CÁC THUẬT GIẢI SẮP XẾP NÂNG CAO

- Định nghĩa thuật giải sắp xếp
- Heapsort
- Quicksort
- Sắp xếp thời gian tuyến tính

ĐỊNH NGHĨA THUẬT GIẢI SẮP XẾP

- Input: một dãy n số (a_1, a_2, ..., a_n)
- Output: một hoán vị của input (a'_1, a'_2, ..., a'_n) sao cho

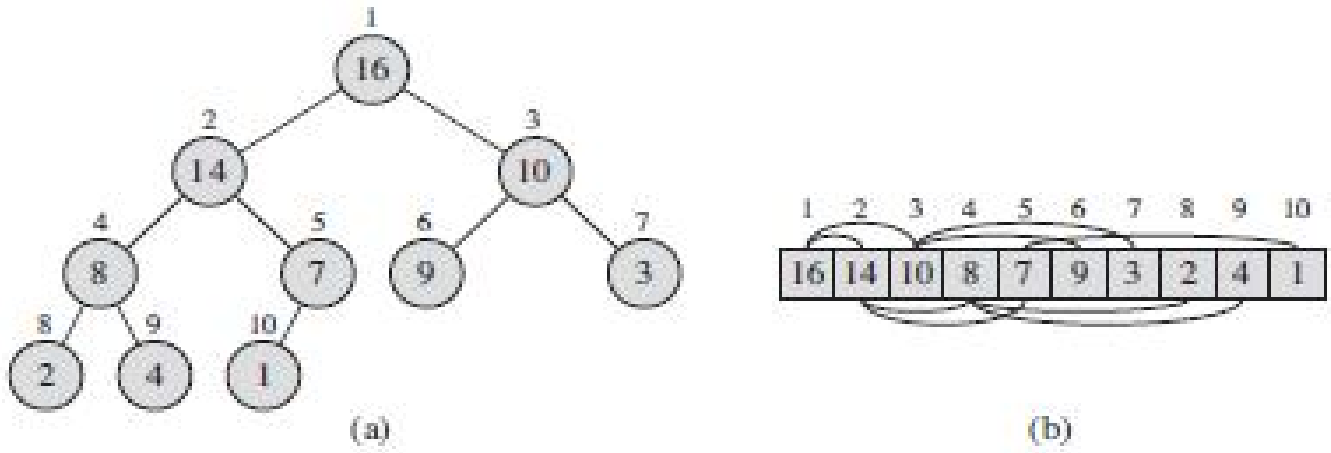
  $a'_1 \leq a'_2 \leq .... \leq a'_n$
- Dùng mảng hoặc DSLK để biểu diễn dãy số

THUẬT GIẢI HEAPSORT

- Cho một mảng A, một Heap biểu diễn A là một cây nhị phân có các tính chất sau:
  - Cây có thứ tự, mỗi nút tương ứng với một phần tử của mảng, gốc ứng với phần tử đầu tiên của mảng
  - Cây cân bằng và được lấp đầy trên tất cả các mức, ngoại trừ mức thấp nhất được lấp đầy từ bên trái sang (có thể chưa lấp đầy)

THUẬT GIẢI HEAPSORT

- Một MaxHeap là một Heap mà giá trị của mỗi nút lớn hơn (hoặc bằng) giá trị các nút con



THUẬT GIẢI HEAPSORT

- Gọi i là chỉ số thứ tự của một nút (của mảng), thì chỉ số các nút cha, con trái và con phải là:
  - Parent(i) = $\lfloor i/2 \rfloor$
  - Left(i) = $2i$
  - Right(i)= $2i+1$

THUẬT GIẢI HEAPSORT

- Thuật giải HeapSort biến đổi mảng về MaxHeap để sắp xếp như sau:
  - Biến đổi Heap (mảng) về một MaxHeap
  - Hoán đổi giá trị A[1] với A[n]
  - Loại nút n ra khỏi Heap và chuyển Heap A[1..(n-1)] thành một MaxHeap (ít hơn một phần tử)
  - Lặp lại các bước trên cho đến khi Heap chỉ còn một phần tử

