TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
Bộ môn Ứng dụng tin học

TOÁN RỜI RẠC

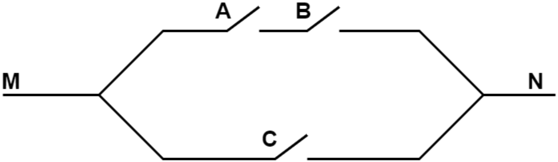
Chương 4: HÀM BOOLE

GV: Lê Thị Tuyết Nhung

Mục lục I

Mở đầu

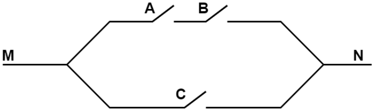
Xét sơ đồ mạch điện như hình vẽ



Tùy theo trạng thái cầu dao A, B, C mà ta sẽ có dòng điện đi qua MN hay không?

Mở đầu

A	B	C	MN
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Câu hỏi. Khi mạch điện gồm nhiều cầu dao, làm sao ta có thể kiểm soát được.
Giải pháp là đưa ra công thức, với mỗi cầu dao ta xem như một biến.

Đại số Boole

Xét tập hợp $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Với mọi $x, y \in \mathbb{B}$, ta định nghĩa

- $x \wedge y = xy$
- $x \vee y = x + y - xy$
- $\overline{x} = 1 - x$

Các phép toán vừa định nghĩa có bảng giá trị là

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\overline{x}$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Khi đó, tập hợp $\mathbb{B}$ với các phép toán trên là một đại số Boole

1. $\wedge$ được gọi là tích Boole
2. $\vee$ được gọi là tổng Boole
3. $\overline{x}$ là phần bù của x

Hàm Boole

Định nghĩa

Một *hàm Boole* n *biến là ánh xạ*

$$f:\ \mathbb{B}^n \to \mathbb{B},$$

trong đó $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Như vậy hàm Boole n biến là một hàm số có dạng :

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

trong đó mỗi biến trong $x_1, x_2, \ldots, x_n$ chỉ nhận hai giá trị 0, 1 và f nhận giá trị trong $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ và $B_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{B}\}$.
Ký hiệu $\mathbb{F}_n$ để chỉ tập các hàm Boole n biến.

Ví dụ.

$$f(x, y, z) = (\overline{x} \vee y)z \vee (xz \vee x\overline{y}) \vee xy\overline{z}$$

là hàm Boole 3 biến.

Bảng chân trị

Định nghĩa

Xét hàm Boole n biến $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Vì mỗi biến x_i chỉ nhận một trong hai giá trị 0, 1 nên chỉ có 2^n trường hợp của bộ biến $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Do đó, để mô tả f, ta có thể lập bảng gồm 2^n dòng ghi tất cả các giá trị của f tùy theo 2^n trường hợp của biến. Ta gọi đây là bảng chân trị của f.

Ví dụ. Xét kết quả f trong việc thông qua một quyết định dựa vào 3 phiếu bầu x, y, z. Mỗi phiếu chỉ lấy một trong hai giá trị: 1 (tán thành) hoặc 0 (bác bỏ). Kết quả f là 1 (thông qua quyết định) nếu được đa số phiếu tán thành, là 0 (không thông qua quyết định) nếu đa số phiếu bác bỏ. Hãy lập bảng chân trị của f.

Hàm Boole

Khi đó f là hàm Boole theo 3 biến x, y, z có bảng chân trị như sau

x	**y**	**z**	**f**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Các phép toán trên $\mathbb{F}_n$ được định nghĩa như sau:

- Phép tổng Boole: Với $f, g \in \mathbb{F}_n$ ta định nghĩa tổng Boole của f và g

$$f \vee g = f + g - fg$$

- Phép tích Boole: Với $f, g \in \mathbb{F}_n$ ta định nghĩa tích Boole của f và g

$$f \wedge g = fg$$

- Phép lấy hàm bù Với $f \in \mathbb{F}_n$ ta định nghĩa hàm bù của f như sau

$$\overline{f} = 1 - f$$

Dạng nối rời chính tắc

Định nghĩa

Xét tập hợp các hàm Boole $\mathbb{F}_n$ theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó:

- *Mỗi hàm Boole x_i hay $\overline{x}_i$ được gọi là từ đơn.*
- *Từ tối tiểu là tích khác không của đúng n từ đơn.*

Ví dụ. Xét tập hợp các hàm Boole theo 3 biến x, y, z. Ta có

- Các từ đơn là $x,\ y,\ z,\ \overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z}$.
- Các từ tối tiểu là $xyz,\ \overline{x}\,y\,z,\ x\,\overline{y}\,z,\ x\,y\,\overline{z},\ \overline{x}\,\overline{y}\,z,\ \overline{x}\,y\,\overline{z},\ x\,\overline{y}\,\overline{z},\ \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$.

