Report

BigInt và các hàm MulMod, PowMod, GCD, RSA và primality test

Lớp: Nhập môn mã hóa - mật mã

Giảng viên: Nguyễn Đình Thúc

Thành viên nhóm:

Nguyễn Trung Thành: 18120565

Phạm Xuân Thành: 18120567

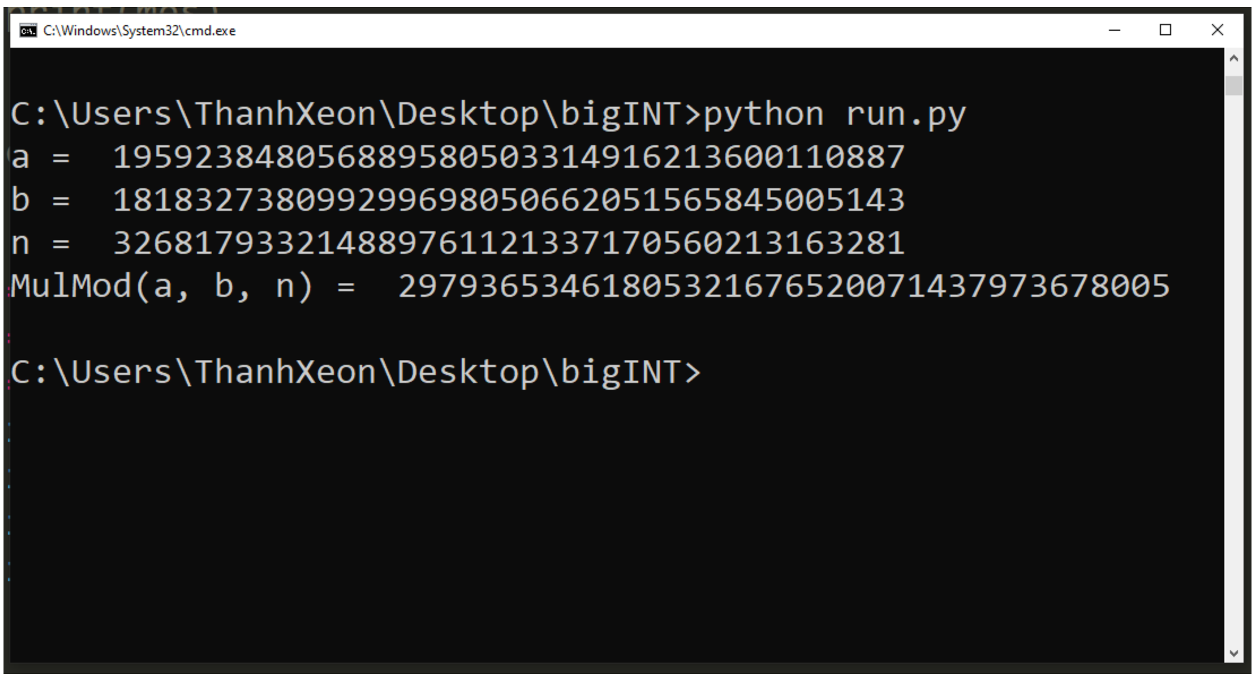
1. *Class::BigInt*

- ***Ý tưởng:*** sử dụng 16 biến longlong để lưu trữ tối đa 1024bit số nguyên dương.
- ***Ngôn ngữ:*** Sử dụng ngôn ngữ python trên toàn bộ đồ án.

a)BigInt::MulMod(self, other)

$a * b = \sum_{i=0}^{n} (\mathrm{a} * \mathrm{b[i]} * 2^{i})\%n$, với n là số lượng bit của b và b[i] là bit tại vị trí i.

