

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT MÁY TÍNH



MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC

Assignment

Mô Hình Hệ Động Lực
Dự Báo Tiểu Khí Hậu Nhà Kính

Giáo viên hướng dẫn: Nguyễn An Khương
Nguyễn Tiến Thịnh
Trần Trung Hiếu
Sinh viên: Nguyễn Thanh Toàn - 1910617
Huỳnh Đức Thịnh - 1910563
Võ Trịnh Xuân Nguyên - 1911736
Lý Thanh Bách - 1910038
Trần Đức Duy - 1910094

Ngày 12 tháng 1 năm 2021



Mục lục

1	Danh sách thành viên	3
2	Cơ sở lý thuyết	4
2.1	Định nghĩa hệ động lực	4
2.1.1	Định nghĩa	4
2.2	Hệ phương trình vi phân bậc nhất	4
2.2.1	Cơ sở lý thuyết	4
2.2.2	Điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm cho hệ phương trình vi phân	5
2.2.2.a	Sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho phương trình vi phân	5
2.2.2.b	Sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho hệ phương trình vi phân	6
2.3	Một số phương pháp giải hệ phương trình vi phân bậc nhất	7
2.3.1	Tìm công thức chính xác	7
2.3.2	Phương pháp Euler	8
2.3.3	Phương pháp Runge-Kutta bậc 4	10
3	Mô hình nhà kính tiểu khí hậu	15
3.1	Mô hình hệ động lực với nồng độ khí CO_2	15
3.1.1	Sự tác động của các thành phần trong nhà kính	15
3.1.2	Sự trao đổi CO_2 giữa hai gian trong nhà kính với nhau và với không khí ngoài trời	16
3.1.3	Sự ảnh hưởng của quá trình quang hợp tới nồng độ CO_2	19
3.2	Sự quang hợp của thực vật nhóm C3	20
3.2.1	Sự khuếch tán CO_2 vào trong lá	21
3.2.2	Quá trình sinh hóa ở pha tối	21
3.2.3	Tốc độ quang hợp cực đại	22
3.2.4	Mô hình quang hợp cho cả tán lá	22
3.2.4.a	Chỉ số diện tích lá	22
3.2.4.b	Công thức Arrhenius mở rộng	23
3.2.4.c	Mô hình động lực Michaelis–Menten cho P_{Max}	23
3.3	Mô hình hệ động lực đối với áp suất hơi nước trong nhà kính	24
3.3.1	Thông lượng hơi nước	25
3.3.2	Sự tác động của các thành phần bên trong nhà kính	27
3.3.3	Sự thoát hơi nước của tán lá	28
4	Kết quả ứng dụng	30
4.1	Xây dựng mô hình nhà kính	30
4.2	Mô hình dự báo bằng phương pháp xấp xỉ toán học	31
4.3	Chạy mô hình	32
4.4	Kết quả	33



5	Giải hệ phương trình vi phân bằng Deep Learning	38
5.1	Giới thiệu về mạng Neuron nhân tạo	38
5.1.1	Hàm kích hoạt (Activation Function)	38
5.1.2	Hàm mất mát	39
5.2	Mô tả bài toán	39
5.3	Mô tả giải thuật	40
5.4	Kết quả thí nghiệm	42
5.4.1	Sử dụng hệ phương trình vi phân ở phần trước	42
5.4.2	Một ví dụ khác	43



1 Danh sách thành viên

STT	Tên	MSSV	Công việc	Tỉ lệ việc	Tài năng
1	Nguyễn Thanh Toàn	1910617		%	
2	Huỳnh Đức Thịnh	1910563		%	x
3	Võ Trịnh Xuân Nguyên	1911736		%	x
4	Lý Thanh Bách	1910038		%	x
5	Trần Đức Duy	1910094		%	

2 Cơ sở lý thuyết

2.1 Định nghĩa hệ động lực

2.1.1 Định nghĩa

Hệ động lực là hệ các phương trình biểu diễn sự phụ thuộc vào thời gian của các trạng thái trong một mô hình toán học. Tại một thời điểm bất kỳ, hệ động lực luôn có một trạng thái và một quy tắc để suy ra trạng thái trong tương lai từ trạng thái hiện tại.

Với không gian chứa tất cả các trạng thái của mô hình gọi là không gian pha, ta có thể định nghĩa hệ động lực bao gồm không gian pha X , tập hợp các thời điểm T và một hàm $R: X \times T \rightarrow X$ hay hàm R là quy tắc (được biểu diễn bằng các phương trình) cho trạng thái ở thời điểm $t \in T$ trong tương lai với trạng thái ban đầu là $x \in X$. [6]

Ta có thể phân loại hệ động lực dựa trên tính chất của các hàm R như:

- tính liên tục (sai phân hay vi phân).
- tuyến tính (tuyến tính hay phi tuyến).
- số chiều (đơn biến hay đa biến)

Hệ động lực được dùng để dự đoán trạng thái tại một thời điểm nhất định của các đối tượng mà trạng thái của chúng thay đổi theo thời gian và ta biết được trạng thái ban đầu của chúng cùng với cách mà các trạng thái ấy biến đổi.