Nhận xét. Tập hợp các hàm Boole n biến chứa đúng $2n$ từ đơn và 2^n từ tối tiểu.

Dạng nối rời chính tắc

Định lý

Cho f là hàm Boole n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó:

- *Nếu f là từ tối tiểu thì bảng chân trị của f có đúng một vị trí bằng 1.*
- *Ngược lại, nếu f chỉ nhận giá trị 1 tại vị trí $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ thì f là từ tối tiểu có dạng $f = b_1 b_2 \ldots b_n$, trong đó*

$$b_i = \begin{cases} x_i & \text{nếu } a_i = 1; \\ \overline{x}_i & \text{nếu } a_i = 0. \end{cases}$$

Ví dụ.

- Nếu $f(x, y, z)$ chỉ nhận giá trị 1 tại vị trí (1, 0, 1) thì $f = x\overline{y}z$.
- Nếu $f(x, y, z, t)$ chỉ nhận giá trị 1 tại vị trí (0, 1, 1, 0) thì $f = \overline{x}yz\overline{t}$.
- Nếu $f(x, y, z, t) = xy\overline{z}\overline{t}$ thì f chỉ nhận giá trị 1 tại vị trí (1, 1, 0, 0).

Dạng nối rời chính tắc

Định nghĩa

Xét tập hợp các hàm Boole $\mathbb{F}_n$ theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó:

- *Đơn thức là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn.*
- *Công thức đa thức là công thức biểu diễn hàm Boole thành tổng của các đơn thức.*

Ví dụ. Xét tập hợp các hàm Boole theo 3 biến x, y, z. Ta có

- Các hàm Boole y, xz, yz, $x\overline{y}z$, $\overline{yz}$, $\overline{z}$ là các đơn thức.
- Công thức $f = xy \vee \overline{y}z \vee x\overline{yz}$ là một công thức đa thức.

Nhận xét. Mọi hàm Boole đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức.

Định nghĩa

Dạng nối rời chính tắc là công thức biểu diễn hàm Boole thành tổng của các từ tối tiểu

Dạng nối rời chính tắc

Ví dụ. Xét hàm Boole

$$f(x, y, z) = x(y \vee \overline{z}) \vee \overline{x}z \tag{1}$$

- Ta có (1) không là công thức đa thức của f.
- Ta có

$$(1) \Leftrightarrow f = xy \vee x\overline{z} \vee \overline{x}z. \tag{2}$$

  Khi đó (2) là công thức đa thức của f nhưng không phải là dạng nối rời chính tắc của f.
- Ta có

$$\begin{aligned} (2) \Leftrightarrow f &= xy(z \vee \overline{z}) \vee x\overline{z}(y \vee \overline{y}) \vee \overline{x}z(y \vee \overline{y}) \\ \Leftrightarrow f &= xyz \vee xy\overline{z} \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}\,\overline{y}z \\ \Leftrightarrow f &= xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}\,\overline{y}z. \end{aligned} \tag{3}$$

  Công thức (3) là dạng nối rời chính tắc của f.

Định nghĩa

Xét hàm Boole f *theo* n *biến* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Đặt*

- $f^{-1}(1) = \{u \in \mathbb{B}^n \mid f(u) = 1\}$,
- $f^{-1}(0) = \{u \in \mathbb{B}^n \mid f(u) = 0\}$.

với $\mathbb{B}^n = \{u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{B}\}$.

Ví dụ hàm Boole $f = f(x, y, z)$ có bảng chân trị

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Ta có

- $f^{-1}(1) = \{001, 011, 101, 111\}$
- $f^{-1}(0) = \{000, 010, 100, 110\}$

Trong đó, ta dùng ký hiệu 001 thay cho (0, 0, 1); 011 thay cho (0, 1, 1); ....

