Homework 2

20 April 2023 08:30

1.

a) $(p \vee \neg p)[q/p] = (q \vee \neg q)$

b) $(p \vee \neg p)[\neg p/p] = (\neg p \vee p)$

c) $(p \to (q \to r))[p/q, p/r] = (p \to (p \to p))$

d) $(p \to (q \to r))[r/q, p/r] = (p \to (r \to p))$

2. Let $\psi = p \vee \neg p$ and $\theta = [\phi/p]$

We have: $\psi\theta = (p \vee \neg p)\theta = (\theta(p) \vee \neg\theta(p)) = \phi \vee \neg\phi$

Because ψ is valid $\Rightarrow \phi \vee \neg\phi$ is valid

3.

a) $(p \to q) \wedge p$

$= (\neg p \vee q) \wedge p$

$v = \{p \to \top, q \to \bot\}$, $[[(\neg p \vee q) \wedge p]]_v = \bot$

b) $(p \to q) \vee \neg p$

$= \neg p \vee q \vee \neg p$

$v = \{p \to \top, q \to \bot\}$, $[[\neg p \vee q \vee \neg p]]_v = \bot$

c) $(p \to q) \to q$

$= \neg(\neg p \vee q) \vee q$

$= (p \wedge \neg q) \vee q$

$= (p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)$

$v = \{p \to \bot, q \to \bot\}$, $[[(p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)]]_v = \bot$

d) $p \to (p \wedge q)$

$= \neg p \vee (p \wedge q)$

$= (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$

$v = \{p \to \top, q \to \bot\}$, $[[(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)]]_v = \bot$

e) $p \to (p \vee q)$

$= \underbrace{\neg p \vee p}_{\text{valid}} \vee q$

f) $(p \wedge q) \vee p$

valid

f) $(p \wedge q) \vee p$

$\equiv (p \vee p) \wedge (p \vee q)$

$v = \{p \to \bot, q \to \bot\}$, $[[(p \vee p) \wedge (p \vee q)]]_v = \bot$

g) $(p \to q) \to p$

$\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee p$

$\equiv (p \wedge \neg q) \vee p$

$\equiv (p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)$

$v = \{q \to \top, p \to \bot\}$, $[[(p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)]]_v = \bot$

h) $p \leftrightarrow (q \vee r)$

$\equiv [p \to (q \vee r)] \wedge [(q \vee r) \to q]$

$\equiv [\neg p \vee (q \vee r)] \wedge [\neg (q \vee r) \vee q]$

$\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge [(\neg q \wedge \neg r) \vee q]$

$\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg r \vee q)$

$v = \{p \to \top, q \to \bot, r \to \top\}$, $[[\cdot]]_v = \bot$

i) $((p \to q) \to p) \to p$

$\equiv \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee p) \vee p$

$\equiv \neg((p \wedge \neg q) \vee p) \vee p$

$\equiv \neg((p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)) \vee p$

$\equiv (\neg(p \vee p) \vee \neg(\neg q \vee p)) \vee p$

$\equiv (\neg p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p) \vee p$

$\equiv (\neg p \wedge \neg p) \vee ((q \vee p) \wedge (\neg p \vee p))$

$\equiv [\neg p \vee ((q \vee p) \wedge (\neg p \vee p))] \wedge [\neg p \vee ((q \vee p) \wedge (\neg p \vee p))]$

$\equiv (\neg p \vee q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg p \vee p)$

valid