BT hè

1 Bài 4.12b

Dễ dàng chứng minh được: $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$. Suy ra:

$$b^4 + c^4 \geq b^3c + bc^3 = bc(b^2 + c^2)$$

Theo giả thiết, abc =1 nên $bc = \frac{1}{a}$. Từ đó, ta có:

$$a + b^4 + c^4 \geq a + \frac{1}{a}(b^2 + c^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a}$$

Tương đương với:

$$\frac{a}{a + b^4 + c^4} \leq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Áp dụng tương tự cho 2 số hạng còn lại, ta được VT của bđt:

$$VT \leq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

.

2 Bài 4.13

Đặt biểu thức là P. Bình phương P và thay $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ta có:

$$P^2 = \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{B^2} + 6$$

Dùng AM-GM ta có:

$$\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} \geq 2b^2$$

Tương tự:

$$\frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geq 2c^2; \frac{c^2a^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{c^2} \geq 2a^2.$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có dpcm.