Các vấn đề phổ biến thường được mô phỏng bằng hệ động lực là các vấn đề như dự đoán sự phát triển dân số, xét liều lượng thuốc được, tính toán quãng đường khi xe thắng gấp, dự đoán sự phát triển của quần thể trong tự nhiên, ...

2.2 Hệ phương trình vi phân bậc nhất

2.2.1 Cơ sở lý thuyết

Trong các bài toán thực tế, một trong những dạng hệ động lực thường được sử dụng nhất là hệ động lực được biểu diễn bởi hệ phương trình vi phân bậc nhất. Hệ động lực này cũng được dùng để xây dựng mô hình nhà kính tiểu khí hậu sẽ được nghiên cứu ở các phần dưới.

Cho hàm $y = y(t)$, Hệ phương trình vi phân bậc nhất, có dạng tổng quát là:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = g_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} = g_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = g_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

với các giá trị tại thời điểm ban đầu $t = \tau$:

$$\begin{cases} \alpha_1 &= y_1(\tau) \\ \alpha_2 &= y_2(\tau) \\ &\vdots \\ \alpha_n &= y_n(\tau) \end{cases}$$

Khi dùng hệ phương trình trên để mô phỏng một đối tượng thực tế, ta quan tâm đến giá trị cụ thể của các y tại một thời điểm t nhất định. để đạt được giá trị này, ta có thể giải hệ phương trình vi phân này để suy ra công thức chính xác của hàm $y = y(t)$ hoặc ta có thể dùng các phương pháp số và AI để ước lượng giá trị của y tại một thời điểm t bất kỳ.

2.2.2 Điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm cho hệ phương trình vi phân

Điều kiện Lipschitz cho phương trình vi phân

[9] Cho hàm $y' = g(t, y)$ xác định và liên tục trên miền $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$. Ta nói g thỏa điều kiện Lipschitz theo biến y trên \mathbf{D} nếu tồn tại hằng số dương L (gọi là hằng số Lipschitz) sao cho:

$$|g(t, y_1) - g(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (1)$$

với mọi $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathbf{D}$, tức đạo hàm g theo y phải bị chặn bởi một số hữu hạn.

Bổ đề 1: Cho \mathbf{D} là một hình chữ nhật

$$\mathbf{R} := \{(t, p) : t \in [a, b], [p - A] \leq B\} \quad (2)$$

với A, B là các hằng số tùy ý, hoặc là một dải chữ nhật:

$$\mathbf{S} := \{(t, p) : t \in [a, b], p \leq \infty\} \quad (3)$$

Nếu hàm $y' = g(t, y)$ tồn tại đạo hàm riêng $\frac{\partial g}{\partial y}$ và tồn tại hằng số K hữu hạn sao cho:

$$\left| \frac{\partial g}{\partial y}(t, y) \right| \leq K \quad \forall (t, y) \in \mathbf{D} \quad (4)$$

Thì điều kiện (1) thỏa với hằng số Lipschitz là K . Bổ đề trên có thể được mở rộng cho miền \mathbf{D} lồi.

2.2.2.a Sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho phương trình vi phân

Cho bài toán Cauchy 2 biến, tìm nghiệm y cho phương trình vi phân bậc nhất và một điểm cho trước thuộc đồ thị hàm y :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = g(t, y) \\ \alpha = y(\tau) \end{cases} \quad (5)$$

Định lý Picard-Lindelof

Cho miền $\mathbf{R} \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $(\tau, \alpha) \in \mathbf{R}$, nếu tồn tại hằng số lipschitz $L \geq 0$ thỏa

$$|g(t, y_1) - g(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \mathbf{R}$$

tức thỏa điều kiện lipschitz (1) thì bài toán (5) sẽ cho ra nghiệm duy nhất $y = y(t)$ xung quanh khoảng lân cận của τ

Hệ quả: Sử dụng kết quả của bổ đề 1, cho hàm $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và điểm $(\tau, \alpha) \in \mathbf{R}$ với $\mathbf{R} \subset \mathbb{R}^2$, nếu tồn tại hằng số $K \geq 0$ thỏa

$$\left| \frac{\partial g}{\partial y}(t, y) \right| \leq K \quad \forall (t, y) \in \mathbf{R} \quad (6)$$

thì bài toán (5) sẽ cho ra nghiệm duy nhất $y = y(t)$ xung quanh khoảng lân cận của τ

2.2.2.b Sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho hệ phương trình vi phân

[8] Cho bài toán Cauchy tổng quát, tìm nghiệm y_1, y_2, \dots, y_m cho hệ phương trình vi phân bậc nhất:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = g_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} = g_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = g_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \alpha_1 = y_1(\tau) \\ \alpha_2 = y_2(\tau) \\ \vdots \\ \alpha_n = y_n(\tau) \end{cases} \quad (7)$$

