TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
Bộ môn Ứng dụng tin học

TOÁN RỜI RẠC

Chương 1: CƠ SỞ LOGIC

GV: Lê Thị Tuyết Nhung

Mục lục I

Nhắc lại định nghĩa

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của Toán học, dùng để chỉ một nhóm các đối tượng nào đó.
Ký hiệu. $A, B, X, ...$
Nếu x là phần tử của tập hợp A, ta kí hiệu $x \in A$, ngược lại ta ký hiệu $x \notin A$.

Ví dụ.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ là tập hợp các số tự nhiên.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$ tập hợp các số nguyên.
- $\mathbb{R}$: Tập hợp các số thực.
- $\mathbb{C}$: Tập hợp các số phức.

Vị từ

Định nghĩa

Vị từ *là một phát biểu* $p(x, y, ..)$*, trong đó* $x, y, ...$ *là các biến thuộc tập hợp* $A, B, ...$ *cho trước sao cho:*

- *Bản thân* $p(x, y, ...)$ *không phải là mệnh đề.*
- *Nếu thay* $x, y, ...$ *thành giá trị cụ thể thì* $p(x, y, ...)$ *là mệnh đề.*

Ví dụ.

- $p(x, y) =$ "$2x + y^2 > 3$".
- $q(x, z) =$ "$x^2 + z = 5$".
- $r(n) =$ "$2n + 1$ là số nguyên tố".

Ký hiệu

$\forall$	với mọi
$\exists$	tồn tại
$\exists!$	tồn tại duy nhất

Các phép toán trên vị từ

Cho trước các vị từ $p(x), q(x)$ theo một biến $x \in A$. Khi ấy, ta cũng có các phép toán tương ứng như trên mệnh đề

- Phủ định $\neg p(x)$
- Phép nối liền $p(x) \wedge q(x)$
- Phép nối rời $p(x) \vee q(x)$
- Phép kéo theo $p(x) \rightarrow q(x)$
- Phép kéo theo hai chiều $p(x) \leftrightarrow q(x)$

Ví dụ.

- $\neg(x^2 > 4)$
- $(x^2 > 1) \vee (x - 5 < 0)$
- x là người miền Nam hay x là người miền Bắc
- Nếu $x > 3$ thì $x > 4$

Các trường hợp của vị từ

Khi xét một vị từ $p(x)$ với $x \in A$. Khi ấy, ta có các trường hợp sau:

1. Khi thay x bởi một phần tử a tùy ý thuộc A, ta có $p(a)$ đúng.
2. Với một số giá trị a thuộc A, ta có $p(a)$ đúng.
3. Khi thay x bởi một phần tử a tùy ý thuộc A, ta có $p(a)$ sai.

Ví dụ. Với $x \in \mathbb{R}$, các vị từ sau thuộc trường hợp nào

- $p(x) = "x^2 - 2x + 1 = 0"$
- $q(x) = "x^2 + 1 = 0"$
- $r(x) = "x^2 + 2 > 0"$

Mệnh đề lượng từ hóa vị từ

Định nghĩa

Cho $p(x)$ là một vị từ theo một biến xác định trên A. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của $p(x)$ như sau:
*Mệnh đề "***Với mọi x thuộc A sao cho $p(x)$***", kí hiệu bởi*

$$"\forall x \in A, p(x)",$$

*là mệnh đề đúng khi và chỉ khi $p(a)$ luôn đúng với mọi giá trị $a \in A$. Mệnh đề "***Tồn tại một x thuộc A sao cho $p(x)$***" kí hiệu bởi:*

$$"\exists x \in A, p(x)",$$

là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị $x = a_0$ nào đó sao cho mệnh đề $p(a_0)$ đúng.

Lưu ý. Từ "tồn tại" có thể được thay thế bởi "có" hay "có ít nhất".

