

TỰ LUYỆN ĐỘ ĐO

Đề 1:

Bing

Dựa trên kiến thức bạn đã học, tôi đã tạo ra một số câu hỏi tương tự như sau:

Câu 1:

Cho Y là biến ngẫu nhiên log-normal(μ, σ^2), nghĩa là $Y = e^X$ với $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Sử dụng công thức hàm sinh moment của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn, hãy tìm moment EY^s , ($s > 0$). Từ đó suy ra EY, EY^2 .

Câu 2:

Điểm số tuân theo phân phối chuẩn với trung bình 70, phương sai 20, giả sử thang điểm là 100 và có 600 000 thí sinh dự thi. Dự đoán xem có khoảng bao nhiêu thí sinh có điểm trên 80.

Câu 3:

Cho biến ngẫu nhiên X, Y độc lập, X có phân phối $Binomial(300000, 10^{-5})$, Y có phân phối $Binomial(400000, 10^{-5})$. Đặt $Z = X + Y$. Tính gần đúng $P(Z = 20)$.

Câu 4:

Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử cho biết tỉ lệ phế phẩm của nhà máy là 0.05%. Nhà máy sản xuất 300 000 linh kiện. Giả sử quá trình sản xuất mỗi linh kiện xem như độc lập với nhau. Tìm xác suất để nhà máy không có quá 90 linh kiện bị hỏng.

Câu 5:

Cho X_1, X_2, \dots độc lập có cùng phân phối và $X_i \sim N(-1, 6)$. Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{2n}}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{3n}^2}$$

Đáp án:

Câu 1:

$$EY^s = e^{s\mu + \frac{1}{2}s^2\sigma^2}$$

Từ đó suy ra:

$$EY = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$EY^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2}$$

Câu 2:

Số thí sinh có điểm trên 80 là xấp xỉ $600000 \times (1 - \Phi(\frac{80-70}{\sqrt{20}}))$ với Φ là hàm phân phối chuẩn.

Câu 3:

Sử dụng xấp xỉ Poisson, ta có $Z \sim \text{Poisson}(7)$ nên $P(Z = 20) \approx \frac{e^{-7} \times 7^{20}}{20!}$.

Câu 4:

Sử dụng xấp xỉ Poisson, ta có $X \sim \text{Poisson}(150)$ nên $P(X \leq 90) \approx \sum_{k=0}^{90} \frac{e^{-150} \times 150^k}{k!}$.

Câu 5:

Theo định lý giới hạn trung tâm, ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{2n}}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{3n}^2} = \frac{-2}{27}$$

Đề 2:

Bing

Dựa trên kiến thức bạn đã học, tôi đã tạo ra một số câu hỏi tương tự như sau:

Câu 1:

Cho Y là biến ngẫu nhiên log-normal(μ, σ^2), nghĩa là $Y = e^X$ với $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Sử dụng công thức hàm sinh moment của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn, hãy tìm moment EY^s , ($s > 0$). Từ đó suy ra EY, EY^2 .

Câu 2:

Điểm số tuân theo phân phối chuẩn với trung bình 60, phương sai 30, giả sử thang điểm là 100 và có 500 000 thí sinh dự thi. Dự đoán xem có khoảng bao nhiêu thí sinh có điểm trên 70.

Câu 3:

Cho biến ngẫu nhiên X, Y độc lập, X có phân phối $\text{Binomial}(250000, 10^{-5})$, Y có phân phối $\text{Binomial}(350000, 10^{-5})$. Đặt $Z = X + Y$. Tính gần đúng $P(Z = 15)$.

Câu 4:

Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử cho biết tỉ lệ phế phẩm của nhà máy là 0.04%. Nhà máy sản xuất 250 000 linh kiện. Giả sử quá trình sản xuất mỗi linh kiện xem như độc lập với nhau. Tìm xác suất để nhà máy không có quá 80 linh kiện bị hỏng.

Câu 5:

Cho X_1, X_2, \dots độc lập có cùng phân phối và $X_i \sim N(-2, 5)$. Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{2n}}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{3n}^2}$$

Đáp án:

Câu 1:

$$EY^s = e^{s\mu + \frac{1}{2}s^2\sigma^2}$$

Từ đó suy ra:

$$EY = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$EY^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2}$$

Câu 2:

Số thí sinh có điểm trên 70 là xấp xỉ $500000 \times (1 - \Phi(\frac{70-60}{\sqrt{30}}))$ với Φ là hàm phân phối chuẩn.

Câu 3:

Sử dụng xấp xỉ Poisson, ta có $Z \sim \text{Poisson}(6)$ nên $P(Z = 15) \approx \frac{e^{-6} \times 6^{15}}{15!}$.