Giả sử các hàm $g_1(t, y_1, \dots, y_n), g_2(t, y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(t, y_1, \dots, y_n)$ trong hệ phương trình trên liên tục trong tập mở $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n+1}$ chứa $(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ và thỏa điều kiện Lipschitz theo biến y trong tập \mathbf{G} . Gọi Y_0 là vector đại diện cho vector $(t, y_1, \dots, y_{j0}, \dots, y_n)$ với y_{j0} là giá trị của hàm y thứ j ban đầu, Y là vector đại diện cho vector $(t, y_1, \dots, y_j, \dots, y_n)$ với y_j là giá trị của hàm y

thứ j lúc sau, với j là chỉ số bất kỳ chạy từ 1 đến n .

$$|g_i(Y) - g_i(Y_0)| \leq L|y_j - y_{j0}| \quad \forall Y, Y_0 \in \mathbf{G} \quad (8)$$

Với g_i là mọi phương trình vi phân đại diện cho đạo hàm của hàm y_i , i đi từ 1 đến n . Khi đó trong lân cận của τ có tồn tại nghiệm $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ thỏa bài toán Cauchy với điều kiện ban đầu đã cho và nghiệm đó là duy nhất.

Dựa vào hệ quả của bổ đề 1, nếu mọi hàm $g_i(t, y_1, \dots, y_n)$ đều có đạo hàm riêng theo y_j bị chặn, tức trong miền mở chứa $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n+1}$ chứa $(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tồn tại hằng số K thỏa:

$$\frac{\partial g_i(t, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_j} \leq K \quad \forall (t, y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{G} \quad (9)$$

Với mọi đạo hàm g_i riêng của biến y_j sao cho $i, j \in 1, 2, \dots, n$, khi đó ta kết luận tương tự như trên.

2.3 Một số phương pháp giải hệ phương trình vi phân bậc nhất

Cho hệ phương trình vi phân sau:

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) = x - 2y - 2e^{-t} + 2, & x_0 = x(0) = 1 \\ y' = \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) = 2x - y - 2e^{-t} + 1, & y_0 = y(0) = 1 \end{cases} \quad (10)$$

ta sẽ xem xét các cách giải hệ phương trình vi phân trên:

2.3.1 Tìm công thức chính xác

Một trong những phương pháp giải hệ phương trình vi phân tự nhiên nhất là suy ra công thức chính xác cho các hàm trong phương trình vi phân. Dùng cách này để giải hệ phương trình (68), ta có:

Hệ phương trình (68) tương đương với

$$\begin{cases} y &= \frac{1}{2}(x - 2e^{-t} + 2 - x') \\ y' &= 2x - 2y - 2e^{-t} + 1 \end{cases}$$

Tương đương với

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}x' + e^{-t} - \frac{1}{2}x'' \\ \frac{1}{2}x' + e^{-t} - \frac{1}{2}x'' = 2x - y - 2e^{-t} + 1 \end{cases} \quad (a) \quad (11)$$

Giải phương trình (a):

$$\begin{aligned}(a) &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x'' + \frac{1}{2}x' - 2x + 3e^{-t} - 1 + \frac{1}{2}(x - 2e^{-t} + 2 - x') = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x'' - \frac{3}{2}x + 2e^{-t} = 0 \\ &\Leftrightarrow x'' + 3x = 4e^{-t}\end{aligned}$$

Đây là phương trình vi phân cấp 2 không thuần nhất có công thức nghiệm là:

$$x(t) = x_{tq}(t) + x_r(t)$$

Với

$$x_{tq}(t) = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t) \text{ và } x_r(t) = e^{-t}$$

Với các giá trị ban đầu được cho, ta suy ra c_1 và c_2 đều bằng không. Vậy $x(t) = e^{-t}$. Kết hợp công thức $x(t)$ với hệ phương trình (11), ta suy ra được: $y(t) = 1$.

Tại $t = 0.5$:

$$\begin{cases} x(0.5) = e^{-0.5} = 0.6065 \\ y(0.5) = 1 \end{cases} \quad (12)$$

Ta sẽ dùng giá trị này để đánh giá các phương pháp giải hệ phương trình vi phân bên dưới.

2.3.2 Phương pháp Euler

Trên thực tế, việc suy ra công thức chính xác cho các hàm trong các phương trình vi phân là công việc cực kỳ khó khăn, thậm chí nhiều phương trình hoàn toàn không thể giải theo phương pháp này. Tuy nhiên, nếu ta chỉ quan tâm đến giá trị cụ thể của các hàm tại một điểm nhất định, ta có thể dùng các phương pháp xấp xỉ số học để tìm đáp án. Một trong những phương pháp xấp xỉ đơn giản và cổ nhất là phương pháp Euler.

Xét hệ phương trình vi phân tổng quát (7), để xấp xỉ giá trị $y(t)$ bằng phương pháp Euler, ta tính theo công thức:

$$y(t) = y(t_0) + (t - t_0)f(t_0) \quad (13)$$

Áp dụng với hệ phương trình (68), ta có:

Với bước nhảy có độ lớn $t_0 = 0$ và $h = 0.5$:

Tại $t = t_0 + h = 0.5$:

$$\begin{cases} x(t_0 + h) = x(t_0) + hf(t_0, x(t_0), y(t_0)) = 1 - 0.5 = 0.5 \\ y(t_0 + h) = y(t_0) + hg(t_0, x(t_0), y(t_0)) = 1 + 0 = 1.0000 \end{cases} \quad (14)$$

Với khoảng cách $t - t_0$ càng lớn, độ chính xác của phương pháp Euler càng giảm. Vì vậy, trên thực tế, khi hiện thực phương pháp Euler trên máy tính, ta thường nhảy các bước nhỏ trên đoạn $[t_0, t]$ với mỗi bước có độ lớn h . Nói cách khác, ta thực hiện phương pháp Euler liên tục trên dãy số:

$$t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots, t_1$$

Để tính:

$$y(t_0 + h), y(t_0 + 2h), \dots, y(t_1)$$

Theo quá trình quy nạp với $y(t_0)$ có sẵn làm trường hợp cơ sở.

