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และให้ $p_n(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n ประมาณค่าในช่วงระหว่างจุด $n+1$ จุดคือ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, x_{n+1} ดังนั้นจะได้

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + f[x_1, x_2, \ldots, x_n](x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

ตัวอย่างที่ 2 สมมุติว่าเดิมมีโหนด 3 จุด x_1, x_2 และ x_3 และต่อมาเพิ่มโหนด $x_4 = 1.7$ จงหาพหุนามประมาณค่าแบบนิวตันที่ผ่านจุด 4 จุด

x	0.9	1.3	2.1	1.7
y	2.1	-0.5	0.1	1.2

วิธีทำ ตารางแสดงค่าผลต่างหารเป็นดังนี้

i	x_i	y_i	$y_{i,i+1}$	$y_{i,i+1,i+2}$	y_{1234}
1	0.9	2.1			
			-6.5		
2	1.3	-0.5		6.0416667	-------------------
			0.75	-----------------	-18.4895834
3	2.1	0.1	---------	-8.75	
--	---	------	-2.75		
4	1.7	1.2			

ถ้ามีเพียง 3 จุด พหุนามประมาณค่าแบบนิวตันจะเป็นดังนี้

$$p(x) = 2.1 - 6.5(x - 0.9) + 6.0416667(x - 0.9)(x - 1.3)$$

ถ้ามี 4 จุด พหุนามประมาณค่าแบบนิวตันเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} p(x) &= 2.1 - 6.5(x - 0.9) + 6.0416667(x - 0.9)(x - 1.3) \\ &\quad - 18.4895834(x - 0.9)(x - 1.3)(x - 2.1) \end{aligned}$$

5.1.2 พหุนามประมาณค่าแบบลากรานจ์ (Lagrange Interpolating Polynomial)

นอกจากพหุนามประมาณค่าแบบนิวตันแล้ว ยังมีพหุนามประมาณค่าในแบบอื่น ๆ อีกหลายแบบ แบบหนึ่งที่นิยมใช้กันก็คือแบบลากรานจ์ โดยเริ่มต้นกำหนดฟังก์ชันพหุนามดีกรี $n - 1$ จำนวน n ฟังก์ชัน คือ $L_1, L_2, \ldots, L_n$ เรียกว่า *ฟังก์ชันคาร์ดินัล* (cardinal functions) และพหุนาม L_i มีสมบัติต่อไปนี้

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1 & \text{ถ้า } i = j \end{cases} \tag{5.5}$$

ถ้าทราบฟังก์ชันพหุนามที่มีคุณสมบัติดังกล่าวก็จะเขียนพหุนามประมาณค่าในช่วงได้เป็น

$$p(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

จะเห็นว่าพหุนาม $p(x)$ มีสมบัติเป็นพหุนามประมาณค่าในช่วงตามที่ต้องการคือ

$$\begin{aligned} p(x_i) &= y_1 L_1(x_i) + \cdots + y_i L_i(x_i) + \cdots + y_n L_n(x_i) \\ &= 0 + \cdots + y_i(1) + \cdots + 0 \\ &= y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

ฟังก์ชันคาร์ดินัล L_i มีสูตรดังนี้

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

เห็นชัดว่า ฟังก์ชัน $L_i(x)$ มีสมบัติสอดคล้องกับฟังก์ชัน (5.5)

อาจเขียนสูตรของพหุนามประมาณค่าแบบลากรานจ์ได้เป็น

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ค่าของฟังก์ชันเป็นดังตารางต่อไปนี้

x	0.9	1.3	2.1
y	2.1	-0.5	0.1

จงหาฟังก์ชันคาร์ดินัลและหาพหุนามประมาณค่าแบบลากรานจ์

วิธีทำ พหุนามประมาณค่าแบบลากรานจ์อยู่ในรูป

$$p(x) = y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x)$$

ฟังก์ชันคาร์ดินัลคือ

$$L_1(x) = \frac{(x-1.3)(x-2.1)}{(0.9-1.3)(0.9-2.1)} = \frac{(x-1.3)(x-2.1)}{0.48}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0.9)(x-2.1)}{(1.3-0.9)(1.3-2.1)} = \frac{(x-0.9)(x-2.1)}{-0.32}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0.9)(x-1.3)}{(2.1-0.9)(2.1-1.3)} = \frac{(x-0.9)(x-1.3)}{0.96}$$

ดังนั้น พหุนามประมาณค่าแบบลากรานจ์คือ

$$p(x) = 2.1\frac{(x-1.3)(x-2.1)}{0.48} - 0.5\frac{(x-0.9)(x-2.1)}{-0.32} + 0.1\frac{(x-0.9)(x-1.3)}{0.96}$$

$$= 4.375(x-1.3)(x-2.1) + 1.5625(x-0.9)(x-2.1) + 0.1041667(x-0.9)(x-1.3)$$

เมื่อกระจายผลคูณแล้วจะได้

$$p(x) = 15.01875 - 19.7916667x + 6.0416667x^2$$

หมายเหตุ พหุนามประมาณค่าแบบลากรานจ์จะเป็นพหุนามเดียวกับพหุนามประมาณค่าแบบนิวตัน เพราะว่าพหุนามแบบลากรานจ์มีดีกรี $n - 1$ เท่ากันกับดีกรีของพหุนามแบบนิวตัน และพหุนามประมาณค่าดังกล่าวมีพหุนามเดียว ดังนั้นพหุนามทั้งสองจึงเป็นพหุนามเดียวกัน

5.1.3 การประมาณค่าในช่วงกลับทาง (Inverse Interpolation)

เมื่อทราบจุด (x_i, y_i) ปกติจะหาพหุนามประมาณค่าในช่วงของ y เมื่อทราบค่า x แต่ในบางครั้งอาจหาพหุนามของ y เพื่อใช้ประมาณค่า x เมื่อทราบค่า y เช่นในการหาคำตอบของสมการ $f(x) = c$ วิธีการดังกล่าวเรียกว่า *การประมาณค่าในช่วงกลับทาง* แต่วิธีนี้จะใช้ได้เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงแต่เพียงอย่างเดียวเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 4 จงใช้การประมาณค่าในช่วงกลับทางหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ เมื่อ $x > 1.2$

วิธีทำ ให้ $f(x) = e^x - 3x$ พบว่าเมื่อ $x > 1.2$ ค่าของ $f'(x) = e^x - 3 > 0$ แสดงว่าฟังก์ชัน f มีค่าเพิ่มขึ้นแต่เพียงอย่างเดียวซึ่งสามารถใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงกลับทางได้ โดยหาค่า $f(x)$ เมื่อ x มีค่าต่าง ๆ ดังตาราง

x	1.2	1.5	1.8	2.1
$y = f(x)$	-0.2798831	-0.0183109	0.6496475	1.8661699

เขียนตารางแสดงผลต่างหารได้ ดังนี้

i	y_i	x_i	$x_{i,i+1}$	$x_{i,i+1,i+2}$	x_{1234}
1	-0.2798831	1.2			
			1.1469109		
2	-0.0183109	1.5		-0.7506812	
			0.4491298		0.2997182
3	0.6496475	1.8		-0.10747	
			0.2466046		
4	1.8661699	2.1			

พหุนามประมาณค่าในช่วงกลับทางคือ

$$
\begin{aligned}
q(y) = 1.2 &+ 1.1469109(y + 0.2798831) - 0.7506812(y + 0.2798831)(y + 0.0183109) \\
&+ 0.2997182(y + 0.2798831)(y + 0.0183109)(y - 0.6496475)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $y = 0$ จะได้ $x = q(0) = 1.5161559$ ซึ่งนับว่าใกล้เคียง (คำตอบคือ 1.5121346)

วิธีการนี้ใช้ประมาณค่าได้ดีเมื่อจุด y อยู่ในช่วงกลาง ถ้าจุด y อยู่ใกล้จุดปลายอาจจะประมาณค่าได้ไม่ดีนัก ตัวอย่างเช่นเมื่อจะหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 1$ เมื่อ $y = 1$ จะได้ $x = q(1) = 1.8263925$ ซึ่งไม่ถูกต้อง (คำตอบคือ $x = 1.9038137$)

วิธีการประมาณค่าในช่วงกลับทางในการหาคำตอบของสมการ $f(x) = c$ นี้ที่จริงแล้วไม่ได้ทำให้ง่ายขึ้นกว่าการแก้สมการ $f(x) = c$ โดยตรงถ้าทราบฟังก์ชัน f แต่ในกรณีที่ไม่ทราบฟังก์ชัน f คือทราบแต่ค่าของฟังก์ชันในบางจุดก็จำเป็นต้องใช้วิธีการดังกล่าว อีกวิธีการหนึ่งในการหาคำตอบของสมการ $f(x) = c$ (ในกรณีไม่ทราบฟังก์ชัน f) ก็คือ หาพหุนามประมาณค่าของตัวแปร x นั่นคือหา $p(x)$ ตามปกติเพื่อประมาณค่าของ $f(x)$ แล้วจึงแก้สมการ $p(x) = c$

5.2 การประมาณค่าในช่วงโดยพหุนามเป็นช่วง (Piecewise-Polynomial Interpolation)

จากหัวข้อก่อนหน้านี้ ได้ศึกษาการใช้ฟังก์ชันพหุนามประมาณค่าในช่วง นั่นคือ เมื่อมีค่าของฟังก์ชันที่จุดต่าง ๆ แล้วหาฟังก์ชันพหุนามที่สอดคล้องกับค่าของฟังก์ชันที่จุดเหล่านี้ทุกจุด จากนั้นจึงใช้พหุนามที่ได้สำหรับประมาณค่าของฟังก์ชันที่จุดอื่น ๆ ที่ไม่ได้กำหนด มีหลักข้อหนึ่งว่า ถ้ามีจุด n จุดแล้วพหุนามที่ใช้ประมาณค่าที่จะผ่านทุกจุดได้ต้องมีดีกรี $n-1$ อาจมีจุดบางชุดที่พหุนามดีกรีน้อยกว่า $n-1$ ผ่านทุกจุดได้ แต่ไม่เสมอไปและพหุนามดีกรีมากกว่า $n-1$ จะผ่านทุกจุดได้ แต่มีหลายพหุนามและดีกรีสูงเกินไป