Định lý

Cho f là hàm Boole n biến. Khi đó, nếu

$$f^{-1}(1) = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$$

thì dạng nối rời chính tắc của f là

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k,$$

trong đó m_i là từ tối tiểu nhận giá trị 1 tại vị trí u_i.

Ví dụ. Nếu f là hàm Boole theo 3 biến x, y, z sao cho

$$f^{-1}(1) = \{101, 001, 100, 010\}$$

thì dạng nối rời chính tắc của f là:

$$f = x\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z}.$$

Bài tập

Bài tập 1. Cho f là hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t được xác định bởi

$$f^{-1}(1) = \{1001, 0101, 1000, 1010, 0111\}.$$

Hãy tìm dạng nối rời chính tắc của f?

Bài tập 2. Cho hàm Boole 3 biến x, y, z,

$$f^{-1}(0) = \{100, 010, 110, 011, 101\}.$$

Tìm dạng nối rời chính tắc của f?

Mạng logic

Định nghĩa

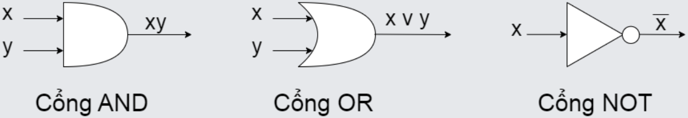
Một *mạng logic* *(hay* *mạng các cổng**) biểu diễn một hàm Boole f là một hệ thống có dạng*

trong đó

i). *Input: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biến boole.*

ii). *Output: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là hàm boole.*

Một mạng các cổng luôn được cấu tạo từ một số mạng sơ cấp mà ta gọi là các cổng. Ta có các cổng cơ bản sau:

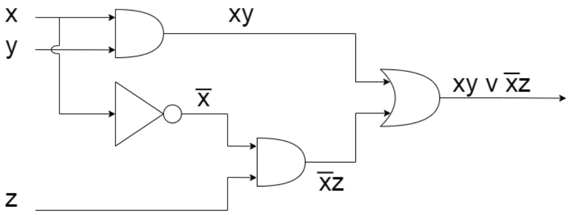


Mạng logic

Ví dụ. Cho hàm Boole

$$f = xy \vee \overline{x}z$$

Vẽ sơ đồ mạng logic của f



Mạng logic

Bài tập 1. Cho các hàm Boole f bên dưới. Hãy vẽ sơ đồ mạng logic của f

a. $f(x, y, z) = \overline{x}\ \overline{(y \vee \overline{z})}$

b. $f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}$.

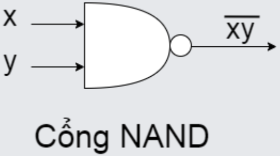
c. $f(x, y, z) = xy \vee y(x \vee z)$.

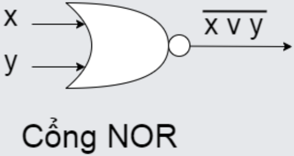
Bài tập 2. Cho 2 cầu dao x, y thỏa mãn cầu dao bật là 1; tắt là 0. Cho $F(x, y) = 1$ khi đèn sáng và 0 khi đèn tắt.
Giả sử $F(x, y) = 1$ khi cả 2 cầu dao đều bật hoặc cùng tắt. Hãy thiết kế một mạch điều khiển bởi 2 cầu dao.

Cổng NAND và cổng NOR

Định nghĩa

Ta ký hiệu cổng NAND là NOT của AND và cổng NOR là NOT của OR.





- *Cổng NAND là cổng bù của AND*
- *Có ngõ ra là ngược lại với cổng AND*

- *Cổng NOR là cổng bù của OR*
- *Có ngõ ra là ngược lại với cổng OR*

Cổng NAND và cổng NOR

Ví dụ. Cho hàm Boole

$$f = \overline{\overline{x \vee \overline{xy}}\, y}$$

Vẽ sơ đồ mạng logic của f.

Mô tả

- Sử dụng bảng (hoặc hình vuông, hình chữ nhật) gồm các ô vuông kề nhau.
- Mỗi ô vuông tượng trưng cho 1 từ tối tiểu.
- Hai ô gọi là kề nhau nếu chúng tượng trưng cho 2 từ tối tiểu chỉ khác nhau đúng 1 từ đơn (nếu chúng là hai ô liền nhau hoặc chúng là ô đầu, ô cuối ở cùng một hàng (cột) nào đó).