THUẬT GIẢI HEAPSORT

- Cần hai thủ tục (thuật giải) hỗ trợ cho HeapSort:
  - MaxHeappify(A[1..n], i), biến đổi cây con có gốc tại i thành một MaxHeap (gốc tại i)
  - BuildMaxHeap(A[1..n]), biến đổi mảng (Heap) thành MaxHeap

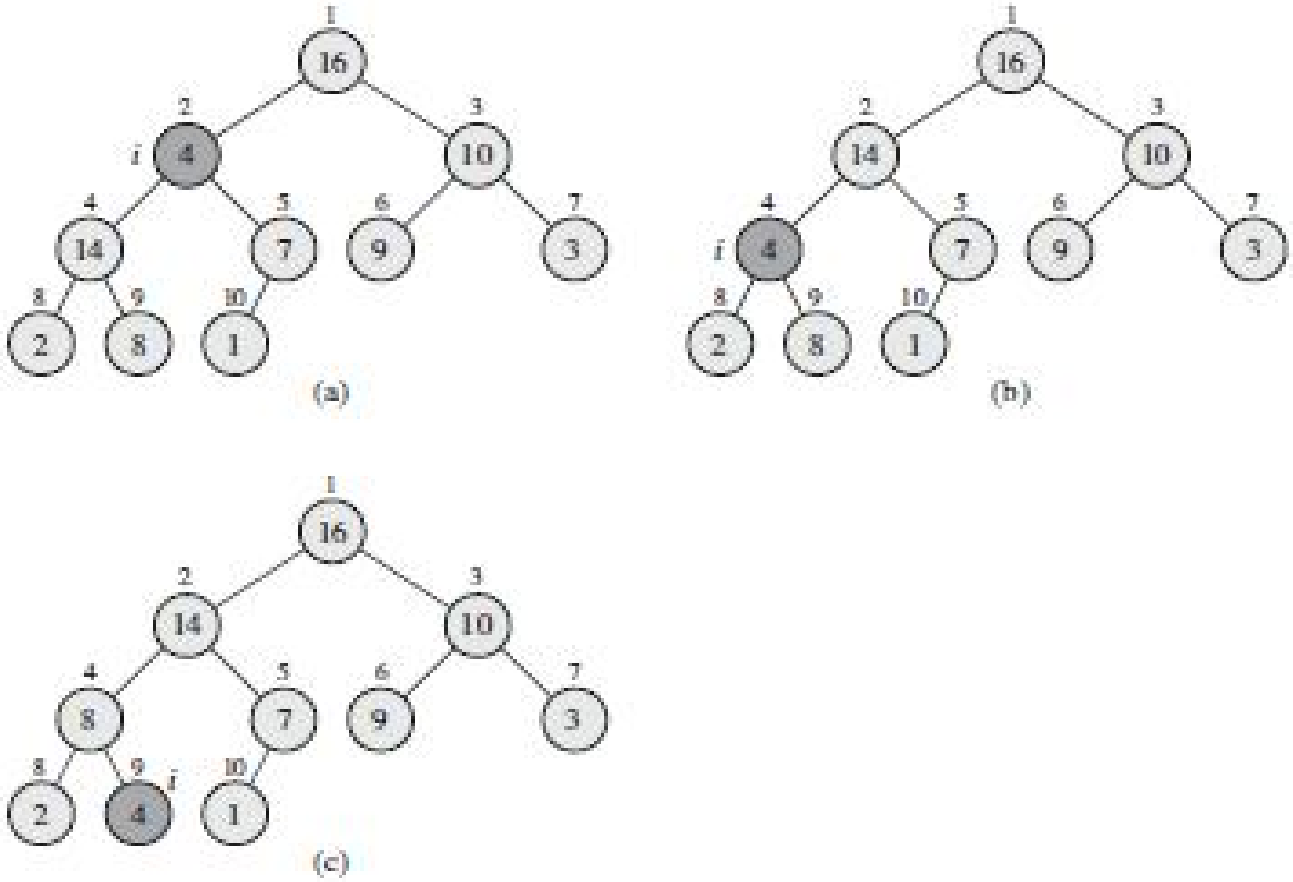
MaxHeapify

- Đầu vào là một mảng (heap) A và chỉ số i trong mảng
- Các cây nhị phân được định gốc tại Left(i) và Right(i) là các MaxHeap nhưng A[i] có thể nhỏ hơn các con của nó
- MaxHeapify đẩy giá trị A[i] xuống sao cho cây con định gốc tại A[i] là một MaxHeap

