# Cực và đối cực

## I- Lý thuyết

### 1. Định nghĩa

- Cho (O) bkì, khi đó hai điểm A, B đc gọi là liên hợp với (O) $\Leftrightarrow$ (AB) trực giao (O).
- Tập hợp các điểm B liên hợp với A đối với (O) là một đth dvuông góc với OA. Khi đó ta gọi:
  + d là đường đối cực của điểm A đối với (O).
  + A là cực của đth d đối với (O).

Kí hiệu: đg đối cực của đ' x là $d_x$.

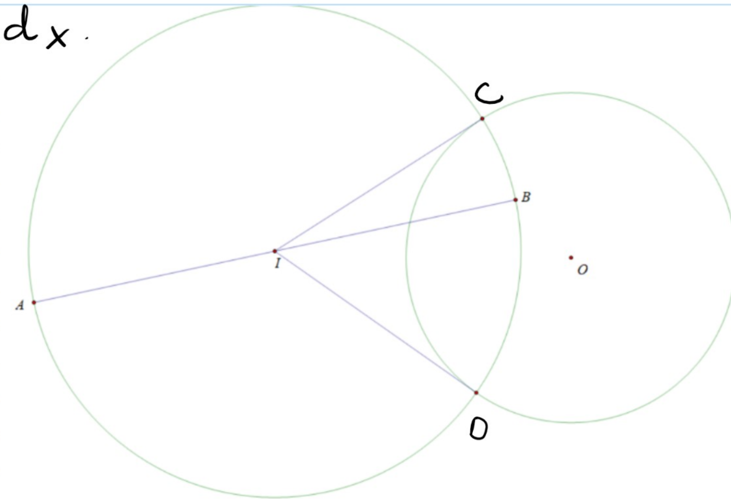
VD: Gọi I là trđ' AB.

(AB) $\cap$ (O) = C, D.

Khi đó (AB) trực giao với (O)

$\Leftrightarrow \widehat{ICO} = \widehat{IDO} = 90^0$

hay IC, ID là $t^2$ của (O).




CM: Gọi B là đ' bkì tm:

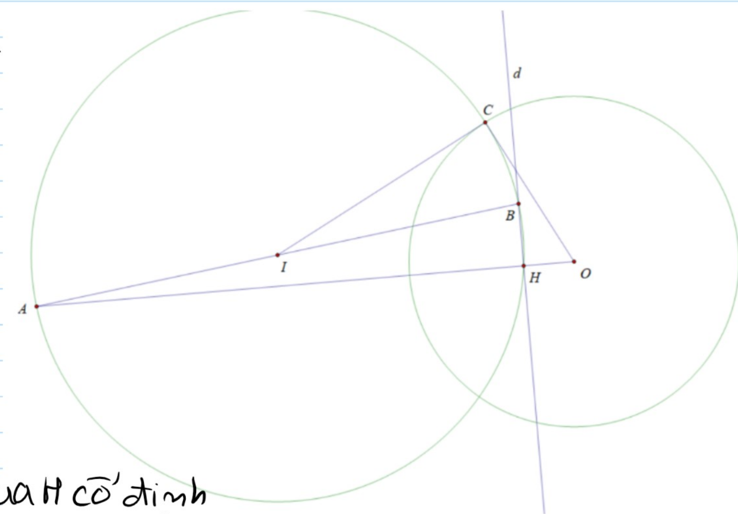
(AB) trực giao (O). Gọi H là hch của B trên OA.

Do $\widehat{ICO} = 90^0 \Rightarrow OC$ tx (I)

$\Rightarrow P_{O/(AB)} = OC^2 = \overline{OH}.\overline{OA}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{OC^2}{OA} = \text{const}$

$\Rightarrow$ H cố định




$\Rightarrow$ d $\perp$ OA cố định và đi qua H cố định

$\Rightarrow$ d xđịnh duy nhất

### 2. Tính chất

a) A nằm trên $d_B \Leftrightarrow$ B nằm trên $d_A$

CM: $\Leftrightarrow$ A, B liên hợp đối với (O).

b) $AB \cap (O) = C, D$. Khi đó: $(AB, CD) = -1$.

