TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
Bộ môn Ứng dụng tin học

TOÁN RỜI RẠC

Chương 2: PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

GV: Lê Thị Tuyết Nhung

Mục lục I

Nguyên lý cộng

Giả sử để làm công việc A ta có 2 phương pháp

- Phương pháp 1: có n cách làm
- Phương pháp 2: có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là $n + m$.

Ví dụ. An có 3 áo tay dài, 5 áo tay ngắn. Để chọn một cái áo thì An có mấy cách?

Ví dụ. Lớp A có 20 sinh viên, lớp C có 24 sinh viên. Có bao nhiêu cách cử 1 sinh viên lớp A hoặc lớp C đi tham dự đại hội Đoàn trường?

Giải. Công việc cử 1 sinh viên đi có 2 phương án thực hiện:

- Phương án 1: Cử 1 sinh viên của lớp A, ta có 20 cách.
- Phương án 2: Cử 1 sinh viên của lớp C, ta có 24 cách.

Ta thấy mỗi cách thực hiện của phương án 1 đều không trùng với cách của phương án 2. Do đó theo quy tắc cộng, có $20 + 24 = 44$ cách cử 1 sinh viên lớp A hoặc lớp C đi tham dự đại hội Đoàn trường.

Nguyên lý nhân

Giả sử để làm công việc A ta cần thực hiện 2 bước

- Bước 1: có n cách làm
- Bước 2: có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là $n \times m$.

Ví dụ. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số.

Giải. Gọi số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abcd}$.

- Chọn chữ số d có 3 cách chọn,
- Chọn chữ số a có 5 cách chọn,
- Chọn chữ số b có 5 cách chọn,
- Chọn chữ số c có 5 cách chọn

Theo quy tắc nhân có $3.5.5.5 = 375$(số).

Nguyên lý nhân

Ví dụ. Từ nhà An đến trường đi qua 3 điểm A, B, C. Từ nhà An đến điểm A có 3 cách đi, từ điểm A đến điểm B có 4 cách đi, từ điểm B đến điểm C có 2 cách đi. Từ điểm C đến trường học có 2 cách đi. Hỏi có bao nhiêu cách từ nhà An đến trường?

Ví dụ. Cho tập A gồm 6 phần tử và tập B gồm 10 phần tử. Hỏi

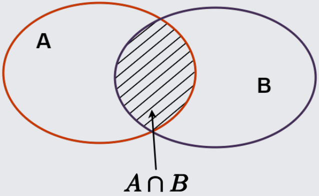
a). Có bao nhiêu ánh xạ từ A vào B?

b). Có bao nhiêu đơn ánh từ A vào B?

Nguyên lý bù trừ

Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Câu hỏi. $|A \cup B \cup C| = ?$

Nguyên lý bù trừ

Ví dụ. Trong một lớp ngoại ngữ Anh Pháp, có 24 sinh viên học tiếng Pháp; 26 sinh viên học tiếng Anh; 15 sinh viên học tiếng Anh và tiếng Pháp. Hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên?

Giải. Ta gọi

- A là những sinh viên học tiếng Pháp
- B là những sinh viên học tiếng Anh

Khi đó $A \cap B$ là những sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Bài toán tìm số sinh viên của lớp là tính số phần tử $A \cup B$. Ta có

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A|+|B|-|A \cap B| \\ &= 24 + 26 - 15 = 35.\end{aligned}$$

Như vậy lớp có 35 sinh viên.

Nguyên lý bù trừ

Ví dụ. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 5 bit, hoặc được bắt đầu bằng 00 hoặc kết thúc bằng 1?

Ví dụ. Giờ kiểm tra TRR có 3 bài. Biết rằng, mỗi SV làm được ít nhất 1 bài. Có

- 20 SV làm được bài 1.
- 14 SV làm được bài 2.
- 10 SV làm được bài 3.
- 6 SV giải được bài 1 và 3.
- 5 SV giải được bài 2 và bài 3.
- 2 SV giải được bài 1 và 2.
- 1 SV giải được cả 3 bài.

Hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên?

Ví dụ. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 5 bit, hoặc được bắt đầu bằng 00 hoặc kết thúc bằng 1?

Giải. Chia việc chọn xâu nhị phân ra làm 2 trường hợp:

- Xâu 5 bit bắt đầu bằng 00 là $2^3 = 8$ cách.
- Xâu 5 bit kết thúc bằng 1 là $2^4 = 16$ cách.
- Xâu 5 bit vừa bắt đầu bằng 00 vừa kết thúc bằng 1 là $2^2 = 4$ cách

Vậy số xâu nhị phân 5 bit bắt đầu bằng 00 hoặc kết thúc bằng 1 là $8 + 16 - 4 = 20$ cách.

Nguyên lý bù trừ

Ví dụ. Giờ kiểm tra TRR có 3 bài. Biết rằng, mỗi SV làm được ít nhất 1 bài. Có

- 20 SV làm được bài 1.
- 14 SV làm được bài 2.
- 10 SV làm được bài 3.
- 6 SV giải được bài 1 và 3.
- 5 SV giải được bài 2 và bài 3.
- 2 SV giải được bài 1 và 2.
- 1 SV giải được cả 3 bài.

Hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên?

Giải. Gọi A là số SV giải bài 1. B là số SV giải bài 2. C là số SV giải bài 3. Tính số sinh viên tức là tính $A \cup B \cup C$. Lập luận tương tự bài trên để có công thức:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|B \cap C|-|C \cap A|+|A \cap B \cap C| \\ &= 20 + 14 + 10 - 6 - 5 - 2 + 1 = 32\end{aligned}$$

Vậy lớp có 32 sinh viên.

Nguyên lý Dirichlet (chuồng bồ câu)

Định nghĩa

Giá trị trần của x, ký hiệu là $\lceil x \rceil$, là số nguyên nhỏ nhất mà lớn hơn hay bằng x.

Ví dụ. $\lceil 3.2 \rceil = ?\,; \lceil 2 \rceil = ?\,; \lceil -5.1 \rceil = ?\,; \lceil -3.9 \rceil = ?$

Định nghĩa

Giá trị sàn của x, ký hiệu là $\lfloor x \rfloor$, là số nguyên lớn nhất mà nhỏ hơn hay bằng x.

Ví dụ. $\left\lfloor \dfrac{3}{4} \right\rfloor = ?$.

Nguyên lý Dirichlet (chuồng bồ câu)

Nguyên lý Dirichlet (chuồng bồ câu)

- Nếu nhốt $n+1$ con chim bồ câu vào n chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất 2 con chim bồ câu.
- Nếu có n vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ vật.

Ví dụ. Có 20 chim bồ câu ở trong 7 cái chuồng. Khi đó sẽ có ít nhất 1 chuồng có 3 con bồ câu trở lên.

Ví dụ. Nếu lấy 20 trái cam chia cho 9 người thì có một người được từ 3 trái trở lên.

Nguyên lý Dirichlet (chuồng bồ câu)

Ví dụ. Cho tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Lấy A là tập hợp con của X gồm 6 phần tử. Chứng tỏ trong A sẽ có hai phần tử có tổng bằng 10.

Giải. Ta lập các chuồng như sau: $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, 5$.
Do A có 6 phần tử nên trong 6 phần tử đó sẽ có 2 phần tử trong 1 chuồng.
Suy ra trong A sẽ có hai phần tử có tổng bằng 10.

Ví dụ. Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Giải. Ta có số trận đã đấu của mỗi người có thể là 0, 1, 2, 3, 4. Nhưng vì không thể có cùng lúc một người đã đấu 4 trận và một người chưa đấu trận nào $\Longrightarrow$ có tối đa 4 loại số trận đã đấu.
Vận dụng nguyên lý chuồng bồ câu ta có ít nhất có 2 người có cùng số trận đã đấu.