Khai triển tổng-của-tích: Nếu từ tối tiểu nào xuất hiện trong khai triển, điền số 1 vào ô tương ứng.

Biểu đồ Karnaugh

Phương pháp biểu đồ Karnaugh

Cho f là một hàm Boole theo 3 biến x, y, z. Khi đó bảng chân trị của f gồm 8 dòng.
Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 8 ô, tương ứng với 8 dòng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$
z	**101**	**111**	**011**	**001**
$\overline{z}$	**100**	**110**	**010**	**000**
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$

Quy ước

- Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó $x = 1$, bởi $\overline{x}$ thì tại đó $x = 0$, tương tự cho y, z.
- Các ô tại đó f nhận giá trị 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu gọi là biểu đồ Karnaugh của f, ký hiệu bởi $kar(f)$.

Phương pháp biểu đồ Karnaugh

Cho f là một hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t. Khi đó bảng chân trị của f gồm 16 dòng.
Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 16 ô, tương ứng với 16 dòng của bảng chân trị,được đánh dấu như sau:

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\overline{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\overline{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\overline{z}$	1000	1100	0100	0000	$\overline{t}$
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$	

Quy ước

- Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó $x = 1$, bởi $\overline{x}$ thì tại đó $x = 0$, tương tự cho y, z, t.
- Các ô tại đó f nhận giá trị 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu gọi là biểu đồ Karnaugh của f, ký hiệu bởi $kar(f)$.

Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ. Cho hàm Boole theo 3 biến x, y, z với

$$f^{-1}(1) = \{101, 000, 001, 111, 110\}.$$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f.

Giải.

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
z	**101**	**111**	**011**	**001**
$\bar{z}$	**100**	**110**	**010**	**000**
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$

Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ. Cho hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t với

$$f^{-1}(1) = \{1010, 0000, 0011, 1110, 1111, 0100, 1100, 0001\}.$$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f.

Giải.

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\overline{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\overline{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\overline{z}$	1000	1100	0100	0000	$\overline{t}$
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$	

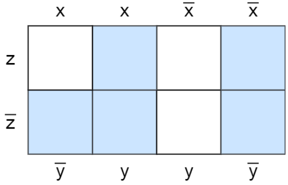
Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ. Cho hàm Boole theo 3 biến x, y, z với

$$f = \overline{x}\,\overline{y} \vee xyz \vee x\overline{z}.$$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f.

Giải.

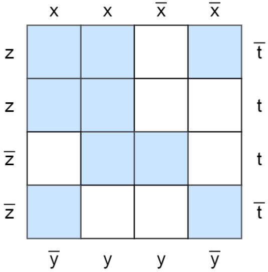


Ví dụ. Cho hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t với

$$f = xz \vee y\overline{z}t \vee \overline{y}\,\overline{t}.$$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f.

Giải.



Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ 1. Cho hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t với

a.) $f^{-1}(1) = \{1100, 1101, 1110, 1111, 1000, 1001, 0111, 0011, 0001\}$;

b.) $f^{-1}(0) = \{1011, 1001, 1100, 0100, 0011, 0001\}$;

c.) $f = \overline{x}\,\overline{y}\,t \vee xyz \ \vee xz \vee yz\bar{t}$;

Tìm biểu đồ Karnaugh của f.

Mệnh đề. Cho f và g là các hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t. Khi đó

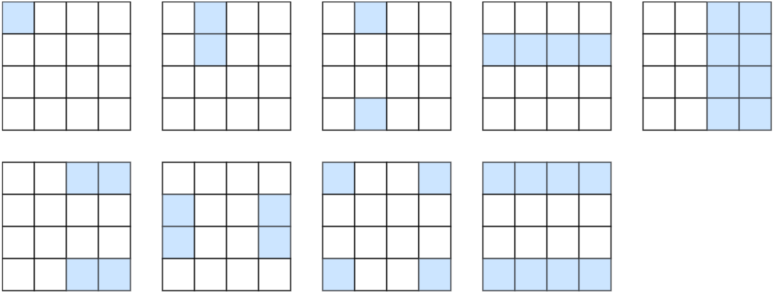
- $f = g \Leftrightarrow kar(f) = kar(g)$;
- $kar(fg) = kar(f) \cap kar(g)$;
- $kar(f \vee g) = kar(f) \cup kar(g)$;

Tế bào

Định nghĩa

$Kar(f)$ được gọi là hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) nếu khi ta cuốn hình vuông lớn theo chiều dọc hay chiều ngang để thành hình trụ thì $kar(f)$ trở thành hình chữ nhật trên hình trụ đó. Hình chữ nhật có số ô là lũy thừa của 2 được gọi là một tế bào.