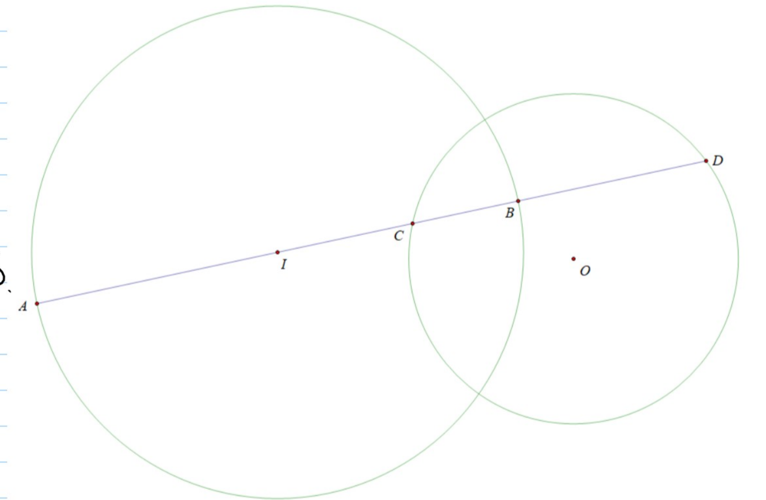
CM: Gọi $I$ là trung đ' $AB$.

Ta có $(AB)$ trực giao với $(O)$

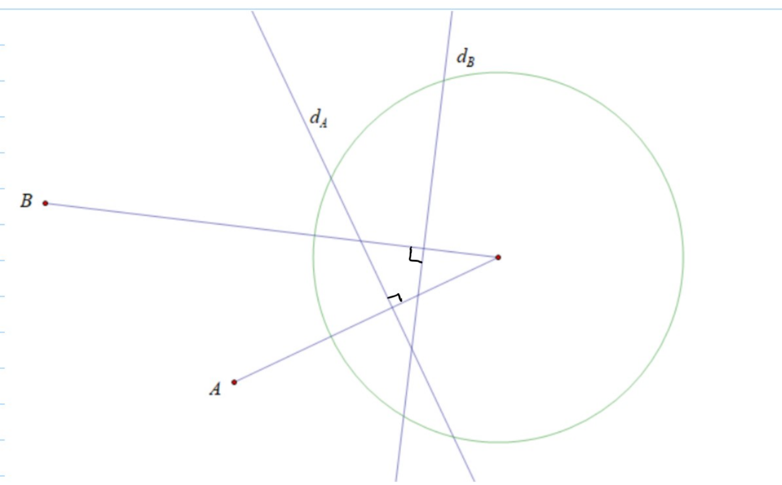
$\Rightarrow IA^2 = IB^2 = P_{I/(O)} = \overline{IC}.\overline{ID}$.

Theo hệ thức Newton ta có:

$\Rightarrow (AB, CD) = -1$.




c) Với $A, B$ là 2 đ' bkì: $(OA, OB) \equiv (d_A, d_B) \pmod{\pi}$




d) Ba đ' $A, B, C$ thh $\Leftrightarrow d_A, d_B, d_C$ đquy.

($\Rightarrow$): Ta gọi $M$ là cực của đth đi qua 3 đ' $A, B, C$.

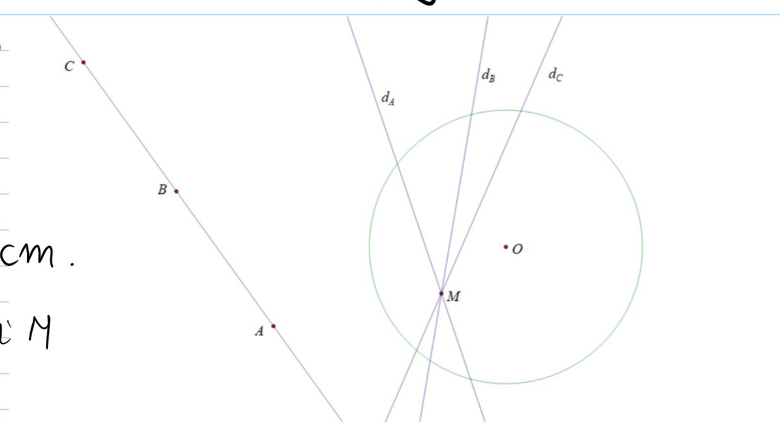
Rõ ràng $A, B, C \in d_M$

$\Rightarrow M \in d_A, d_B, d_C \Rightarrow$ đpcm.