MaxHeapify

```
MaxHeapify(A[1..n],  i)
1     l = Left(i); r = Right(i)
2     if l<=n and A[l]>A[i]  largest = l
3     else largest = i
4     if r<=n and A[r]>A[largest]  largest = r
5     if largest □ i
6           Exchange(A[i], A[largest])
7           MaxHeapify(A, largest)
```

MaxHeapify


1
16
2
i
4
3
10
4
14
5
7
6
9
7
3
8
2
9
8
10
1
(a)
1
16
2
14
3
10
4
i
4
5
7
6
9
7
3
8
2
9
8
10
1
(b)
1
16
2
14
3
10
4
8
5
7
6
9
7
3
8
2
9
i
4
10
1
(c)

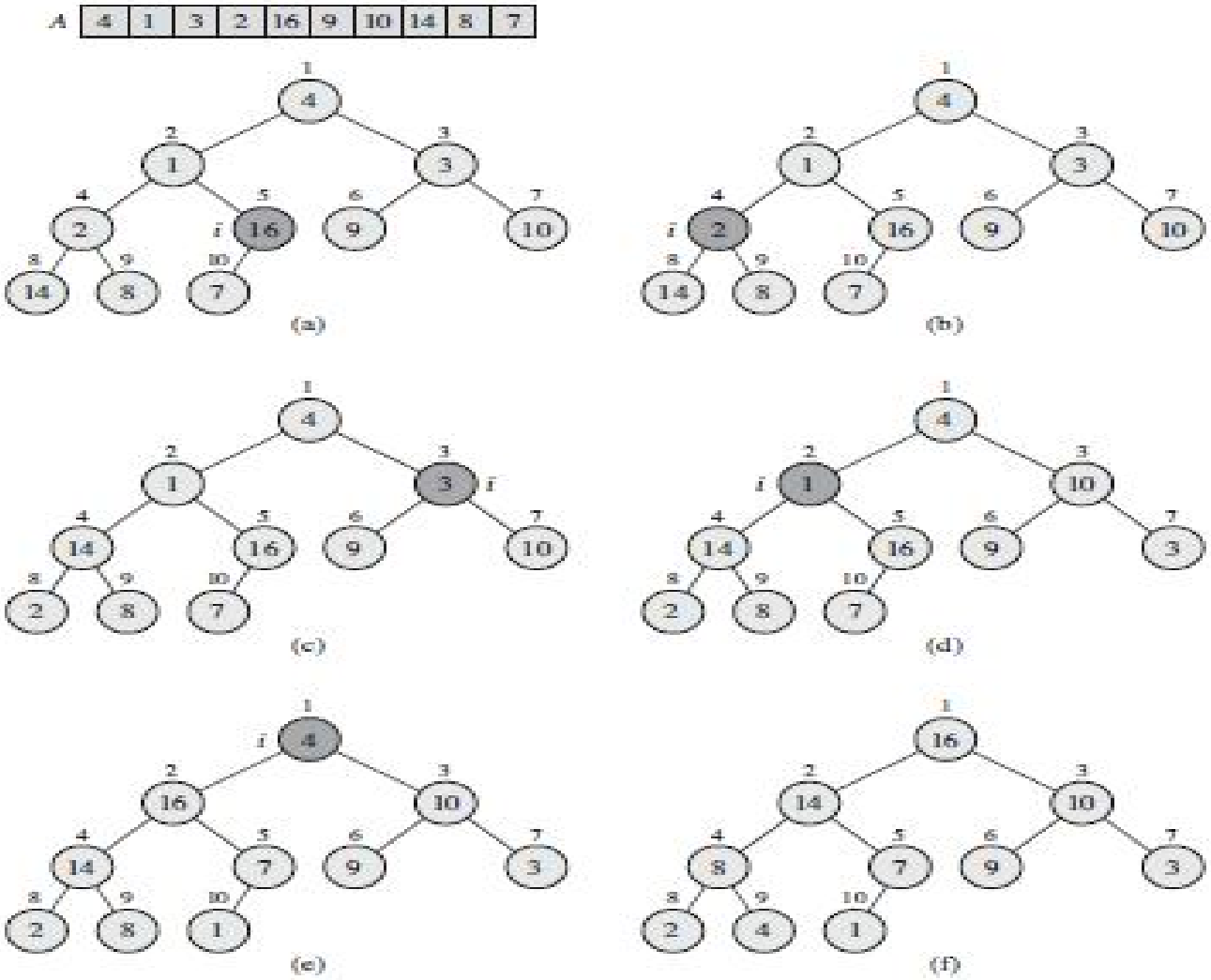
BuildMaxHeap

- Các nút có chỉ số $\lfloor n/2 \rfloor + 1$, $\lfloor n/2 \rfloor + 2$, ..., n trong A[1..n] là các lá của cây, mỗi nút như vậy là một MaxHeap
- BuildMaxHeap áp dụng MaxHeapify cho các nút con khác lá của cây từ dưới lên gốc bắt đầu từ nút $\lfloor n/2 \rfloor$
- Kết quả là một MaxHeap tương ứng với A[1..n]

BuildMaxHeap

```
BuildMaxHeap(A[1..n])
1   for i = n/2 downto 1
2       do  MaxHeapify(A, i)
```

