



TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT  
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN  
-----oOo-----



# TOÁN RỜI RẠC (CHƯƠNG VI: DÀN & ĐẠI SỐ BOOLE)



## VI.1 Dàn – Các tính chất

### VI.1.1 Định nghĩa và các kết quả liên quan

#### Dàn (Lattices):

- Dàn là gì?
- Ví dụ minh họa



## VI.1.1 Định nghĩa và kết quả liên quan

### • Dàn (Lattice)

**Định nghĩa 1. (Dàn- Lattice)** Tập có thứ tự  $(A, \leq)$  gọi là một dàn (trên  $A$ ) nếu như:

$$\forall x, y \in A: \sup\{x, y\} \text{ và } \inf\{x, y\} \text{ tồn tại.}$$

**Ghi chú.** Nếu  $(A, \leq)$  là một dàn thì ta ký hiệu:

$$\forall x, y \in A: x \vee y \equiv \sup\{x, y\}, \text{ và } x \wedge y \equiv \inf\{x, y\}.$$

Khi đó cũng sử dụng ký hiệu  $(A, \vee, \wedge)$  cho dàn  $(A, \leq)$  này.

**Tính chất 1.** Cho dàn  $(A, \vee, \wedge)$ . Khi đó:  $\forall x, y, z \in A$ ,

$$(i) \ x \vee y = y \vee x$$

$$(ii) \ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$



## VI.1.2 Dàn của các phân hoạch

### • Dàn của các quan hệ tương đương

**Tính chất 2.** Cho  $A \neq \emptyset$  và ký hiệu  $\mathcal{C}_A = \{\text{tập tất cả các quan hệ tương đương trên } A\}$ . Xét quan hệ bao hàm “ $\subseteq$ ” trên  $\mathcal{C}_A$ :

$$\forall R_1, R_2 \in \mathcal{C}_A: \quad R_1 \preceq R_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} R_1 \subseteq R_2.$$

Khi đó  $(\mathcal{C}_A, \subseteq)$  là một dàn với 2 phép toán  $\vee, \wedge$  cho bởi:

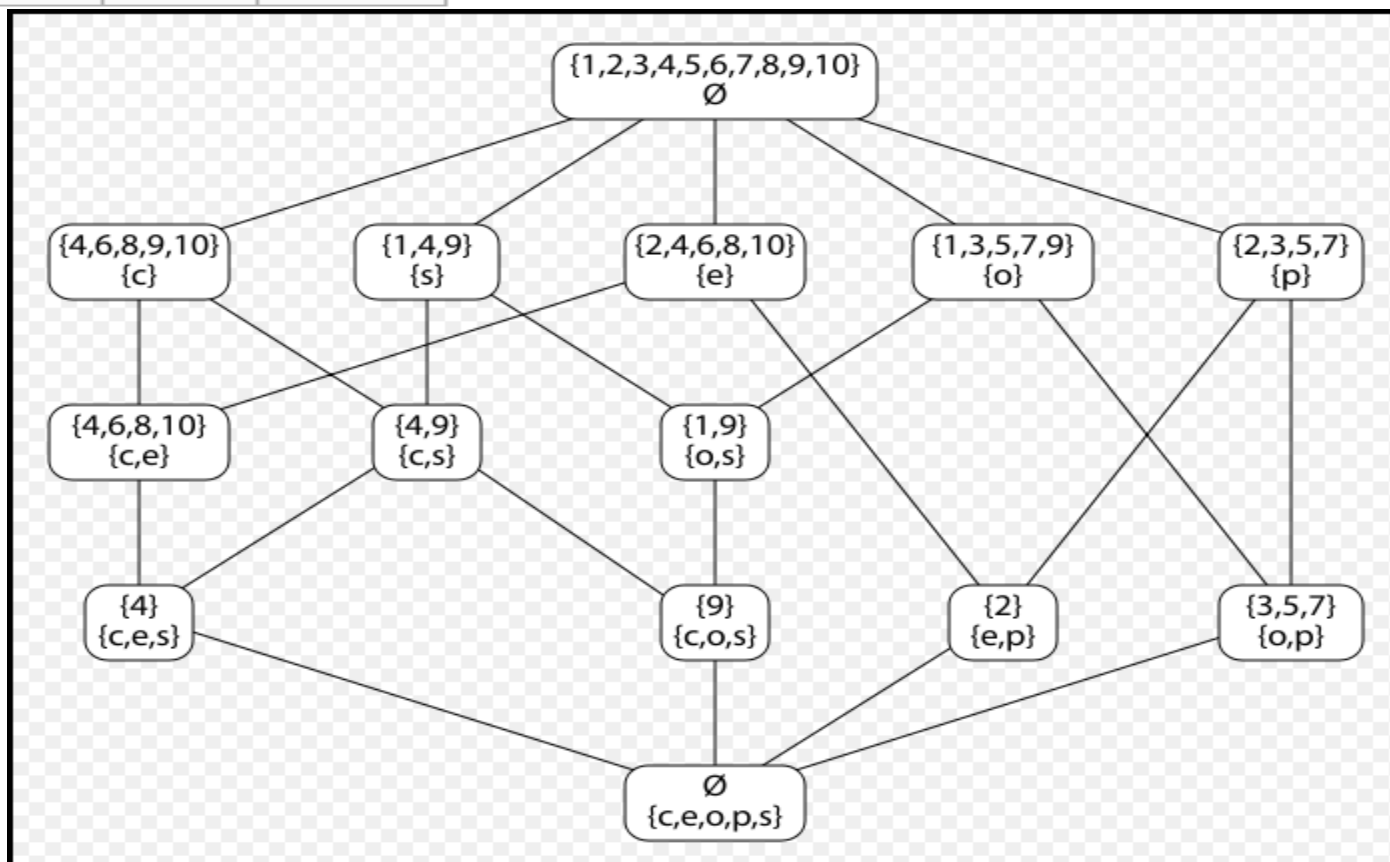
$$R_1 \vee R_2 = t(R_1 \cup R_2), \quad \text{và} \quad R_1 \wedge R_2 = R_1 \cap R_2.$$