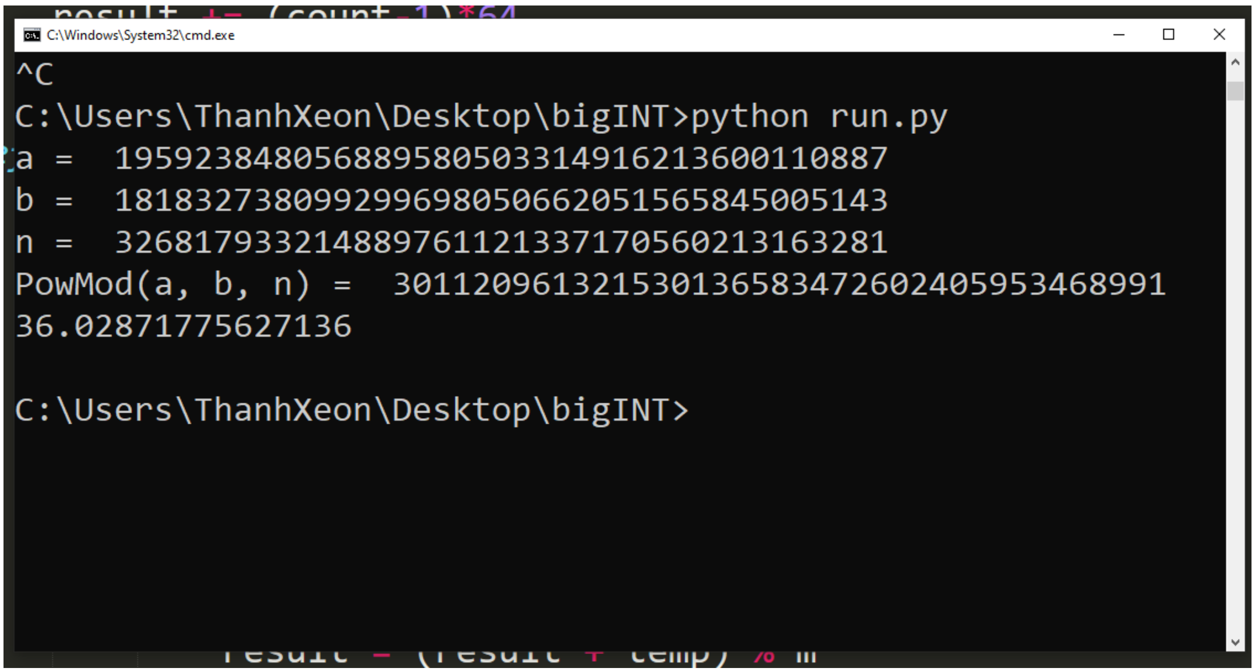
Tốc độ chạy khá nhanh, độ phức tạp thuật toán $O(log_2 n)$



$b)BigInt::PowMod(self,\ other)$

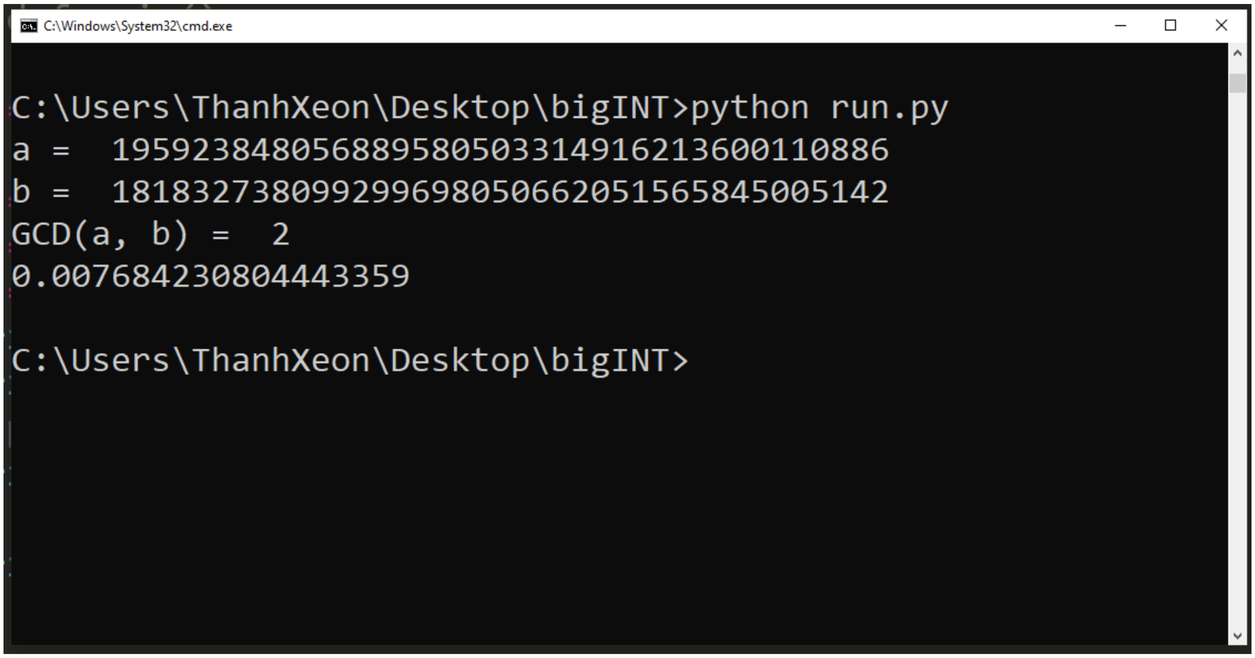
$res = a \mid a^b = \prod_{i=1}^{n}(res * b[i] * a^{2i})\%n$, với b[i] = 1

