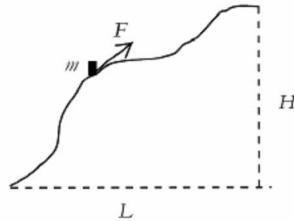


Προβλήματα Έργου - Ενέργειας

1. Μικρό σώμα μάζας m κάνει επιβραδυνόμενη κυκλική κίνηση ακτίνας R , έτσι ώστε η κεντρομόλος και η επιτροχία συνιστώσα της επιτάχυνσής του να έχουν το ίδιο μέτρο κάθε χρονική στιγμή. Αρχικά για $t = 0$ το μέτρο της ταχύτητας είναι v_0 . Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας v ως συνάρτηση του μήκους τόξου s που διανύει το σώμα. Βρείτε το έργο της δύναμης που ασκείται στο σώμα όταν έχει διανύσει έναν πλήρη κύκλο.
2. Σώμα μάζας m σύρεται πολύ αργά στην πλαγιά ενός λόφου εφαρμόζοντας μία δύναμη \vec{F} , η οποία σε κάθε σημείο είναι εφαπτόμενη της τροχιάς. Ο συντελεστής τριβής είναι μ . Το ύψος του λόφου είναι H και το μήκος της βάσης του είναι L (βλέπε σχήμα). Να βρεθεί το έργο της δύναμης \vec{F} .



3. Κινητό μάζας m κινείται σε κύκλο ακτίνας R . Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό βρίσκεται στη θέση $\theta = 0$ και καθώς κινείται διαγράφει γωνία θ που ικανοποιεί τη σχέση $\theta + \theta^2 = Bt$, όπου B είναι μία θετική σταθερά. Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα και την επιτροχία επιτάχυνση ως συνάρτηση της θ . Υπολογίστε το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα μεταξύ των θέσεων $\theta = 0$ και $\theta = \pi/2$.
4. Σε ένα σώμα ασκείται η δύναμη $\vec{F} = xy^2\hat{i} + x^2y\hat{j}$. Θεωρήστε την μετατόπιση του σώματος από το σημείο O (την αρχή των αξόνων) ως το σημείο A ($x = 2, y = 2$).
 - (α') Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη \vec{F} που ασκείται στο σώμα αν η μετατόπιση αυτή γίνεται κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα σημεία O και A .
 - (β') Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη \vec{F} αν η μετατόπιση πραγματοποιείται πάνω στην παραβολή $y = x^2 - x$.
 - (γ') Συγκρίνετε το έργο κατά μήκος των δύο αυτών δρόμων. Μπορείτε αν αποφανθείτε αν η δύναμη \vec{F} είναι διατηρητική;
5. Αλυσίδα συνολικής μάζας m και μήκους L τοποθετείται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι έτσι ώστε το ένα τμήμα της αλυσίδας που περιλαμβάνει το ένα άκρο της να είναι τεντωμένο πάνω στο τραπέζι, ενώ η υπόλοιπη αλυσίδα να κρέμεται από την άκρη του τραπεζιού. Ανάμεσα στο τραπέζι και την αλυσίδα αναπτύσσεται τριβή. Όταν το τμήμα που κρέμεται έχει μήκος h , η αλυσίδα αρχίζει να κινείται. Ποιο είναι συνολικό έργο της τριβής μέχρι τη στιγμή που η αλυσίδα θα πέσει από το τραπέζι;

6. Ομογενής αλυσίδα πολύ μεγάλου μήκους και μάζας μ ανά μονάδα μήκους βρίσκεται κούλου-
ριασμένη πάνω σε λείο τραπέζι. Στο ένα άκρο της αλυσίδας ασκούμε σταθερή δύναμη μέτρου
 F . Να υπολογιστεί η ταχύτητα του άκρου της αλυσίδας ως συνάρτηση του μήκους x του κινου-
μένου τμήματος της αλυσίδας. Να βρεθούν η κινητική ενέργεια της αλυσίδας και το έργο της
δύναμης \vec{F} και να συγκριθούν μεταξύ τους.
7. Ένα σώμα μάζας $m = 1\text{kg}$ εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση στον άξονα x με δυναμική ενέργεια

$$E_p(x) = a[(x - 2)^2 + (x - 4)^2] \quad (1)$$

Η απόσταση x σε m και η σταθερά $a = 1\text{Joule}/m^2$. Έστω ότι το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα
και βρίσκεται σε εκείνο το σημείο όπου η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω του είναι μηδενική.

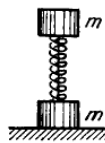
(α') Πόση ενέργεια πρέπει να του δοθεί ώστε να μπορέσει να φτάσει οριακά στο σημείο $x = 5m$;

(β') Μετά από πόσο χρόνο θα φτάσει στο σημείο $x = 5m$;

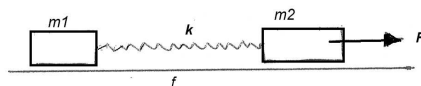
Δίνεται:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} = -\frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \arcsin\left(\frac{2\alpha x + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right) \quad (2)$$

8. Δύο ίσες μάζες m συνδέονται με αβαρές ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους L . Το
ελατήριο είναι συμπιεσμένο με τη χρήση αβαρούς νήματος μήκους d με $d < L$. Το σύστημα των
σωμάτων τοποθετείται κατακόρυφα πάνω σε οριζόντιο τραπέζι. Στη συνέχεια το νήμα κόβεται.
Ποιό είναι το μέγιστο μήκος d του νήματος έτσι ώστε η κάτω μάζα να σηκωθεί από το τραπέζι;



9. Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με ελαφρύ ελατήριο σταθεράς k που έχει το φυσικό
του μήκος. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης (στατικής και κινητικής) μεταξύ των σωμάτων
και του οριζόντιου δαπέδου είναι f . Η δύναμη F είναι σταθερή και εφαρμόζεται στη μάζα m_2 .
Βρείτε την ελάχιστη τιμή της F ώστε η άλλη μάζα m_1 να αρχίσει να κινείται.