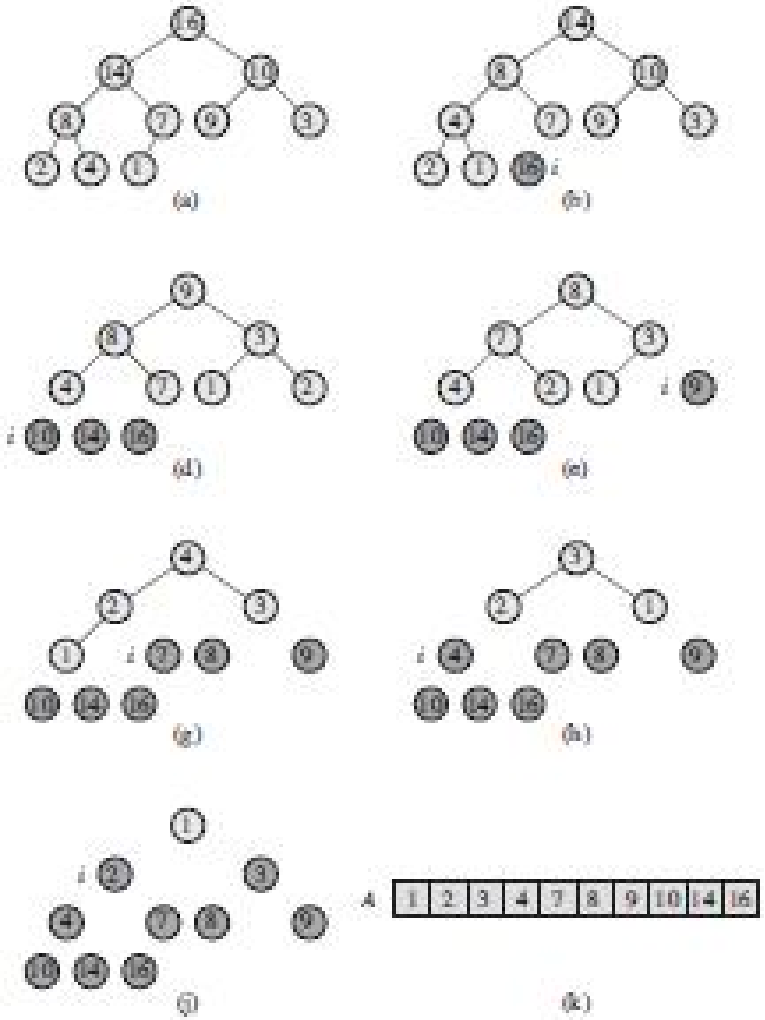
BuildMaxHeap



HeapSort

```
HeapSort(A[1..n])
1   BuildMaxHeap(A)
2   for i = n downto 2
3       do  Exchange(A[1], A[i])
4           MaxHeapify(A[1..i-1], 1)
```

HeapSort



HeapSort

- Kích thước đầu vào là n (số phần tử của mảng)
- Gọi chiều cao của cây là h, do cây cân bằng nên $h = \lfloor \log_2 n \rfloor$
  - Thời gian chạy của MaxHeapify là $O(h)=O(\log_2 n)$
  - Thời gian chạy của BuilMaxHeap tối đa là $O(n\log_2 n)$