ในลำดับต่อไปนี้ จะใช้พหุนามดีกรีต่ำ (ดีกรีต่ำกว่า $n-1$) ในการประมาณค่า ถ้าหากใช้พหุนามอันเดียวจะไม่สอดคล้องกับค่าของฟังก์ชันทั้งหมด และถ้าต้องการให้สอดคล้องกับค่าของฟังก์ชันทั้งหมดก็ต้องใช้หลายพหุนามมาต่อกัน ซึ่งจะศึกษาวิธีการตามแนวคิดทั้งสองแบบดังกล่าวนี้ คือ แบบที่ใช้พหุนามดีกรีต่ำอันเดียวประมาณค่า และแบบที่ใช้พหุนามดีกรีต่ำหลายอันมาต่อกัน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาพหุนามประมาณค่าทีละช่วง สมมุติ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจุดโหนด n จุดที่ไม่ซ้ำกันและเรียงตามลำดับจากน้อยไปมากคือ $x_i < x_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$ ให้ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ เป็นค่าของฟังก์ชันอันหนึ่งที่จุดที่ 1 ถึงที่ n ตามลำดับ ให้ $p_i(x)$ เป็นพหุนามในช่วงที่ i และให้ $p(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ประกอบไปด้วยพหุนามเหล่านี้ นั่นคือ

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x), & x_1 \le x < x_2 \\ p_2(x), & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}(x), & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

โดยที่พหุนามอันหนึ่งใช้สำหรับช่วงหนึ่งเท่านั้น จุด $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ จะเป็นจุดแบ่ง ซึ่งเรียกว่า *น็อท* (knots)

<u>*พหุนามดีกรีศูนย์*</u> คือ

$$p_i(x) = c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

มีเงื่อนไขคือ $p_i(x_i) = y_i$ ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันค่าคงที่คือ $p_i(x) = y_i$ ในแต่ละช่วง

พหุนามดีกรีหนึ่ง คือ

$$p_i(x) = a_i x + b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

มีเงื่อนไขดังนี้

(1) $p_i(x_i) = y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$

(2) $p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}),\ i = 1, 2, \ldots, n-1$

จะได้ฟังก์ชันในแต่ละช่วง คือ

$$p_i(x) = \frac{(y_{i+1} - y_i)(x - x_i)}{h_i} + y_i \quad \text{เมื่อ } h_i = x_{i+1} - x_i$$

พหุนามดีกรีสอง คือ

$$p_i(x) = A_i(x - x_i)^2 + B_i(x - x_i) + C_i, \quad x_i \le x \le x_{i+1}$$

เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n-1$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

(1) $p_i(x_i) = y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$

(2) $p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}),\ i = 1, 2, \ldots, n-1$

(3) $p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1}),\ i = 1, 2, \ldots, n-2$

เงื่อนไขข้อ (1) หมายความว่า $p(x)$ จะเป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับค่าที่กำหนด เงื่อนไขข้อ (2) หมายความว่า $p(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเงื่อนไขข้อ (3) หมายความว่าอนุพันธ์ $p'(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (ความชันของเส้นโค้งที่จุดต่อจะเท่ากัน)

ฟังก์ชันพหุนามประมาณค่าที่มีเงื่อนไขดังที่กล่าวมานี้เรียกว่า *ฟังก์ชันสไปลน์* (spline functions) ถ้าเป็นพหุนามดีกรีสองเรียกว่า *สไปลน์ดีกรีสอง* (spline of degree 2 or quadratic spline) ถ้าเป็นพหุนามดีกรีสามก็เรียกว่า *สไปลน์ดีกรีสาม* (cubic spline) สำหรับสไปลน์ดีกรีสามจะไม่แสดงรายละเอียดในเอกสารเล่มนี้ ซึ่งสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมได้ที่เอกสารอ้างอิง (อำพล ธรรมเจริญ, 2553) และ (Burden & Faires, 2005)

สไปลน์ดีกรีสอง จากเงื่อนไขของสไปลน์ดีกรีสองข้างต้น จึงได้สูตรของสไปลน์ดีกรีสอง ดังนี้

ฟังก์ชันพหุนามดีกรีสองมีแบบเป็น

$$p_i(x) = A_i(x - x_i)^2 + B_i(x - x_i) + C_i, \quad x_i \le x \le x_{i+1}$$

เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n-1$ และได้ค่าต่าง ๆ ดังนี้

$$p_i(x_i) = y_i = C_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$p'(x_i) = z_i = B_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$A_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{2(x_{i+1} - x_i)},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

เมื่อกำหนดค่า z_1 มา (กำหนดค่าใดก็ได้) จะได้

$$z_{i+1} = -z_i + \frac{2(y_{i+1} - y_i)}{x_{i+1} - x_i},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดค่าของฟังก์ชันดังตาราง

x	0.4	1.1	1.6	2.4	3.0
y	-0.3	0.3	0.1	0.9	0.8

จงหาสไปลน์ดีกรีสอง

วิธีทำ หาค่า z_i จากสูตร

$$z_{i+1} = -z_i + \frac{2(y_{i+1} - y_i)}{x_{i+1} - x_i},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

โดยกำหนด $z_1 = 2$ ได้ค่า $z_2 = -0.2857143,\ z_3 = -0.5142857,\ z_4 = 2.5142857,\ z_5 = -2.847619$ ดังนั้นได้ค่า A_i จากสูตร

$$A_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{2(x_{i+1} - x_i)},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

นั่นคือ $A_1 = -1.6326531,\ A_2 = -0.2285714,\ A_3 = 1.8928571,\ A_4 = -4.4682539$ และได้ $B_i = z_i$ และ $C_i = y_i$ ดังตาราง

i	x_i	y_i	C_i	z_i	B_i	A_i
1	0.4	-0.3	-0.3	2	2	-1.6326531
2	1.1	0.3	0.3	-0.2857143	-0.2857143	-0.2285714
3	1.6	0.1	0.1	-0.5142857	-0.5142857	1.8928571
4	2.4	0.9	0.9	2.5142857	2.5142857	-4.4682539
5	3.0	0.8	0.8	-2.847619	-2.847619	-

ดังนั้นสไปลน์ดีกรีสองคือ

$$p(x) = \begin{cases} -1.6326531(x-0.4)^2 + 2(x-0.4) - 0.3, & 0.4 \le x < 1.1 \\ -0.2285714(x-1.1)^2 - 0.2857143(x-1.1) + 0.3, & 1.1 \le x < 1.6 \\ 1.8928571(x-1.6)^2 - 0.5142857(x-1.6) + 0.1, & 1.6 \le x < 2.4 \\ -4.4682539(x-2.4)^2 + 2.5142857(x-2.4) + 0.9, & 2.4 \le x \le 3.0 \end{cases}$$

5.3 การประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาหาฟังก์ชันที่จะใช้แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล (ฟังก์ชันไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับทุกจุด) เมื่อมีข้อมูลอยู่ชุดหนึ่ง การที่จะพิจารณาว่าฟังก์ชันใดเหมาะสมสำหรับการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลนี้ขึ้นอยู่กับว่า มีความรู้เกี่ยวกับข้อมูลที่มีอยู่เพียงไร ถ้าไม่ทราบอะไรเกี่ยวกับข้อมูลที่มีอยู่ วิธีง่ายที่สุดที่จะพิจารณาก็คือ เขียนกราฟของข้อมูลแสดงจุดต่าง ๆ แล้วเทียบกับลักษณะโดยทั่วไปของฟังก์ชันต่าง ๆ ที่ทราบดี

เมื่อเลือกแบบของฟังก์ชันที่จะแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีอยู่ได้แล้ว ต่อไปก็จะเป็นการหาพารามิเตอร์ (ตัวแปร) ของฟังก์ชันที่เหมาะสมที่สุด สมมุติว่าฟังก์ชันจริง ๆ คือ $f(x)$ แต่ฟังก์ชันที่หาได้คือ $g(x)$ ฟังก์ชัน g จะเป็นฟังก์ชันประมาณค่าที่ดีที่สุดของ f ก็ต่อเมื่อนอร์มของผลต่าง $\|f-g\|$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อนอร์มของฟังก์ชันอาจมีนิยามเป็นแบบใดแบบหนึ่ง (ไม่กล่าวถึงในที่นี้) แต่เนื่องจากไม่ทราบฟังก์ชัน f ทราบแต่ค่าที่บางจุดเท่านั้น จึงหานอร์มของฟังก์ชันไม่ได้ แต่จะหานอร์มของผลต่างของค่าของฟังก์ชันที่จุดต่าง ๆ แทน กล่าวคือมีจุด $(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n$ เมื่อ $y_i = f(x_i)$ ให้ g เป็นฟังก์ชันประมาณค่า ดังนั้นหาค่าผลต่าง

$$\rho_i = y_i - g(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

เรียกว่า *ผลต่างตกค้าง* (residual) โดยให้

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix}$$

เป็นเวกเตอร์ ต้องการให้ $\|\rho\|$ มีค่าน้อยที่สุด เพื่อความสะดวกในการคำนวณ จะนิยามนอร์มของเวกเตอร์อีกแบบหนึ่งที่เรียกว่า *นอร์มแบบยุคลิด* (Euclidean norm) ดังนี้ กำหนดให้

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

และนอร์มของ $\mathbf{x}$ นิยามดังนี้

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

จะหาฟังก์ชัน g ซึ่งมีสมบัติว่า $\|\rho\|$ มีค่าน้อยที่สุดโดยใช้นอร์มแบบที่กำหนดไว้นี้ ระเบียบวิธีของการหาฟังก์ชันตามเงื่อนไขนี้เรียกว่า *วิธีกำลังสองน้อยที่สุด* (method of least-squares)

การหาสมการเส้นตรง สมมุติว่ามีข้อมูล $\{(x_i, y_i)|\, i = 1, 2, \ldots, n\}$ และเมื่อเขียนกราฟแล้วพบว่าจุดแสดงความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง จึงให้ฟังก์ชัน

$$g(x) = ax + b$$

เป็นตัวแบบ ดังนั้นจะหาค่า a และ b โดยให้ $\|\rho\|$ หรือ $\|\rho\|^2$ มีค่าน้อยที่สุด

จาก $\rho_i = y_i - g(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$ ดังนั้น

$$\|\rho\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - g(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 = h(a, b)$$

ตัวพารามิเตอร์ a และ b เป็นตัวแปร หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\|\rho\|^2$ เทียบกับ a และ b แล้วให้เท่ากับศูนย์ จะได้

$$\frac{\partial h(a,b)}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))\, x_i = 0$$

และ

$$\frac{\partial h(a,b)}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b)) = 0$$

ดังนั้นได้ระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งเรียกว่า *สมการปรกติ* (normal equations) ดังนี้

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}$$

เมื่อแก้ระบบสมการ ได้ค่า a และ b แล้วฟังก์ชันประมาณค่าจะมีสมการเป็น $y = ax + b$

ฟังก์ชันแบบอื่น ๆ ในกรณีทั่วไปสมมุติว่าฟังก์ชันประมาณค่ามีแบบเป็น

$$g(x) = c_1 q_1(x) + c_2 q_2(x) + \cdots + c_k q_k(x) \tag{5.3.1}$$

โดยที่ $q_1, q_2, \ldots, q_k$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติว่า ถ้า $a_1 q_1(x_i) + a_2 q_2(x_i) + \cdots + a_k q_k(x_i) = 0$ ทุกค่าของ i แล้วจะได้ว่า $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$ ซึ่งกล่าวว่าเซตของฟังก์ชัน $q_1, q_2, \ldots, q_k$ เป็น *อิสระเชิงเส้น* (linearly independent) และเรียกเซต $\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ ว่าเป็น *ฐาน* (basis) ของ