10. Σωματίδιο μάζας m κάνει ευθύγραμμη κίνηση και η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τη συνάρτηση

$$E_p(x) = 3x^2 - x^3 \quad (3)$$

όπου x η θέση του σωματιδίου.

- (α') Σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της $E_p(x)$ και εντοπίστε τις θέσεις ισορροπίας. Υπάρχει θέση ευσταθούς ισορροπίας;
- (β') Το σωματίδιο αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα από τη θέση $x = -1$. Σε ποιά περιοχή του άξονα X θα κινηθεί; Βρείτε την μέγιστη τιμή της ταχύτητάς του.
11. Ένα σώμα μάζας $m = 1\text{ kg}$ εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση στον άξονα x με δυναμική ενέργεια

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x^2 - 4)^2 \quad (k = 1\text{ J/m}^4). \quad (4)$$

όπου x η θέση του σωματιδίου (σε m).

- (α') Βρείτε πιθανές θέσεις ευσταθούς ή ασταθούς ισορροπίας και σχεδιάστε πρόχειρα τη καμπύλη της δυναμικής ενέργειας $E_p(x)$.
- (β') Αν το σώμα ξεκινάει με μηδενική ταχύτητα από τη θέση $x_0 = -\sqrt{7}$, βρείτε σε ποια περιοχή του άξονα x θα κινηθεί.
- (γ') Βρείτε τη ταχύτητά του σώματος στις θέσεις $x = -2$, $x = -1$ και $x = 1$.
12. Ένα σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο ελκτικής κεντρικής δύναμης με μέτρο $F = k/r^2$ όπου k θετική σταθερά και r η απόσταση του σώματος από το ελκτικό κέντρο O . Η τροχιά είναι κύκλος με κέντρο το O και ακτίνα b . Υπολογίστε α) την ολική ενέργεια του σώματος και β) την στροφορμή ως προς το O . (Γνωστά m, k, b).
13. Ένα σώμα άγνωστης μάζας M κινείται κάτω από την επίδραση ελκτικής κεντρικής δύναμης. Η δυναμική του ενέργεια σε κάθε σημείο δίνεται από το τύπο $E_p = kr^2$. Η σταθερά k είναι θετική, και r είναι η απόσταση από το κέντρο O . Το σώμα κινείται σε κλειστή τροχιά όπου η ελάχιστη απόσταση του σώματος από το O είναι r_1 και η ταχύτητά του στη πιο απομακρυσμένη θέση είναι v_2 . Να βρεθεί η άγνωστη μάζα M ως συνάρτηση των γνωστών k, r_1, v_2 .
14. Ένα σώμα μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης και η δυναμική του ενέργεια δίνεται από το τύπο $E_p = \frac{1}{2}kr^2$. Η σταθερά k είναι θετική, και r είναι η απόσταση από το κέντρο O . Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα περνάει από ένα σημείο A που απέχει απόσταση l από το O και έχει ταχύτητα μέτρου V_A , κάθετη στο διάνυσμα θέσης \vec{OA} . Αποδείξτε ότι η τροχιά του σώματος είναι έλλειψη και βρείτε τους ημιάξονες της έλλειψης.
15. Ένα σώμα μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση απωστικής κεντρικής δύναμης μέτρου $F = k/r^2$ όπου r η απόσταση από το σταθερό σημείο O και k θετική σταθερά. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται πολύ μακριά από το O (ώστε η δυναμική του ενέργεια είναι μηδενική). Το μέτρο της αρχικής ταχύτητας είναι V_0 και η διεύθυνση της περνάει σε απόσταση b από το κέντρο O . Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση που θα πλησιάσει το σώμα στο σημείο O .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - Προβλήματα Έργο-Ενέργεια

1. $v = v_0 \exp(-\frac{s}{R})$, $W = -\frac{1}{2}mv_0^2[1 - \exp(-4\pi)]$
2. $W = mg(\mu L + H)$
3. $\omega = \frac{B}{1+2\theta}$, $a_T = -2R\frac{B^2}{(1+2\theta)^3}$, $W = -\frac{1}{2}mR^2B^2[1 - \frac{1}{(1+\pi)^2}]$
4. $W = 8$, Διατηρητική
5. $W = \frac{Mg(L-h)h}{2L}$
6. $\Delta E_k = \frac{1}{2}Fx$, $W = Fx$, Δεν ισχύει ΘΜΚΕ.
7. $\Delta E = 8J$, $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4} s$
8. μέγιστο $d = L - \frac{3mg}{k}$
9. ελάχιστη $F = fg(\frac{1}{2}m_1 + m_2)$
10. ευσταθής ισορροπία $x = 0$, $v_{max} = \sqrt{\frac{8}{m}}$, $-1 \leq x \leq 2$
11. θέσεις ισορροπίας $x = 0$, $x = \pm 2$, $-\sqrt{7} \leq x \leq -1$ Δεν φθάνει στη θέση $x = 1$.
12. $E = -\frac{k}{2b}$, $L = \sqrt{mbk}$
13. $M = \frac{2kr_1^2}{v_2^2}$
14. έλλειψη με ημιάξονες l και $V_A\sqrt{\frac{m}{k}}$
15. ελάχιστη απόσταση $r_0 = \frac{k}{mV_0^2} + \sqrt{\frac{k^2}{m^2V_0^4} + b^2}$