Mệnh đề lượng từ hóa vị từ

Định lý

Cho $p(x, y)$ *là một vị từ theo hai biến* x, y *xác định trên* $A \times B$*. Khi đó:*

i). $"\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)" \Leftrightarrow "\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)"$

ii). $"\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)" \Leftrightarrow "\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)"$

iii). $"\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)" \Rightarrow "\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)"$

Chiều đảo của iii). nói chung không đúng.

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ $p(x, y, ..)$ có được bằng cách thay $\forall$ thành $\exists$, thay $\exists$ thành $\forall$ và vị từ $p(x, y, ..)$ thành $\neg p(x, y, ..)$.

Ví dụ. Phủ định cách mệnh đề sau

- $\forall x \in A, 2x + 1 > 0$
- $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, (x^2 + y^2 > 1) \to (x < y)$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Quy tắc phổ dụng

Đặc biệt hóa phổ dụng

$$\begin{array}{l} \forall x \in A,\ p(x) \\ a \in A \\ \hline \therefore p(a) \end{array}$$

Ví dụ. "Mọi người đều chết"
"Socrate là người"
Vậy "Socrate cũng chết"

Tổng quát hóa phổ dụng

Nếu với mỗi $a \in X$ ta có $p(a)$ là mệnh đề đúng thì khẳng định "$\forall x \in X, p(x)$" là mệnh đề đúng.

Ví dụ. Mỗi số thực đều có bình phương không âm nên mọi số thực đều có bình phương không âm.

Các quy tắc suy luận

Trong các chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng $p, q, r, ...$ (tiền đề), ta áp dụng các qui tắc suy luận để suy ra chân lí của một mệnh đề h mà ta gọi là kết luận.
Nói cách khác, dùng các qui tắc suy luận để chứng minh: $(p \wedge q \wedge r \wedge ...)$ có hệ quả logic là h.

Ta thường mô hình hóa phép suy luận đó dưới dạng

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \dots \\ \hline \therefore h \end{array}$$

Viết dưới dạng hằng đúng

$$(p \wedge q \wedge r \wedge \dots) \to h$$

Các quy tắc suy luận

Quy tắc khẳng định

Sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Thể hiện bằng hằng đúng

$$[(p \to q) \wedge p)] \to q$$

Ví dụ.
- Trời mưa thì đường ướt.
- Mà chiều nay trời mưa.
Suy ra: Chiều nay đường ướt.

Các quy tắc suy luận

Quy tắc phủ định

Sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Thể hiện bằng hằng đúng

$$[(p \to q) \wedge \neg q)] \to \neg p$$

Ví dụ.
- Nếu An đi học đầy đủ thì sẽ đậu môn Toán Rời Rạc.
- An không đậu Toán Rời Rạc.
Suy ra: An không đi học đầy đủ.

Các quy tắc suy luận

Quy tắc tam đoạn luận

Sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Thể hiện bằng hằng đúng

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$$

Ví dụ.
- Nếu trời mưa thì đường ướt.
- Nếu đường ướt thì đường trơn.
Suy ra: Nếu trời mưa thì đường trơn.

Các quy tắc suy luận

Quy tắc tam đoạn luận rời

Sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Thể hiện bằng hằng đúng

$$[(p \vee q) \wedge \neg p)] \to q$$

Ví dụ.
- Tối nay An sẽ đi uống cafe với bạn hoặc ở nhà học bài
- Tối nay An không học bài ở nhà

Suy ra: Tối nay An đi uống cafe với bạn

Các quy tắc suy luận

Những quy tắc suy luận đơn giản

Quy tắc	Sơ đồ	Hằng đúng
Nối liền	$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \land q \end{array}$	$(p \land q) \to (p \land q)$
Đơn giản	$\begin{array}{c} p \land q \\ \hline \therefore p \end{array}$	$(p \land q) \to p$
Cộng	$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore (p \lor q) \end{array}$	$p \to (p \lor q)$

Các quy tắc suy luận

Ví dụ. Xem xét suy luận sau:
- Nếu ca sĩ không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 100 thì đêm diễn sẽ bị hủy và bầu sô rất buồn.
- Nếu đêm biểu diễn bị hủy thì phải trả lại tiền vé cho khán giả.
- Nhưng tiền vé đã không được trả lại cho khán giả.

