TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
Bộ môn Ứng dụng tin học

TOÁN RỜI RẠC

Chương 5: ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

GV: Lê Thị Tuyết Nhung

Mục lục I

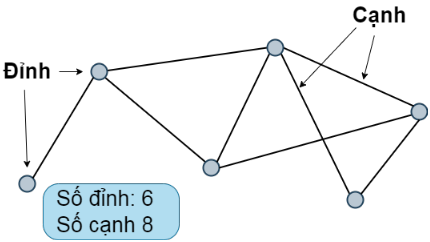
Đồ thị vô hướng

Định nghĩa

Đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ gồm:

i). V là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là đỉnh (vertex) của G.

ii). E là tập hợp gồm các cặp không sắp thứ tự của hai đỉnh. Mỗi phần tử của E được gọi là một cạnh (edge) của G. Ký hiệu $a = (i, j)$ hay $a = ij$.



Đồ thị vô hướng

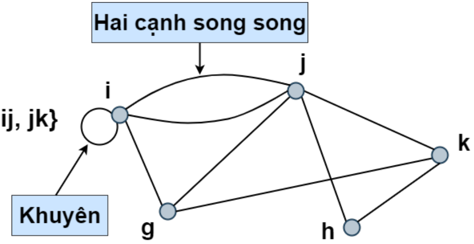
Chú ý. Cho đồ thị $G = (V, E)$ và $a = (i, j) \in E$

- Ta nói cạnh (i, j) nối i với j, cạnh (i, j) kề với đỉnh i, j và đỉnh i kề đỉnh j.
- Hai cạnh nối cùng một cặp đỉnh gọi là hai cạnh song song; và gọi là kề nhau nếu chúng có 1 đỉnh chung.
- Cạnh (i, i) có hai đầu mút trùng nhau gọi là một khuyên.

Đồ thị G(V, E)

Tập đỉnh: V = {g, h, i, j, k}

Tập cạnh: E = {gi, gj, gk, hj, hk, ij, jk}



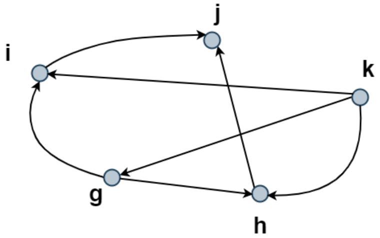
Đồ thị có hướng

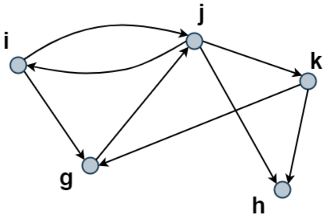
Định nghĩa

Đồ thị có hướng $G = (V, E)$ gồm:

i). V là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là đỉnh (vertex) của G.

ii). E là tập hợp gồm các cặp có sắp thứ tự của hai đỉnh. Mỗi phần tử của E được gọi là một cung (edge) của G. Ký hiệu $a = (i, j)$ hay $a = \overline{ij}$.

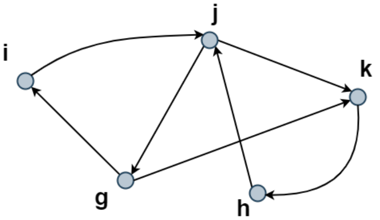




Đồ thị có hướng

Chú ý. Cho đồ thị $G = (V, E)$ và $a = (i, j) \in E$

- i gọi là đỉnh đầu (gốc), j gọi là đỉnh cuối (ngọn) của cung a; ta nói cung (i, j) đi từ i đến j, cung (i, j) kề với đỉnh i, j và 2 đỉnh i, j kề nhau.
- Hai cung nối cùng một cặp đỉnh gọi là hai cung song song; và gọi là kề nhau nếu chúng có 1 đỉnh chung.
- Cung có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau gọi là một khuyên.