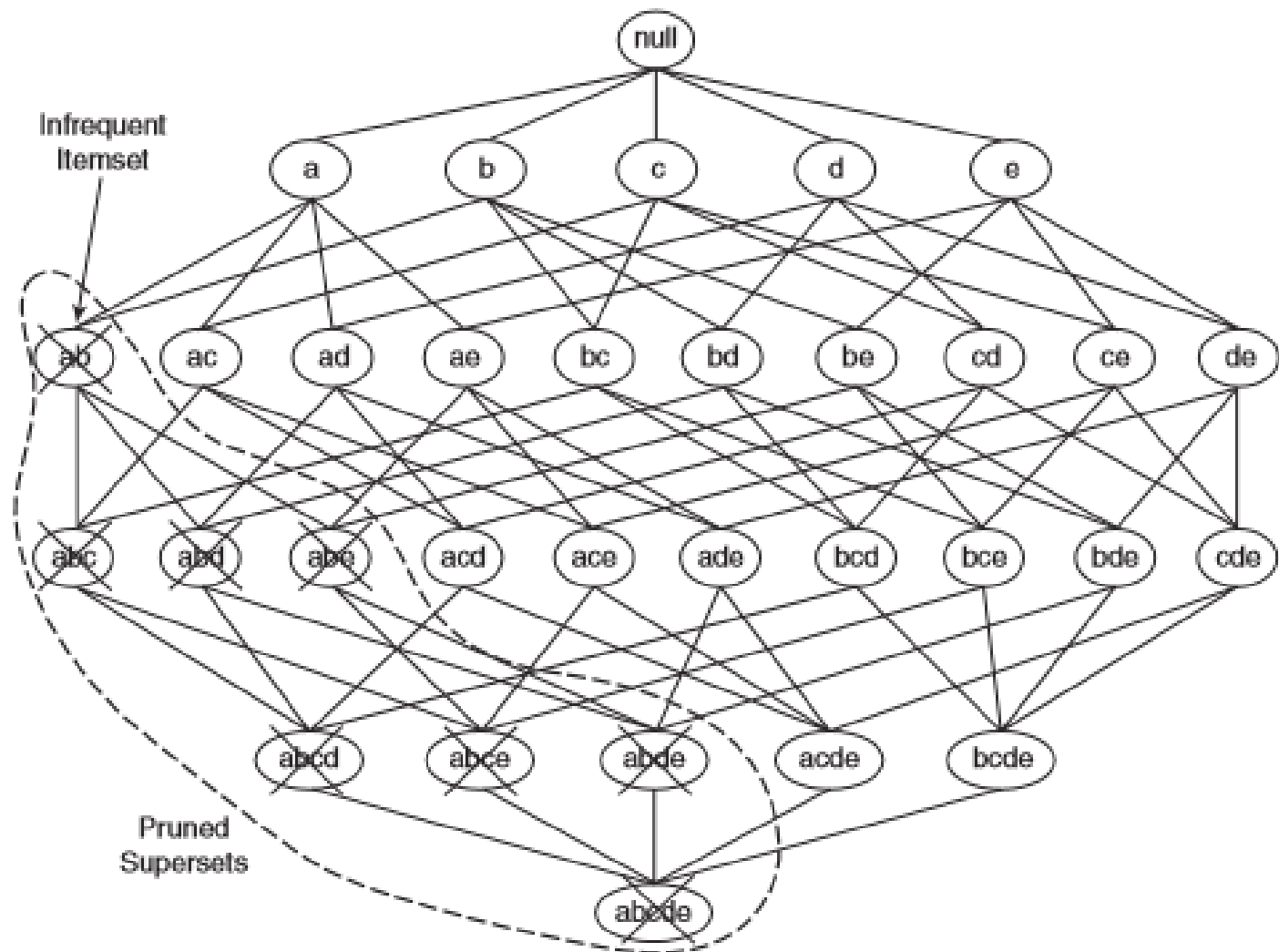
Lưu ý:  $t(R_1 \cup R_2)$  là bao đóng bắc cầu,  $s(R_1 \cup R_2)$  bao đóng đối xứng,  $r(R_1 \cup R_2)$  bao đóng phản xạ.



**Ví dụ áp dụng**

	composite	even	odd	prime	square
1			✓		✓
2		✓		✓	
3			✓	✓	
4	✓	✓			✓
5			✓	✓	
6	✓	✓			
7			✓	✓	
8	✓	✓			
9	✓		✓		✓
10	✓	✓			





**Figure 6.4.** An illustration of support-based pruning. If  $\{a, b\}$  is infrequent, then all supersets of  $\{a, b\}$  are infrequent.



## VI.2 Đại số Boole

**Định nghĩa 1. (Đại số Boole)** Cho  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ , và hai phép toán  $\vee, \wedge$  trên nó (i.e. các ánh xạ  $\vee, \wedge: \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ ). Bộ ba  $(\mathcal{B}, \vee, \wedge)$  gọi là một đại số Boole nếu như có các tính chất sau đây:  
 $\forall x, y, z \in \mathcal{B}$ ,

(i) *Giao hoán*:  $x \vee y = y \vee x; \quad x \wedge y = y \wedge x$

(ii) *Kết hợp*:  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z; \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(iii) *Phân bố*:  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$   
 $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(iv) *Tồn tại phần tử trung hòa của hai phép toán*:

$$x \vee \mathbb{0} = x; \quad x \wedge \mathbb{1} = x$$

(v) *Tồn tại phần tử bù của x*:  $x \vee \bar{x} = \mathbb{1}; \quad x \wedge \bar{x} = \mathbb{0}.$

**Tính chất 1.** Cho  $(\mathcal{B}, \vee, \wedge)$  là một đại số Boole. Khi đó:  $\forall x, y \in \mathcal{B}$

(i) Phần tử bù của  $x$  là duy nhất.