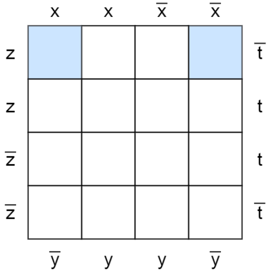
Ví dụ. Các biểu đồ sau là các tế bào



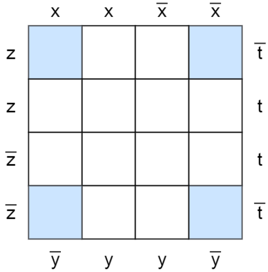
Tế bào

Nhận xét. Nếu T là một tế bào thì T là biểu đồ Karnaugh của một đơn thức duy nhất m, cách xác định m như sau:
Lần lượt chiếu T lên các cạnh, nếu toàn bộ hình chiếu nằm trọn trong một từ đơn nào thì từ đơn đó mới xuất hiện trong m.

Ví dụ.



Tế bào có công thức là $\overline{y}z\overline{t}$

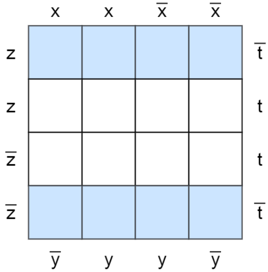


Tế bào có công thức là $\overline{y}\overline{t}$

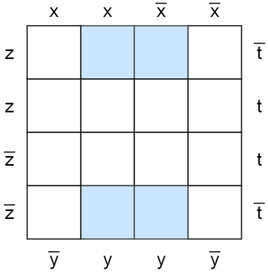
Tế bào

Ví dụ. Xét hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t. Các tế bào sau là biểu đồ Karnaugh của đơn thức nào?

Ví dụ 1.



Ví dụ 2.



Tế bào

Định nghĩa

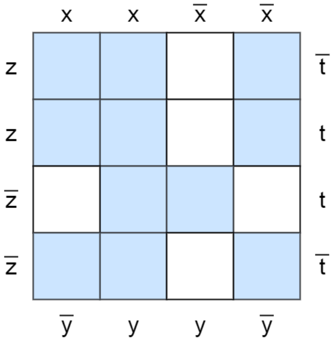
Cho hàm Boole f. Ta nói T là một tế bào lớn của $kar(f)$ nếu T thoả hai tính chất sau:

a.) T là một tế bào và $T \subseteq kar(f)$.

b). Không tồn tại tế bào T' nào thỏa $T' \neq T$ và $T \subseteq T' \subseteq kar(f)$.

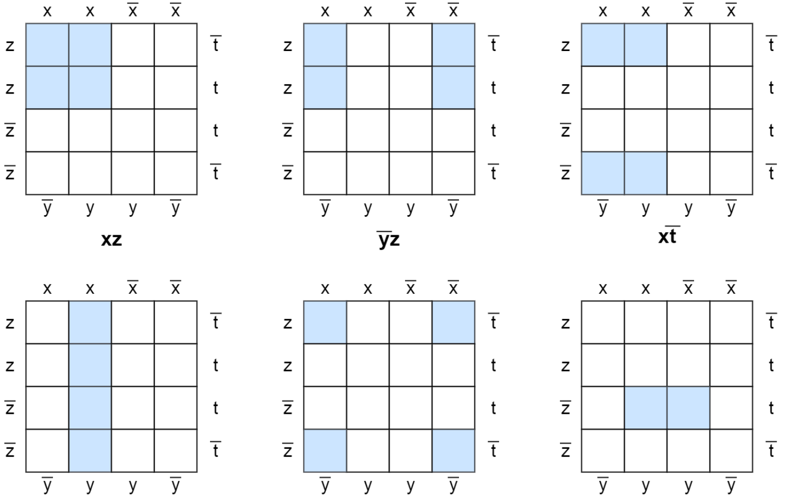
Nói cách khác, một tế bào nằm trong $kar(f)$ được gọi là tế bào lớn nếu nó không nằm trong tế bào nào khác của $kar(f)$.

Ví dụ. Xét hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t có biểu đồ Karnaugh như sau



Tìm tất cả các tế bào lớn của $kar(f)$.