Tốc độ chạy vẫn chưa thực sự tốt, độ phức tạp $O(log_2^2 n)$



c)GCD(a, b, other)

Áp dụng thuật giải thầy đưa



2. RSA

a) Genkey(p, q)

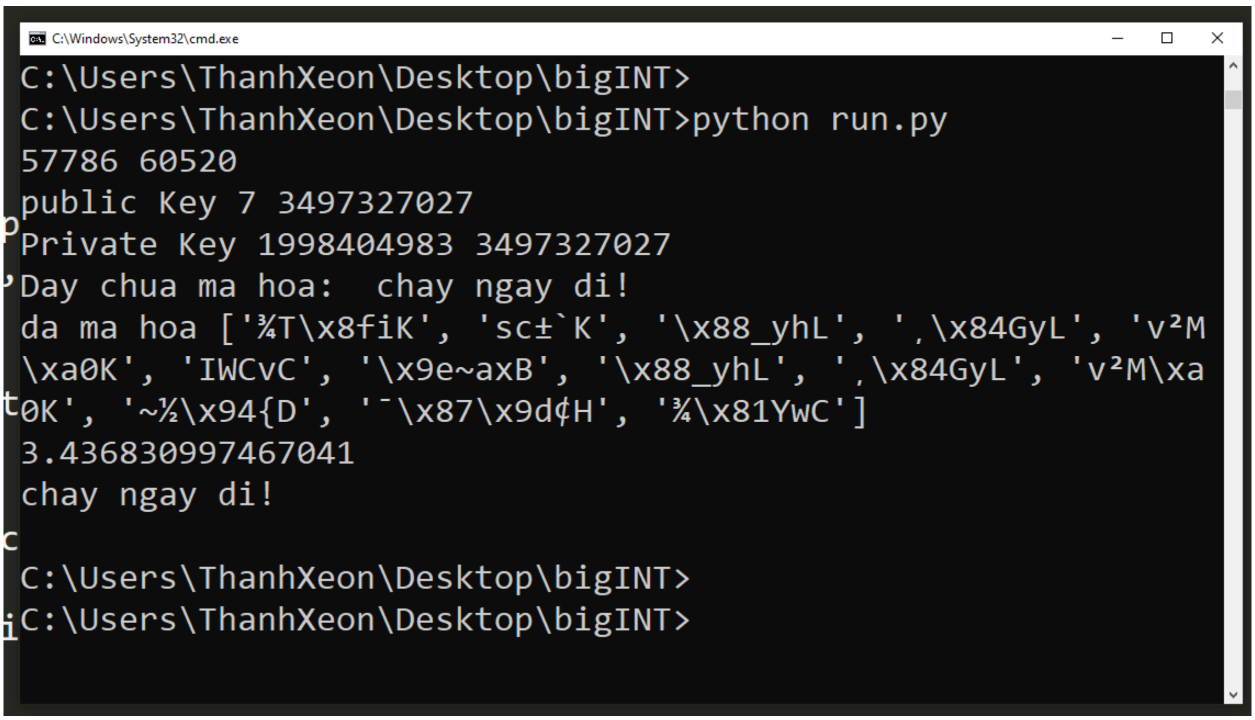
Tạo ra *e*, *d*, *n*. Với *e* là publish key *d* là private key

b) Encrypt(pubKey , plaintext)