(ii) Quy tắc De Morgan:  $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}; \quad \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}.$





# Định nghĩa hàm Bool

## **Định nghĩa 2: Biến Bool**

Biến  $x$  được gọi là biến Bool nếu  $x$  chỉ nhận các giá trị  $\{0, 1\}$ .

## **Định nghĩa 3: Hàm Bool**

Hàm  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  được gọi là hàm Bool của  $n$  biến Bool nếu:

- i) Tất cả các biến đều là biến Bool;
- ii)  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B = \{0, 1\}$

## **Định nghĩa 4: Cách biểu diễn Hàm Bool**

- 1) Hàm Bool  $n$  biến có thể cho bởi bảng chân trị gồm  $2^n$  dòng.
- 2) Hàm Bool  $f$  của  $n$  biến là ánh xạ  
 $f: B^n \rightarrow B$ , hoàn toàn xác định nếu biết  $f^1(0)$  và  $f^1(1)$

# Hàm Bool

$$f^{-1}(1) = \{100, 010, 001, 000\}$$

$$f^{-1}(0) = \{111, 110, 101, 011\}$$

Khi đó  $f$  là hàm Bool theo 3 biến  $x, y, z$  có bảng chân trị như sau:

$x$	$y$	$z$	$f$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

$f^{-1}$
0
0
0
1
0
1
1
1

$$f(1) = \{111, 110, 101, 011\}$$

$$f(x,y,z) = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$$

$$f(0) = \{100, 010, 001, 000\}$$

$$f(x,y,z) = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z$$



# Dạng nổi rời chính tắc của Hàm Bool

**Định nghĩa 5:** Xét tập hợp các hàm Bool của  $n$  biến  $F_n$  theo  $n$  biến  $x_1, x_2, \dots, x_n$

- Mỗi hàm bool  $x_i$  hay  $\bar{x}_i$  được gọi là **từ đơn**.  
 $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}, t, \bar{t}$  là các từ đơn.
- Đơn thức** là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn.  
 $x\bar{y}z\bar{t}; \bar{x}\bar{y}t$  là các đơn thức.
- Từ tối thiểu** là tích khác không của đúng  $n$  từ đơn.  
 $x\bar{y}z\bar{t}$  là một đơn thức tối thiểu.
- Công thức đa thức** là công thức biểu diễn hàm Bool thành tổng của các đơn thức.
- Dạng nổi rời chính tắc** là công thức biểu diễn hàm Bool thành tổng của các từ tối thiểu.

## Biểu đồ karnaugh trường hợp $n = 4$ :

$f$  là hàm Bool theo 4 biến  $x, y, z, t$ . Khi đó bảng chân trị của  $f$  gồm 16 hàng. Thay cho bảng chân trị của  $f$  ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 16 ô, tương ứng với 16 hàng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

	$x$	$x$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
$z$	1010	1110	0110	0010	$\bar{t}$
$z$	1011	1111	0111	0011	$t$
$\bar{z}$	1001	1101	0101	0001	$t$
$\bar{z}$	1000	1100	0100	0000	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	$y$	$y$	$\bar{y}$	



# Với qui ước:

Các ô tại đó  $f$  bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là biểu đồ karnaugh của  $f$ , ký hiệu là  $kar(f)$ .