($\Leftarrow$) G/S $d_A, d_B, d_C$ đquy tại $M$

Từ $M \in d_A, d_B, d_C$

$\Rightarrow A, B, C \in d_M \Rightarrow$ đpcm.




e) (Định lí Brocard): Cho tứ giác $ABCD$ nt $(O)$. $E = AB \cap CD$.

$F = AD \cap BC$, $G = AC \cap BD$. Khi đó: $\begin{cases} GE \equiv d_F \\ GF \equiv d_E \\ EF \equiv d_G \end{cases}$

## II - Bài tập

**Bài 1**: Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp (I). (I) tx với AB, BC, CD, DA tại X, Y, Z, T. CMR: AC, BD, XZ, YT đồng quy.

**Bài 2**: Cho $\Delta ABC$ và P bkì nằm trong $\Delta$. Trên BC, CA, AB lấy các điểm X, Y, Z sao cho $\widehat{APX} = \widehat{BPY} = \widehat{CPZ} = 90^\circ$. CMR: X, Y, Z th/h

**Bài 3**: Cho $\Delta ABC$ ngoại tiếp (I) và đth d bkì tx (I). Các đth qua I và $\perp$ IA, IB, IC cắt d tại X, Y, Z. CMR: AX, BY, CZ đquy.

**Bài 4**: Cho $\Delta ABC$ ngt (I). Trung trực của IA, IB, IC cắt BC, CA, AB tại X, Y, Z. CMR: X, Y, Z th/h.

**Bài 5**: Cho $\Delta ABC$ ngt (I) có M, N, P là trung đ' BC, CA, AB. Từ M, N, P kẻ tiếp tuyến tới (I) cắt NP, PM, MN tại X, Y, Z
CMR: X, Y, Z thẳng hàng

**Bài 6**: Cho $\Delta ABC$ ngt (I), (I) tx AC, AB tại E, F. $P = EF \cap BC$. Q là gđ' của tiếp tuyến tại E, F của (AEF). CMR: (PQ) trực giao với đtròn Euler của $\Delta BIC$

**Bài 7**: Cho $\Delta ABC$ ngt (I), K là trực tâm của $\Delta BIC$. Gọi M, N là trung đ' AB, AC. CMR: MN là đg đối cực của K ứng với (I).

**Bài 8**: Cho $\Delta ABC$ có P, Q là cặp điểm lhdg. $S = BP \cap CQ$, $T = BQ \cap CP$. CMR: AS, AT đẳng giác trong $\widehat{BAC}$.

**Bài 9**: Cho $\Delta ABC$ ngt (I), (I) tx BC tại D. $ID \cap AC, AB = K, L$. Gọi $J_b, J_c$ là tâm đtròn btiếp góc B, C của $\Delta ABC$. $KJ_c \cap LJ_b = P$.
CMR: $IP \perp AD$.

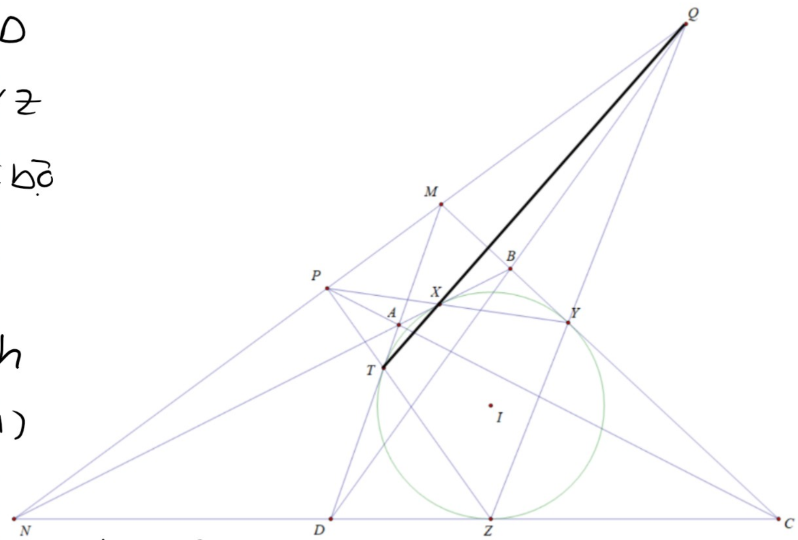
**Bài 10**: Cho tứ giác ABCD ngt (I), AC cắt (I) tại E, F. Gọi K là hình chiếu của I trên BD. CMR: $\widehat{EKA} = \widehat{FKC}$.