Hoán vị

Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự n phần tử của A được gọi là một hoán vị của n phần tử.
Số cách hoán vị của n phần tử, ký hiệu P_n, là

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1$$

Quy ước $0! = 1$.

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3\}$. Khi đó A có các hoán vị sau:

$$123, 132, 213, 231, 312, 321$$

Ví dụ. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập X?

Chỉnh hợp

Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm sắp thứ tự gồm k phần tử $(1 \leq k \leq n)$ của tập hợp A được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Số cách chỉnh hợp chập k của n ký hiệu là A_n^k.
Công thức

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3\}$. Khi đó A có các chỉnh hợp chập 2 của 3 là:

$$12, 21, 13, 31, 23, 32$$

Ví dụ. Mỗi lớp trong học kỳ I phải học 12 môn khác nhau, mỗi ngày học 3 môn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp thời khóa biểu trong ngày?

Xếp 3 môn khác nhau trong số 12 môn là một sắp xếp có thứ tự. Như vậy, số cách xếp là: $A_{12}^3 = \dfrac{12!}{(12-3)!} = 1320.$

Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Số tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là C_n^k hay $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Tính chất $\quad C_n^{n-k} = C_n^k \qquad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của A là:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$$

Tổ hợp

Ví dụ.Mỗi đề thi gồm có 5 câu hỏi khác nhau chọn từ ngân hàng 50 câu hỏi đã cho. Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu đề thi khác nhau?

Ví dụ.Giả sử một lớp học có 30 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách

a). Bầu ra ban cán sự lớp gồm lớp trưởng, lớp phó và bí thư?

b). Chọn ra nhóm 3 sinh viên trực nhật lớp?

c). Chọn ra nhóm 3 sinh viên trực nhật trong đó có 1 nhóm trưởng?

Ví dụ. Từ các số của tập $A = \{2; 4; 6; 8\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số, trong đó chữ số 2 xuất hiện đúng hai lần, chữ số 4 xuất hiện 2 lần, chữ số 6 xuất hiện 2 lần và chữ số 8 xuất hiện 1 lần.

Giải. Số có 7 chữ số thỏa mãn: chữ số 2 xuất hiện đúng hai lần, chữ số 4 xuất hiện 2 lần, chữ số 6 xuất hiện 2 lần và chữ số 8 xuất hiện 1 lần. Để lập được số này ta thấy

- Có C_7^2 cách chọn 2 vị trí cho số 2, còn lại 5 vị trí trống.
- Có C_5^2 cách chọn 2 vị trí cho số 4, còn lại 3 vị trí trống.
- Có C_3^2 cách chọn vị trí cho số 6.
- Và cuối cùng có C_1^1 cách chọn vị trí số 8.

Theo nguyên lý nhân, số cách lập số gồm 7 chữ số thỏa yêu cầu đề bài là

$$\begin{aligned} C_7^2 \times C_5^2 \times C_3^2 \times C_1^1 &= \frac{7!}{2! \times 5!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{3!}{2! \times 1!} \times \frac{1!}{1! \times 0!} \\ &= \frac{7}{2! \times 2! \times 2! \times 1!} = 630 \text{ số thỏa mãn.} \end{aligned}$$

Hoán vị lặp

Định nghĩa

Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i $(1 < i \leq k)$ giống hệt nhau, nghĩa là

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một hoán vị lặp.
Số hoán vị lặp trong trường hợp trên là

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}.$$

Hoán vị lặp

Ví dụ. Từ các số của tập $A = \{2; 4; 6; 8\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số, trong đó chữ số 2 xuất hiện đúng hai lần; chữ số 4 xuất hiện 2 lần; chữ số 6 xuất hiện 2 lần và chữ số 8 xuất hiện 1 lần.