  - Thời gian chạy của vòng lặp 2-4 là $O(n\log_2 n)$
- Vậy thời chạy của HeapSort là

$$T(n)= O(n\log_2 n)+O(n \log_2 n)=O(n\log_2 n)$$

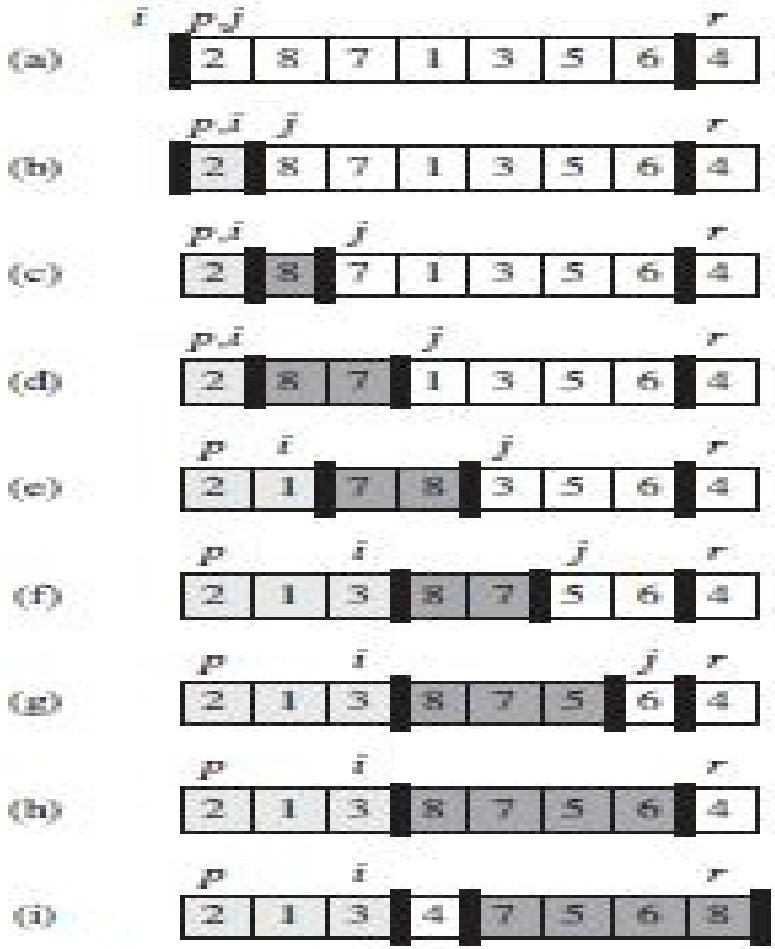
QUICKSORT

- Được thiết kế dựa trên kỹ thuật chia để trị (divide-and-conquer):
  - **Divide**: Phân hoạch A[p..r] thành hai mảng con A[p..q-1] và A[q+1..r] có các phần tử tương ứng nhỏ hơn hoặc bằng A[q] và lớn hơn A[q]
  - **Conquer**: Sắp xếp hai mảng con A[p..q-1] và A[q+1..r] bằng lời gọi đệ qui