ฟังก์ชัน g ตัวอย่างเช่น $q_1(x) = 1,\ q_2(x) = x$ และ $q_3(x) = x^2$ เป็นฐานของฟังก์ชันพหุนามดีกรีสอง คือมีรูปแบบเป็น $g(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$ ฐานอาจเป็นฟังก์ชันพหุนามหรืออาจจะเป็นฟังก์ชันอื่น ๆ ก็ได้ แต่ต้องมีสมบัติเป็นอิสระเชิงเส้น

เมื่อฟังก์ชัน $g(x)$ กำหนดดังสมการ (5.3.1) หาสมการปรกติได้ดังนี้ จาก

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - g(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (c_1q_1(x_i) + c_2q_2(x_i) + \cdots + c_kq_k(x_i))]^2$$

หาค่าอนุพันธ์แล้วให้เท่ากับศูนย์ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial c_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2\right) = -2\sum_{i=1}^{n} [y_i - (c_1q_1(x_i) + c_2q_2(x_i) + \cdots + c_kq_k(x_i))]\, q_j(x_i) = 0$$

เมื่อ $j = 1, 2, \ldots, k$ ดังนั้น สมการปรกติคือ

$$\sum_{i=1}^{n} q_1(x_i)q_j(x_i)c_1 + \sum_{i=1}^{n} q_2(x_i)q_j(x_i)c_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} q_k(x_i)q_j(x_i)c_k = \sum_{i=1}^{n} y_iq_j(x_i) \qquad (5.3.2)$$

เมื่อ $j = 1, 2, \ldots, k$

มีระบบสมการเชิงเส้นซึ่งมี k สมการและมีตัวแปร k ตัว ดังนั้นคาดว่าระบบสมการนี้มีผลเฉลย เมื่อได้ผลเฉลย $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ก็จะได้ฟังก์ชันประมาณค่าดังสมการ (5.3.1)

ตัวอย่างที่ 6 มีข้อมูลดังตาราง

x	0.4	1.1	1.6	2.4	3.0
y	-0.3	0.3	0.1	0.9	0.8

จงหาฟังก์ชันประมาณค่าในแบบ $g(x) = ax^2 + bx + c$

วิธีทำ จาก (5.3.2) ให้ $q_1(x) = x^2,\ q_2(x) = x$ และ $q_3(x) = 1$ สมการปรกติคือ

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4a + \sum_{i=1}^{5} x_i^3b + \sum_{i=1}^{5} x_i^2c = \sum_{i=1}^{5} y_ix_i^2$$
$$\sum_{i=1}^{5} x_i^3a + \sum_{i=1}^{5} x_i^2b + \sum_{i=1}^{5} x_ic = \sum_{i=1}^{5} y_ix_i$$
$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2a + \sum_{i=1}^{5} x_ib + \sum_{i=1}^{5} c = \sum_{i=1}^{5} y_i$$

หาค่าต่าง ๆ ได้ดังตาราง

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	0.4	-0.3	0.16	0.064	0.0256	-0.12	-0.048
2	1.1	0.3	1.21	1.331	1.4641	0.33	0.363
3	1.6	0.1	2.56	4.096	6.5536	0.16	0.256
4	2.4	0.9	5.76	13.824	33.1776	2.16	5.184
5	3.0	0.8	9.00	27.000	81.0000	2.40	7.200
$\sum_{i=1}^{5}$	8.5	1.80	18.69	46.315	122.2209	4.93	12.955

ได้สมการปรกติเป็น

$$\begin{aligned} 122.2209a &+ 46.315b + 18.69c = 12.955 \\ 46.315a &+ 18.69b + 8.5c = 4.93 \\ 18.69a &+ 8.5b + 5c = 1.80 \end{aligned}$$

หาผลเฉลยได้ $a = -0.0753054,\ b = 0.6993136$ และ $c = -0.5473415$
ดังนั้นฟังก์ชันประมาณค่าคือ

$$g(x) = -0.5473415 + 0.6993136x - 0.0753054x^2$$

ตัวอย่างที่ 7 มีข้อมูลดังตาราง

x	-1	-0.5	0	0.5	1
y	-1	0	1	2	1

จงหาฟังก์ชันประมาณค่าในแบบ $g(x) = a\sin(\pi x) + b\cos(\pi x)$
วิธีทำ จาก (5.3.2) ให้ $q_1(x) = \sin(\pi x)$ และ $q_2(x) = \cos(\pi x)$ ดังนั้นสมการปรกติคือ

$$\sum_{i=1}^{5} a\sin^2(\pi x_i) + \sum_{i=1}^{5} b\sin(\pi x_i)\cos(\pi x_i) = \sum_{i=1}^{5} y_i\sin(\pi x_i)$$
$$\sum_{i=1}^{5} a\sin(\pi x_i)\cos(\pi x_i) + \sum_{i=1}^{5} b\cos^2(\pi x_i) = \sum_{i=1}^{5} y_i\cos(\pi x_i)$$

หาค่าต่าง ๆ ได้สมการปรกติเป็น

$$2a + 0\cdot b = 2$$
$$0\cdot a + 3b = 1$$

หาผลเฉลยได้ $a = 1$ และ $b = 0.3333333$
ดังนั้นฟังก์ชันประมาณค่าคือ

$$g(x) = \sin(\pi x) + 0.3333333\cos(\pi x)$$

5.4 บทสรุป

ในบทนี้ ได้ศึกษาวิธีการในการประมาณค่าในช่วงที่เป็นที่นิยมใช้กันโดยทั่วไป ได้แก่ วิธีการที่ใช้พหุนามประมาณค่าแบบนิวตัน พหุนามประมาณค่าแบบกรานจ์ วิธีการประมาณค่าในช่วงด้วยเส้นโค้ง (สไปลน์ดีกรีต่าง ๆ) และวิธีการประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งในแต่ละวิธีดังที่กล่าวมาล้วนแล้วแต่มีข้อดีข้อเสียที่แตกต่างกันออกไป การได้เรียนรู้และเข้าใจในวิธีการต่าง ๆ จะช่วยทำให้ตัดสินใจเลือกใช้วิธีการประมาณค่าที่เหมาะสมกับปัญหาต่าง ๆ ได้

5.5 คำถามทบทวน

1. จากข้อมูลดังตารางในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาพหุนามประมาณค่าแบบนิวตันและประมาณค่า $f(1.1)$

1.1

x	0.5	1.2	2.1
$y = f(x)$	-2.2	1.6	-1.8

1.2

x	0.5	1.0	1.7	2.1
$y = f(x)$	-1.2	0.3	-1.8	1.2

1.3

x	0.2	2.5	3.7	5.6	4.9
$y = f(x)$	1.7	0.8	4.9	-7.7	3.6

2. จงวิเคราะห์ว่า ในข้อ 1 หากต้องการหาคำตอบของสมการ $p(x) = 0.8$ จะมีวิธีการอย่างไร

3. จากข้อมูลดังตารางในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาพหุนามประมาณค่าแบบลากรานจ์

3.1

x	0.5	1.2	2.1
$y = f(x)$	-2.2	1.6	-1.8

3.2

x	0.5	1.0	1.7	2.1
$y = f(x)$	-1.2	0.3	-1.8	1.2

4. จากข้อมูลดังนี้ $f(-0.5) = 1.2,\ f(0.2) = 0.1$ และ $f(1.3) = -1.0$

4.1 จงหาพหุนามประมาณค่าแบบลากรานจ์และจงกระจายให้อยู่ในรูปกำลังของ x

4.2 จงหา $p(0.5)$

5. จากข้อมูลดังนี้ $f(-1.5) = 1.2,\ f(0.2) = 0.1$ และ $f(1.3) = -1.0$

5.1 จงหาพหุนามประมาณค่าในช่วง $p(x)$

5.2 จงใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงกลับทาง หาคำตอบของสมการ $f(x) = 0.5$

6. จากข้อมูลดังตารางต่อไปนี้

x	-2	0	2	3
$y = f(x)$	5	4	3	1

6.1 จงหาพหุนามประมาณค่าในช่วง $p(x)$ และหาค่า $p(1)$

6.2 จงหาพหุนามประมาณค่าในช่วงกลับทาง $q(y)$ เพื่อหาค่า x เมื่อ $y = p(x) = 3.5$

7. จงหาฟังก์ชันสไปลน์ดีกรีสองของข้อมูลดังตารางต่อไปนี้

7.1

x	0.1	0.3	0.6	0.9
$y = f(x)$	0.6	1.8	1.1	0.2

7.2

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y = f(x)$	0.6	1.6	1.1	1.8	2.0	0.9

8. จากข้อมูลดังตาราง

x	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01
$y = f(x)$	0.23	-0.26	-1.1	-0.45	0.27	0.10

8.1 จงหาฟังก์ชันประมาณค่าในแบบ $g(x) = ax + b$

8.2 จงหาฟังก์ชันประมาณค่าในแบบ $g(x) = ax^2 + bx + c$

8.3 จงหาฟังก์ชันประมาณค่าในแบบ $g(x) = a\ln x + b\cos x + c\sin x$

แผนการบริหารการสอนประจำบทที่ 6

หัวข้อเนื้อหา

1. อนุพันธ์เชิงตัวเลข
2. ปริพันธ์จำกัดเขตเชิงตัวเลข

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายเหตุผล และความจำเป็นที่ต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาค่าปริพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขต
2. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายขั้นตอนวิธีของการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข และปริพันธ์จำกัดเขตเชิงตัวเลขได้
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเลือกใช้วิธีที่เหมาะสมในการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข และปริพันธ์จำกัดเขตเชิงตัวเลข

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ผู้สอนบรรยายเนื้อหาที่เกี่ยวกับพื้นฐานในการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชัน รวมทั้งชี้ให้เห็นประเด็นปัญหาต่าง ๆ ที่จำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาช่วยในการแก้ปัญหาเหล่านั้น และอธิบายถึงระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบต่าง ๆ สำหรับหาค่าอนุพันธ์และค่าปริพันธ์จำกัดเขต พร้อมทั้งยกตัวอย่างให้เห็นวิธีการและขั้นตอนในการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเหล่านั้น
2. ผู้สอนมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดวิเคราะห์ในปัญหาต่าง ๆ
3. ผู้สอนให้ทำแบบทดสอบย่อยในช่วงท้ายชั่วโมง เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำโจทย์ปัญหาในเรื่องที่ได้เรียนรู้มา อีกทั้งยังเป็นการให้ผู้เรียนได้มีโอกาสซักถามหากมีประเด็นข้อสงสัยเพิ่มเติม
4. มีการมอบหมายแบบฝึกหัดให้ผู้เรียนได้ทำเป็นการบ้าน
5. มีการมอบหมายหัวข้อให้ผู้เรียนได้ไปอ่านล่วงหน้า