**Bài 11**: Cho $\Delta ABC$ nt (O), ngt (I). (I) tx AC, AB tại E, F. Gọi P là gđ' của $t^2$ tại E của (IEC) và $t^2$ tại F của (IFB).
CMR: AP, OI, BC đồng quy.

**Bài 12**: Cho tứ giác ABCD nt (O). $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$, $G = AC \cap BD$
Gọi T là trđ' EF. $TG \cap (O) = P, Q$. CMR: (PEF), (QEF) tx (O).

**Bài 1:** $M = AD \cap BC$, $N = AB \cap CD$

$P = XY \cap ZT$, $Q = XT \cap YZ$




Áp dụng Pascal cho hai bộ

$\begin{pmatrix} X & Z & T \\ Z & X & Y \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} Y & T & X \\ T & Y & Z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ N, P, Q và M, P, Q th/h

$\Rightarrow$ M, N, P, Q th/h. (1)

Xét cực đối cực với (I),

với mỗi đ X kí hiệu $d_X$ là đđc của X với (I).

Ta có: $XY \equiv d_B$, $ZT \equiv d_D$ $\Rightarrow P \in XY, ZT \Rightarrow P \in d_B, d_D$

$\Rightarrow B, D \in d_P \Rightarrow BD \equiv d_P$. Tương tự: $AC \equiv d_Q$.

Khi đó: $YT \equiv d_M$, $XZ \equiv d_N$, $BD \equiv d_P$, $AC \equiv d_Q$ (2)

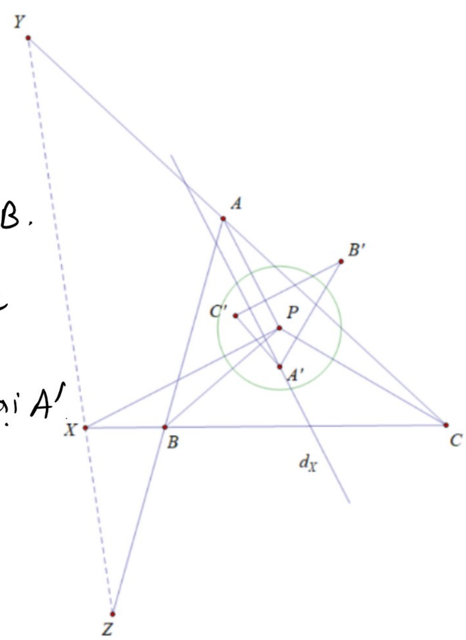
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm.

**Bài 2:** Vẽ đtròn tâm P bkính bkì.

Xét cực đối cực với đtròn tâm P.

Kí hiệu $d_X$ là đg đối cực của X.

Gọi A', B', C' là cực của đth BC, CA, AB.




Ta suy ra $B'C' \equiv d_A$, $C'A' \equiv d_B$, $A'B' \equiv d_C$

$\Rightarrow B'C' \perp PA$. (1)

Ta có: X, B, C th/h $\Rightarrow d_X, d_B, d_C$ đqui tại A'

$\Rightarrow d_X$ đi qua A' và $d_X \perp PX$

Hay $d_X \parallel PA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d_X \perp B'C'$.

CMTT ta thu được $d_X, d_Y, d_Z$ là 3 đg cao của $\Delta A'B'C'$

$\Rightarrow d_X, d_Y, d_Z$ đqui tại trực tâm $\Delta A'B'C'$ $\Rightarrow$ X, Y, Z th/h

$\Rightarrow$ đpcm.