Quicksort (C++)

```
void QuickSort(int A[], int p, int r)
{
   int q;
   if(p<r)
   {
            q=Partition(A,p,r);
            QuickSort(A, p,q-1);
            QuickSort(A, q+1,r);
   }
}
```

Partition


(a) i p,j r 2 8 7 1 3 5 6 4
(b) p,i j r 2 8 7 1 3 5 6 4
(c) p,i j r 2 8 7 1 3 5 6 4
(d) p,i j r 2 8 7 1 3 5 6 4
(e) p i j r 2 1 7 8 3 5 6 4
(f) p i j r 2 1 3 8 7 5 6 4
(g) p i j r 2 1 3 8 7 5 6 4
(h) p i r 2 1 3 8 7 5 6 4
(i) p i r 2 1 3 4 7 5 6 8

Partition (C++)

```
int Partition(int A[], int p, int r)
{
    int i, j, x;
    x=A[r];
    i=p-1;
    for(j=p; j<r; j++)
                if(A[j]<=x)
                {
                    i=i+1;
                    exchange(A[i], A[j]); //hoán vị A[i] và A[j]
                }
    exchange(A[i+1], A[r]);
    return i+1;
}
```

ĐỘ PHỨC TẠP QUICKSORT

- Partition có T(n)=O(n)
- Đối với Quicksort

  Tốt nhất $T(n) = O(n\log_2 n)$

  Xấu nhất $T(n) = O(n^2)$

  Trung bình $T(n) = O(n\log_2 n)$

SẮP XẾP THỜI GIAN TUYẾN TÍNH

- Khái niệm
- Sắp xếp bằng đếm
- Sắp xếp theo lô

KHÁI NIỆM

- Thuật giải sắp xếp thời gian tuyến tính là thuật giải có thời gian chạy O(n)
- Các thuật giải tốt như Heapsort, Quicksort có thời gian chạy O(nlgn)

KHÁI NIỆM

- Các thuật giải Heapsort, Quicksort dùng phương pháp so sánh, hoán đổi để sắp xếp
- Các thuật giải tuyến tính dựa trên thông tin của các phần tử để sắp xếp nên giảm được bậc của độ phức tạp

SẮP XẾP BẰNG ĐẾM

- Cho k là một số nguyên, sắp xếp bằng đếm (counting sort) giả sử mỗi một phần tử trong dãy input là một số nguyên trong miền từ 0 đến k