Giải. Các tế bào lớn của $kar(f)$ là

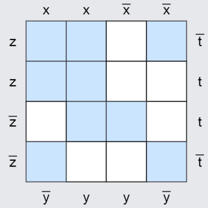


xz $\quad$ $\bar{y}z$ $\quad$ $x\bar{t}$

xy $\quad$ $\bar{y}\,\bar{t}$ $\quad$ $y\bar{z}t$

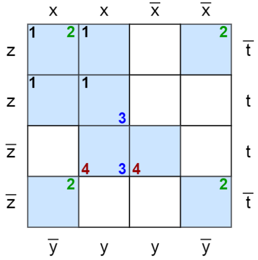
Tế bào

Ví dụ. Xét hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t có biểu đồ Karnaugh như sau



Tìm tất cả các tế bào lớn của $kar(f)$.

Giải. Bằng cách đánh số các tế bào lớn ta có



Vậy $kar(f)$ có 4 tế bào lớn là

- Tế bào 1: xz
- Tế bào 2: $\overline{y}\overline{t}$
- Tế bào 3: xyt
- Tế bào 4: $y\overline{z}t$

Tế bào

Ví dụ 1. Tìm các tế bào lớn của biểu đồ Karnaugh của f với

$$f(x,y,z,t) = \overline{y}zt \vee \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee y\overline{z}\,\overline{t} \vee xyzt \vee \overline{x}z\overline{t}$$

Ví dụ 2. Tìm các tế bào lớn của biểu đồ Karnaugh của f với

$$f(x,y,z,t) = x\overline{y}z \vee \overline{y}\,\overline{z}\,t \vee x\overline{z}\,\overline{t} \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}yz\overline{t}$$

Đa thức tối tiểu

Định nghĩa. Cho hai công thức đa thức của một hàm Boole

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \dots m_k \qquad (F)$$
$$f = M_1 \vee M_2 \vee \dots M_k \qquad (G)$$

Ta nói rằng công thức F đơn giản hơn công thức G nếu tồn tại đơn ánh

$$h : \{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, l\}$$

sao cho với mọi $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ thì số từ đơn của m_i không nhiều hơn số từ đơn của $M_{h(i)}$.

Ví dụ. Giả sử f có hai công thức đa thức là

$$f = \overline{y}\,\overline{t} \vee xy\overline{t} \vee x\overline{t} \vee xzt \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \qquad (F)$$
$$f = \overline{z}\overline{t} \vee \overline{x}\overline{t} \vee xzt \vee \overline{y}zt \qquad (G)$$

Hỏi công thức nào đơn giản hơn?

Định nghĩa. Công thức F của hàm Boole f được gọi là đa thức tối tiểu nếu không có công thức nào của f đơn giản hơn nó.

Thuật toán Karnaugh

Bước 1. Vẽ biểu đồ $kar(f)$.
Bước 2. Xác định tất cả các tế bào lớn của $kar(f)$ và các công thức đơn thức tương ứng với từng tế bào lớn.
Bước 3. Tìm trong $kar(f)$ những ô chỉ nằm trong duy nhất một tế bào lớn và chọn tế bào này để phủ $kar(f)$.
Bước 4. Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn.

- Nếu các tế bào lớn chọn được ở Bước 3 đã phủ được $kar(f)$ thì $kar(f)$ chỉ có duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của $kar(f)$.
- Ngược lại, ta xét một ô bất kỳ chưa bị phủ. Sẽ có ít nhất hai tế bào lớn chứa ô này. Ta chọn một trong các tế bào lớn đó để phủ. Cứ tiếp tục quá trình trên đến khi nào $kar(f)$ được phủ kín. Khi đó, ứng với mỗi phép phủ ta có một công thức đa thức. Công thức đơn giản nhất trong các công thức trên chính là công thức đa thức tối tiểu của f.