Đồ thị G(V, E)

Tập đỉnh: V = {g, h, i, j, k}

Tập cạnh: E = {(g,i), (g,k), (h,j), (i,j), (j,g), (j,k), (k,h)}

Đồ thị vô hướng

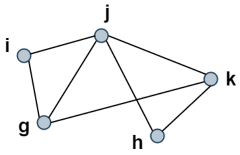
Định nghĩa

Cho đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng.

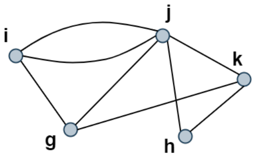
a). Nếu G không có cạnh song song và không có khuyên thì ta nói G là đồ thị đơn vô hướng (đơn đồ thị vô hướng).

b). Nếu G có cạnh song song và không có khuyên thì ta nói G là đa đồ thị vô hướng.

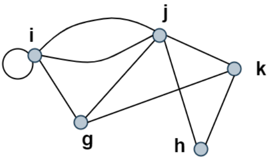
c). Nếu G có cạnh song song và có khuyên thì ta nói G là giả đồ thị vô hướng.



Đơn đồ thị vô hướng



Đa đồ thị vô hướng



Giả đồ thị vô hướng

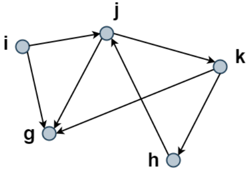
Đồ thị có hướng

Định nghĩa

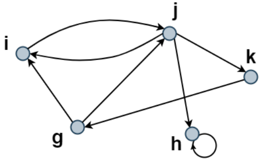
Cho đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng.

a). Nếu G không có cung song song và không có khuyên thì ta nói G là đồ thị đơn có hướng (đơn đồ thị có hướng).

b). Nếu G có cung song song thì ta nói G là đa đồ thị có hướng.



Đơn đồ thị có hướng



Đa đồ thị có hướng

⋇ Hai đỉnh kề nhau

Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, 2 đỉnh $u, v \in V$ và cạnh $e = (u, v) \in E$. Khi đó ta nói:

+ u và v kề nhau và e liên thuộc với u và v.
+ u và v là các đỉnh đầu của cạnh e.

Cho đồ thị có hướng $G = (V, E)$, 2 đỉnh $u, v \in V$ và cung $e = (u, v) \in E$. Khi đó ta nói:

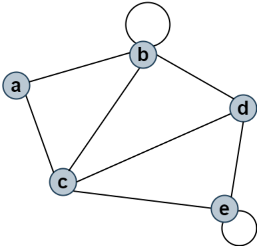
+ u và v kề nhau, cung e đi từ u đến v (đi ra khỏi u và đi vào v).
+ u là đỉnh đầu, v là đỉnh cuối của cung e.

⋇ Bậc của đỉnh

Định nghĩa

Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E), v \in V$. Bậc của đỉnh v, ký hiệu deg(v), là số cạnh kề với v, trong đó một khuyên tại một đỉnh được đếm hai lần cho bậc của đỉnh ấy.

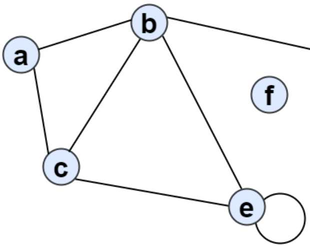
Ví dụ.

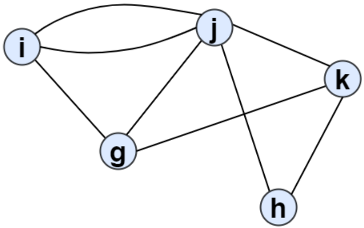


- Bậc đỉnh a: $\deg(a) = 2$
- Bậc đỉnh b: $\deg(b) = 5$
- Bậc đỉnh c: $\deg(c) = 4$
- Bậc đỉnh d: $\deg(d) = 3$
- Bậc đỉnh e: $\deg(e) = 4$

Các thuật ngữ cơ bản

Ví dụ. Tìm bậc của tất cả các đỉnh trong 2 đồ thị sau.