Câu 4:

Sử dụng xấp xỉ Poisson, ta có $X \sim \text{Poisson}(100)$ nên $P(X \leq 80) \approx \sum_{k=0}^{80} \frac{e^{-100} \times 100^k}{k!}$.

Câu 5:

Theo định lý giới hạn trung tâm, ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{2n}}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{3n}^2} = \frac{-4}{27}$$

Đề 3:

Đề thi:

Câu 1: Giả sử X là biến ngẫu nhiên có phân phối đều (uniform) trên đoạn $[0, 1]$. Hãy tính xác suất $P(0.3 \leq X \leq 0.7)$ và đặt a là giá trị để $P(X \leq a) = 0.6$.

Câu 2: Cho Y là biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số $\lambda = 3$. Tính xác suất $P(Y = 5)$ và $P(Y > 7)$.

Câu 3: Một hệ thống máy tính có thời gian sử dụng trung bình giữa các lỗi là 150 giờ, theo phân phối mũ. Tính xác suất rằng hệ thống sẽ hoạt động lâu hơn 200 giờ mà không xảy ra lỗi.

Câu 4: Cho Z là biến ngẫu nhiên theo phân phối χ^2 với 10 độ tự do. Tính xác suất $P(Z > 15)$.

Câu 5: Một người chơi độc lập mỗi ngày mua một vé số loại A với xác suất 0.2 và loại B với xác suất 0.8. Tính xác suất là người chơi sẽ mua ít nhất một vé loại A trong 5 ngày liên tiếp.

Câu 6: Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối Gaussian với trung bình $\mu = 50$ và độ lệch chuẩn $\sigma = 10$. Tính xác suất $P(40 \leq X \leq 60)$.

Câu 7: Xét một chuỗi các sự kiện Bernoulli độc lập với xác suất thành công là $p = 0.3$. Tính xác suất rằng sự kiện thành công đầu tiên xảy ra sau 4 thất bại.

Câu 8: Cho ma trận ngẫu nhiên A có các phần tử độc lập và tuân theo phân phối chuẩn với trung bình 0 và phương sai 1. Tính xác suất determinant của A lớn hơn 1.

Câu 9: Cho U là biến ngẫu nhiên đều trên đoạn $[0, 1]$. Đặt $V = -\log(U)$. Tính phân phối của V và xác suất $P(V > 2)$.

Câu 10: Một hệ thống máy tính có thời gian sử dụng trung bình giữa các lỗi là 100 giờ, theo phân phối mũ. Tính xác suất rằng hệ thống sẽ hoạt động giữa 80 và 120 giờ mà không xảy ra lỗi.

Đề thi 4:

Đề thi mới:

Câu 1: Xét biến ngẫu nhiên X có phân phối nhị thức với tham số $n = 8$ và $p = 0.4$. Tính xác suất $P(X \leq 2)$ và $P(X > 5)$.

Câu 2: Cho Y là biến ngẫu nhiên theo phân phối gamma với hàm mật độ xác suất $f(y) = \frac{y^3 e^{-y/2}}{16}$, $y > 0$. Tính xác suất $P(Y > 4)$.

Câu 3: Một cuộc khảo sát xác định rằng 60% sinh viên thích thể thao và 40% sinh viên thích âm nhạc. Biết rằng 20% sinh viên thích cả hai. Tính xác suất một sinh viên được chọn ngẫu nhiên thích ít nhất một trong hai sở thích.

Câu 4: Cho Z là biến ngẫu nhiên theo phân phối χ^2 với 6 độ tự do. Tính xác suất $P(Z < 10)$.

Câu 5: Một loại thuốc an thần có thời gian tác động trung bình là 30 phút, theo phân phối chuẩn. Tính xác suất rằng một liều thuốc ngẫu nhiên sẽ tác động trong khoảng từ 25 đến 35 phút.

Câu 6: Xét một dãy số X_1, X_2, \dots, X_n các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối mũ với tham số $\lambda = 2$. Tính xác suất để trung bình mẫu \bar{X} vượt quá 2.

Câu 7: Cho U là biến ngẫu nhiên đều trên đoạn $[0, 1]$. Đặt $V = \sqrt{-2\ln(U)}$. Tính phân phối của V và xác suất $P(V > 1.5)$.

Câu 8: Xét biến ngẫu nhiên X có phân phối poisson với tham số $\lambda = 2$. Tính xác suất $P(X = 3)$ và $P(X \geq 4)$.

Câu 9: Một đồng xu bất đồng chấm được tung 4 lần. Tính xác suất để có ít nhất 2 lần được chấm.

Câu 10: Xét biến ngẫu nhiên X có phân phối mũ với tham số $\lambda = 0.5$. Tính xác suất $P(X \leq 3)$ và $P(X > 5)$