Đa thức tối tiểu

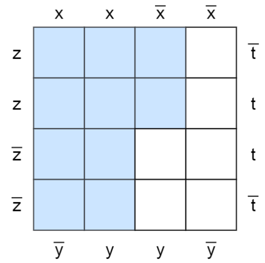
Ví dụ. Tìm đa thức tối tiểu của hàm Boole sau:

$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee yz \vee xy(\overline{z} \vee \overline{t}).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) &= xyzt \vee x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee yz \vee xy(\overline{z} \vee \overline{t}) \\ &= xyzt \vee x\overline{y} \vee x\overline{z} \vee yz \vee xy\overline{z} \vee xy\overline{t} \end{aligned}$$

Bước 1. Vẽ biểu đồ $Kar(f)$



Bước 2. Xác định các tế bào lớn của $Kar(f)$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	1	1 2	2		$\bar{t}$
z	1	1 2	2		t
$\bar{z}$	1	1			t
$\bar{z}$	1	1			$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Bằng cách đánh số các tế bào lớn, ta có $kar(f)$ có 2 tế bào lớn là

- Tế bào 1: x
- Tế bào 2: yz

Bước 3.

- Ô (1,1) chỉ nằm trong tế bào lớn 1. Ta phải chọn tế bào 1.
- Ô (1,3) chỉ nằm trong tế bào lớn 2. Ta phải chọn tế bào 2.

Bước 4. Ta được duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của $kar(f)$ là $x \vee yz$.

Vậy công thức đa thức tối tiểu của f là

$$f = x \vee yz.$$

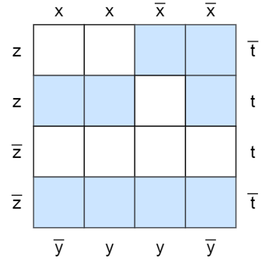
Đa thức tối tiểu

Ví dụ. Tìm đa thức tối tiểu của hàm Boole sau:

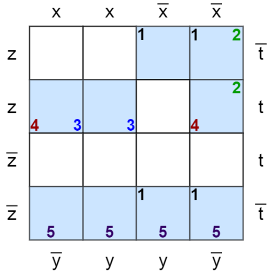
$$f(x, y, z, t) = \overline{y}zt \vee \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee y\overline{z}\overline{t} \vee xyzt \vee \overline{x}z\overline{t}.$$

Giải.

Bước 1. Vẽ biểu đồ $Kar(f)$



Bước 2. Xác định các tế bào lớn của $Kar(f)$



Bằng cách đánh số các tế bào lớn, ta có $kar(f)$ có 5 tế bào lớn là

- Tế bào 1: $\overline{x}\,\overline{t}$
- Tế bào 2: $\overline{x}\,\overline{y}\,z$
- Tế bào 3: xzt
- Tế bào 4: $\overline{y}\,z\,t$
- Tế bào 5: $\overline{z}\,\overline{t}$

Bước 3.

- Ô (1,3) chỉ nằm trong tế bào lớn 1. Ta phải chọn tế bào 1.
- Ô (2,2) chỉ nằm trong tế bào lớn 3. Ta phải chọn tế bào 3.
- Ô (4,1) chỉ nằm trong tế bào lớn 5. Ta phải chọn tế bào 5.

Bước 4. Như vậy chỉ còn ô (2,4) là chưa được phủ, để phủ ô (2,4) ta có 2 cách chọn

- Cách 1. Chọn tế bào 2. Khi đó tế bào 1, 2, 3, 5 sẽ phủ hết các ô. Do đó, ta có

$$f = \overline{x}\,\overline{t} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee xzt \vee \overline{z}\,\overline{t} \tag{4}$$

- Cách 2. Chọn tế bào 4. Khi đó tế bào 1, 3, 4, 5 sẽ phủ hết các ô. Do đó, ta có

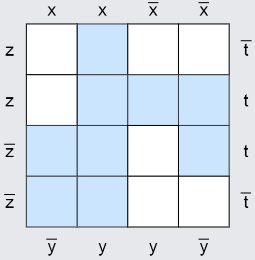
$$f = \overline{x}\,\overline{t} \vee xzt \vee \overline{y}zt \vee \overline{z}\,\overline{t} \tag{5}$$

Do công thức (4) và (5) đơn giản như nhau nên f có hai công thức đa thức tối tiểu là

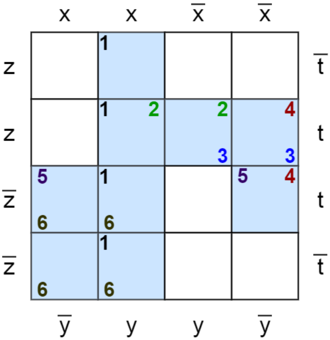
$$f = \overline{x}\,\overline{t} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee xzt \vee \overline{z}\,\overline{t}$$
$$f = \overline{x}\,\overline{t} \vee xzt \vee \overline{y}zt \vee \overline{z}\,\overline{t}$$