Các thuật ngữ cơ bản

Định nghĩa

Cho đồ thị có hướng $G = (V, E), v \in V$.

i). Bậc vào (nửa bậc trong) của v, ký hiệu: $\deg^-(v)$ là số cung có đỉnh cuối là v.

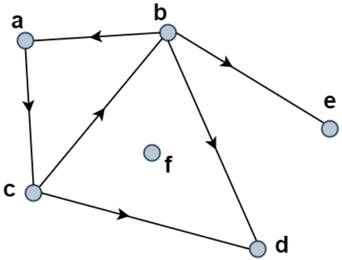
ii). Bậc ra (nửa bậc ngoài) của v, ký hiệu: $\deg^+(v)$ là số cung có đỉnh đầu là v.

iii). $\deg(v) := \deg^-(v) + \deg^+(v)$, gọi là bậc của v

Đỉnh bậc 0 gọi là đỉnh cô lập. Đỉnh bậc 1 gọi là đỉnh treo.

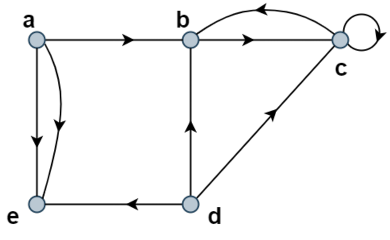
Các thuật ngữ cơ bản

Ví dụ.

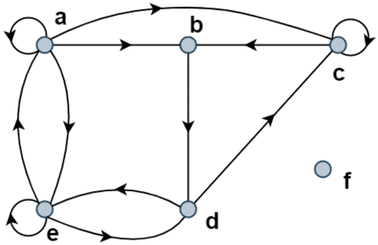


- Đỉnh a: $\deg^-(a) = 1$, $\deg^+(a) = 1$
- Đỉnh b: $\deg^-(b) = 1$, $\deg^+(b) = 3$
- Đỉnh c: $\deg^-(c) = 1$, $\deg^+(c) = 2$
- Đỉnh d: $\deg^-(d) = 2$, $\deg^+(d) = 0$
- Đỉnh e: $\deg^-(e) = 1$, $\deg^+(e) = 0$
- Đỉnh f: $\deg^-(f) = 0$, $\deg^+(f) = 0$

Ví dụ. Tìm bậc của tất cả các đỉnh trong 2 đồ thị sau.



G



H

Các thuật ngữ cơ bản

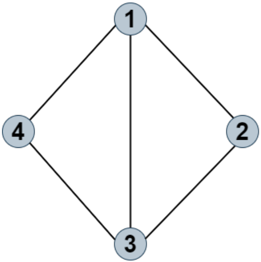
Định lý về số bậc

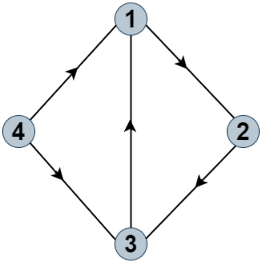
Cho đồ thị $G = (V, E)$, m là số cạnh (cung)

i). Ta luôn có $2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$.

ii). Nếu G có hướng thì $m = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v)$.

iii). Số đỉnh bậc lẻ của đồ thị là số chẵn.





Các thuật ngữ cơ bản

Ví dụ 1. Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, $|V| = 10$, biết mỗi đỉnh có bậc 6. Hỏi đồ thị G có bao nhiêu cạnh?

Ví dụ 2. Cho đồ thị G có 14 cạnh, trong đó có 3 đỉnh bậc 1, 2 đỉnh bậc 3, 2 đỉnh bậc 4, 1 đỉnh bậc 5, các đỉnh còn lại có bậc là 2. Hỏi G có bao nhiêu đỉnh?

Ví dụ 3. (tự làm) Cho đồ thị G có 13 cạnh, trong đó có 3 đỉnh bậc 1, 4 đỉnh bậc 2, 1 đỉnh bậc 5, các đỉnh còn lại có bậc là 3 hoặc 4. Hỏi G có bao nhiêu đỉnh bậc 3 và bậc 4?

