

Homework 5

02 May 2023 11:59

1. $p \rightarrow (\neg \neg p)$

$$\frac{\frac{[p]^1 \quad [\neg p]^2}{\perp} \neg I_2}{\neg \neg p} \rightarrow I_1$$

$$\frac{}{p \rightarrow (\neg \neg p)}$$

2. $(\neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg p)$

$$\frac{\frac{[\neg \neg \neg p]^1 \quad [\neg \neg p]^2}{\perp} \text{RAA}_2}{\neg p} \rightarrow I_1$$

$$\frac{}{(\neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg p)}$$

3. $(\neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p)$

$$\frac{\frac{[\neg p]^1 \quad [\neg \neg p]^2}{\perp} \neg I_2}{\neg \neg \neg p} \rightarrow I_1$$

$$\frac{}{(\neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p)}$$

4. $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \wedge \neg q)$

$$\frac{\frac{p \quad [p \rightarrow q]^1}{q} \quad \frac{[p \wedge \neg q]^2}{\neg q}}{\perp} \neg I_2$$

$$\frac{}{\neg (p \wedge \neg q)} \rightarrow I_1$$

$$\frac{}{(p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \wedge \neg q)}$$

5. $((\neg p) \vee (\neg q)) \rightarrow \neg (p \wedge q)$

$$\frac{\frac{[\neg p \vee \neg q]^1 \quad \frac{[\neg p]^3 \quad p}{\perp} \neg I_2 \quad \frac{[\neg q]^3 \quad q}{\perp} \neg I_2}{\perp} \vee E_1}{\neg (p \wedge q)} \neg I_2$$

$$\frac{}{((\neg p) \vee (\neg q)) \rightarrow \neg (p \wedge q)} \rightarrow I_1$$

6. $(\neg q) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow p)$

$$\frac{[p \vee q]^2 \quad \frac{[p]^4 \quad [\neg p]^3}{\perp} \neg I_2 \quad \frac{[q]^4 \quad [\neg q]^1}{\perp} \neg I_2}{\perp} \vee E_4$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[p \vee q]^2 \quad \frac{[p] \quad [\neg p]}{\perp} \quad \frac{[q] \quad [\neg q]}{\perp}}{\perp} \quad \vee E_4}{p} \quad RAA_3 \\
 \frac{}{(p \vee q) \rightarrow p} \rightarrow I_2 \\
 \frac{}{(\neg q) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow p)} \rightarrow I_1
 \end{array}$$

7. $\perp \rightarrow (p \wedge \perp)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\perp}{p \wedge \perp} \quad EFA \\
 \frac{}{\perp \rightarrow (p \wedge \perp)} \rightarrow I_1
 \end{array}$$

8. $(p \wedge \perp) \rightarrow \perp$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p \wedge \perp]^1}{\perp} \quad \wedge E \\
 \frac{}{(p \wedge \perp) \rightarrow \perp} \rightarrow I_1
 \end{array}$$

9. $((\neg q) \rightarrow (\neg p)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[\neg q \rightarrow \neg p]^1 \quad [\neg q]^1}{\neg p} \quad [p]^2}{\perp} \quad RAA_3 \\
 \frac{}{p \rightarrow q} \rightarrow I_2 \\
 \frac{}{((\neg q) \rightarrow (\neg p)) \rightarrow (p \rightarrow q)} \rightarrow I_1
 \end{array}$$

10. $((\neg p) \wedge (\neg q)) \rightarrow \neg(p \vee q)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[p]^1 \quad \frac{[\neg p \wedge \neg q]^1 \quad \wedge E}{\neg p} \quad \neg E \quad [q]^1 \quad \frac{[\neg p \wedge \neg q]^1 \quad \wedge E}{\neg q} \quad \neg E}}{\perp} \quad \vee E \\
 \frac{}{\neg(p \vee q)} \rightarrow I_2 \\
 \frac{}{((\neg p) \wedge (\neg q)) \rightarrow \neg(p \vee q)} \rightarrow I_1
 \end{array}$$

11. $(\neg(p \vee q)) \rightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg(p \vee q)] \quad \frac{[p]}{p \vee q} \quad \vee I \quad \neg E}{\perp} \quad \neg I \\
 \frac{}{\neg p} \neg I \\
 \frac{}{\neg p \wedge \neg q} \wedge I
 \end{array}$$

$$\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg p} \neg I}{\neg p} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg q} \neg I}{\neg q} \wedge I}{\neg p \wedge \neg q} \neg I_1$$

$$\frac{}{(\neg(p \vee q)) \rightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))} \rightarrow I_1$$

12.

$$(\neg(p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg \neg p)$$

$$\frac{[\neg(p \rightarrow q)]^1}{\frac{\frac{[p]^3 \quad [\neg p]^2}{\perp} \neg E}{q} EFQ}{p \rightarrow q} \rightarrow I_3$$

$$\frac{\perp}{\neg \neg p} \neg I_2$$

$$\frac{}{(\neg(p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg \neg p)} \rightarrow I_1$$

13. $(\neg(p \wedge q)) \rightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$

$$\frac{[\neg(p \wedge q)]^1}{\frac{\frac{[\neg p]^3 \vee I}{\neg p \vee \neg q} \quad \frac{[\neg(\neg p \vee \neg q)]^2}{\neg p \vee \neg q} \neg E}{\frac{\frac{\perp}{p} RAA_1}{p} \quad \frac{\frac{\frac{[\neg q]^4 \vee I}{\neg p \vee \neg q} \quad [\neg(\neg p \vee \neg q)]^2}{\neg p \vee \neg q} \neg E}{q} RAA_4}{p \wedge q} \wedge I}{\perp} \neg E$$

$$\frac{\perp}{\neg p \vee \neg q} RAA_2$$

$$\frac{}{(\neg(p \wedge q)) \rightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))} \rightarrow I_1$$

14. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p) \vee q)$

$$\frac{[p \rightarrow q]^1}{\frac{[\neg(\neg p \vee q)]^2}{\perp} RAA_1}{p \rightarrow q} \neg E$$

$$\frac{[\neg(\neg p \vee q)]^2}{q} \vee I$$

$$\frac{\perp}{(\neg p) \vee q} RAA_2$$

$$\frac{}{(p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p) \vee q)} \rightarrow I_1$$

15. $(\neg(p \wedge (\neg q))) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$$\frac{[\neg(p \wedge (\neg q))]^1}{\frac{[p]^2 \quad [\neg q]^3}{p \wedge \neg q} \wedge I}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg(p \wedge \neg q)]^1}{\perp} \quad \frac{\frac{[p]^{\neg} \quad [\neg q]}{p \wedge \neg q} \wedge I}{\perp} \rightarrow RAA_1 \\
 \hline
 q \rightarrow I_2 \\
 \hline
 p \rightarrow q \rightarrow I_1 \\
 \hline
 (\neg(p \wedge (\neg q))) \rightarrow (p \rightarrow q)
 \end{array}$$

16. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p]^3 \quad [\neg p]^2}{\perp} EFA \\
 \hline
 q \rightarrow I_3 \\
 \hline
 \frac{[(p \rightarrow q) \rightarrow p]^1}{p \rightarrow q} \rightarrow E \\
 \hline
 p \quad [\neg p]^2 \rightarrow E \\
 \hline
 \frac{\perp}{p} \rightarrow RAA_2 \\
 \hline
 p \rightarrow I_1 \\
 \hline
 ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p
 \end{array}$$