TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
Bộ môn Ứng dụng tin học

TOÁN RỜI RẠC

Chương 3: QUAN HỆ

GV: Lê Thị Tuyết Nhung

Mục lục I

Định nghĩa

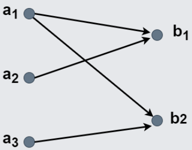
Định nghĩa

Một *quan hệ hai ngôi* *từ tập A đến tập B là tập con $\mathcal{R}$ của tích Descartes $A \times B$.*
Quan hệ hai ngôi từ A đến chính nó được gọi là quan hệ trên A.
Chúng ta sẽ viết $a\mathcal{R}b$ thay cho $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Ví dụ. Cho $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $B = \{b_1, b_2\}$. Khi đó

$$\mathcal{R} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_2)\}$$

là một quan hệ từ A vào B. Quan hệ này được mô tả bằng



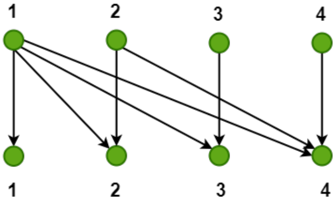
	b1	b2
a1	x	x
a2	x	
a3		x

Quan hệ hai ngôi

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $\mathcal{R} = \Big\{(a, b) \mid a$ là ước của $b\Big\}$.

Khi đó

$$\mathcal{R} = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\Big\}$$



Các tính chất quan hệ

Định nghĩa

Quan hệ $\mathcal{R}$ *trên* A *được gọi là phản xạ nếu*

$$\forall a \in A, \quad a\mathcal{R}a$$

Ví dụ. Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

- Quan hệ $\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$ không phản xạ vì $(3,3) \notin \mathcal{R}_1$.
- Quan hệ $\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$ phản xạ vì $(1,1), (2,2), (3,3) \in \mathcal{R}_2$.

Ví dụ.

- Quan hệ $\leq$ trên $\mathbb{Z}$ phản xạ vì $a \leq a$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$.
- Quan hệ $>$ trên $\mathbb{Z}$ không phản xạ vì $1 \not> 1$.
- Quan hệ $|$ (ước số) trên $\mathbb{Z}^+$ là phản xạ vì mọi số nguyên a là ước của chính nó.

Chú ý. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A là phản xạ nếu nó chứa đường chéo của A.

$$\mathcal{R} = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

$\mathcal{R}$	1	2	3	4
1	$\times$			
2		$\times$		
3			$\times$	
4				$\times$

Các tính chất quan hệ

Định nghĩa

Quan hệ $\mathcal{R}$ *trên* A *được gọi là* *đối xứng* *nếu*

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A \quad (a\mathcal{R}b) \to (b\mathcal{R}a)$$

Quan hệ $\mathcal{R}$ *được gọi là* *phản xứng* *nếu*

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A \quad (a\mathcal{R}b) \land (b\mathcal{R}a) \to (a = b)$$

Ví dụ.

- Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ $\mathcal{R}_1 = \big\{(1,1), (1,2), (2,1)\big\}$ là đối xứng.
- Quan hệ $\leq$ trên $\mathbb{Z}$ không đối xứng. Tuy nhiên nó phản xứng vì

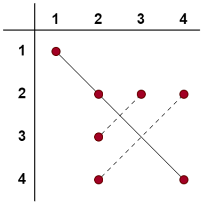
$$(a \leq b) \land (b \leq a) \to (a = b)$$

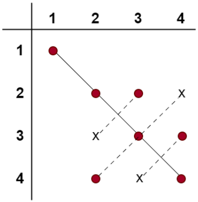
- Quan hệ $\mid$ (ước số) trên $\mathbb{Z}^+$ là không đối xứng. Tuy nhiên nó có tính phản xứng vì

$$(a \mid b) \land (b \mid a) \to (a = b)$$

Chú ý.

- Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A là đối xứng nếu nó đối xứng nhau qua đường chéo Δ của A.
- Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A là phản xứng nếu chỉ có các phần tử nằm trên đường chéo là đối xứng nhau qua Δ của A.





Các tính chất quan hệ

Định nghĩa

Quan hệ $\mathcal{R}$ trên A được gọi là bắc cầu (truyền) nếu

$$\forall a, b, c \in A, \qquad (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \rightarrow (a\mathcal{R}c)$$

Ví dụ.

- Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ $\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)\}$ có tính bắc cầu.
- Quan hệ $\leq$ và $|$ trên $\mathbb{Z}$ có tính bắc cầu

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \rightarrow (a \leq c)$$
$$(a \mid b) \wedge (b \mid c) \rightarrow (a \mid c)$$

Tóm lại

Định nghĩa

Cho $\mathcal{R}$ *là quan hệ trên* A. *Ta nói*

i). $\mathcal{R}$ *phản xạ* $\Leftrightarrow \forall x \in A,\ x\mathcal{R}x$

ii). $\mathcal{R}$ *đối xứng* $\Leftrightarrow \forall x, y \in A,\ (x\mathcal{R}y) \rightarrow (y\mathcal{R}x)$

iii). $\mathcal{R}$ *phản xứng* $\Leftrightarrow \forall x, y \in A,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \rightarrow (x = y)$

iv). $\mathcal{R}$ *bắc cầu (truyền)* $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \rightarrow (x\mathcal{R}z)$

Nhận xét.

Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên A. Ta nói

i). $\mathcal{R}$ không phản xạ $\Leftrightarrow \exists x \in A,\ x\not{\mathcal{R}}x$

ii). $\mathcal{R}$ không đối xứng $\Leftrightarrow \exists x, y \in A,\ x\mathcal{R}y \ \wedge \ y\not{\mathcal{R}}x$

iii). $\mathcal{R}$ không phản xứng $\Leftrightarrow \exists x, y \in A,\ x\mathcal{R}y \ \wedge \ y\mathcal{R}x \ \wedge \ x \neq y$

iv). $\mathcal{R}$ không bắc cầu (truyền) $\Leftrightarrow \exists x, y, z \in A,\ x\mathcal{R}y \ \wedge \ y\mathcal{R}z \wedge \ x\not{\mathcal{R}}z$

Ví dụ. Trên tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$, ta xét những quan hệ sau:

- $\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
- $\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
- $\mathcal{R}_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $\mathcal{R}_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

Hỏi những quan hệ trên có tính chất nào?

Ví dụ. Trên tập hợp số nguyên, ta xét những quan hệ sau:

- $\mathcal{R}_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$
- $\mathcal{R}_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ hay } a = -b\}$
- $\mathcal{R}_4 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$
- $\mathcal{R}_5 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$

Hỏi những quan hệ trên có tính chất nào?

Các tính chất quan hệ

Ví dụ. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên $\mathbb{Z}$, được xác định bởi

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ \ x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow x + y \text{ chẵn.}$$

Xác định các tính chất của $\mathcal{R}$.

Biểu diễn quan hệ

Ví dụ. Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ từ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ đến $B = \{u, v, w\}$,

$$\mathcal{R} = \{(1, u), (1, v), (2, w), (3, w), (4, u)\}.$$

Khi đó $\mathcal{R}$ có thể biễu diễn như sau

$\mathcal{R}$	u	v	w
1	1	1	0
2	0	0	1
3	0	0	1
4	1	0	0

Dòng và cột tiêu đề có thể bỏ qua nếu không gây hiểu nhầm. Khi đó ta có thể xem phần còn lại như là một ma trận nhị phân cấp 4×3.

Biểu diễn quan hệ

Định nghĩa.

Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ đến $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Ma trận biểu diễn của $\mathcal{R}$ là ma trận nhị phân cấp $m \times n$, $M_{\mathcal{R}} = (m_{ij})$, xác định bởi

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad (a_i, b_j) \notin \mathcal{R} \\ 1 & \text{nếu} \quad (a_i, b_j) \in \mathcal{R} \end{cases}$$

Ví dụ. Nếu $\mathcal{R}$ là quan hệ từ $A = \{1, 2, 3\}$ đến $B = \{1, 2\}$ sao cho

$$a\mathcal{R}b \text{ nếu } \; a > b.$$

Khi đó ma trận biểu diễn của $\mathcal{R}$ là

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Biểu diễn quan hệ

Ví dụ. Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ đến $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ được biểu diễn bởi ma trận

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm quan hệ $\mathcal{R}$.