Ví dụ về cách làm trên để giải hệ phương trình (68) với mỗi bước nhảy có độ lớn $h = 0.1$

- Tại $t_1 = t_0 + h = 0.1$:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0, y_0) = 1 - 0.1 = 0.9 \\ y_1 = y_0 + hg(t_0, x_0, y_0) = 1 + 0 = 1.0000 \end{cases}$$

- Tại $t_2 = t_1 + h = 0.2$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1, y_1) = 0.9 - 0.091 = 0.809 \\ y_2 = y_1 + hg(t_1, x_1, y_1) = 1 - 0.001 = 0.999 \end{cases}$$

- Tại $t_3 = t_2 + h = 0.3$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + hf(t_2, x_2, y_2) = 0.809 - 0.0826 = 0.7264 \\ y_3 = y_2 + hg(t_2, x_2, y_2) = 0.999 - 0.0018 = 0.9972 \end{cases}$$

- Tại $t_4 = t_3 + h = 0.4$

$$\begin{cases} x_4 = x_3 + hf(t_3, x_3, y_3) = 0.7264 - 0.075 = 0.6514 \\ y_4 = y_3 + hg(t_3, x_3, y_3) = 0.9972 - 0.0026 = 0.9946 \end{cases}$$

- Tại $t = t_5 = t_4 + h = 0.5$

$$\begin{cases} x(t) = x_5 = x_4 + hf(t_4, x_4, y_4) = 0.6514 - 0.0678 = 0.5836 \\ y(t) = y_5 = y_4 + hg(t_4, x_4, y_4) = 0.9946 - 0.0032 = 0.9914 \end{cases} \quad (15)$$

So sánh kết quả từ (12) với (14) và (15), ta thấy phương pháp Euler với bước nhảy nhỏ hơn cho kết quả chính xác hơn khi dự đoán $x(0.5)$. Mặc dù phương pháp Euler với bước nhảy nhỏ hơn dự đoán giá trị của $y(0.5)$ tệ hơn, đây chỉ là trường hợp đặc biệt, thực tế cho thấy với giá

trị t bất kỳ, phương pháp Euler với bước nhảy nhỏ hơn cho giá trị dự đoán có độ chính xác cao hơn. **cite something here**. Tuy nhiên, sử dụng bước nhảy nhỏ trong phương pháp Euler khiến việc tính toán tốn nhiều tài nguyên hơn nên khi sử dụng phương pháp Euler, ta thường phải cân bằng giữa độ phức tạp tính toán và độ chính xác của phương pháp.

2.3.3 Phương pháp Runge-Kutta bậc 4

Một trong những phương pháp phổ biến khác để xấp xỉ giá trị $y(t)$ là phương pháp Runge-Kutta bậc 4. Theo phương pháp Runge-Kutta bậc 4, y_t được định xác định như sau:

Tính lần lượt

$$h = t - t_0$$

$$k_1 = hf(t_0, y(t_0))$$

$$k_2 = hf(t_0 + \frac{1}{2}h, y(t_0) + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = hf(t_0 + \frac{1}{2}h, y(t_0) + \frac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4 = hf(t_0 + h, y(t_0) + hk_3)$$

với:

- k_1 là độ dốc tại điểm $y(t_0)$ (Phương pháp Euler).
- k_2 là dốc tại điểm giữa từ k_1 .
- k_3 là dốc tại điểm giữa từ k_2 .
- k_4 là dốc tại điểm cuối từ k_3 .

Cuối cùng tính:

$$y(t) = y(t_0) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Áp dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 với hệ phương trình (68), ta có:

Tại $t_1 = t_0 + h = 0.5$:

$$\begin{aligned}
 k_{1x} &= hf(t_0, x_0, y_0) = -0.5 \\
 k_{1y} &= hg(t_0, x_0, y_0) = 0 \\
 k_{2x} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \approx -0.4038 \\
 k_{2y} &= hg\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \approx -0.0288 \\
 k_{3x} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \approx -0.3654 \\
 k_{3y} &= hg\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \approx 0.0265 \\
 k_{4x} &= hf(t_0 + h, x_0 + k_{3x}, y_0 + k_{3y}) \approx -0.3157 \\
 k_{4y} &= hg(t_0 + h, x_0 + k_{3x}, y_0 + k_{3y}) \approx 0.0149
 \end{aligned} \tag{16}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) = 0.6077 \\ y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}) = 1.0017 \end{cases} \tag{17}$$