Mã hóa *message*: $c = m^e \; mod \; n$

c) FastDecrypt(prvKey, p, q, ciphers)

Giải mã dựa trên đồng dư trung hoa và định lý fermat nhỏ

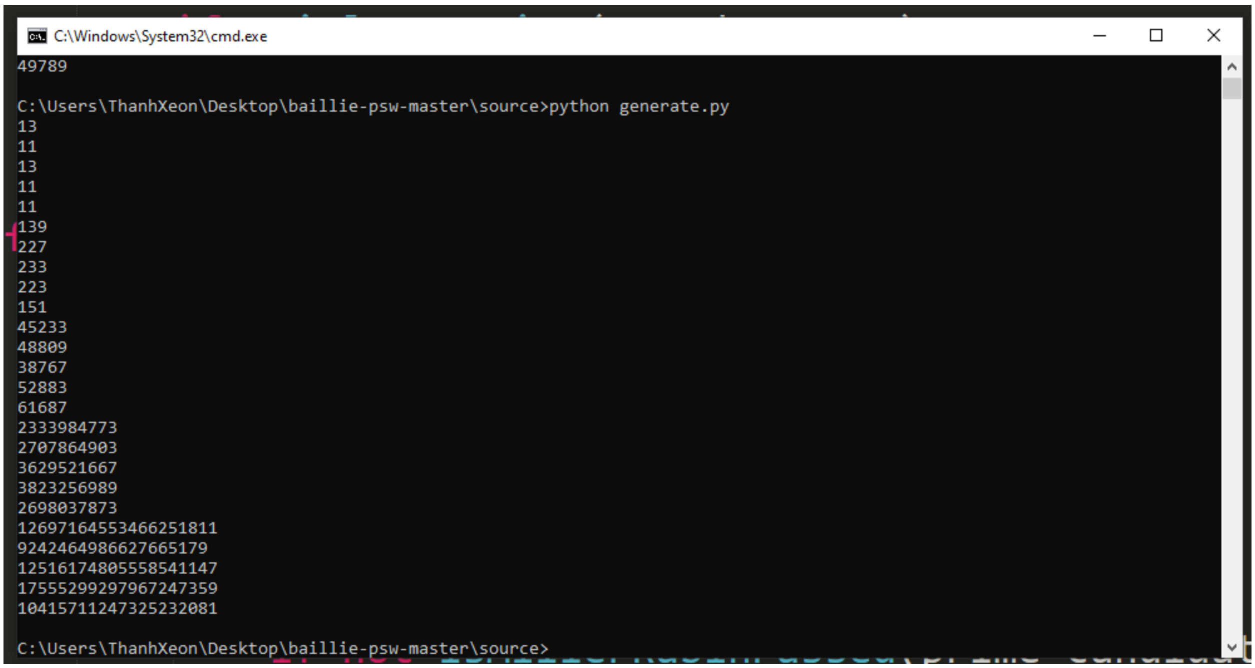


```
C:\Users\ThanhXeon\Desktop\bigINT>
C:\Users\ThanhXeon\Desktop\bigINT>python run.py
57786 60520
public Key 7 3497327027
Private Key 1998404983 3497327027
Day chua ma hoa:  chay ngay di!
da ma hoa ['¾T\x8fiK', 'sc±`K', '\x88_yhL', '¸\x84GyL', 'v²M
\xa0K', 'IWCvC', '\x9e~axB', '\x88_yhL', '¸\x84GyL', 'v²M\xa
0K', '~½\x94{D', '¯\x87\x9d¢H', '¾\x81YwC']
3.436830997467041
chay ngay di!

C:\Users\ThanhXeon\Desktop\bigINT>
C:\Users\ThanhXeon\Desktop\bigINT>
```