Quan hệ tương đương

Ví dụ. Cho $S = \{$sinh viên của lớp$\}$, gọi $\mathcal{R} = \{(a, b)\ :\ a$ có cùng họ với $b\}$.
Hỏi

- $\mathcal{R}$ phản xạ? Yes
- $\mathcal{R}$ đối xứng? Yes
- $\mathcal{R}$ bắc cầu? Yes

Mọi sinh viên có cùng họ thuộc cùng một nhóm.

Định nghĩa

Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên tập hợp A. Ta nói $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên A nếu $\mathcal{R}$ thỏa mãn các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ví dụ. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên $\mathbb{Z}$, được xác định bởi

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow x + y \text{ chẵn.}$$

Khi đó $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương.

Ví dụ. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên các chuỗi ký tự xác định bởi

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \text{ và } b \text{ có cùng độ dài.}$$

Khi đó $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương.

Định nghĩa

Ví dụ. Trên tập hợp số thực, ta xét quan hệ $\mathcal{R}$ được định nghĩa như sau:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y.$$

$\mathcal{R}$ có phải là một quan hệ tương đương không?

Ví dụ. Cho m là một số nguyên dương và quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}$ xác định bởi:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \text{ chia hết cho } m.$$

$\mathcal{R}$ có phải là một quan hệ tương đương không?

Lớp tương đương

Định nghĩa

Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên A và x thuộc A. Khi đó, tập hợp tất cả các phần tử trong A có quan hệ với x được gọi là lớp tương đương của x, ký hiệu bởi $\overline{x}$ hoặc $[x]$. Vậy

$$\overline{x} = \{a \in A \mid a\mathcal{R}x\}.$$

Mệnh đề.

Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên tập hợp A. Khi đó:

i). $\forall x \in A, \quad x \in \overline{x}$.

ii). $\forall x, y \in A, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$.

iii). $\forall x, y \in A$, nếu $\overline{x} \neq \overline{y}$ thì $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

Lớp tương đương

Ví dụ. Trên tập hợp $A = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ta xét quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ như sau:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + 3y \text{ chẵn.}$$

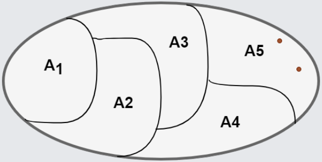
a). Chứng minh $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương.

b). Tìm các lớp tương đương $[1], [2]$ và $[4]$.

Định nghĩa

Nhận xét.

Ví dụ. Dựa vào Mệnh đề trên ta có nếu $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên tập hợp A thì ta có thể phân tích A thành hợp của các lớp tương đương rời nhau. Sự phân tích đó được gọi là sự phân hoạch tập hợp A thành các lớp tương đương.



Ví dụ. Cho S = tập hợp sinh viên của lớp này, gọi

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a \text{ cùng họ với } b\}.$$

Khi đó $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương và khi đó S được phân hoạch thành các lớp tương đương, mỗi lớp tương đương là tập hợp những bạn sinh viên cùng họ.

Quan hệ đồng dư trên $\mathbb{Z}$

Định nghĩa

Cho n là một số nguyên dương và quan hệ R trên Z xác định bởi:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; x \equiv y \;(\mathit{mod}\; n)$$

Khi đó $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$. Quan hệ này được gọi là quan hệ đồng dư theo modulo n.
Với mỗi $x \in \mathbb{Z}$, ta có

$$\overline{x} = \{x + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{x, x \pm n, x \pm 2n, x \pm 3n, \ldots\}.$$

Ta đặt

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}.$$

Ví dụ. Trong $\mathbb{Z}_{12}$, ta có $\overline{-7} = \overline{5}; \quad \overline{28} = \overline{4}$.

Quan hệ thứ tự

Định nghĩa

Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập hợp A được gọi là quan hệ thứ tự nếu nó thỏa mãn các tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.
Nếu $\mathcal{R}$ là một thứ tự trên tập hợp A thì ta ký hiệu $a \preceq b$ thay cho $a\mathcal{R}b$, và ký hiệu $a \prec b$ thay cho $a \preceq b$ nhưng $a \neq b$.
Cặp $(A, \preceq)$ được gọi là tập sắp thứ tự hay poset.