Tương tự như phương pháp Euler, ta có thể tăng độ chính xác cho phương pháp Runge-Kutta bậc 4 bằng cách chia đoạn $[t_0, t]$ thành các đoạn nhỏ, mỗi đoạn có độ lớn h rồi thực hiện tính một cách quy nạp từ t_0 dần lên t với $y(t_0)$ là trường hợp cơ sở. Áp dụng với hệ phương trình (68), ta có:

- Tại $t_1 = t_0 + h = 0.1$:

$$\begin{aligned}
 k_{1x} &= hf(t_0, x_0, y_0) = -0.1 \\
 k_{1y} &= hg(t_0, x_0, y_0) = 0 \\
 k_{2x} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \approx -0.0952 \\
 k_{2y} &= hg\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \approx -0.0002 \\
 k_{3x} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \approx -0.0950 \\
 k_{3y} &= hg\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \approx 0.0002 \\
 k_{4x} &= hf(t_0 + h, x_0 + k_{3x}, y_0 + k_{3y}) \approx -0.0905 \\
 k_{4y} &= hg(t_0 + h, x_0 + k_{3x}, y_0 + k_{3y}) \approx 0.0000
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) = 1 - 0.0952 = 0.9048 \\ y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}) = 1 + 0 = 1.0000 \end{cases}$$

- Tại $t_2 = t_1 + h = 0.2$

$$k_{1x} = hf(t_1, x_1, y_1) = 0.0905$$

$$k_{1y} = hg(t_1, x_1, y_1) = 0.0000$$

$$k_{2x} = hf(t_1 + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_1 + \frac{1}{2}k_{1y}) \approx -0.0862$$

$$k_{2y} = hg(t_1 + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_1 + \frac{1}{2}k_{1y}) \approx -0.0002$$

$$k_{3x} = hf(t_1 + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_1 + \frac{1}{2}k_{2y}) \approx -0.0859$$

$$k_{3y} = hg(t_1 + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_1 + \frac{1}{2}k_{2y}) \approx 0.0002$$

$$k_{4x} = hf(t_1 + h, x_1 + k_{3x}, y_1 + k_{3y}) \approx -0.0819$$

$$k_{4y} = hg(t_1 + h, x_1 + k_{3x}, y_1 + k_{3y}) \approx 0.0000$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) = 0.9048 - 0.0861 = 0.8187 \\ y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}) = 1 + 0 = 1.000 \end{cases}$$

- Tại $t_3 = t_2 + h = 0.3$

$$k_{1x} = hf(t_2, x_2, y_2) = -0.0819$$

$$k_{1y} = hg(t_2, x_2, y_2) = 0.0000$$

$$k_{2x} = hf(t_2 + \frac{h}{2}, x_2 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_2 + \frac{1}{2}k_{1y}) \approx -0.0780$$

$$k_{2y} = hg(t_2 + \frac{h}{2}, x_2 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_2 + \frac{1}{2}k_{1y}) \approx -0.0002$$

$$k_{3x} = hf(t_2 + \frac{h}{2}, x_2 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_2 + \frac{1}{2}k_{2y}) \approx -0.0778$$

$$k_{3y} = hg(t_2 + \frac{h}{2}, x_2 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_2 + \frac{1}{2}k_{2y}) \approx 0.0002$$

$$k_{4x} = hf(t_2 + h, x_2 + k_{3x}, y_2 + k_{3y}) \approx -0.0741$$

$$k_{4y} = hg(t_2 + h, x_2 + k_{3x}, y_2 + k_{3y}) \approx 0.0000$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) = 0.8187 - 0.0779 = 0.7408 \\ y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}) = 1 + 0 = 1.0000 \end{cases}$$

- Tại $t_4 = t_3 + h = 0.4$

$$\begin{aligned}k_{1x} &= hf(t_3, x_3, y_3) = -0.0741 \\k_{1y} &= hg(t_3, x_3, y_3) = 0.0000 \\k_{2x} &= hf\left(t_3 + \frac{h}{2}, x_3 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_3 + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \approx -0.0706 \\k_{2y} &= hg\left(t_3 + \frac{h}{2}, x_3 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_3 + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \approx -0.0002 \\k_{3x} &= hf\left(t_3 + \frac{h}{2}, x_3 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_3 + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \approx -0.0704 \\k_{3y} &= hg\left(t_3 + \frac{h}{2}, x_3 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_3 + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \approx 0.0002 \\k_{4x} &= hf(t_3 + h, x_3 + k_{3x}, y_3 + k_{3y}) \approx -0.0671 \\k_{4y} &= hg(t_3 + h, x_3 + k_{3x}, y_3 + k_{3y}) \approx 0.0000\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_4 = x_3 + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) = 0.7408 - 0.0705 = 0.6703 \\ y_4 = y_3 + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}) = 1 + 0 = 1.0000 \end{cases}$$