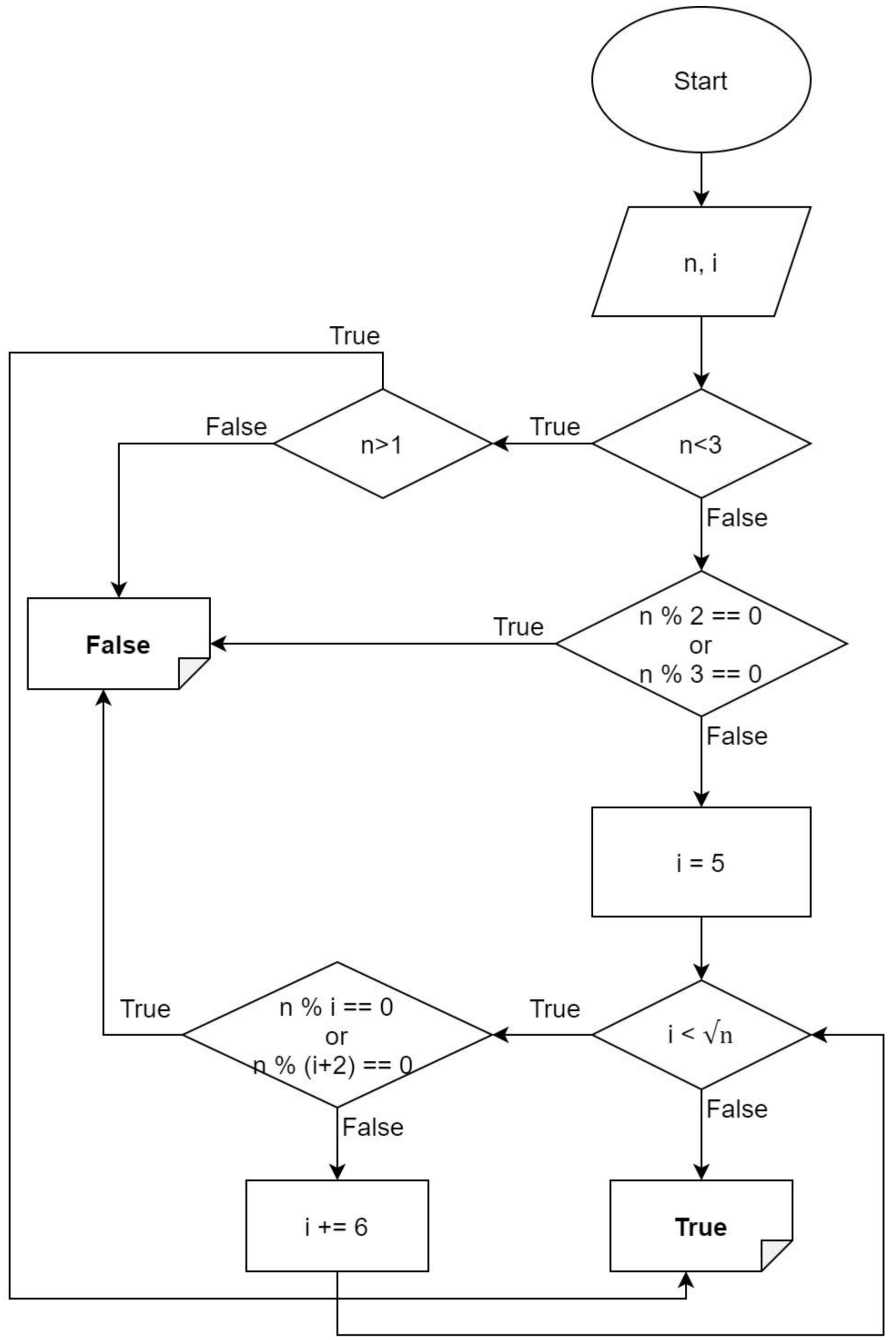
3. Generate prime numbers

Tạo ra n số nguyên tố dựa trên miler rabin test, trong khoảng k bit cho trước. *Thuật toán có độ tin tưởng cao nhưng vẫn có xác suất không chính xác nên cần kiểm lại với baillie test.*



4. Thuật toán Simple primality test

- ***Ý tưởng:*** Dựa trên định nghĩ của số nguyên tố, và lược bỏ đi một số bước.



- ***Độ phức tạp thuật toán:*** $O(\sqrt{n})$

- ***Tính chất:*** vét cạn, tuyến tính tăng khi n càng lớn

- ***Ưu điểm:*** Chính xác 100%

- ***Khuyết điểm:***
  + Thực thi quá chậm khi kiểm tra số nguyên lớn.
  + Tính chất vét cạn nên rất tốn thời gian và tài nguyên.