- Phản xạ $a \prec a$
- Phản xứng $(a \prec b) \wedge (b \prec a) \to a = b$
- Bắc cầu $(a \prec b) \wedge (b \prec c) \to (a \prec c)$

Ví dụ.

a). Ta có $(\mathbb{N}, \leq)$ là tập thứ tự. Khi đó $1 \preceq 2,\ 4 \not\preceq 3,\ 5 \preceq 5, \ldots,$

b). Xét tập thứ tự $(\mathbb{N}^*, |)$, ta có $2 \preceq 6,\ 2 \not\preceq 3,\ 3 \not\preceq 2, \ldots$

Định nghĩa

Ví dụ. Chứng minh quan hệ ước số $|$ trên tập số nguyên dương là quan hệ thứ tự (nghĩa là $(\mathbb{Z}^+, |)$ là một poset).

Ví dụ. $(\mathbb{Z}, |)$ là một poset?

Ví dụ. $(P(S), \subseteq)$ là một poset? Trong đó $P(S)$ là tập hợp các tập con của S.

Phần tử trội

Định nghĩa

Cho $(A, \preceq)$ là một tập thứ tự và $x, y \in A$. Khi đó:

a). *Nếu $x \preceq y$ thì ta nói y là trội của x hoặc x được trội bởi y.*

2). *Nếu $x \prec y$ thì ta nói y là trội thật sự của x.*

3). *Nếu $x \prec y$ và không tồn tại $z \in A$ sao cho $x \prec z \prec y$ thì ta nói y là trội trực tiếp của x.*

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Khi đó:

a). Với $(A, \leq)$, ta có các trội của 2 là 2, 3, 4, 5, 6;
trội trực tiếp của 2 là 3.

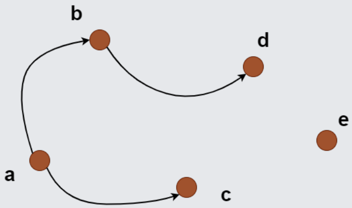
b). Với $(A, |)$, ta có các trội của 2 là 2, 4, 6;
trội trực tiếp của 2 là 4 và 6.

Định nghĩa

Biểu đồ Hasse của tập thứ tự $(A, \preceq)$ là một đồ thị có hướng

a). *Các đỉnh tương ứng với các phần tử của A.*

2). *Các cung có hướng nối từ x đến y nếu y là trội trực tiếp của x.*



$$a \prec b \prec d, \quad a \prec c$$

Biểu đồ Hasse

Ví dụ. Biểu đồ Hasse của tập thứ tự (poset) $(\{1,2,3,4\},\leq)$ có thể vẽ như sau

Chú ý.
Chúng ta không vẽ mũi tên với qui ước mỗi cung đều đi từ dưới lên trên

Ví dụ. Vẽ biểu đồ Hasse của tập thứ tự (poset) $(\{1,2,3,4,6\},|)$.

Ví dụ. Vẽ biểu đồ Hasse của $P(\{a,b,c\})$.

Thứ tự toàn phần

Định nghĩa

- *Các phần tử* a *và* b *của tập thứ tự* $(S, \preceq)$ *gọi là so sánh được nếu* $a \preceq b$ *hay* $b \preceq a$.
- *Nếu hai phần tử tùy ý của* S *đều so sánh được với nhau thì ta gọi nó là tập thứ tự toàn phần. Ta cũng nói rằng* $\preceq$ *là thứ tự toàn phần trên* S.
- *Ngược lại, nó được gọi là tập thứ tự bộ phận (hay còn gọi thứ tự bán phần).*

Ví dụ.

- Quan hệ "$\leq$" trên tập số nguyên dương là thứ tự toàn phần.
- Quan hệ ước số "$|$" trên tập hợp số nguyên dương không là thứ tự toàn phần, vì các số 5 và 7 là không so sánh được.

Định nghĩa

Cho $(A, \preceq)$ *là một tập thứ tự và* $m \in A$. *Ta nói*

i). m *là phần tử* *tối đại* *của* A *nếu* $\forall x \in A,\ m \preceq x \ \rightarrow \ m = x$.

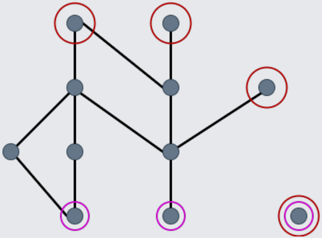
ii). m *là phần tử* *tối tiểu* *của* A *nếu* $\forall x \in A,\ x \preceq m \ \rightarrow \ x = m$.

iii). m *là phần tử* *lớn nhất* *của* A *nếu* $\forall x \in A,\ x \preceq m$.

iv). m *là phần tử* *nhỏ nhất* *của* A *nếu* $\forall x \in A,\ m \preceq x$.