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคิดเลข

3. แบบทดสอบย่อย

4. แบบฝึกหัด

การวัดผลและการประเมินผล

1. ความตรงต่อเวลา และความตั้งใจในระหว่างเรียน
2. ให้ทำแบบทดสอบย่อยท้ายชั่วโมง
3. ให้แบบฝึกหัดไปทำเป็นการบ้าน

บทที่ 6
อนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข

6.1 อนุพันธ์เชิงตัวเลข

การหาค่าอนุพันธ์เป็นเรื่องสำคัญเรื่องหนึ่งในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีบทประยุกต์มากมายหลายเรื่องที่จำเป็นต้องหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ที่จริงการหาฟังก์ชันอนุพันธ์ $f'(x)$ กระทำได้ไม่ยากถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ ประกอบด้วยฟังก์ชันพื้นฐาน (เช่น ฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติ หรือฟังก์ชัน $\log$ ฯลฯ) ทั้งนี้เพราะมีสูตรที่จะหาอยู่แล้ว แต่ในกรณีเมื่อฟังก์ชันอยู่ในรูปที่ยุ่งยากหรือเมื่อทราบแต่เพียงค่าของฟังก์ชันที่บางจุดเท่านั้น จึงจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาช่วย

วิธีการโดยทั่วไปสำหรับหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ทราบค่าเพียงบางจุดเท่านั้นก็คือ หาฟังก์ชันประมาณค่า เช่น พหุนามหรือสไปลน์ดีกรีต่าง ๆ แล้วจึงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประมาณค่านั้นแทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน แต่มีข้อควรระวังอยู่ว่าการใช้พหุนามประมาณค่าในการหาอนุพันธ์จะเกิดความคลาดเคลื่อนมากถ้ามีจำนวนจุดมากเกินไปและใช้พหุนามดีกรีสูง ดังนั้นสำหรับฟังก์ชันที่ทราบค่าเพียงบางจุดควรจะใช้พหุนามดีกรีต่ำ (ไม่ควรเกินดีกรีสาม) เป็นฟังก์ชันประมาณค่า เช่น สไปลน์ดีกรีสองหรือฟังก์ชันที่ได้มาโดยวิธีกำลังน้อยที่สุด ค่าอนุพันธ์ที่ได้จากพหุนามดีกรีต่ำนี้จะเป็นค่าประมาณของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ใกล้เคียงเป็นที่น่าพอใจ

ทบทวนนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังนี้ ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด a เขียนแทนด้วย $f'(a)$ นิยามดังนี้

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

เมื่อเขียน $f'(x)$ จะหมายถึงฟังก์ชันที่เป็นอนุพันธ์ของ f ที่จุด x ใด ๆ บางทีใช้สัญลักษณ์ $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = f(x)$

ลำดับถัดไปจะแสดงวิธีการหาอนุพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (อำพล ธรรมเจริญ, 2553)

เริ่มต้นที่พิจารณาจุด $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ ในช่วง $[a, b]$ (เรียก x_i ว่าจุดโหนด) และค่าของฟังก์ชัน $y_i = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$ พหุนามประมาณค่าในช่วงของฟังก์ชันคือ

$$p(x) = p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x)$$

เมื่อ $a_k = y_{123\ldots k}$ และ $\psi_k(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)$

ดังนั้น

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \psi'_k(x) \tag{6.1}$$

เมื่อ

$$\psi'_k(x) = \sum_{i=1}^{k} (x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\psi_k(x)}{x - x_i} \tag{6.2}$$

ถ้าหาค่าอนุพันธ์ที่จุดโหนด x_i เมื่อ $1 \leq i \leq n-1$ จะได้ว่าค่า $\psi_n(x_i) = 0$ และได้ว่า

$$\psi'_k(x_i) = (x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_k) \;\; \text{เมื่อ} \;\; i \leq k$$

และ

$$\psi'_k(x_i) = \sum_{j=1}^{k} (x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{j-1})(x_i - x_{j+1})\cdots(x_i - x_k) \;\; \text{เมื่อ} \;\; i > k$$

ดังนั้น

$$p'(x_i) = y_{12} + y_{123}\psi'_2(x_i) + \cdots + y_{123\ldots n}\psi'_{n-1}(x_i) \tag{6.3}$$

ถ้าจุดโหนด x_i เรียงลำดับจากน้อยไปมากและแบ่งช่วงออกเท่า ๆ กัน คือ

$$h = x_{i+1} - x_i, \; i = 1, 2, \ldots, n-1$$

จะได้

$$(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n) = (i-1)!(n-i)!(-1)^{n-i}h^{n-1}$$

ดังนั้น

$$\psi'_k(x_i) = (i-1)!(k-i)!(-1)^{k-i}h^{k-1} \;\; \text{เมื่อ} \;\; i \leq k$$

$$\psi'_k(x_i) = \sum_{i=1}^{k} (i-1)!(k-i)!(-1)^{k-i}h^{k-1} \;\; \text{เมื่อ} \;\; i > k$$

ได้อนุพันธ์ตามสมการ (6.3) ดังตัวอย่างเช่น ถ้า $i = 1$ จะได้

$$p'(x_1) = y_{12} - y_{123}h + 2y_{1234}h^2 - 3y_{12345}h^3 + \cdots + (-1)^n(n-2)!y_{123\ldots n}h^{n-2} \tag{6.4}$$

ซึ่งจะพบว่า $y_{123\ldots k} = \dfrac{\Delta^{k-1}f_1}{(k-1)!h^{k-1}}$ แทนค่าจะได้

$$p'(x_1) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_1 - \frac{\Delta^2 f_1}{2} + \frac{\Delta^3 f_1}{3} - \frac{\Delta^4 f_1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{\Delta^{n-1} f_1}{n-1}\right] \tag{6.5}$$

สูตร (6.5) นี้เรียกว่า *ผลต่างข้างหน้า* (forward-difference) โดยสรุปเป็นสูตรในกรณีต่าง ๆ ได้ดังนี้

กรณีใช้สองจุด คือ $x_1 = a,\ x_2 = a + h$ และ $\Delta f = f(a+h) - f(a)$ จาก (6.5) จะได้

$$f'(a) \approx p'(a) = \frac{1}{h}\Delta f = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{6.6}$$

สูตรนี้มีแบบคล้ายกับนิยามของอนุพันธ์

กรณีใช้สามจุด คือ $x_1 = a,\ x_2 = a + h$ และ $x_3 = a + 2h$ จะได้ว่า

$$\Delta^2 f = f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)$$

จาก (6.5) จะได้

$$p'(a) = \frac{1}{h}\left(\Delta f - \frac{\Delta^2 f}{2}\right) = \frac{f(a+h) - f(a) - \dfrac{f(a+2h)}{2} + f(a+h) - \dfrac{f(a)}{2}}{h}$$

ดังนั้น

$$f'(a) \approx p'(a) = \frac{4f(a+h) - 3f(a) - f(a+2h)}{2h} \tag{6.7}$$

สูตร (6.6) และ (6.7) ยังคงเรียกว่า สูตรผลต่างข้างหน้า

ถ้าให้ $x_1 = a - h,\ x_2 = a$ และ $x_3 = a + h$ จะได้

$$p'(a) = y_{12} + y_{123}\psi_2'(a) = \frac{f(a) - f(a-h)}{2h} + \frac{[f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)]\,h}{2h^2}$$

ดังนั้น

$$f'(a) \approx p'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \tag{6.8}$$

สูตร (6.8) นี้มีชื่อว่า *สูตรผลต่างส่วนกลาง* (central-difference)

ความชันของเส้นสัมผัสคือค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ประมาณค่าโดยสูตร (6.6) (6.7) และ (6.8) ซึ่งเป็นสูตรที่ใช้ได้กับฟังก์ชันทั่วไป สำหรับสูตร (6.8) เป็นที่นิยมใช้เพราะว่ามีความคลาดเคลื่อนน้อย และใช้แรงงานน้อย นั่นคือหาค่าของฟังก์ชันเพียงสองค่า

สำหรับการหาอนุพันธ์อันดับสอง กระทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของ $p'(x)$ ในสมการ (6.3) และพิจารณากรณีเฉพาะเช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว ได้สูตรของอนุพันธ์อันดับสอง ดังนี้

$$f''(a) \approx p''(a) = \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} \tag{6.9}$$

และอีกสูตรหนึ่งคือสูตรผลต่างส่วนกลาง ได้สูตรดังนี้

$$f''(a) \approx p''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \tag{6.10}$$

หมายเหตุ สูตร (6.10) เป็นที่นิยมใช้มากกว่าสูตร (6.9)

ตัวอย่างที่ 1 จะแสดงการใช้สูตรต่าง ๆ ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = e^x$ ที่จุด $x = 1$ (ค่าอนุพันธ์ที่ถูกต้องคือ $e \approx 2.7182818$)

กำหนด $h = 0.5$

โดยใช้สูตรผลต่างข้างหน้าสองจุด (6.6) จะได้

$$\begin{aligned} f'(1) \approx p'(1) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{f(1.5) - f(1)}{0.5} \\ &= \frac{e^{1.5} - e^1}{0.5} \\ &= 3.5268145 \end{aligned}$$

โดยใช้สูตรผลต่างข้างหน้าสามจุด (6.7) จะได้

$$\begin{aligned} f'(1) \approx p'(1) &= \frac{4f(1+h) - 3f(1) - f(1+2h)}{2h} \\ &= \frac{4f(1.5) - 3f(1) - f(2)}{2(0.5)} \\ &= 4e^{1.5} - 3e^1 - e^2 \\ &= 2.3828547 \end{aligned}$$

โดยใช้สูตรผลต่างส่วนกลาง (6.8) จะได้

$$\begin{aligned} f'(1) \approx p'(1) &= \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} \\ &= \frac{f(1.5) - f(0.5)}{2(0.5)} \\ &= e^{1.5} - e^{0.5} \\ &= 2.8329678 \end{aligned}$$