Giải. Mỗi cách lập số có 7 chữ số thỏa mãn: chữ số 2 xuất hiện đúng hai lần; chữ số 4 xuất hiện 2 lần; chữ số 6 xuất hiện 2 lần và chữ số 8 xuất hiện 1 lần là một hoán vị lặp của 7 phần tử .
Theo quy tắc hoán vị lặp có tất cả:

$$P_7(2, 2, 2, 1) = \frac{7!}{2! \times 2! \times 2! \times 1!} = 630 \text{ số thỏa mãn.}$$

Ví dụ. Có bao nhiêu hoán vị của chuỗi MISSISSIPPI?

Giải. Chuỗi trên có 11 ký tự, trong đó có 4 chữ I, 4 chữ S, 2 chữ P và 1 chữ M. Đây chính là ví dụ điển hình của hoán vị lặp, và tổng số hoán vị sẽ là:

$$P_{11}(4, 4, 2, 1) = \frac{11!}{4! \times 4! \times 2! \times 1!} = 34650.$$

Hoán vị lặp

Ví dụ. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 7, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?.

A. 6720 số B. 40320 số C. 5880 số D. 840 số

Ví dụ. Cho tập $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$. Hỏi từ tập A lập được bao nhiêu số có 7 chữ số sao cho chữ số 4 xuất hiện 2 lần, chữ số 5 xuất hiện 2 lần, các số khác xuất hiện đúng 1 lần và số đó chia 2 thì dư 1.

A. 540 số B. 360 số C. 280 số D. 720 số

Ví dụ. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 7, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?.

A. 6720 số B. 40320 số C. 5880 số D. 840 số

Giải. Gọi số có 8 chữ số là: $\overline{a_1 a_2 \ldots a_8}$.
• Mỗi cách lập số có 8 chữ số sao cho chữ số 1 xuất hiện 3 lần và các số khác có mặt xuất hiện 1 lần là một hoán vị lặp của 8 phần tử (tính cả trường hợp $a_1 = 0$). Theo quy tắc hoán vị lặp có tất cả:

$$P_8(3, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{8!}{3! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = 6720 \text{ số}.$$

Hoán vị lặp

• Xét trường hợp $a_1 = 0$.
Ta tính số các số có 7 chữ số được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 7, 9 trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, các chữ số khác có mặt đúng 1 lần.
Theo quy tắc hoán vị lặp có tất cả:

$$P_7(3,1,1,1,1) = \frac{7!}{3! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = 840 \text{ số.}$$

Suy ra số các số thỏa mãn đề bài là: $6720 - 840 = 5880$ số.

Hoán vị lặp

Ví dụ. Cho tập $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$. Hỏi từ tập A lập được bao nhiêu số có 7 chữ số sao cho chữ số 4 xuất hiện 2 lần, chữ số 5 xuất hiện 2 lần, các số khác xuất hiện đúng 1 lần và số đó chia 2 thì dư 1.

A. 540 số B. 360 số C. 280 số D. 720 số

Giải. Gọi số có 7 chữ số thỏa mãn đầu bài là: $\overline{a_1 a_2 \ldots a_7}$.
- Do số cần lập chia cho 2 thì dư 1 nên số cần lập là số lẻ. $\Longrightarrow a_7 = \{5, 7\}$.
- Trường hợp 1. Nếu $a_7 = 5$.

Ta tính số các số có 6 chữ số trong đó chữ số 4 xuất hiện 2 lần; các chữ số 2, 5, 6, 7 xuất hiện đúng 1 lần.
Theo quy tắc hoán vị lặp có:

$$P_6(2, 1, 1, 1, 1) = \frac{6!}{2! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = 360 \text{ số}.$$

Hoán vị lặp

- Trường hợp 2. Nếu $a_7 = 7$.

Ta tính số các số có 6 chữ số sao cho chữ số 4 xuất hiện 2 lần; chữ số 5 xuất hiện 2 lần; các số 2 và 6 xuất hiện đúng 1 lần.
Theo quy tắc hoán vị lặp có:

$$P_6(2,2,1,1) = \frac{6!}{2! \times 2! \times 1! \times 1!} = 180 \text{ số}.$$

Kết hợp hai trường hợp suy ra số các số thỏa mãn đầu bài là: $360 + 180 = 540$ số.

Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa

Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ sắp thứ tự k phần tử của A, các phần tử có thể lặp lại.
Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là n^k.

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi có độ dài r có thể được hình thành từ những chữ cái hoa trong bảng chữ cái tiếng Anh?

Giải. Mỗi chữ cái có 26 lựa chọn. Suy ra theo công thức chỉnh hợp lặp có 26^r chuỗi có độ dài r.

Ví dụ. Xếp ngẫu nhiên 5 quyển sách vào 3 ngăn kéo. Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

Giải. Mỗi cách xếp 5 quyển sách vào 3 ngăn kéo xem như một chỉnh hợp lặp chập 3 của 5 (mỗi lần xếp một quyển sách vào một ngăn, ta có thể xem như chọn một trong 3 ngăn nên có 3 cách chọn.
Do có 5 quyển sách nên số cách chọn là $n = 3^5 = 243$ cách.

Chỉnh hợp lặp

Ví dụ. Biển đăng kí ôtô có 6 chữ số và 2 chữ cái đầu tiên trong 26 chữ cái (không dùng chữ O và I). Hỏi số ôtô được đăng kí nhiều nhất là bao nhiêu?

Giải.

- Gọi X là tập hợp các chữ cái dùng trong bảng đăng kí, suy ra X có 24 phần tử (vì không dùng O và I). Vì vậy ta có 24^2 cách chọn cho hai chữ cái đầu tiên.
- Gọi Y là tập hợp các chữ số dùng trong bảng đăng kí, suy ra Y có 10 phần tử. Vì vậy có 10^6 cách chọn cho 6 chữ số còn lại.

Do đó có tất cả $10^6.24^2$ biển số ứng với 576.000.000 ôtô.

Tổ hợp lặp

Định nghĩa

Mỗi cách chọn ra r vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là tổ hợp lặp chập r của n.
Số tổ hợp lặp chập r của n được ký hiệu là K_n^r.

$$K_n^r = C_{n+r-1}^r = C_{n+r-1}^{n-1}$$

Hệ quả

Số nghiệm nguyên không âm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0)$ của phương trình

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

là $K_n^r = C_{n+r-1}^r$.

Tổ hợp lặp

Ví dụ. Có bao nhiêu cách để chọn 4 quả từ một đĩa chứa táo, cam, lê nếu thứ tự các quả được chọn không quan trọng, chỉ quan trọng loại quả và số lượng quả, và có ít nhất bốn quả mỗi loại trong đĩa?

Giải. Cách để chọn 4 quả từ mỗi loại đĩa là số tổ hợp lặp chập 4 từ tập 3 phần tử Táo, Cam, Lê:

$$K_n^r = C_{n+r-1}^{n-1} = C_{3+4-1}^{3-1} = 15.$$

Ví dụ. Có bao nhiêu cách chọn 10 phần quà từ một cửa hàng có 21 phần quà khác nhau?

Giải. Số cách chọn 10 phần quà là số tổ hợp lặp chập 10 từ một tập gồm 21 phần tử.

$$C_{n+r-1}^r = C_{21+10-1}^{10} = 30045015.$$

Tổ hợp lặp

Ví dụ. Phương trình dưới đây có bao nhiêu lời giải: $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ trong đó x_1, x_2, x_3 là các số nguyên không âm?

Giải. Một nghiệm của phương trình là tương ứng với một cách lấy ra 11 phần tử từ một tập có 3 loại phần tử sao cho có

- x_1 phần tử loại 1
- x_2 phần tử loại 2
- x_3 phần tử loại 3

Do đó, số nghiệm của phương trình bằng số tổ hợp lặp chập 11 từ một tập có 3 phần tử.

$$C_{n+r-1}^{r} = C_{3+11-1}^{11} = 78.$$