Vậy ca sĩ có trình diễn.

Hỏi Suy luận trên đúng hay sai?

Nếu ta đặt:

p: "ca sĩ đã trình diễn"

q: "số vé bán ra ít hơn 100"

r: "đêm diễn sẽ bị hủy"

t: "trả lại tiền vé cho khán giả"

s: "bầu sô rất buồn"

Ta có sơ đồ suy luận sau

$$\begin{array}{l} (\neg p \vee q) \rightarrow (r \wedge s) \\ r \rightarrow t \\ \neg t \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Các quy tắc suy luận

Ví dụ. Chứng minh suy luận sau

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \lor s \\ t \to q \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg r \to \neg t \end{array}$$

Các quy tắc suy luận

Quy tắc mâu thuẫn

Ta có tương đương logic

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q) \rightarrow 0]$$

Do đó nếu chứng minh được dạng mệnh đề ở bên phải là một hằng đúng thì dạng mệnh đề ở bên trái cũng là một hằng đúng.
Nói cách khác nếu thêm giả thiết phụ $\neg q$ vào các tiền đề cho trước mà dẫn đến một mâu thuẫn thì q là hệ quả logic của các tiền đề cho trước.

Ví dụ. Chứng minh suy luận sau

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \neg p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \\ \hline \therefore \neg r \rightarrow s \end{array}$$

Các quy tắc suy luận

Ví dụ. Xem suy luận sau đúng hay sai?
Ông Minh nói rằng nếu không được tăng lương thì ông ấy sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy bị mất việc thì phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc. Và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương.
Suy ra, nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ấy đã không đi làm trễ.

Nếu ta đặt:
p: "ông Minh được tăng lương"
q: "ông Minh nghỉ việc"
r: "vợ ông Minh mất việc"
s: "gia đình phải bán xe"
t: "vợ ông hay đi làm trễ"

Ta có sơ đồ suy luận sau

$$\begin{array}{l} \neg p \to q \\ (q \wedge r) \to s \\ t \to r \\ p \\ \hline \therefore \neg s \to \neg t \end{array}$$

Phản ví dụ

- Để chứng minh suy luận đúng, chúng ta sẽ sử dụng các luật logic và quy tắc suy luận.
- Để chỉ một suy luận sai (hay còn gọi là ngụy biện) ta sẽ đưa ra các giá trị làm cho các tiền đề đúng nhưng kết luận thì sai.

Ví dụ. Kiểm ta suy luận sau đúng hay sai

$$\begin{array}{l} \neg p \to q \\ (q \land r) \to s \\ t \to r \\ p \\ \hline \therefore \neg s \to \neg t \end{array}$$

Các quy tắc suy luận

Ví dụ. (tự làm) Chứng tỏ suy luận sau sai

$$\begin{array}{l} \neg s \vee \neg t \\ \neg r \to q \\ (\neg p \to \neg s) \to \neg r \\ p \vee t \\ \hline \therefore \neg(q \to p) \end{array}$$

Các phương pháp chứng minh

Mỗi bài toán chứng minh gồm 2 phần chính: giả thiết và kết luận. Quá trình chứng minh bài toán là quá trình sử dụng các tiên đề, luật logic, các quy tắc suy luận,... và áp dụng các phương pháp chứng minh để từ giả thiết đã cho ta có được kết luận.

Trong phần này ta tìm hiểu các phương pháp chứng minh sau:

- Chứng minh trực tiếp
- Chứng minh gián tiếp
- Chứng minh phản chứng
- Chứng minh theo từng trường hợp

Chứng minh trực tiếp

Để chứng minh A suy ra B, chúng ta giả sử A đúng, sau đó áp dụng các quy tắc suy luận, các luật logic, các tiền đề, ... để chỉ ra B đúng.

Ví dụ. Chứng minh rằng, nếu n là một số lẻ thì n^2 cũng là số lẻ.

Giải. Vì n là số lẻ nên $n = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Do $4k^2 + 4k$ chẵn nên n^2 là số lẻ.