หมายเหตุ หากกำหนด $h = 0.0625$ แล้วกระทำตามตัวอย่างที่ 1 จะพบว่าค่าที่ได้ใกล้เคียงกับค่าอนุพันธ์ที่ถูกต้องมากยิ่งขึ้น จึงอาจสรุปได้ว่า ยิ่งกำหนดค่า h ให้น้อยเพียงใด ค่าอนุพันธ์ที่ได้จะยิ่งใกล้เคียงกับค่าที่ถูกต้องมากเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดค่าของฟังก์ชันดังตาราง

x	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
$y = f(x)$	1.1	1.2	1.8	1.5	2.0

จะประมาณค่า $f'(0.4)$ ดังนั้นให้ $a = 0.4$ และจากข้อมูลตามตารางจะได้ $h = 0.2$ ดังนั้น

โดยใช้สูตรผลต่างข้างหน้าสองจุด จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(0.4) &\approx \frac{f(0.4+h) - f(0.4)}{h} \\ &= \frac{f(0.6) - f(0.4)}{0.2} \\ &= \frac{1.5 - 1.8}{0.2} \\ &= -1.5 \end{aligned}$$

โดยใช้สูตรผลต่างข้างหน้าสามจุด จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(0.4) &\approx \frac{4f(0.4+h) - 3f(0.4) - f(0.4+2h)}{2h} \\ &= \frac{4f(0.6) - 3f(0.4) - f(0.8)}{0.4} \\ &= \frac{4(1.5) - 3(1.8) - 2.0}{0.4} \\ &= -3.5 \end{aligned}$$

โดยใช้สูตรผลต่างส่วนกลาง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(0.4) &\approx \frac{f(0.4+h) - f(0.4-h)}{2h} \\ &= \frac{f(0.6) - f(0.2)}{0.4} \\ &= \frac{1.5 - 1.2}{0.4} \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

จะพบว่าค่าอนุพันธ์ที่ได้ในแต่ละสูตรมีความแตกต่างกันมาก

6.2 ปริพันธ์จำกัดเขตเชิงตัวเลข

ในหัวข้อนี้จะเป็นการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตที่อยู่ในรูป $\int_a^b f(x)dx$ ซึ่งการคำนวณปริพันธ์นี้ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ยุ่งยากนักก็ใช้วิธีการหาปริพันธ์โดยตรง แต่ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ยุ่งยากมาก เช่น $\int_a^b e^{-x^2}dx$ การหาปริพันธ์โดยตรงทำได้ยากจึงต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขช่วย นอกจากนี้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจะเป็นที่นิยมใช้สำหรับการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ เพราะเครื่องคอมพิวเตอร์ไม่สามารถคำนวณการหาปริพันธ์ได้แม้ฟังก์ชัน $f(x)$ จะอยู่ในแบบที่ง่ายก็ตาม (อำพล ธรรมเจริญ, 2553)

6.2.1 กฎพื้นฐานในการประมาณค่าปริพันธ์

จะประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขต

$$\int_a^b f(x)dx$$

โดยวิธีการเชิงตัวเลข จะแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย ๆ n ช่วง โดยกำหนดจุดต่าง ๆ ดังนี้

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

ให้ A_i เป็นค่าประมาณของปริพันธ์ในช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ จะได้ค่าประมาณของปริพันธ์คือ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i \tag{6.11}$$

ในการหาค่าประมาณของ A_i ในแต่ละช่วงย่อย ถ้าหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า $A_i = f(x_{i-1})h_i$ สูตรมีชื่อว่า *กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า* (rectangle rule) นั่นคือสูตรจะเป็นดังนี้

$$A_i = f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = f(x_{i-1})h_i \tag{6.12}$$

เมื่อ $h_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, n$

ถ้าหาพื้นที่ของ $A_i = f(\xi_i)h_i$ โดยที่ ξ_i เป็นจุดกึ่งกลางของช่วง นั่นคือ $\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \dfrac{h_i}{2}$ สูตรนี้มีชื่อว่า *กฎจุดกึ่งกลาง* (midpoint rule) สูตรจะเป็นดังนี้

$$A_i = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) = f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}\right)h_i \tag{6.13}$$

ในกรณีที่ประมาณค่าของ A_i โดยใช้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู จะได้สูตรของ A_i ซึ่งเรียกว่า *กฎสี่เหลี่ยมคางหมู* (trapezoidal rule) ดังนี้

$$A_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) = [f(x_{i-1}) + f(x_i)]\frac{h_i}{2} \tag{6.14}$$

สูตรสุดท้ายที่จะกล่าวถึงเรียกว่า *กฎของซิมป์สัน* (Simpson's rule) เป็นสูตรสำหรับหาค่าปริพันธ์โดยใช้พหุนามดีกรีสองที่ผ่านจุดสามจุดประมาณค่าของฟังก์ชัน แล้วจึงหาปริพันธ์ของพหุนามดีกรีสองนั้น สูตรจะเป็นดังนี้

$$A_i = \frac{h_i}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}\right) + f(x_i)\right] \tag{6.15}$$

ในการคำนวณค่าประมาณของปริพันธ์ จะรวมค่า A_i ทุก ๆ ค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ ก็จะได้ค่าประมาณตามต้องการ แต่ในทางปฏิบัติควรหาสูตรสำเร็จของการรวมค่า A_i ไว้ก่อน ซึ่งจะกล่าวไว้ในเรื่องกฎสูตรรวม (composite rule) การใช้กฎสูตรรวมจะช่วยประหยัดแรงงานในขั้นตอนการคำนวณเพราะในสูตรคำนวณ A_i ต้องมีการคูณด้วย h ทุกครั้งแล้วจึงบวกกัน แต่ในกฎสูตรรวมเป็นการบวกกันก่อนที่จะคูณด้วย h เพียงครั้งเดียว

6.2.2 กฎสูตรรวม

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ จะประมาณค่าปริพันธ์โดยสูตรรวมดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i$$

วิธีการคือ จะแบ่งช่วง $[a, b]$ เป็น n ช่วง เพื่อความสะดวกจะแบ่งให้ช่วงเท่า ๆ กัน ให้ $x_0 = a,\ x_n = b$ และ $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$ เป็นจุดแบ่ง และให้ h เป็นระยะในแต่ละช่วง ดังนั้น

$$h = \frac{b-a}{n} \ \text{ และ } \ x_i = a + hi,\ i = 0, 1, \ldots, n$$

โดยใช้กฎพื้นฐานต่าง ๆ ดังที่ได้กล่าวมา จะได้กฎสูตรรวมแบบต่าง ๆ ดังนี้

โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า (6.12) จะได้

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})h \\ &= h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \\ &= h\left(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right) \qquad (6.16)\end{aligned}$$

โดยกฎจุดกึ่งกลาง (6.13) จะได้

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)h$$

$$= h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)$$

$$= h\left(f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\cdots+f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right) \tag{6.17}$$

โดยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (6.14) จะได้

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$$

$$= h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right) \tag{6.18}$$

โดยกฎของซิมป์สัน (6.15) จะได้

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{6}\left[f(x_{i-1})+4f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)+f(x_i)\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left(2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+4\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)+f(a)+f(b)\right) \tag{6.19}$$

$$= \frac{h}{6}\left(f(x_0)+4f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+2f(x_1)+\cdots+4f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)+f(x_n)\right)$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต

$$\int_0^1 e^x dx$$

โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบต่าง ๆ เพื่อเปรียบเทียบกัน (คำตอบที่ถูกต้องคือ $e-1 \approx 1.7182818$)

วิธีทำ ในที่นี้ $f(x) = e^x$ จากนั้นแบ่งช่วง $[0,1]$ ออกเป็น 5 ช่วงเท่า ๆ กัน นั่นคือให้ $n = 5$ ดังนั้น จะได้ความกว้างในแต่ละช่วงคือ $h = \dfrac{1-0}{5} = 0.2$ และกำหนดจุดต่าง ๆ ดังนี้

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1$$

กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า จากกฎสูตรรวม (6.16) จะได้

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x dx &\approx h\left(f(0)+f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)\right)\\ &= (0.2)\left(e^0+e^{0.2}+e^{0.4}+e^{0.6}+e^{0.8}\right)\\ &= 1.5521774\end{aligned}$$

กฎจุดกึ่งกลาง จากกฎสูตรรวม (6.17) จะได้

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x dx &\approx h\left(f(0.1)+f(0.3)+f(0.5)+f(0.7)+f(0.9)\right)\\ &= (0.2)\left(e^{0.1}+e^{0.3}+e^{0.5}+e^{0.7}+e^{0.9}\right)\\ &= 1.7154214\end{aligned}$$

กฎสี่เหลี่ยมคางหมู จากกฎสูตรรวม (6.18) จะได้

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x dx &\approx \frac{h}{2}\left(f(0)+2f(0.2)+2f(0.4)+2f(0.6)+2f(0.8)+f(1.0)\right)\\ &= (0.1)\left(e^0+2e^{0.2}+2e^{0.4}+2e^{0.6}+2e^{0.8}+e^{1.0}\right)\\ &= 1.7240056\end{aligned}$$

กฎของซิมป์สัน จากกฎสูตรรวม (6.19) จะได้

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x dx &\approx \frac{h}{6}\left(f(0)+4f(0.1)+2f(0.2)+4f(0.3)+2f(0.4)+4f(0.5)+2f(0.6)\right.\\ &\qquad \left.+4f(0.7)+2f(0.8)+4f(0.9)+f(1.0)\right)\\ &= \left(\frac{0.2}{6}\right)\left(e^0+4e^{0.1}+2e^{0.2}+4e^{0.3}+2e^{0.4}+4e^{0.5}+2\,e^{0.6}+4e^{0.7}+2e^{0.8}\right.\\ &\qquad \left.+4e^{0.9}+e^{1.0}\right)\\ &= 1.7182828\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต

$$\int_0^{0.6} 3+x\tan x\,dx$$

โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (กำหนด $n=3$)

วิธีทำ กำหนด $f(x)=3+x\tan x$ จาก $n=3$ จะได้ค่า $h=\dfrac{0.6-0}{3}=0.2$ และกำหนดจุดต่าง ๆ ดังนี้

$$x_0=0,\ x_1=0.2,\ x_2=0.4,\ x_3=0.6$$

กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า จากกฎสูตรรวม (6.16) จะได้

$$\begin{aligned}\int_0^{0.6} 3 + x\tan x\,dx &\approx h\left(f(0) + f(0.2) + f(0.4)\right)\\ &= (0.2)\left(3 + (0)\tan(0) + 3 + (0.2)\tan(0.2) + 3 + (0.4)\tan(0.4)\right)\\ &= 1.8419319\end{aligned}$$

กฎจุดกึ่งกลาง จากกฎสูตรรวม (6.17) จะได้

$$\begin{aligned}\int_0^{0.6} 3 + x\tan x\,dx &\approx h\left(f(0.1) + f(0.3) + f(0.5)\right)\\ &= (0.2)\left(3 + (0.1)\tan(0.1) + 3 + (0.3)\tan(0.3) + 3 + (0.5)\tan(0.5)\right)\\ &= 1.8751971\end{aligned}$$