Đa thức tối tiểu

Ví dụ. Tìm đa thức tối tiểu của hàm Boole f biết rằng biểu đồ $kar(f)$ là



Bước 2. Xác định các tế bào lớn của $Kar(f)$



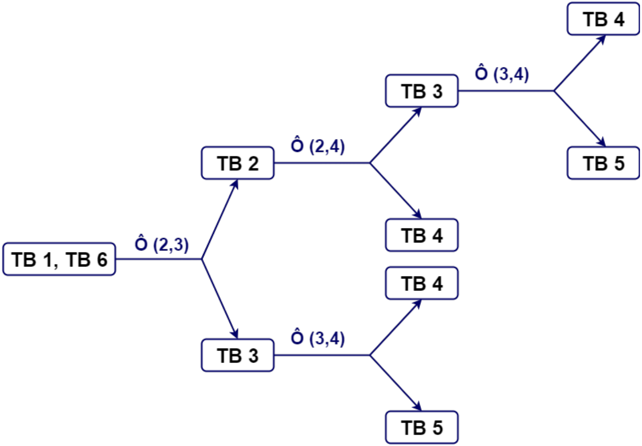
Bằng cách đánh số các tế bào lớn, ta có $kar(f)$ có 6 tế bào lớn là

- Tế bào 1: xy
- Tế bào 2: yzt
- Tế bào 3: $\overline{x}zt$
- Tế bào 4: $\overline{x}\,\overline{y}\,t$
- Tế bào 5: $\overline{y}\,\overline{z}\,t$
- Tế bào 6: $x\overline{z}$

Bước 3.

- Ô (1,2) chỉ nằm trong tế bào lớn 1. Ta phải chọn tế bào 1.
- Ô (4,1) chỉ nằm trong tế bào lớn 6. Ta phải chọn tế bào 6.

Bước 4. Như vậy còn ô (2,3), (2,4) và (3,4) là chưa được phủ. Để phủ các ô này ta có những cách sau:



Như vậy, ta có 5 tập phủ là

1). $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
2). $\{1, 2, 3, 5, 6\}$
3). $\{1, 2, 4, 6\}$
4). $\{1, 3, 4, 6\}$
5). $\{1, 3, 5, 6\}$

Nhưng ta chỉ xem xét 3 tập phủ là $\{1,2,4,6\}, \{1,3,4,6\}$ và $\{1,3,5,6\}$.

- Đối với tập phủ $\{1,2,4,6\}$, ta có $f = xy \vee yzt \vee \overline{x}\,\overline{y}\,t \vee x\overline{z}$
- Đối với tập phủ $\{1,3,4,6\}$, ta có $f = xy \vee \overline{x}zt \vee \overline{x}\,\overline{y}\,t \vee x\overline{z}$
- Đối với tập phủ $\{1,3,5,6\}$, ta có $f = xy \vee \overline{x}zt \vee \overline{y}\,\overline{z}\,t \vee x\overline{z}$

Ba công thức này đơn giản như nhau nên ta chọn cả 3.

Bài tập 1. Hãy xác định các công thức đa thức tối tiểu của hàm Boole:

a). $f = xz(\overline{y} \vee \overline{t}) \vee \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee z(yt \vee \overline{x}\,\overline{y})$

b). $g = x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t \vee \overline{x}yzt \vee \overline{x}y\overline{z}t \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,t \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee \overline{x}yz\overline{t} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$

Bài tập 2. Cho hàm Boole:

$$f(x, y, z, t) = (\overline{x} \vee \overline{z})t \vee (\overline{x}y \vee \overline{y}t)z \vee (\overline{y}z \vee xy\overline{z})\overline{t}$$

a). Vẽ biểu đồ Karnaugh và tìm công thức đa thức tối tiểu của f.

b). Vẽ một mạng các cổng tổng hợp hàm Boole f.

Bài tập 3. Cho f là một hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t xác định bởi:

$$f^{-1}(0) = \{0010, 0011, 1001, 1101, 1000\}$$

a). Vẽ biểu đồ Karnaugh $kar(f)$ của f và xác định các tế bào lớn của nó.

b). Hãy xác định tất cả các công thức đa thức tối tiểu của f.