Homework 9

Study Sections 3.3 – 3.5 and 4.4.

1. Carry out substitution while avoiding variable capture. For instance, when you compute $\phi\theta$ for $\phi = \exists x(x \doteq y)$ and $\theta = [\mathsf{s}(x)/y]$, rename ϕ to $\phi' = \exists z(z \doteq y)$ and then compute $\phi'\theta$.

   (1) $(x \doteq x)[x/x]$

   (2) $(x \doteq x)[y/x]$

   (3) $(z \doteq \mathsf{0})[\mathsf{f}(x, y)/y]$

   (4) $(\exists x(y \doteq x))[\mathsf{f}(\mathsf{0}, y)/y]$

   (5) $(\exists w(\mathsf{f}(w, x) \doteq \mathsf{0}))[\mathsf{f}(x, y)/z]$

   (6) $(\forall w(\mathsf{f}(x, z) \doteq \mathsf{0}))[\mathsf{f}(x, w)/z]$

   (7) $(\forall w(\mathsf{f}(x, z) \doteq \mathsf{0}) \wedge \exists y(z \doteq x))[\mathsf{f}(x, y)/z]$

   (8) $(\forall u(u \doteq v) \rightarrow \forall z(z \doteq y))[\mathsf{f}(x, y)/z]$

2. For each formula, compute a logically equivalent prenex normal form, and then convert it into a satisfiability equivalent Skolem normal form via Skolemization.

   (1) $\forall x\mathsf{P}(x) \leftrightarrow \exists x\mathsf{Q}(x)$

   (2) $\neg\forall x\mathsf{P}(x, y) \vee \forall x\mathsf{R}(x, y)$

   (3) $\forall x(\mathsf{P}(x) \rightarrow \neg\exists y\mathsf{R}(x, y))$

   (4) $\exists x\forall y\mathsf{P}(x, y) \wedge \forall y\exists x\mathsf{P}(y, x)$

   (5) $\neg(\forall x\mathsf{P}(x) \vee \exists y\neg\mathsf{Q}(y)) \vee (\forall z\mathsf{P}(z) \vee \exists w\neg\mathsf{Q}(w))$

   (6) $\neg\forall x(\mathsf{P}(x) \vee \exists y\neg\mathsf{Q}(y)) \vee (\forall z\mathsf{P}(z) \vee \exists w\neg\mathsf{Q}(w))$

   (7) $\neg((\neg\forall x\mathsf{P}(x) \wedge \forall x\mathsf{Q}(x)) \wedge (\exists x\mathsf{R}(x) \rightarrow \forall x\mathsf{S}(x)))$

   (8) $\neg(\exists x\mathsf{P}(x, y) \wedge (\forall y\mathsf{Q}(y) \rightarrow \mathsf{P}(x, x))) \rightarrow \forall x\exists y\mathsf{R}(x, y)$

   (9) $((\forall x\mathsf{P}(x) \rightarrow \exists y\mathsf{Q}(x, y)) \rightarrow \mathsf{Q}(x, x)) \rightarrow \forall x\exists y\mathsf{R}(x, y)$

   (10) $\neg\forall x\neg\forall y\neg\forall z\mathsf{P}(x, y) \vee \neg\exists x\neg\exists y(\neg\exists z\mathsf{Q}(x, y, z) \rightarrow \mathsf{R}(x, y))$