กฎสี่เหลี่ยมคางหมู จากกฎสูตรรวม (6.18) จะได้

$$\begin{aligned}\int_0^{0.6} 3 + x\tan x\,dx &\approx \frac{h}{2}\left(f(0) + 2f(0.2) + 2f(0.4) + f(0.6)\right)\\ &= (0.1)\left(3 + (0)\tan(0) + 2(3 + (0.2)\tan(0.2)) + 2(3 + (0.4)\tan(0.4))\right.\\ &\qquad \left. +3 + (0.6)\tan(0.6)\right)\\ &= 1.8829801\end{aligned}$$

กฎของซิมป์สัน จากกฎสูตรรวม (6.19) จะได้

$$\begin{aligned}\int_0^{0.6} 3 + x\tan x\,dx &\approx \frac{h}{6}\left(f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + 4f(0.3) + 2f(0.4) + 4f(0.5)\right.\\ &\qquad \left. +f(0.6)\right)\\ &= \left(\frac{0.2}{6}\right)\left(3 + (0)\tan(0) + 4(3 + (0.1)\tan(0.1)) + 2(3 + (0.2)\tan(0.2))\right.\\ &\qquad + 4(3 + (0.3)\tan(0.3)) + 2(3 + (0.4)\tan(0.4))\\ &\qquad \left. +4(3 + (0.5)\tan(0.5)) + 3 + (0.6)\tan(0.6)\right)\\ &= 1.8777914\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต

$$\int_{0.2}^{1.4} 5x^2\cos x\,dx$$

โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (กำหนด $n = 4$)

วิธีทำ กำหนด $f(x) = 5x^2 \cos x$ จาก $n = 4$ จะได้ค่า $h = \dfrac{1.4 - 0.2}{4} = 0.3$ และกำหนดจุดต่าง ๆ ดังนี้

$$x_0 = 0.2,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 0.8,\ x_3 = 1.1,\ x_4 = 1.4$$

กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า จากกฎสูตรรวม (6.16) จะได้

$$\begin{aligned}\int_{0.2}^{1.4} 5x^2 \cos x\, dx &\approx h\left(f(0.2) + f(0.5) + f(0.8) + f(1.1)\right)\\ &= (0.3)\big(5(0.2)^2\cos(0.2) + 5(0.5)^2\cos(0.5) + 5(0.8)^2\cos(0.8)\\ &\qquad +5(1.1)^2\cos(1.1)\big)\\ &= 1.8800129\end{aligned}$$

กฎจุดกึ่งกลาง จากกฎสูตรรวม (6.17) จะได้

$$\begin{aligned}\int_{0.2}^{1.4} 5x^2 \cos x\, dx &\approx h\left(f(0.35) + f(0.65) + f(0.95) + f(1.25)\right)\\ &= (0.3)\big(5(0.35)^2\cos(0.35) + 5(0.65)^2\cos(0.65) + 5(0.95)^2\cos(0.95)\\ &\qquad +5(1.25)^2\cos(1.25)\big)\\ &= 2.2036181\end{aligned}$$

กฎสี่เหลี่ยมคางหมู จากกฎสูตรรวม (6.18) จะได้

$$\begin{aligned}\int_{0.2}^{1.4} 5x^2 \cos x\, dx &\approx \frac{h}{2}\left(f(0.2) + 2f(0.5) + 2f(0.8) + 2f(1.1) + f(1.4)\right)\\ &= (0.15)\big(5(0.2)^2\cos(0.2) + 10(0.5)^2\cos(0.5) + 10(0.8)^2\cos(0.8)\\ &\qquad +10(1.1)^2\cos(1.1) + 5(1.4)^2\cos(1.4)\big)\\ &= 2.1004626\end{aligned}$$

กฎของซิมป์สัน จากกฎสูตรรวม (6.19) จะได้

$$\begin{aligned}\int_{0.2}^{1.4} 5x^2 \cos x\, dx &\approx \frac{h}{6}\big(f(0.2) + 4f(0.35) + 2f(0.5) + 4f(0.65) + 2f(0.8) + 4f(0.95)\\ &\qquad +2f(1.1) + 4f(1.25) + f(1.4)\big)\\ &= \left(\frac{0.3}{6}\right)\big(5(0.2)^2\cos(0.2) + 20(0.35)^2\cos(0.35) + 10(0.5)^2\cos(0.5)\\ &\qquad + 20(0.65)^2\cos(0.65) + 10(0.8)^2\cos(0.8) + 20(0.95)^2\cos(0.95)\\ &\qquad +10(1.1)^2\cos(1.1) + 20(1.25)^2\cos(1.25) + 5(1.4)^2\cos(1.4)\big)\\ &= 2.1692329\end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ 5 สามารถสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยใช้โปรแกรมภาษา SCILAB ได้ดังนี้

```
function []=ProINT(n)
a=0.2;b=1.4;
u0=0;u1=0;v0=0;v1=0;
h=(b-a)/n;
for i=1:n
        u0=5*a^2*cos(a);
        u1=u1+u0*h;
        v0=5*(a+h/2)^2*cos(a+h/2);
        v1=v1+v0*h;
        a=a+h;
end
a=0.2;
t1=(h/2)*(5*a^2*cos(a)+5*b^2*cos(b));
s1=h*5*(a+h/2)^2*cos(a+h/2);
for i=1:n-1
        x=a+i*h;
        t=5*x^2*cos(x);
        t1=t1+t*h;
        s=5*(x+h/2)^2*cos(x+h/2);
        s1=s1+s*h;
end
s1=(t1+2*s1)/3;
printf(' Rectangle: %3.7f, Midpoint: %3.7f, Trapezoidel: %3.7f,
        Simpson: %3.7f\n",u1,v1,t1,s1);
endfunction
```

ตัวอย่างการใช้งานชุดคำสั่งและผลลัพธ์ที่ได้

```
-->getf('ProINT.sci')
-->ProINT(4)                //หมายถึง กำหนดจำนวนช่วง n = 4
   Rectangle: 1.8800129, Midpoint: 2.2036181, Trapezoidel: 2.1004626,
   Simpson: 2.1692329
```

6.3 บทสรุป

ในบทนี้ได้ศึกษาวิธีการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข และปริพันธ์จำกัดเขตเชิงตัวเลขสำหรับฟังก์ชันใด ๆ ในหลาย ๆ วิธีการ ซึ่งเป็นวิธีการที่นิยมใช้กันโดยทั่วไป โดยได้แสดงให้เห็นแนวคิดและวิธีการได้มาของสูตรต่าง ๆ ในแต่ละวิธีการด้วย เพื่อให้ได้เรียนรู้และสามารถนำไปพัฒนาสร้างสูตรใหม่ ๆ ต่อไปได้ โดยทั่วไปสูตรในแต่ละวิธีการจะให้ผลลัพธ์ที่มีความคลาดเคลื่อนที่แตกต่างกัน ดังนั้น การได้เรียนรู้และเข้าใจสูตรเหล่านั้นจึงมีความสำคัญ จะช่วยให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงและความแม่นยำมากยิ่งขึ้น

6.4 คำถามทบทวน

1. กำหนดข้อมูลค่าของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่จุดต่าง ๆ ดังตาราง

x	0.4	1.1	1.6	2.4	3.0
y	-0.3	0.3	0.1	0.9	0.8

จงประมาณค่า $f'(0.4)$ และ $f'(2.0)$

2. กำหนดข้อมูลค่าของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่จุดต่าง ๆ ดังตาราง

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	0.6	1.6	1.1	1.8	2.0	0.9

จงประมาณค่า $f'(0.4)$ และ $f''(0.2)$

3. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ จงประมาณค่า $f'(1)$ โดยใช้สูตรผลต่างส่วนกลาง ให้ $h = 0.2$ พร้อมทั้งอธิบายผลที่ได้ (เทียบกับค่าอนุพันธ์จริง)

4. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า กฎจุดกึ่งกลาง กฎสี่เหลี่ยมคางหมู และกฎของซิมป์สันเพื่อเปรียบเทียบกัน

4.1 $\int\limits_1^2 x \ln x dx,\ n = 5$

4.2 $\int\limits_0^3 \dfrac{2}{x^2+4} dx,\ n = 5$

4.3 $\int\limits_0^2 e^{2x} \sin(3x) dx,\ n = 5$

4.4 $\int\limits_0^2 e^{x^2} dx,\ n = 8$

4.5 $\int\limits_0^1 xe^{x^2} dx,\ n = 4$

5. จงแสดงว่า $\int_{0}^{2} 6x - 3x^2 dx = 4$ (หาปริพันธ์โดยตรง) แล้วจงใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหาค่าปริพันธ์โดยวิธีต่าง ๆ และสุดท้ายให้วิเคราะห์ว่าวิธีใดมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด จงให้เหตุผลประกอบด้วย

5.1 โดยกฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า

5.2 โดยกฎจุดกึ่งกลาง

5.3 โดยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

5.4 โดยกฎของซิมป์สัน

แผนการบริหารการสอนประจำบทที่ 7

หัวข้อเนื้อหา

1. ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์
2. ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายเหตุผล และความจำเป็นที่ต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีของเทย์เลอร์ และระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา ในการหาผลเฉลยของของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยใช้ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์และระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. ผู้สอนบรรยายเนื้อหาที่เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และวิธีการเบื้องต้นในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ตลอดจนระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลย และยกตัวอย่างให้เห็นขั้นตอนและวิธีการของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบต่าง ๆ ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. ผู้สอนมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดวิเคราะห์ในปัญหาต่าง ๆ
3. ผู้สอนให้ทำแบบทดสอบย่อยในช่วงท้ายชั่วโมง เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำโจทย์ปัญหาในเรื่องที่ได้เรียนรู้มา อีกทั้งยังเป็นการให้ผู้เรียนได้มีโอกาสซักถามหากมีประเด็นข้อสงสัยเพิ่มเติม
4. มีการมอบหมายแบบฝึกหัดให้ผู้เรียนได้ทำเป็นการบ้าน
5. มีการมอบหมายหัวข้อให้ผู้เรียนได้ไปอ่านล่วงหน้า

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. เครื่องคิดเลข

3. แบบทดสอบย่อย

4. แบบฝึกหัด

การวัดผลและการประเมินผล

1. ความตรงต่อเวลา และความตั้งใจในระหว่างเรียน
2. ให้ทำแบบทดสอบย่อยท้ายชั่วโมง
3. ให้แบบฝึกหัดไปทำเป็นการบ้าน