- ***Nhận xét:***
  + Phù hợp với các số nguyên tố nhỏ.
  + Độ chính xác tuyệt đối, dễ cài đặt.

5. Thuật toán Miller-Rabin

- ***Ý tưởng:***

  + Dựa trên định lý Fermat nhỏ.

  $$a^{n-1} \equiv 1 \ (mod\ n)$$

  + Độ chính xác tăng dần theo số lần lặp lại (k).

- ***Độ phức tạp thuật toán:*** $O(k \times log^3 n)$

- ***Tính chất:***

  + Mang tính chất xác suất dựa vào các định lý toán học (Fermat)
  + Tồn tại các trường hợp Hợp số có thể vượt qua test (pseudoprime). Có thể giảm thiểu trường hợp này bằng cách lặp lai nhiều lần với số k lớn.
  + Chọn ngẫu nhiên số a trong không gian mẫu thích hợp để áp dụng định lý Fermat.

- ***Ưu điểm:***

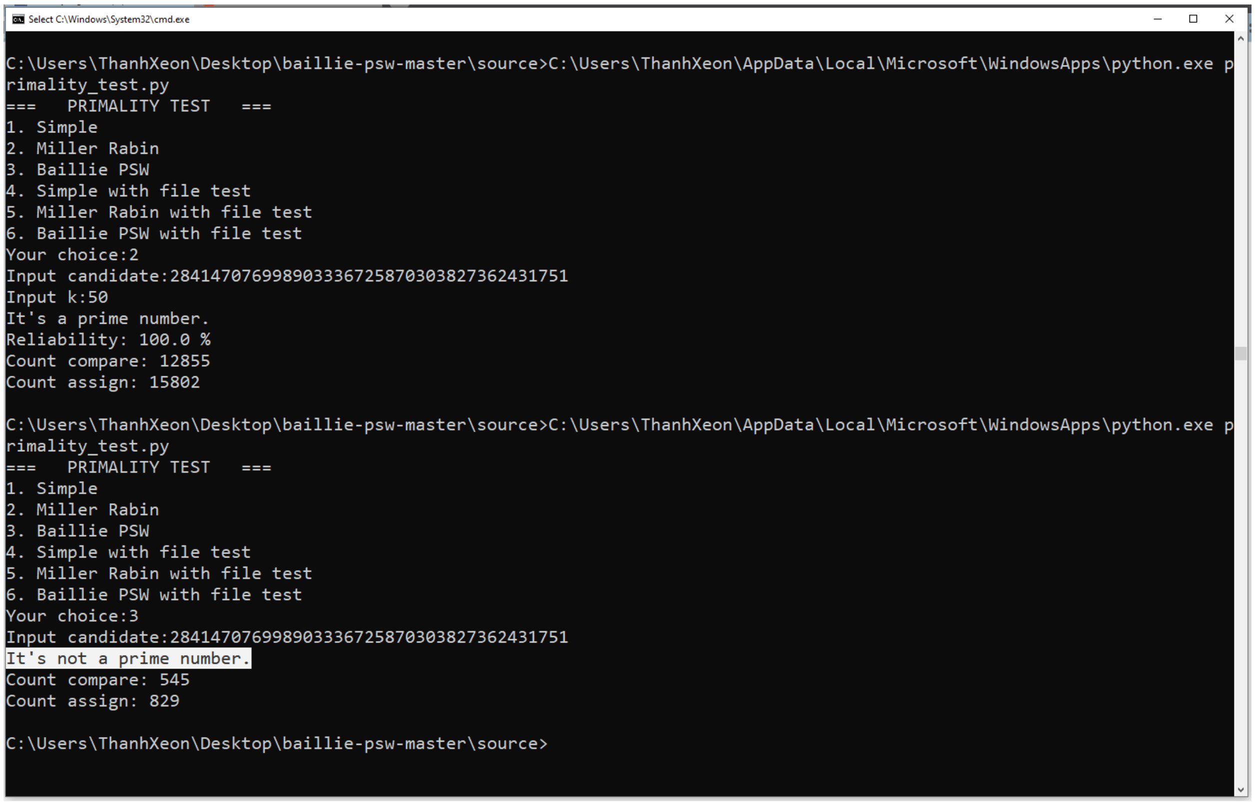
  + Kiểm tra nhanh hơn *Simple primality test* ở những số nguyên lớn.
  + Có thể thay đổi độ tin cậy dựa vào số lần thử.
  + Nhanh chóng và hiệu quả.
  +Chắc chắn xác định được hợp số
  + Độ chính xác tin cậy dựa trên số lần lặp với công thức: $(\frac{1}{4})^k$