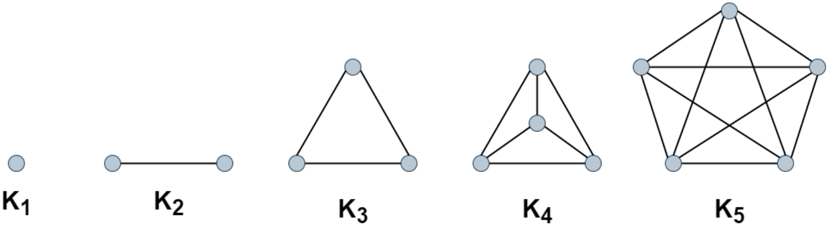
Một số đơn đồ thị đặc biệt

Định nghĩa.

Đồ thị đủ có n đỉnh K_n là đồ thị đơn vô hướng, mỗi đỉnh đều kề với các đỉnh còn lại (giữa 2 đỉnh bất kì của nó luôn có cạnh nối).

Tính chất. Cho đồ thị đủ K_n.

- Bậc của mỗi đỉnh: deg(v) $= n - 1$.
- Số cạnh của K_n: $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$.



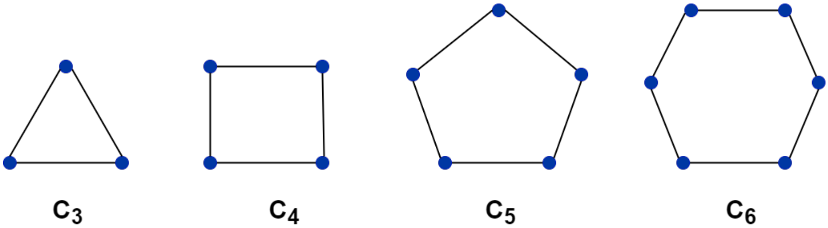
Một số đơn đồ thị đặc biệt

Định nghĩa.

Đồ thị vòng (chu trình) là đồ thị đơn vô hướng có hình dạng của đa giác. Đồ thị vòng có n đỉnh được ký hiệu là C_n, $n \geq 3$.

Tính chất. Cho đồ thị vòng C_n.

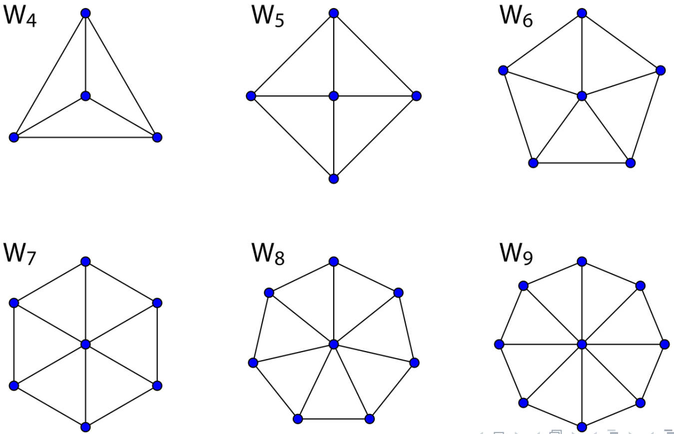
- Bậc của mỗi đỉnh bằng 2.
- Số cạnh của bằng n.



Một số đơn đồ thị đặc biệt

Định nghĩa.

Đồ thị bánh xe W_n được tạo thành từ đồ thị vòng C_{n-1} bằng cách thêm 1 đỉnh và nối đỉnh này với $n-1$ đỉnh của C_{n-1}.



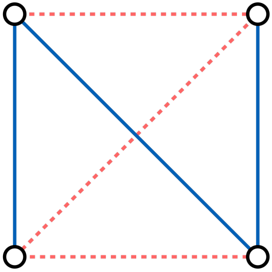
Một số đơn đồ thị đặc biệt

Định nghĩa.