บทที่ 7
ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้นซึ่งกำหนดโดยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น ดังนี้

$$y' = f(x,y), x \geq x_0$$

$$y(x_0) = y_0$$

ในการหาผลเฉลย $y(x)$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น ถ้าปัญหานี้มีผลเฉลยฟังก์ชัน $y = y(x)$ จะเป็นผลเฉลยที่แม่นตรง (exact solution) ของปัญหาดังกล่าว วิธีการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นโดยวิธีตรงนั้นได้เคยศึกษามาแล้ว สำหรับวิธีเชิงตัวเลขนั้นจะนำเสนอวิธีการดังนี้ กำหนดจุด $x_1, x_2, x_3, \ldots$ และหาค่าของ $y(x_i), i = 1,2,3,\ldots$ เป็นผลเฉลย กล่าวคือ ผลเฉลยจะเป็นตัวเลขซึ่งเป็นค่าของฟังก์ชันซึ่งค่าที่ได้เป็นเพียงค่าประมาณเท่านั้น

ให้ y_i เป็นค่าประมาณของ $y(x_i)$ เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots$ จากที่กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นจะได้ $y_0 = y(x_0)$ ลำดับถัดไปจะเป็นการหาสูตรที่จะให้ค่าของ $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ซึ่งในเอกสารเล่มนี้จะนำเสนอเพียง 2 ระเบียบวิธี นั่นคือ ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์ (Taylor series method) และระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta method) ซึ่งผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง (อำพล ธรรมเจริญ, 2553) และ (Burden & Faires, 2005)

7.1 ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์

สมมุติว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้หลาย ๆ ครั้งในบริเวณหนึ่งที่ครอบคลุมจุด (x_0, y_0) และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณนี้ ถ้าฟังก์ชัน $y(x)$ เป็นผลเฉลยที่แม่นตรงของปัญหาค่าเริ่มต้นจะกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $y(x)$ รอบจุด x_0 ได้ดังนี้

$$y(x) = y\left(x_0\right) + \left(x - x_0\right) y'\left(x_0\right) + \frac{y''\left(x_0\right)}{2}\left(x - x_0\right)^2 + \cdots + \frac{y^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x - x_0\right)^k + R$$

เมื่อ $R = \frac{y^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}\left(x - x_0\right)^{k+1}$, $x_0 < \xi < x$ หรือ $x < \xi < x_0$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$ หาอนุพันธ์ $y'', y''', \ldots$ ได้ดังนี้

$$y'' = f'(x,y) = f_x + y' f_y = f_x + f \cdot f_y$$

$$y''' = f''(x,y) = f_{xx} + y' f_{xy} + y'\left(f_{yx} + y' f_{yy}\right) + y'' f_y$$

นั่นคือ

$$y''' = f_{xx} + 2f \cdot f_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + f \cdot f_y^2$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับสูงกว่านี้ก็กระทำได้ในลักษณะเดียวกันนี้ ซึ่งสูตรที่ได้ก็จะยุ่งยากมากขึ้นตามเช่นกัน จากนี้หาค่าที่จุด x_0 แล้วแทนในอนุกรม จะได้ค่า $y(x)$ ถ้าให้ $x - x_0 = h$ จะได้ค่า $y(x_0 + h)$ เป็น

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{y''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}h^k$$

จะเห็นว่าได้ค่าประมาณของ y ที่จุด $x_1 = x_0 + h$ ต่อไปโดยใช้จุดนี้จะสามารถประมาณค่าของ $y(x_1 + h)$ ได้อีกดังสูตรเดิม ระเบียบวิธีดังกล่าวนี้เรียกว่า *ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์อันดับ* k ในกรณีทั่วไปสูตรจะเป็นดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 + \cdots + \frac{y^{(k)}(x_i)}{k!}h^k,\ i = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.1}$$

เมื่อ y_i เป็นค่าประมาณของ $y(x_i)$ โดยทั่วไปนิยมใช้แค่อันดับ 4 ($k = 4$)

ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นโดยให้ผลเฉลยอยู่ในช่วงที่กำหนด สมมุติว่าเป็นช่วง $[a, b]$ โดยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $y(a) = y_0$ จะทำการแบ่งช่วงออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงกว้าง h ดังนั้น $h = \dfrac{b-a}{n}$ ถ้าให้ $x_0 = a$ จะได้

$$x_{i+1} = x_i + h,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

หรือ $x_{i+1} = x_0 + ih,\ i = 1, 2, \ldots, n$ และได้ $x_n = b$ คำนวณค่า y_{i+1} ดังสูตร (7.1) ทุกค่าของ i ก็จะได้ผลเฉลยตามต้องการ

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีของเทย์เลอร์

กำหนดให้ปัญหาค่าเริ่มต้นมีสมการและเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็นดังนี้

$$y' = f(x, y),\ a \le x \le b \text{ และ } y(a) = y_0$$

1. กำหนดค่า n ที่เหมาะสม ให้ $x_0 = a$ และ $h = \dfrac{b-a}{n}$ (ค่า h ควรน้อยกว่า 1)

2. สำหรับ $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ คำนวณค่า

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i, y_i) + \cdots + \frac{h^k}{k!}f^{(k-1)}(x_i, y_i)$$

และ $x_{i+1} = x_i + h$

หมายเหตุ ในกรณีที่โจทย์ไม่กำหนดค่า b ก็จะต้องกำหนดค่า h ขึ้นมาเอง และควรจะต้องสอดคล้อง $|h| < 1$ เพื่อให้ค่าคลาดเคลื่อนมีค่าน้อย

ตัวอย่างที่ 1 จงใช้ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' = x - 2xy,\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 1$$

วิธีทำ จากสูตร (7.1) เมื่อ $k = 4$ จะได้

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2}y_i'' + \frac{h^3}{6}y_i''' + \frac{h^4}{24}y_i^{(4)}, i = 0, 1, 2, \ldots$$

กำหนด $n = 4,\ x_0 = 0$ และได้ $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{4} = 0.25$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่โจทย์กำหนด หาอนุพันธ์เทียบกับ x และแทนค่าได้ดังนี้

<u>รอบที่ 1</u>

$$\begin{aligned}
y' &= x - 2xy & &\Rightarrow & y_0' &= 0 - 2(0)(1) = 0\\
y'' &= 1 - 2y - 2xy' & &\Rightarrow & y_0'' &= 1 - 2(1) - 2(0)(0) = -1\\
y''' &= -4y' - 2xy'' & &\Rightarrow & y_0''' &= -4(0) - 2(0)(-1) = 0\\
y^{(4)} &= -6y'' - 2xy''' & &\Rightarrow & y_0^{(4)} &= -6(-1) - 2(0)(0) = 6
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \frac{h^3}{6}y_0''' + \frac{h^4}{24}y_0^{(4)}\\
&= 1 + (0.25)(0) + \frac{(0.25)^2}{2}(-1) + \frac{(0.25)^3}{6}(0) + \frac{(0.25)^4}{24}(6)\\
&= 0.9697266
\end{aligned}$$

และ $x_1 = x_0 + h = 0.25$

<u>รอบที่ 2</u>

$$\begin{aligned}
y_1' &= 0.25 - 2(0.25)(0.9697266) = -0.2348633\\
y_1'' &= 1 - 2(0.9697266) - 2(0.25)(-0.2348633) = -0.8220216\\
y_1''' &= -4(-0.2348633) - 2(0.25)(-0.8220216) = 1.3504640\\
y_1^{(4)} &= -6(-0.8220216) - 2(0.25)(1.3504640) = 4.2568976
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2}y_1'' + \frac{h^3}{6}y_1''' + \frac{h^4}{24}y_1^{(4)}\\
&= 0.9697266 + (0.25)(-0.2348633) + \frac{(0.25)^2}{2}(-0.8220216) + \frac{(0.25)^3}{6}(1.3504640)\\
&\quad + \frac{(0.25)^4}{24}(4.2568976)\\
&= 0.8895323
\end{aligned}$$

และ $x_2 = x_1 + h = 0.50$

<u>รอบที่ 3</u>

$$
\begin{aligned}
y_2' &= 0.50 - 2(0.50)(0.8895323) = -0.3895323 \\
y_2'' &= 1 - 2(0.8895323) - 2(0.50)(-0.3895323) = -0.3895323 \\
y_2''' &= -4(-0.3895323) - 2(0.50)(-0.3895323) = 1.9476615 \\
y_2^{(4)} &= -6(-0.3895323) - 2(0.50)(1.9476615) = 0.3895323
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + hy_2' + \frac{h^2}{2}y_2'' + \frac{h^3}{6}y_2''' + \frac{h^4}{24}y_2^{(4)} \\
&= 0.8895323 + (0.25)(-0.3895323) + \frac{(0.25)^2}{2}(-0.3895323) + \frac{(0.25)^3}{6}(1.9476615) \\
&\quad + \frac{(0.25)^4}{24}(0.3895323) \\
&= 0.7851117
\end{aligned}
$$

และ $x_3 = x_2 + h = 0.75$

<u>รอบที่ 4</u>

$$
\begin{aligned}
y_3' &= 0.75 - 2(0.75)(0.7851117) = -0.4276676 \\
y_3'' &= 1 - 2(0.7851117) - 2(0.75)(-0.4276676) = 0.0712780 \\
y_3''' &= -4(-0.4276676) - 2(0.75)(0.0712780) = 1.6037534 \\
y_3^{(4)} &= -6(0.0712780) - 2(0.75)(1.6037534) = -2.8332981
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
y_4 &= y_3 + hy_3' + \frac{h^2}{2}y_3'' + \frac{h^3}{6}y_3''' + \frac{h^4}{24}y_3^{(4)} \\
&= 0.7851117 + (0.25)(-0.4276676) + \frac{(0.25)^2}{2}(0.0712780) + \frac{(0.25)^3}{6}(1.6037534) \\
&\quad + \frac{(0.25)^4}{24}(-2.8332981) \\
&= 0.6841376
\end{aligned}
$$

และ $x_4 = x_3 + h = 1.00$

หมายเหตุ ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์ในกรณี $k = 1$ มีชื่อเรียกเฉพาะว่า *ระเบียบวิธีของออยเลอร์* (Euler's method) ซึ่งวิธีนี้มีความคลาดเคลื่อนสูงจึงไม่เป็นที่นิยมใช้แต่เป็นวิธีที่ง่าย

7.2 ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา

ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์อันดับ k ถือว่าเป็นวิธีที่ดี แต่ปัญหาของการใช้อยู่ที่การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ปรากฏในสูตรของเทย์เลอร์จะยุ่งยากมาก เมื่อ k มีค่าสูง ดังนั้นจึงได้มีผู้ศึกษาและนำเสนอระเบียบวิธีใหม่ ๆ ขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว (นั่นคือ เพื่อต้องการหลีกเลี่ยงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน) ดังเช่นระเบียบวิธีที่เรียกว่า *ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา* โดยในปัจจุบันมีมากมายหลายสูตร แต่ที่นิยมใช้และสูตรไม่ยุ่งยากมากนักก็คือ ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$F_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$F_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{F_1}{2}\right)$$

$$F_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{F_2}{2}\right)$$

$$F_4 = hf\left(x_i + h, y_i + F_3\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.2}$$