Trong cả hai trường hợp, hai ô được gọi là ***kề nhau*** (theo nghĩa rộng), nếu chúng là hai ô liền nhau hoặc chúng là ô đầu, ô cuối của cùng một hàng (cột) nào đó. Nhận xét rằng, do cách đánh dấu như trên, **hai ô kề nhau chỉ lệch nhau ở một biến duy nhất.**



# Tế bào

**Định nghĩa 6:** Tế bào là hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) gồm  $2^{n-k}$  ô

# Tế bào

**Ví dụ 1.** Xét các hàm Bool theo 4 biến  $x, y, z, t$ .

Biểu đồ karnaugh của đơn thức  $x\bar{y}z\bar{t}$  là

	$x$	$x$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
$z$					$\bar{t}$
$z$					$t$
$\bar{z}$					$t$
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	$y$	$y$	$\bar{y}$	

# Tế bào

**Ví dụ 2.** Xét các hàm Bool theo 4 biến  $x, y, z, t$ .

Biểu đồ karnaugh của đơn thức  $\bar{y}z\bar{t}$  là

	$x$	$x$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
$z$					$\bar{t}$
$z$					$t$
$\bar{z}$					$t$
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	$y$	$y$	$\bar{y}$	



# Tế bào

**Ví dụ 3.** Xét các hàm Bool theo 4 biến  $x, y, z, t$ .

Biểu đồ karnaugh của đơn thức  $\bar{y}\bar{t}$  là

	$x$	$x$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
$z$					$\bar{t}$
$z$					$t$
$\bar{z}$					$t$
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	$y$	$y$	$\bar{y}$	

# Tế bào

**Ví dụ 4.** Xét các hàm Bool theo 4 biến  $x, y, z, t$ .

Biểu đồ karnaugh của đơn thức  $\bar{t}$  là

	$x$	$x$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
$z$					$\bar{t}$
$z$					$t$
$\bar{z}$					$t$
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	$y$	$y$	$\bar{y}$	

# Tế bào

**Ví dụ 5.** Xét các hàm Bool theo 4 biến  $x, y, z, t$ .

Tế bào sau:

	$x$	$x$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
$z$					$\bar{t}$
$z$					$t$
$\bar{z}$					$t$
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	$y$	$y$	$\bar{y}$	

Là biểu đồ Karnaugh của đơn thức nào?

là biểu đồ karnaugh của đơn thức  $y\bar{t}$ .



# Tế bào lớn.

Cho hàm Bool  $f$ . Ta nói  $T$  là một tế bào lớn của  $\text{kar}(f)$  nếu  $T$  thỏa hai tính chất sau:

- a)  $T$  là một tế bào và  $T \subseteq \text{kar}(f)$ .
- b) Không tồn tại tế bào  $T'$  nào thỏa  $T' \neq T$  và  $T \subseteq T' \subseteq \text{kar}(f)$ .

# Tế bào lớn.

**Ví dụ.** Xét hàm Bool  $f$  theo 4 biến  $x, y, z, t$  có biểu đồ karnaugh như sau:

	$x$	$x$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
$z$					$\bar{t}$
$z$					$t$
$\bar{z}$					$t$
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	$y$	$y$	$\bar{y}$	

# Tế bào lớn.

Kar(f) có 6 tế bào lớn như sau:

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

**xz**

	x	x	x	x	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

**$\bar{y}z$**

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

# Tế bào lớn

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

$x\bar{t}$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

$xy$

# Tế bào lớn.

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

$y\bar{z}t$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

$\bar{y}\bar{t}$





# Thuật toán tìm công thức đa thức tối thiểu của Hàm Bool

**Bước 1:** Vẽ biểu đồ karnaugh của  $f$ .

**Bước 2:** Xác định tất cả các tế bào lớn của  $kar(f)$ .

**Bước 3:** Xác định các tế bào lớn m nhất thiết phải chọn.

Ta nhất thiết phải chọn tế bào lớn  $T$  khi tồn tại một ô của  $kar(f)$  mà ô này chỉ nằm trong tế bào lớn  $T$  và không nằm trong bất kỳ tế bào lớn nào khác.



# Thuật toán

**Bước 4:** Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn

Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 đã phủ được  $kar(f)$  thì ta có duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của  $kar(f)$ .

Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 chưa phủ được  $kar(f)$  thì:

Xét một ô chưa bị phủ, sẽ có ít nhất hai tế bào lớn chứa ô này, ta chọn một trong các tế bào lớn này. Cứ tiếp tục như thế ta sẽ tìm được tất cả các phủ gồm các tế bào lớn của  $kar(f)$ .

Loại bỏ các phủ không tối tiểu, ta tìm được tất cả các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của  $kar(f)$ .



# Thuật toán

## ❖ Bước 5: Xác định các công thức đa thức tối thiểu của $f$ .

Từ các phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn của  $kar(f)$  tìm được ở bước 4 ta xác định được các công thức đa thức tương ứng của  $f$ .

Loại bỏ các công thức đa thức mà có một công thức đa thức nào đó thực sự đơn giản hơn chúng.

Các công thức đa thức còn lại chính là các công thức đa thức tối thiểu của  $f$ .



# Ví dụ 1

❖ Tìm tất cả các công thức đa thức tối thiểu của hàm Bool:

$$\begin{aligned}f(x, y, z, t) &= xyz t \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee yz \vee xy(\bar{z} \vee \bar{t}) \\&= xyz t \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee yz \vee xy \bar{z} \vee xy \bar{t}\end{aligned}$$

# Ví dụ 1 (cont)

$$f(x, y, z, t) = \textcolor{red}{xyzt} \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

# Ví dụ 1 (cont)

$$f(x, y, z, t) = xyz\bar{t} \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

## Ví dụ 1 (cont)

$$f(x, y, z, t) = xyz\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

## Ví dụ 1 (cont)

$$f(x, y, z, t) = xyz\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} \vee \textcolor{red}{y}z \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	



# Ví dụ 1 (cont)

$$f(x, y, z, t) = xyzzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee \textcolor{red}{xy\bar{z}} \vee xy\bar{t}$$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

# Ví dụ 1 (cont)

$$f(x, y, z, t) = xyz\bar{t} \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	



## Ví dụ 1 (cont)

$$f(x, y, z, t) = xyz t \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee yz \vee xy \bar{z} \vee xy \bar{t}$$

Bước 1: Vẽ kar(f):


$$f(x, y, z, t) = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

Bước 2: Kar(f) có các tế bào lớn như sau:

Blue	Blue	Blue	White
Blue	Blue	Blue	White
Blue	Blue	White	White
Blue	Blue	White	White

Red	Red	Blue	White
Red	Red	Blue	White
Red	Red	White	White
Red	Red	White	White

x

Light Blue	Dark Red	Dark Red	White
Light Blue	Dark Red	Dark Red	White
Light Blue	Light Blue	White	White
Light Blue	Light Blue	White	White

yz



$$f(x, y, z, t) = xyz t \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

Bước 3: Xác định các tế bào lớn nhất thiết phải chọn:

- Ô 1 nằm trong một tế bào lớn duy nhất  $x$ . Ta chọn  $x$ .
- Ô 3 nằm trong một tế bào lớn duy nhất  $yz$ . Ta chọn  $yz$ .

1	2	3	
4	5	6	
7	8		
9	10		

1	2		
4	5		
7	8		
9	10		

$x$

	2	3	
	5	6	

$yz$



## Bước 4: Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn

1	2	3	
4	5	6	
7	8		
9	10		

1	2	3	
4	5	6	
7	8		
9	10		

x

1	2	3	
4	5	6	
7	8		
9	10		

yz

Ta được duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của  $\text{kar}(f)$ :

$x \vee yz$ .



$$f(x, y, z, t) = xyz t \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee y z \vee x y \bar{z} \vee x y \bar{t}$$

❖ Bước 5: Xác định các công thức đa thức tối thiểu của f.

Ứng với phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn tìm được ở bước 4 ta tìm được duy nhất một công thức đa thức tối thiểu của f:

$$x \vee yz$$

Bài tập 38, 39/ Trang 173. GS. NHA nh