Phần tử cực trị

Ví dụ. Xét poset có biểu đồ Hasse như dưới đây

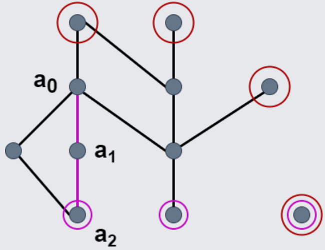


- Mỗi đỉnh màu đỏ là tối đại.
- Mỗi đỉnh màu hồng là tối tiểu.
- Không có cung nào xuất phát từ điểm tối đại.
- Không có cung nào kết thúc từ điểm tối tiểu.

Phần tử cực trị

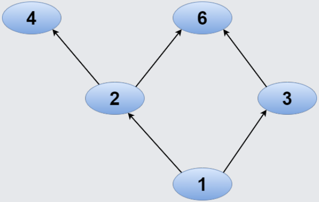
Chú ý. Trong một poset S hữu hạn, phần tử tối đại và phần tử tối tiểu luôn luôn tồn tại.

- Thật vậy, chúng ta xuất phát từ điểm bất kỳ $a_0 \in S$.
  Nếu a_0 không tối tiểu, khi đó tồn tại a_1: $a_1 \prec a_0$, tiếp tục như vậy cho đến khi tìm được phần tử tối tiểu.
- Phần tử tối đại tìm được bằng phương pháp tương tự.



Phần tử cực trị

Ví dụ. Từ biểu đồ Hasse của tập thứ tự $(\{1, 2, 3, 4, 6\}, |)$



Ta có

- 4 và 6 là các phần tử tối đại.
- 1 là phần tử tối tiểu và cũng là phần tử nhỏ nhất.
- Không tồn tại phần tử lớn nhất.

Ví dụ. Vẽ biểu đồ Hasse và tìm phần tử tối đại, tối tiểu của tập thứ tự $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$.

Chặn trên, chặn dưới

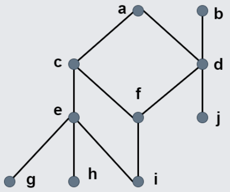
Định nghĩa

Cho $(S, \preceq)$ *là một tập thứ tự và* $A \subseteq S$.

i). *Phần tử chặn trên của* A *là phần tử* $x \in S$ *(có thể thuộc* A *hoặc không) sao cho* $\forall a \in A,\ a \preceq x$.

ii). *Phần tử chặn dưới của* A *là phần tử* $x \in S$ *sao cho* $\forall a \in A,\ x \preceq a$.

Ví dụ. Phần tử chặn trên của $\{g, j\}$ là a.



Chặn trên, chặn dưới

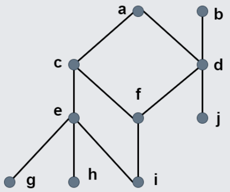
Định nghĩa

Cho $(S, \preceq)$ *là một tập thứ tự và* $A \subseteq S$.

i). *Chặn trên nhỏ nhất của* A *là phần tử chặn trên* x *của* A *sao cho mọi chặn trên y của* A, *ta đều có* $x \preceq y$.

ii). *Chặn dưới lớn nhất của* A *là phần tử chặn dưới* x *của* A *sao cho mọi chặn dưới y của* A, *ta đều có* $y \preceq x$.

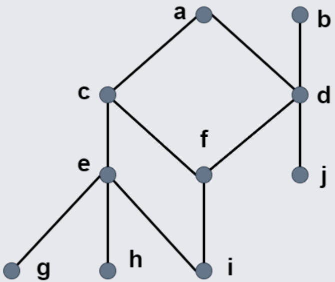
Ví dụ. Chặn trên nhỏ nhất của $\{i, j\}$ là d.



Chặn trên, chặn dưới

- Chặn trên nhỏ nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ được ký hiệu bởi $a \vee b$
- Chặn dưới lớn nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ được ký hiệu bởi $a \wedge b$

Ví dụ. Xét poset có biểu đồ Hasse như dưới đây



- $i \vee j = d$
- $b \wedge c = f$