Xét đơn đồ thị $G = (V, E)$. Đồ thị bù của G là đơn đồ thị $\overline{G} = (V, \overline{E})$ với tập các cạnh $\overline{E}$ được định nghĩa như sau

$$\overline{E} = \{(u, v) \mid u, v \in V \text{ và } (u, v) \notin E\}$$

Ta thấy tính bù là tương hỗ: nếu $\overline{G}$ là đồ thị bù của G thì G cũng là đồ thị bù của $\overline{G}$, chúng tạo thành cặp đồ thị bù.

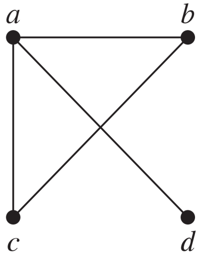


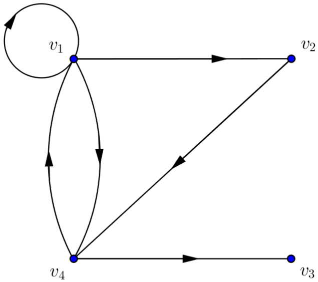
Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề

Cho $G = (V, E)$ (vô hướng hoặc có hướng), với $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
Ma trận kề của G là ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ xác định như sau:

$$a_{ij} = \text{ số cạnh (số cung) đi từ đỉnh i đến đỉnh j}$$

Như vậy, ma trận liền kề của một đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng, nghĩa là, trong khi ma trận liền kề của một đồ thị có hướng không có tính đối xứng.

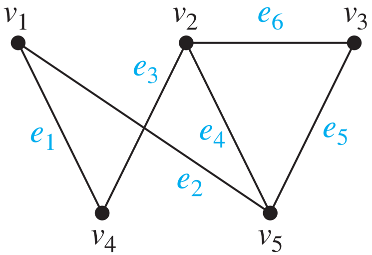




Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc

Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, $|V| = n$, với $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là các đỉnh và $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ là các cạnh của G.
Ma trận liên thuộc của G ứng với thứ tự trên của V và E là ma trận $M = (m_{ij})_{n \times m}$ xác định như sau:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ nối với đỉnh } v_i \\ 0 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ không nối với đỉnh } v_i. \end{cases}$$



Đồ thị con

Định nghĩa.

Cho hai đồ thị $G = (V, E)$ và $G' = (V', E')$ cùng có hướng hoặc cùng không hướng.

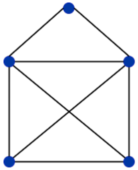
- G' gọi là đồ thị con của G, ký hiệu $G' \leq G$, nếu

$$V' \subseteq V, E' \subseteq E \text{ và } (i, j) \in E' \Rightarrow i, j \in V'.$$

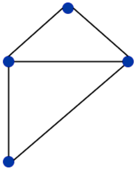
- Nếu $G' \leq G$ với $V' = V$ thì G' được gọi là đồ thị bộ phận của G.

  Nếu $V' = V, E' = E - \{e\}, e \in E$ thì G' được viết là $G - e$.

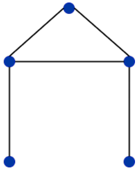
Ví dụ.



G_1



G_2



G_3

Đẳng cấu

Định nghĩa.

Cho hai đơn đồ thị $G = (V, E)$ và $G' = (V', E')$. Ta nói rằng G đẳng cấu G', ký hiệu $G \cong G'$, nếu tồn tại song ánh $\varphi : V \to V'$ sao cho

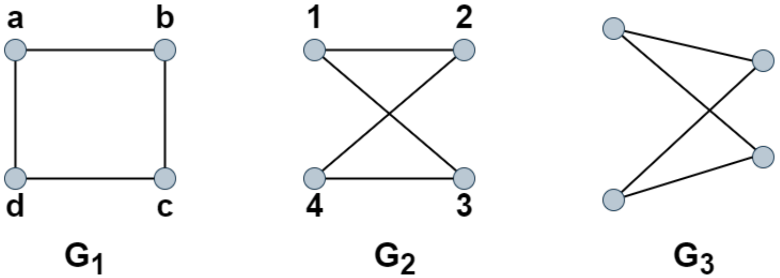
$$(u, v) \in E \Longleftrightarrow \big(\varphi(u), \varphi(v)\big) \in E'.$$