SẮP XẾP BẰNG ĐẾM

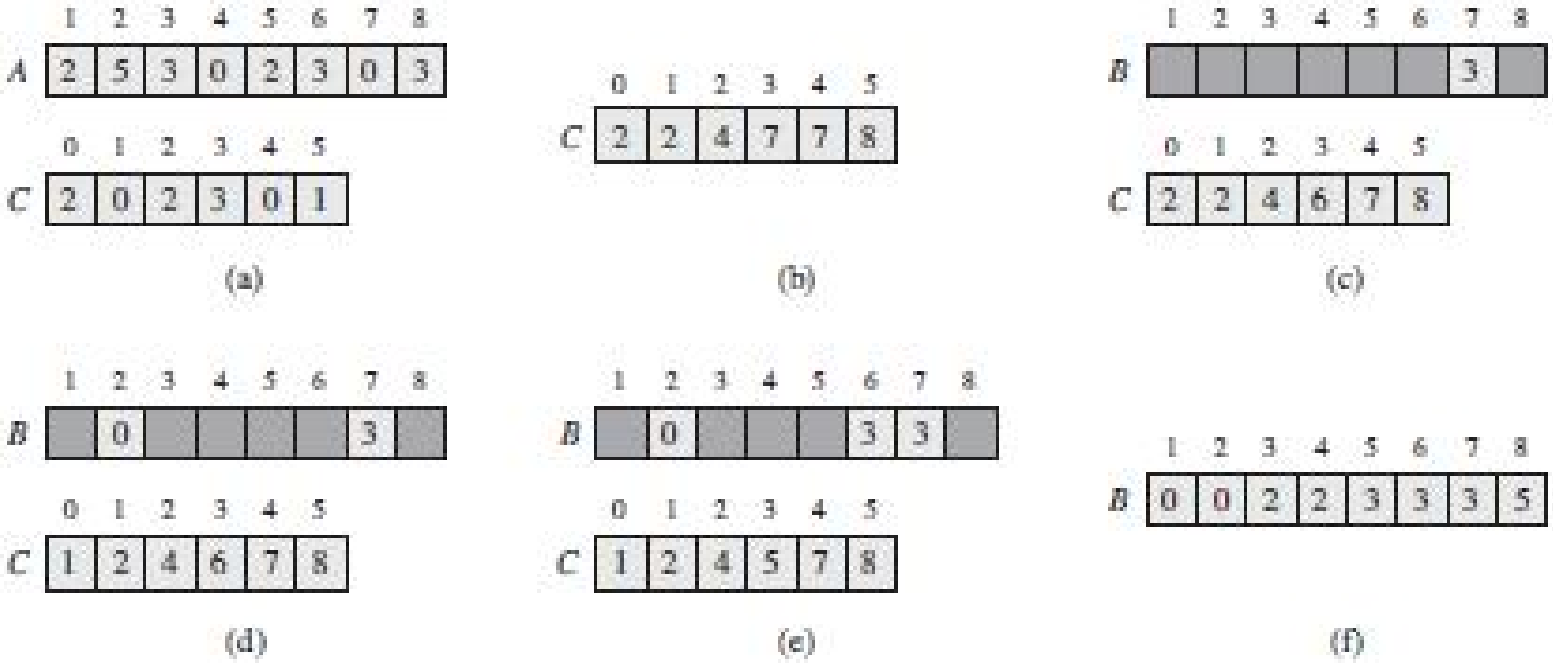
- Ý tưởng là đếm số phần tử nhỏ hơn phần tử x trong mảng nhập để đặt x trực tiếp vào vị trí của nó trong mảng xuất
- Chẳng hạn, nếu có 17 phần tử nhỏ hơn hoặc bằng x thì x được đặt vào ví trí 17

SẮP XẾP BẰNG ĐẾM

```
COUNTING-SORT(A, B, k)
 1  let C[0..k] be a new array
 2  for i = 0 to k
 3      C[i] = 0
 4  for j = 1 to A.length
 5      C[A[j]] = C[A[j]] + 1
 6  // C[i] now contains the number of elements equal to i.
 7  for i = 1 to k
 8      C[i] = C[i] + C[i - 1]
 9  // C[i] now contains the number of elements less than or equal to i.
10  for j = A.length downto 1
11      B[C[A[j]]] = A[j]
12      C[A[j]] = C[A[j]] - 1
```

C[ ] = C

SẮP XẾP BẰNG ĐẾM



SẮP XẾP BẰNG ĐẾM

- Chi phí cho lệnh 1-2 là O(k)
- Chi phí cho lệnh 3-4 là O(n)
- Chi phí cho 6-7 là O(k)
- Chi phí cho 9-11 là O(n)
  - Vì vậy tổng chi phí thời gian là O(k + n)
  - Nếu k = O(n) thì tổng chi phí là O(n).

