Thi ngày 28/12/2020.

Đáp án (Đề thi HK1 NH: 2020-2021 - TOÁN CAO CẤP B1. Lớp: CTK43)

(2đ) **Câu 1**: Cho ma trận $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 2x & 2 & x \\ 3x & 1 & x \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & x \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 2x & x \\ 3x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} = x - x(-x^2) + (-4x) = x^3 - 3x$$

a, Để $A(x)$ khả nghịch thì $\det A \neq 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq 0. \\ x \neq \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$ 0,25

b, $\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & x \end{vmatrix} = x$ $\quad \tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 1 - x^2$ $\quad \tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x^2 - 2$

$\tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 2x & x \\ 3x & x \end{vmatrix} = +x^2$ 0,25 $\quad \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3x & x \end{vmatrix} = -2x$ 0,25 $\quad \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & x \end{vmatrix} = x$ 0,25

$\tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} = -4x$ $\quad \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & x \\ 3x & 1 \end{vmatrix} = 3x^2 - 1$ $\quad \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2x^2$

Vậy: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(a_{ij})^t = \frac{1}{x^3 - 3x}\begin{pmatrix} x & 1-x^2 & x^2-2 \\ x^2 & -2x & x \\ -4x & 3x^2-1 & 2-2x^2 \end{pmatrix}$ 0,5.

(1,5đ) **Câu 2**: Hãy tính định thức $\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_0+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_0+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0+a_n \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \sum_{i=0}^n a_i & a_0+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \sum_{i=0}^n a_i & a_2 & a_0+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n a_i & a_2 & a_3 & & a_0+a_n \end{vmatrix} \overset{0,5}{=} \sum a_i \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_0+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_0+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0+a_n \end{vmatrix} \overset{0,5}{=}$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \overset{0,5}{=} a_0^{n-1} \cdot \sum_{i=0}^n a_i$$

(2đ) **Câu 3**: Giải và biện luận hệ pt sau: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + (m+4)x_2 + 8x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + (m+13)x_3 = 4. \end{cases}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m+4 & 8 \\ 3 & 4 & m+13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B.$$

xét $(A|B) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & m+4 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & m+13 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & m & 2 & 1 \\ 0 & -2 & m+4 & 1 \end{array}\right) \overset{0,25}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & m+4 & 1 \\ 0 & m & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{0,25}{\to}$

$\xrightarrow{m \neq 0} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & m+4 & 1 \\ 0 & 0 & m^2+4m+4 & m+2 \end{array}\right)$ 0,25

• TH1: $m=-2$: Hệ VSN: vì $0x_3 = 0 \ \forall x_3$. 0,25

• TH2: $m \neq -2$: Hệ có nghiệm duy nhất: 0,25

$x_3 = \dfrac{1}{m+2}$; $x_2 = \dfrac{(m+4)x_3 - 1}{2} = \dfrac{\frac{m+4}{m+2} - 1}{2} = \dfrac{\frac{2}{2}}{} = 1$; $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 - 2 - 3.\dfrac{1}{m+2} = -1 - \dfrac{3}{m+2} = -\dfrac{m+5}{m+2}$

0,25 0,25

Vậy nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{m+5}{m+2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \dfrac{1}{m+2} \end{cases}$ 0,25

Biện luận: TH1: $\det A = 0 \Leftrightarrow m = -2 \Rightarrow$ hệ VSN.

TH2: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2 \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất

$x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = -\dfrac{m+5}{m+2}$; $x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = 1$; $x_3 = \dfrac{\det A_3}{\det A} = \dfrac{1}{m+2}$.