สำหรับขั้นตอนวิธีในการคำนวณของระเบียบวิธีนี้ เป็นเช่นเดียวกับระเบียบวิธีของเทย์เลอร์ เพียงแต่เปลี่ยนสูตรในการคำนวณในขั้นที่ 2 เท่านั้นดังนี้

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่

กำหนดให้ปัญหาค่าเริ่มต้นมีสมการและเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็นดังนี้

$$y' = f(x, y),\ a \leq x \leq b \text{ และ } y(a) = y_0$$

1. กำหนดค่า n ที่เหมาะสม ให้ $x_0 = a$ และ $h = \dfrac{b-a}{n}$ (ค่า h ควรน้อยกว่า 1)

2. สำหรับ $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ คำนวณค่า

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right)$$

และ $x_{i+1} = x_i + h$

ตัวอย่างที่ 2 จงใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' = x - 2xy,\ y(0) = 1$$

วิธีทำ กำหนด $h = 0.25$, $x_0 = 0$ และ $y_0 = 1$ เป็นค่าเริ่มต้น
จากสูตร (7.2) จะได้สูตรคำนวณในแต่ละรอบดังนี้

$$F_1 = hx_i\left(1 - 2y_i\right)$$

$$F_2 = h\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\left(1 - 2\left(y_i + \frac{F_1}{2}\right)\right)$$

$$F_3 = h\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\left(1 - 2\left(y_i + \frac{F_2}{2}\right)\right)$$

$$F_4 = h\left(x_i + h\right)\left(1 - 2\left(y_i + F_3\right)\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>รอบที่ 1</u> คำนวณค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$F_1 = (0.25)(0)(1 - 2(1)) = 0$$

$$F_2 = (0.25)\left(0 + 0.125\right)\left(1 - 2\left(1 + 0\right)\right) = -0.0312500$$

$$F_3 = (0.25)\left(0 + 0.125\right)\left(1 - 2\left(1 + \frac{-0.0312500}{2}\right)\right) = -0.0302734$$

$$F_4 = (0.25)\left(0 + 0.25\right)\left(1 - 2\left(1 - 0.0302734\right)\right) = -0.0587158$$

ดังนั้น

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}\left(0 + 2\left(-0.0312500\right) + 2\left(-0.0302734\right) + \left(-0.0587158\right)\right)$$

$$= 0.9697062$$

และ $x_1 = x_0 + h = 0.25$

<u>รอบที่ 2</u> คำนวณค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$F_1 = (0.25)(0.25)(1 - 2(0.9697062)) = -0.0587133$$

$$F_2 = (0.25)\left(0.25 + 0.125\right)\left(1 - 2\left(0.9697062 + \frac{-0.0587133}{2}\right)\right) = -0.0825655$$

$$F_3 = (0.25)\left(0.25 + 0.125\right)\left(1 - 2\left(0.9697062 + \frac{-0.0825655}{2}\right)\right) = -0.0803294$$

$$F_4 = (0.25)\left(0.25 + 0.25\right)\left(1 - 2\left(0.9697062 - 0.0803294\right)\right) = -0.0973442$$

ดังนั้น

$$y_2 = 0.9697062 + \frac{1}{6}\left(-0.0587133 + 2\left(-0.0825655\right) + 2\left(-0.0803294\right) + \left(-0.0973442\right)\right)$$

$$= 0.8893983$$

และ $x_2 = x_1 + h = 0.50$

<u>รอบที่ 3</u> คำนวณค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$F_1 = (0.25)(0.50)(1 - 2(0.8893983)) = -0.0973496$$
$$F_2 = (0.25)\,(0.50 + 0.125)\left(1 - 2\left(0.8893983 + \frac{-0.0973496}{2}\right)\right) = -0.1064761$$
$$F_3 = (0.25)\,(0.50 + 0.125)\left(1 - 2\left(0.8893983 + \frac{-0.1064761}{2}\right)\right) = -0.1050501$$
$$F_4 = (0.25)\,(0.50 + 0.25)\,(1 - 2\,(0.8893983 - 0.1050501)) = -0.1066306$$

ดังนั้น

$$y_3 = 0.8893983 + \frac{1}{6}\left(-0.0973496 + 2\,(-0.1064761) + 2\,(-0.1050501) + (-0.1066306)\right)$$

$$= 0.7848929$$

และ $x_3 = x_2 + h = 0.75$

<u>รอบที่ 4</u> คำนวณค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$F_1 = (0.25)(0.75)(1 - 2(0.7848929)) = -0.1068348$$
$$F_2 = (0.25)\,(0.75 + 0.125)\left(1 - 2\left(0.7848929 + \frac{-0.1068348}{2}\right)\right) = -0.1012705$$
$$F_3 = (0.25)\,(0.75 + 0.125)\left(1 - 2\left(0.7848929 + \frac{-0.1012705}{2}\right)\right) = -0.1024877$$
$$F_4 = (0.25)\,(0.75 + 0.25)\,(1 - 2\,(0.7848929 - 0.1024877)) = -0.0912026$$

ดังนั้น

$$y_4 = 0.7848929 + \frac{1}{6}\left(-0.1068348 + 2\,(-0.1012705) + 2\,(-0.1024877) + (-0.0912026)\right)$$

$$= 0.6839672$$

และ $x_4 = x_3 + h = 1.00$

สามารถเปรียบเทียบผลที่ได้ในตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 กับผลเฉลยแม่นตรงของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$y = \frac{1 + e^{-x^2}}{2}$$

ซึ่งจะพบว่ามีความคลาดเคลื่อนไปเพียงเล็กน้อย ดังจะเห็นได้จากตารางต่อไปนี้

i	x_i	(ตัวอย่างที่ 1) y_i	(ตัวอย่างที่ 2) y_i	(ค่าจริง) y_i
0	0	1	1	1
1	0.25	0.9697266	0.9697062	0.9697065
2	0.50	0.8895323	0.8893983	0.8894004
3	0.75	0.7851117	0.7848929	0.7848914
4	1.00	0.6841376	0.6839672	0.6839397

จากตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 สามารถสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยใช้โปรแกรมภาษา SCILAB ได้ดังนี้

```
function []=ProTRK(n)
y=1;w=y;
a=0;b=1;x=a;
h=(b-a)/n;
printf('          Taylor      Runge-Kutta\n");
printf(' i       x(i)      y(i)      y(i)\n");
printf(' %d      %3.4f      %3.7f      %3.7f\n",0,x,y,w);
for i=1:n
        y1=x-2*x*y;
        y2=1-2*y-2*x*y1;
        y3=-4*y1-2*x*y2;
        y4=-6*y2-2*x*y3;
        y=y+h*y1+((h^2)/2)*y2+((h^3)/6)*y3+((h^4)/24)*y4;
        f1=h*x*(1-2*w);
        f2=h*(x+h/2)*(1-2*(w+f1/2));
        f3=h*(x+h/2)*(1-2*(w+f2/2));
        f4=h*(x+h)*(1-2*(w+f3));
        w=w+(f1+2*f2+2*f3+f4)/6;
        x=x+h;
        printf(' %d      %3.4f      %3.7f      %3.7f\n",i,x,y,w);
end
endfunction
```

ตัวอย่างการใช้งานชุดคำสั่งและผลลัพธ์ที่ได้

```
-->getf('ProTRK.sci')
-->ProTRK(4)            //หมายถึง กำหนดจำนวนช่วง n = 4
                    Taylor        Runge-Kutta
i       x(i)          y(i)            y(i)
0     0.0000     1.0000000     1.0000000
1     0.2500     0.9697266     0.9697062
2     0.5000     0.8895323     0.8893983
3     0.7500     0.7851117     0.7848929
4     1.0000     0.6841376     0.6839672
```

7.3 บทสรุป

ในบทนี้ ได้ศึกษาระเบียบวิธีต่าง ๆ ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปแบบทั่วไป ได้แก่ ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์ และระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา สำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนั้น ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์อันดับ k ถือว่าเป็นวิธีที่ดี แต่ปัญหาของการใช้งานอยู่ที่การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ปรากฏในสูตร ซึ่งจะยุ่งยากมากถ้า k มีค่าสูง ดังนั้นระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาจึงเป็นวิธีที่เหมาะสมกว่าเพราะในสูตรไม่ต้องหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั่นเอง

7.4 คำถามทบทวน

1. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นโดยใช้ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์อันดับสี่ (ให้ $h = 0.2$)

   1.1 $y' = xy + x^2, x \geq 0, y(0) = 1$

   1.2 $y' = y - 2\sin x, 0 \leq x \leq 2, y(0) = 2$

   1.3 $y' = y\sin x - x, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 1$

   1.4 $y' = 1 + y^2, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 0$

   1.5 $y'' - 2y' - 3y = 2 + 3x, y(0) = 0, y'(0) = 3$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นโดยใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (ให้ $h = 0.2$) และประมาณค่า $y(0.6)$

   2.1 $y' = xy, x \geq 0, y(0) = 1$

   2.2 $y' = xy + x^2, x \geq 0, y(0) = 1$

2.3 $y' = y - 2\sin x, 0 \leq x \leq 2, y(0) = 2$

2.4 $y' = y\sin x - x, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 1$

2.5 $y' = 1 + y^2, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 0$

3. ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสามมีสูตรเป็น

$$F_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$F_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{F_1}{2}\right)$$

$$F_3 = hf\left(x_i + \frac{3h}{4}, y_i + \frac{3F_2}{4}\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}\left(2F_1 + 3F_2 + 4F_3\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

จงใช้สูตรนี้แก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้ (ให้ $h = 0.05$)

3.1 $y' = xy, x \geq 0, y(0) = 1$

3.2 $y' = xy + x^2, x \geq 0, y(0) = 1$

3.3 $y' = y - 2\sin x, 0 \leq x \leq 2, y(0) = 2$

3.4 $y' = y\sin x - x, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 1$

3.5 $y' = 1 + y^2, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 0$

เอกสารอ้างอิง

ปิยะ โควินท์ทวีวัฒน์. (2551). **คู่มือโปรแกรมภาษา SCILAB สำหรับผู้เริ่มต้น**. นครปฐม: มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม.

อำพล ธรรมเจริญ. (2553). **วิธีการคำนวณและการวิเคราะห์เชิงตัวเลข**. ชลบุรี: มหาวิทยาลัยบูรพา.

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2005). **Numerical Analysis** (8th ed.). Belmont, CA: Thompson Brooks/Cole.