Ví dụ. (tự làm) Cho ABC là tam giác và M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng nếu $AM = MB$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Chứng minh gián tiếp

Ta có

$$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$$

Do đó để chứng minh A đúng suy ra B đúng, chúng ta có thể giả sử B sai và chứng minh A sai.

Ví dụ. Cho n là một số nguyên, nếu $5n$ là số lẻ thì n là số lẻ.

Giải. Ta sẽ dùng phương pháp chứng minh gián tiếp.
Nghĩa là, cho n là số chẵn cần chứng minh 5n là số chẵn.
Vì n là số chẵn nên $n = 2k$ (với $k \in \mathbb{Z}$). Do đó $5n = 5.2k = 10k$ là một số chẵn.

Chứng minh phản chứng

Ta có

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

Suy ra

$$\neg(A \to B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B.$$

Như vậy để chứng minh từ A đúng suy ra B đúng, ta có thể giả sử B sai. Sau đó dùng các tiền đề, các luật logic, các quy tắc suy luận,... chứng tỏ điều này mâu thuẫn.

Ví dụ. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Ví dụ. (tự làm) Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng khác nhau cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

Chứng minh phản chứng

Giải. Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, nghĩa là $\sqrt{2}$ có thể biểu diễn thành

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Ta có thể giả sử m, n là hai số nguyên tố cùng nhau. Bình phương 2 vế ta có

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Từ đây suy ra m là số chẵn (vì bình phương số lẻ là số lẻ). Do đó $m = 2k$ (với $k \in \mathbb{Z}$). Ta có

$$(2k)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2n^2.$$

Suy ra $n^2 = 2k^2$. Như vậy n cũng là một số chẵn. Do m, n đều là số chẵn nên chúng không là số nguyên tố cùng nhau (mâu thuẫn).
Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Chứng minh theo trường hợp

Ta có

$$(A \vee B) \to C \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$$

Do đó, để chứng minh $(A \vee B) \to C$ ta chỉ cần chứng minh $(A \to C)$ và $(B \to C)$ là được.

Ví dụ. Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ luôn chia hết cho 3 với mọi số nguyên n.

Giải. Chia 2 trường hợp

Trường hợp 1. n chia hết cho 3, hiển nhiên $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

Trường hợp 2. n không chia hết cho 3, khi ấy ta có thể viết $n = 3k \pm 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ nào đó. Ta có

$$n^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 = 3(3k^2 \pm 2k + 1).$$

Suy ra $n(n^2 + 2)$ cũng chia hết cho 3.
Như vậy $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên n.

Nguyên lý quy nạp

Với những bài toán chứng minh tính đúng đắn của một biểu thức mệnh đề có chứa tham số $n \in \mathbb{Z}$, như $P(n)$. Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số $n \geq N_0$.

Quy nạp

Gồm 2 bước

- Bước cơ sở: Chỉ ra $P(N_0)$ đúng.
- Bước quy nạp: Với $k \geq N_0$, chứng minh nếu $P(k)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Trong đó $P(k)$ được gọi là giả thiết quy nạp.

Ví dụ. Chứng minh rằng $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ với mọi số nguyên dương n.

Giải. Gọi $P(n) = "1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2"$
Bước cơ sở: Ta có $P(1)$ hiển nhiên đúng vì $1 = 1^2$.
Bước quy nạp:
Với $k \geq 1$, giả sử $P(k)$ đúng, tức là

$$1 + 3 + 5 \cdots + (2k-1) = k^2.$$

Ta cần chứng minh $P(k+1)$ đúng, tức là

$$1 + 3 + \cdots + (2k+1) = (k+1)^2.$$

Ta giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k+1) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) \\ &= k^2 + (2k+1) = (k+1)^2. \end{aligned}$$

Suy ra, $P(k+1)$ đúng.
Vậy theo nguyên lý quy nạp $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Nguyên lý quy nạp

Ví dụ. (tự làm) Chứng minh $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ với mọi số nguyên dương n.