• Cách 2:

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m+4 & 8 \\ 3 & 4 & m+13 \end{vmatrix} = (m+2)^2$; $\det A_1 = m^2 - m - 6$; $\det A_2 = (m+2)^2$; $\det A_3 = m+2$;

(1,5đ) **Câu 4**: Trong $\mathbb{R}_2[x]$ cho 2 cơ sở: $B = \{ \underset{e_1}{2x^2 + x}, \underset{e_2}{x^2+3}, \underset{e_3}{1} \}$; $B' = \{ \underset{f_1}{x^2+1}, \underset{f_2}{x-2}; \underset{f_3}{x+3} \}$.

a, Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

Ta đánh tọa độ của e_1, e_2, e_3 theo cơ sở B', tức là tìm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

sao cho: $\begin{cases} e_1 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 & (1) \\ e_2 = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 & (2) \\ e_3 = \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_3 & (3) \end{cases}$

0,25 (1) $\Leftrightarrow (2x^2 + x) = \alpha_1(x^2+1) + \alpha_2(x-2) + \alpha_3(x+3) = \alpha_1 x^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$

0,25 (2) $\Leftrightarrow x^2 + 3 = \beta_1(x^2+1) + \beta_2(x-2) + \beta_3(x+3) = \beta_1 x^2 + (\beta_2 + \beta_3)x + \beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -2/5 \\ \beta_3 = 2/5 \end{cases}$

0,25 (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 = -1/5 \\ \gamma_3 = 1/5 \end{cases}$

Tức là: $[e_1]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $[e_2]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$; $[e_3]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$

Vậy P chuyển từ cơ sở B đến cơ sở B' có dạng:

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ 0,25

b, Cho $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = a_1(2x^2 + x) + a_2(x^2+3) + a_3(1) = 8x^2 - 4x + 6$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + a_2 = 8 \\ a_1 = -4 \\ 3a_2 + a_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ a_2 = 16 \\ a_3 = -42 \end{cases}$ Vậy: $v_B = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -42 \end{pmatrix}$ 0,25

Ta lại có: $v_{B'} = P.[v]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 0,25

(1,5đ) **Câu 5** Cho $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ là axtt dưới xác định bởi:

$f(1,0,0,0) = (-1,0,1)$; $f(0,1,0,0) = (1,1,1)$; $f(0,0,1,0) = (1,-1,-3)$; $f(0,0,0,1) = (1,3,3$

a, Xác định $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Đặt $e_1 = (1,0,0,0)$; $e_2 = (0,1,0,0)$; $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$

Ta có: $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Vậy $f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + x_3f(e_3) + x_4f(e_4) = (-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 ;\ x_2 - x_3 + 2x_4 ;\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4)$

$= Ax$

Với $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 0,5

b, Tìm Imf và Kerf. Tính dim Imf và dim Kerf.

• Imf chính là biến đổi của ma trận A theo cột; tức là biến đổi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy Imf có 2 cơ sở: $\{(1,1,1) ; (0,1,2)\}$ $\Rightarrow$ dim Imf = 2. 0,5

• Kerf chính là biến đổi ma trận A theo dòng, tức là biến đổi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy Kerf có 2 cơ sở: $\{(1,1,-3,3) ; (0,1,-1,2)\}$ $\Rightarrow$ dim Kerf = 2. 0,5

Vậy dim Imf + dim Kerf = 4 = dim $\mathbb{R}^4$.

(1,5đ) **Câu 6**: Tìm các giá trị riêng và không gian riêng tương ứng của axtt $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi: $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 ;\ x_2 - x_3 ;\ 2x_1 + 4x_3)$.

• Ma trận biểu diễn của f trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 0,5

• Để tìm trị riêng và không gian riêng của ánh xạ f, ta tìm trị riêng và không gian riêng của ma trận A.

Ta có: $p(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$.

Vậy A có 2 trị riêng là $\lambda = 2$ và $\lambda = 3$ 0,5

• Với $\lambda = 2$ ta có: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_2$ nếu và chỉ nếu $(2I - A)x = 0 \Leftrightarrow \cancel{x_1}\ x_2 = 0 ; x_2 + x_3 = 0$

Vậy $E_2 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}^3\right\}$ có cơ sở là $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ và dim $E_2 = 1$ 0,25

• Với $\lambda = 3$ ta có: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_3$ nếu và chỉ nếu $(3I - A)x = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 ;\ 2x_2 + x_3 = 0$

Hệ pt có no cơ bản là $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$

Vậy E_3 có cơ sở là: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ và dim $E_3 = 1$. 0,25