Homework 10

Study Sections 3.8 and 3.9.

1. Give a proof in natural deduction for each formula.

   (1) $\forall x(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{P}(x))$

   (2) $\forall x((\mathsf{P}(x) \wedge \mathsf{Q}(x)) \to \mathsf{P}(x))$

   (3) $\forall x(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{Q}(x)) \to (\forall x(\mathsf{Q}(x) \to \mathsf{R}(x)) \to \forall x(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{R}(x)))$

   (4) $\forall x(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{Q}(x)) \to (\forall x(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{R}(x)) \to \forall x(\mathsf{P}(x) \to (\mathsf{Q}(x) \wedge \mathsf{R}(x))))$

   (5) $(\mathsf{P}(\mathsf{a}) \vee \mathsf{Q}(\mathsf{b})) \to \exists x(\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{Q}(x))$

   (6) $(\mathsf{P}(\mathsf{a}) \wedge \mathsf{Q}(\mathsf{b})) \to (\exists x\mathsf{P}(x) \wedge \exists x\mathsf{Q}(x))$

   (7) $(\forall x\mathsf{P}(x) \wedge \forall x\mathsf{Q}(x)) \to \forall x(\mathsf{P}(x) \wedge \mathsf{Q}(x))$

   (8) $\forall x(\mathsf{P}(x) \wedge \mathsf{Q}(x)) \to (\forall x\mathsf{P}(x) \wedge \forall x\mathsf{Q}(x))$

   (9) $(\forall x\mathsf{P}(x) \vee \forall x\mathsf{Q}(x)) \to \forall x(\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{Q}(x))$

   (10) $\forall x(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{Q}(x)) \to (\forall x\mathsf{P}(x) \to \forall x\mathsf{Q}(x))$

   (11) $\exists x(\mathsf{P}(x) \wedge \mathsf{Q}(x)) \to (\exists x\mathsf{P}(x) \wedge \exists x\mathsf{Q}(x))$

   (12) $(\exists x\mathsf{P}(x) \vee \exists x\mathsf{Q}(x)) \to \exists x(\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{Q}(x))$

   (13) $\exists x(\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{Q}(x)) \to (\exists x\mathsf{P}(x) \vee \exists x\mathsf{Q}(x))$

   (14) $(\exists x\mathsf{P}(x) \to \exists x\mathsf{Q}(x)) \to \exists x(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{Q}(x))$

   (15) $\neg\forall x\mathsf{P}(x) \to \exists x\neg\mathsf{P}(x)$

   (16) $\forall x\neg\mathsf{P}(x) \to \neg\exists x\mathsf{P}(x)$

   (17) $\neg\exists x\mathsf{P}(x) \to \forall x\neg\mathsf{P}(x)$

   (18) $\exists x\neg\mathsf{P}(x) \to \neg\forall x\mathsf{P}(x)$

   (19) $\forall x\forall y\mathsf{R}(x, y) \to \forall y\forall x\mathsf{R}(x, y)$

   (20) $\exists y\forall x\mathsf{R}(x, y) \to \forall x\exists y\mathsf{R}(x, y)$

2. Let ψ be the formula $\forall x(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{P}(\mathsf{f}(x))) \to \forall x(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x))))$. Write a proof in natural deduction, and a corresponding proof in English.

3. Fill in the blank of the proof.

   Claim. *The formula* $\forall x\exists y\mathsf{R}(x, y) \to \exists y\forall x\mathsf{R}(x, y)$ *is not valid.*

   Proof. Let $U = \boxed{}$ and $\bar{\mathsf{R}} = \boxed{}$, and consider the structure $\mathcal{A} = (U, \bar{\mathsf{R}})$.

   (a) Given $x \in U$ take $y = \boxed{}$. Then $\bar{\mathsf{R}}(x, y)$ holds. So $\mathcal{A} \models \forall x\exists y\mathsf{R}(x, y)$.

   (b) In contrast, given $y \in U$ take $x = \boxed{}$. Then $\bar{\mathsf{R}}(x, y)$ does not hold. So $\mathcal{A} \not\models \exists y\forall x\mathsf{R}(x, y)$.

   From (a)(b) we have $\mathcal{A} \not\models \forall x\exists y\mathsf{R}(x, y) \to \exists y\forall x\mathsf{R}(x, y)$. $\square$