- ***Khuyết điểm:***

  + Tồn tại trường hợp thỏa nhưng không phải là số nguyên tố. Bởi vì tính chất ngẫu nhiên trong quá trình chọn cơ sở cho định lý Fermat
  + Khó cài đặt .

+ Ví dụ cho trường hợp tồn tại số giả nguyên tố vượt qua thuật toán Miller-Rabin nhưng không thỏa thuật toán Baillie-PSW.

16581017526609192179
273113379123154359827225664964346213231
284147076998903336725870303827362431751



- ***Nhận xét:*** Độ phức tạp thấp hơn Simple primality test . Không nên sử dụng cho các số nguyên nhỏ, nên cho các số nguyên tố lớn.

6. Thuật toán Baillie-PSW

- ***Ý tưởng:***

  + Dựa trên định lý Fermat nhỏ.

$$a^{n-1} \equiv 1 \ (mod\ n)$$

  + Loại bỏ các hợp trong khi sử dụng các thuật toán Kiểm tra số nguyên tố mạnh trên một cơ sở nhất định.

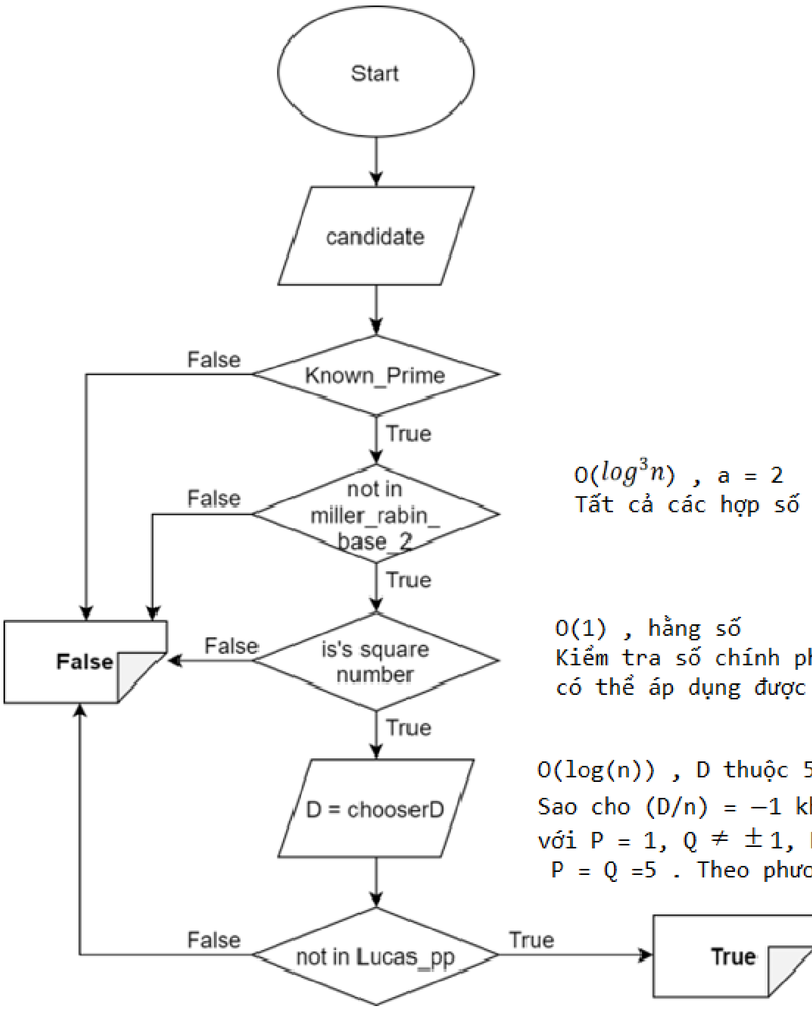
+ Kiểm tra thêm một lần nữa bằng thuật toán Strong Luscas test. Sử dụng Lucas primality test để kiểm tra tính nguyên tố.