Chú ý. Nếu G và G' là các đơn đồ thị vô hướng đẳng cấu qua ánh xạ φ thì chúng có:

- Cùng số đỉnh, tức $|V| = |V'|$.
- Cùng số cạnh, tức $|E| = |E'|$.
- Cùng số đỉnh với bậc cho sẵn (ví dụ: số đỉnh bậc 2 của G_1 và G_2 bằng nhau).
- Số đỉnh kề với đỉnh $v \in V$ và $\varphi(v) \in V'$ là như nhau, tức là $\deg v = \deg \varphi(v)$.

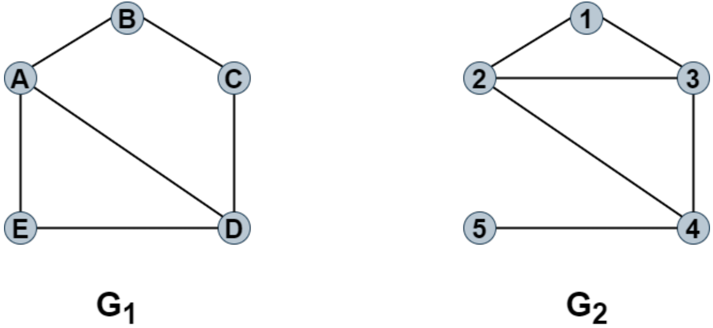
Đẳng cấu

Ví dụ 1. Xét sự đẳng cấu của các đồ thị sau.

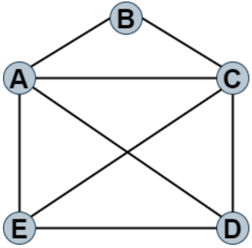


Đẳng cấu

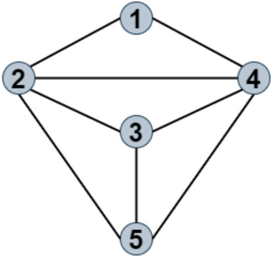
Ví dụ 2. Xét sự đẳng cấu của các đồ thị sau.



Ví dụ 3. Xét sự đẳng cấu của các đồ thị sau.



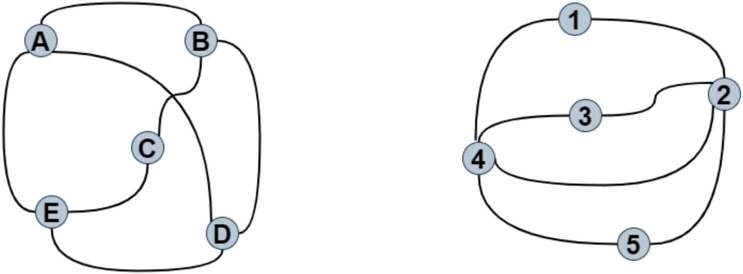
G_1



G_2

Đẳng cấu

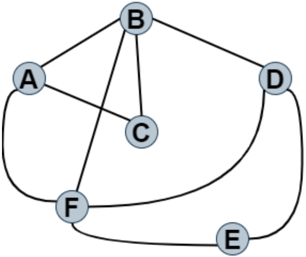
Ví dụ 4. Xét sự đẳng cấu của các đồ thị sau.



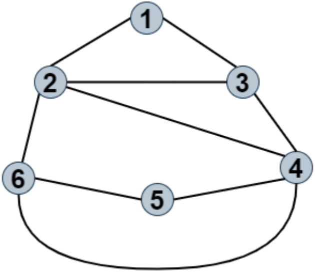
G_1 G_2

Đẳng cấu

Ví dụ 5. Xét sự đẳng cấu của các đồ thị sau.



G_1



G_2