- Tại $t = t_5 = t_4 + h = 0.5$

$$\begin{aligned}k_{1x} &= hf(t_4, x_4, y_4) \approx -0.06703 \\k_{1y} &= hg(t_4, x_4, y_4) \approx -0.0000 \\k_{2x} &= hf\left(t_4 + \frac{h}{2}, x_4 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_4 + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \approx -0.0638 \\k_{2y} &= hg\left(t_4 + \frac{h}{2}, x_4 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_4 + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \approx -0.0002 \\k_{3x} &= hf\left(t_4 + \frac{h}{2}, x_4 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_4 + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \approx -0.0637 \\k_{3y} &= hg\left(t_4 + \frac{h}{2}, x_4 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_4 + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \approx 0.0002 \\k_{4x} &= hf(t_4 + h, x_4 + k_{3x}, y_4 + k_{3y}) \approx -0.0607 \\k_{4y} &= hg(t_4 + h, x_4 + k_{3x}, y_4 + k_{3y}) \approx 0.0000\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x(t) = x_5 = x_4 + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) = 0.6703 - 0.0648 = 0.6065 \\ y(t) = y_5 = y_4 + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}) = 1 + 0 = 1.0000 \end{cases}$$

Qua (12), ta thấy tương tự như phương pháp Euler, với bước nhảy càng nhỏ, độ chính xác của Runge-Kutta bậc 4 càng cao (với ví dụ trên, giá trị dự đoán của phương pháp Runge-Kutta



bậc 4 với bước nhảy nhỏ là tương đương với giá trị của của công thức chính xác khi ta chỉ quan tâm đến 4 chữ số thập phân sau dấu phẩy). Tuy nhiên, vấn đề cân bằng giữa độ chính xác và độ phức tạp tính toán khi sử dụng phương pháp Euler cũng hiện hữu trong việc sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4. Dù vậy, nghiên cứu cho thấy việc để đạt được độ chính xác chấp nhận được, phương pháp Runge-Kutta bậc 4 cần số bước nhảy ít hơn hẳn so với phương pháp Euler [7].

3 Mô hình nhà kính tiểu khí hậu

Mô hình hệ động lực để biểu diễn điều kiện khí hậu trong nhà kính được xây dựng dựa theo nghiên cứu của [10],

3.1 Mô hình hệ động lực với nồng độ khí CO_2

Trong mục này mô hình hệ động lực biểu diễn dòng chuyển động của khí CO_2 bên trong và bên ngoài nhà kính sẽ được đề cập đến. Sự thay đổi của nồng độ khí CO_2 ở gian dưới và gian trên bên trong nhà kính được biểu diễn qua hệ gồm hai phương trình sau đây.

$$\begin{cases} cap_{CO_2Air} CO'_{2Air} = MC_{BlowAir} + MC_{ExtAir} + MC_{PadAir} \\ \quad \quad \quad - MC_{AirCan} - MC_{AirTop} - MC_{AirOut} \\ cap_{CO_2Top} CO'_{2Top} = MC_{AirTop} + MC_{TopOut} \end{cases} \quad (18)$$

Trong hệ phương trình vi phân này, một số giả thiết đã được xét đến như lượng khí CO_2 trong không khí ở gian dưới và trên của nhà kính không bị ảnh hưởng bởi nguồn nào khác. Hơn nữa, nhà kính là một môi trường hoàn hảo theo nghĩa nồng độ CO_2 là phân bố đều nhau ở gian dưới và ở gian trên. Các kí hiệu cap_A , CO_{2A} , CO'_{2A} và MC_{AB} lần lượt là khả năng chứa khí CO_2 trong $A(m)$, nồng độ khí CO_2 trong $A(mg.m^{-3})$, tốc độ thay đổi nồng độ khí CO_2 trong $A(mg.m^{-3}.s^{-1})$ và lưu lượng khí CO_2 đi từ A vào $B(mg.m^{-2}.s^{-1})$, trong đó Air và Top đại diện cho gian dưới và gian trên, $Blow$ đại diện cho máy sưởi, Ext đại diện cho bên thứ ba cung cấp khí CO_2 , Pad đại diện cho hệ thống thông gió, Can đại diện cho tán lá cây trồng và Out đại diện cho không gian bên ngoài nhà kính, cap_{CO_2Air} và cap_{CO_2Top} tính bằng:

$$cap_{CO_2Air} = h_{Air} \quad (19)$$

$$cap_{CO_2Top} = h_{Gh} - h_{Air} \quad (20)$$

Dưới đây là một số công thức để tính MC_{AB} . Trước hết, xét lượng CO_2 ảnh hưởng bởi các thành phần trong thiết kế của nhà kính.

3.1.1 Sự tác động của các thành phần trong nhà kính

Đầu tiên, thông lượng CO_2 từ máy sưởi vào không khí nhà kính được mô tả bởi

$$MC_{BlowAir} = \frac{\eta_{HeatCO_2} U_{Blow} P_{Blow}}{A_{Flr}} \quad (21)$$

Trong đó, η_{HeatCO_2} là lượng khí CO_2 sinh ra khi 1 Joule nhiệt lượng (cảm nhận được) được sinh ra bởi máy sưởi ($mg\{CO_2\}.J^{-1}$). Tham số U_{Blow} thể hiện mức cho phép lượng khí CO_2 sinh ra bởi máy sưởi đi vào nhà kính có thể điều chỉnh được trong khoảng $[0, 1]$ và không có đơn vị. Hệ số P_{Blow} là khả năng sinh ra CO_2 của máy sưởi (W) và A_{Flr} là diện tích nhà kính (m^2).