SẮP XẾP BẰNG ĐẾM

- COUNTING-SORT chạy thời gian tuyến tính và hiệu quả hơn các thuật giải sắp xếp bằng so sánh
- COUNTING-SORT chỉ sắp xếp các phần tử có khoá trong một miền nhất định (nhỏ hơn hoặc bằng *k* cho trước)
- COUNTING-SORT phải sử dụng thêm các mảng trung gian

SẮP XẾP THEO LÔ

- Sắp xếp theo lô (Bucket sort) giả sử input là một mảng *n* số không âm nhỏ hơn 1

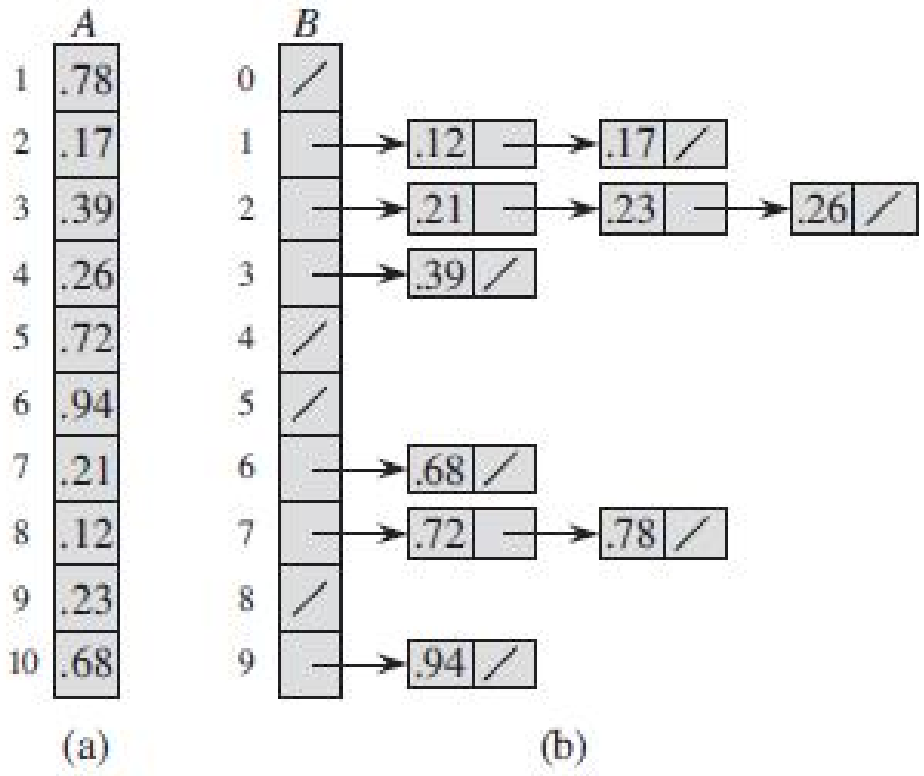
SẮP XẾP THEO LÔ

- Ý tưởng của Bucketsort
  - Phân bố mảng input vào *n* khoảng con (lô) của khoảng [0, 1)
  - Sắp xếp các phần tử trong mỗi lô và nối các lô để có mảng được sắp

SẮP XẾP THEO LÔ

```
BUCKET-SORT(A)
1  let B[0..n − 1] be a new array
2  n = A.length
3  for i = 0 to n − 1
4       make B[i] an empty list
5  for i = 1 to n
6       insert A[i] into list B[⌊nA[i]⌋]
7  for i = 0 to n − 1
8       sort list B[i] with insertion sort
9  concatenate the lists B[0], B[1], . . . , B[n − 1] together in order
```

SẮP XẾP THEO LÔ



SẮP XẾP THEO LÔ

- Do phân bố ngẩu nhiên *n* phần tử vào *n* khoảng con nên trung bình mỗi lô có 1 phần tử, vì vậy thời gian sắp xếp chèn là O(1)
- Từ đó, chi phí toàn bộ của thuật giải là O(*n*)

SẮP XẾP THEO LÔ

- BUCKET-SORT chạy thời gian tuyến tính và hiệu quả hơn các thuật giải sắp xếp bằng so sánh
- BUCKET-SORT chỉ sắp xếp các phần tử có khoá trong khoảng [0, 1)
- Không phải mọi phân bố sẽ cho mỗi lô chứa 1 phần tử

ĐỌC VÀ TÌM HIỂU Ở NHÀ

- Đọc chương 6, 7, 8 sách Introduction to Algorithms của Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald D. Rivest
- Làm bài tập về nhà chương 2 đã cho trong DS bài tập