- ***Cài đặt :***

  - Bước 1: Kiểm tra số n với một thuật toán kiểm tra số nguyên tố mạnh trên cơ sở a. Trả về False nều không thỏa. True thì tiếp tục.

  - Bước 2: xây dựng các biến số (D,P,Q) cơ bản của thuật toán Lucas test.

  - Bước 3: Áp dụng thuật toán Lucas test (lpsp). Trả về “Hợp số” nếu False. Trả về “có thể là số nguyên tố” nếu True.



O($log^3 n$) , a = 2
Tất cả các hợp số sẽ dừng lại ở trường hợp này.

O(1) , hằng số
Kiểm tra số chính phương, Mục đính đề có thể áp dụng được ký hiệu Jacobi.

O(log(n)) , D thuộc 5,-7,9,-11,...
Sao cho (D/n) = -1 khi đó: $D = P^2 - 4Q$
với P = 1, Q $\neq \pm 1$, Nếu Q = ± 1 thì P = Q =5 . Theo phương pháp A*.

$O(k \times log^3 n)$
Áp dụng thuật giải Strong Lucas pseudoprime test từ D, P, Q từ bước trước

- ***Độ phức tạp thuật toán:*** $O(k \times log^3 n)$

- ***Tính chất:***
  + Mang tính chất xác suất dựa vào các định lý toán học (Fermat)
  + Tồn tại các trường hợp Hợp số có thể vượt qua test (pseudoprime). Có thể giảm thiểu trường hợp này bằng cách lặp lai nhiều lần với số k lớn.
  + Sử dụng Lucas primality test để kiểm tra tính nguyên tố.

- ***Ưu điểm:***
  + Độ chính xác tuyệt đối với các số n <2^{64}.
  + Với các số n > 2^{64} , chưa phát hiện tồn tại số nào vượt qua Baillie- PSW.
  + Độ tin cậy cao.

- ***Khuyết điểm:***
  + Phức tạp, khó cài đặt.

- ***Nhận xét:***
  + Độ phức tạp thấp hơn Simple primality test . Không nên sử dụng cho các số nguyên nhỏ, nên cho các số nguyên tố lớn.

7. Đánh giá mức độ hoàn thành:

STT	Họ và tên	Công Việc	Đánh giá
1	Nguyễn Trung Thành	Thuật toán Baillie-PSW, Simple test, Generate prime numbers, BigInt, RSA.	100%
2	Phạm Xuân Thành	Thuật toán Miler-Rabin, BigInt, RSA, Genkey, Encrypt, FastDecrypt.	100%

8. Tài liệu tham khảo:

Mã hóa thông tin – Tập 1
Mã hóa thông tin – Tập 2

https://en.wikipedia.org/wiki/RSA_(cryptosystem)

https://arxiv.org/pdf/2006.14425.pdf

https://www.researchgate.net/publication/317401953_Design_and_Implement_Fast_Algorithm_of_RSA_Decryption_using_java

https://www.youtube.com/watch?v=NcPdiPrY_g8&ab_channel=JeffSuzuki

https://en.wikipedia.org/wiki/Lucas_primality_test

http://mpqs.free.fr/LucasPseudoprimes.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Baillie%E2%80%93PSW_primality_test

http://ntheory.org/data/spsps.txt?fbclid=IwAR3C1pK30RhR-94GJajTMPUrpsv6of7FlNAsZRqJe2ChUHRAZTyTOWcnpkU

https://deepai.org/publication/taxonomy-and-practical-evaluation-of-primality-testing-algorithms?fbclid=IwAR2mxmwjYKBMsUQEMsKjmGBPYBhH7zMRJnM9TKt6dCPSv0X6in-hWXf3NVk

https://en.wikipedia.org/wiki/Lucas_pseudoprime#Baillie-Wagstaff-Lucas_pseudoprimes