Tương tự, lượng khí CO_2 được bơm vào nhà kính bởi bên thứ ba chuyên cung cấp khí CO_2 được cho bởi công thức sau:

$$MC_{ExtAir} = \frac{U_{ExtCO_2} \phi_{ExtCO_2}}{A_{Flr}} \quad (22)$$

Các kí hiệu U_{ExtCO_2} và ϕ_{ExtCO_2} lần lượt là tham số điều chỉnh tốc độ bơm khí CO_2 vào trong nhà kính (không có đơn vị) và khả năng bơm CO_2 của bên thứ ba ($mg.s^{-1}$).

Mặt khác, lượng khí CO_2 đi vào nhà kính thông qua hệ thống thông gió dựa trên sự chênh lệch của nồng độ khí CO_2 bên trong và bên ngoài nhà kính và khả năng cho dòng không khí đi qua cửa tấm thông gió. Hơn nữa, khả năng cho dòng không khí đi qua cửa tấm thông gió có thể điều chỉnh được. Công thức sau dùng để tính MC_{PadAir} .

$$MC_{PadAir} = f_{Pad}(CO_{2Out} - CO_{2Air}) = \frac{U_{Pad} \phi_{Pad}}{A_{Flr}} (CO_{2Out} - CO_{2Air}) \quad (23)$$

Tốc độ của đi qua tấm thông gió f_{Pad} ($m.s^{-1}$) được tính bởi tích của tham số U_{Pad} , thể hiện mức cho phép lượng khí CO_2 đi qua tấm thông gió điều chỉnh được trong khoảng $[0, 1]$ và không có đơn vị, và ϕ_{Pad} , là khả năng cho phép khí CO_2 đi qua cửa tấm thông gió ($m^3.s^{-1}$) chia cho diện tích nhà kính.

3.1.2 Sự trao đổi CO_2 giữa hai gian trong nhà kính với nhau và với không khí ngoài trời

Đối với lượng khí CO_2 đi từ gian dưới lên gian trên nhà kính phức tạp hơn và phụ thuộc vào độ chênh lệch nhiệt độ và độ chênh lệch mật độ của hai gian nhà kính thông qua màn chắn nhiệt.

$$MC_{AirTop} = f_{ThScr}(CO_{2Out} - CO_{2Top}) \quad (24)$$

Trong đó tốc độ lưu thông khí CO_2 qua màn chắn nhiệt f_{ThScr} ($m.s^{-1}$) là tổng của hai tốc độ gồm tốc độ thẩm thấu qua màn chắn nhiệt và tốc độ tại những nơi không bị chắn bởi màn chắn nhiệt.

$$f_{ThScr} = U_{ThScr} K_{ThScr} |T_{Air} - T_{Top}|^{\frac{2}{3}} + (1 - U_{ThScr}) \left[\frac{g(1 - U_{ThScr})}{2\rho_{Air}^{Mean}} |\rho_{Air} - \rho_{Top}| \right]^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

Ở những nơi có màn chắn nhiệt với độ phủ $U_{ThScr} \in [0, 1]$ (không có đơn vị), tốc độ phụ thuộc vào sự chênh lệch giữa nhiệt độ bên trên $T_{Top}(K)$ và bên dưới $T_{Air}(K)$ màn chắn và khả năng cho không khí thẩm thấu của màn chắn là $K_{ThScr}(m.K^{-\frac{2}{3}}.s^{-1})$. Ở những nơi không có màn chắn nhiệt với độ phủ $1 - U_{ThScr}$, tốc độ được cho bởi một phương trình Navier–Stokes phụ thuộc vào sự chênh lệch của mật độ không khí ρ_{Air} và ρ_{Top} cùng tính bằng đơn vị ($kg.m^{-3}$). Lưu ý hệ số $2/3$ trong công thức (25) đến từ thực nghiệm của [3]. Trong đó, tác giả đã sử dụng dữ liệu đo đạc được về tốc độ trao đổi không khí thông qua các màn chắn làm từ 12 loại chất

liệu khác nhau và sử dụng chúng để huấn luyện mô hình $K_{ThScr}|T_{Air} - T_{Top}|^m$ với m là tham số điều chỉnh được để tìm ra m gần bằng 0.66 là 2/3. Riêng công thức Navier–Stokes đến từ nghiên cứu [5] mà trong đó ông và các cộng sự đã xét mô hình lý thuyết về sự trao đổi không khí thông qua các vết nứt trên bề mặt màn chắn gây ra bởi sự chênh lệch mật độ không khí có dạng:

$$\phi_{crack} = \frac{L \cdot SO}{\rho_{mean}} \left[\frac{1}{2} \rho_{Mean} \cdot SO \cdot g \cdot (\rho_1 - \rho_2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

trong đó ϕ_{crack} ($m^3 \cdot s^{-1}$) là lưu lượng không khí đi qua màn chắn, $L(m)$ là chiều dài khoảng mở trên màn chắn, SO là khoảng mở trên màn chắn (m), ρ_{mean} ($kg \cdot m^{-3}$) là mật độ trung bình của mật độ phía trên ρ_1 ($kg \cdot m^{-3}$) và phía dưới màn chắn ρ_2 ($kg \cdot m^{-3}$) và g là gia tốc trọng trường ($m \cdot s^{-2}$). Các công trình sau đó và thực nghiệm cũng đã cho thấy công thức Navier–Stokes cho kết quả tốt khi đối chiếu với dữ liệu đo đạc được. Mật độ không khí ρ_{air} và ρ_{top} lần lượt được tính theo công thức:

$$\rho_{Air} = \rho_{Air0} e^{\frac{g \cdot M_{Air} \cdot h_{Elevation}}{293.15 \cdot R}} \quad (27)$$

$$\rho_{Top} = \frac{M_{Air} \cdot pressure}{(T_{Top} + 273.15) \cdot R} \quad (28)$$

Trong đó M_{Air} là khối lượng riêng của không khí có giá trị là 28.96 ($kg \cdot kmol^{-1}$), $h_{elevation}$ là độ cao của nhà kính so với mực nước biển. Giá trị pressure là mật độ khí quyển tính dựa trên độ cao so với mực nước biển:

$$pressure = 103125 \cdot (1 - 2,5577 \cdot 10^{-5} \cdot h_{elevation})^{5.25588} \quad (29)$$

Tương tự, để biểu diễn lượng khí CO_2 từ bên trong ra bên ngoài nhà kính theo hai hướng từ gian dưới và từ gian trên qua các ô thông gió ta sử dụng các công thức như dưới đây.

$$MC_{AirOut} = (f_{VentSide} + f_{VentForced})(CO_{2Air} - CO_{2Out}) \quad (30)$$

Trong đó, $f_{VentSide}$ là tốc độ gió của hệ thống quạt trên tường bao xung quanh nhà kính và $f_{VentForced}$ là tốc độ gió từ hệ thống quạt bên trong nhà kính, cả hai tốc độ đều được đo với đơn vị ($m \cdot s^{-1}$). Tuy nhiên trong trường hợp này, nguyên lý Bernouilli đóng vai trò quan trọng biểu diễn bởi độ chênh lệch áp suất từ phía ngoài nhà kính gây ra bởi luồng gió tự nhiên và áp suất từ phía trong nhà kính gây ra do luồng không khí bên trong, hiệu ứng Stack hay còn gọi là hiệu ứng Chimney cũng cần được xét đến. Hiệu ứng Stack là hiệu ứng mà vào mùa đông, dòng không khí lạnh từ bên ngoài vào bên trong nhà kính và bị làm nóng dần bởi hệ thống sưởi và có xu hướng đi lên phía trên mái nhà kính và thoát ra trở lại bên ngoài, vào mùa hè thì theo chiều ngược lại.

Để tổng quát hóa mô hình cho nhiều loại nhà kính khác nhau, công thức tổng quát dưới đây

$f_{VentRoofSide}$ ($m.s^{-1}$) được dùng để thiết lập công thức cho $f_{VentSide}$ [1].

$$f_{VentRoofSide} = \frac{C_d}{A_{Flr}} \left[\frac{U_{Roof}^2 U_{Side}^2 A_{Roof}^2 A_{Side}^2}{U_{Roof}^2 A_{Roof}^2 + U_{Side}^2 A_{Side}^2} \cdot \frac{2gh_{SideRoof}(T_{Air} - T_{Out})}{T_{Air}^{Mean}} + \left(\frac{U_{Roof} A_{Roof} + U_{Side} A_{Side}}{2} \right)^2 \cdot C_w \cdot v_{Wind}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

Công thức trên là tổng của hai thành phần nhân với tỷ lệ giữa hệ số lưu lượng gió C_d không có đơn vị và diện tích nhà kính $A_{Flr}(m^2)$. Thành phần thứ nhất phụ thuộc vào độ chênh lệch nhiệt độ giữa bên ngoài và bên trong nhà kính (ở gian dưới màn chắn nhiệt) đại diện cho hiệu ứng Stack khi diện tích ô thông gió trên mái $A_{Roof}(m^2)$ là khác không. Thành phần thứ hai cho bởi độ chênh lệch áp suất bên trong và bên ngoài nhà kính và được tính bằng tổng diện tích các nơi thông gió trên nhà kính chia hai nhân vận tốc gió tự nhiên $v_{Wind}(m.s^{-1})$ và hệ số áp suất gió C_w không có đơn vị. Các hệ số C_d và C_w là các hệ số lý thuyết phụ thuộc vào cấu trúc và hình dáng của nhà kính và có thể ước lượng được thông qua các số liệu đo đạc được trên thực nghiệm. Ngoài ra, lưới chắn côn trùng gây hại trên các nơi thông gió và hệ số rò rỉ của nhà kính cũng sẽ được xét trong đề tài này. Khi có lưới chắn côn trùng, tốc độ chuyển động của các luồng không khí qua các nơi thông gió sẽ giảm xuống với hệ số

$$\eta_{InsScr} = \zeta_{InsScr} * (2 - \zeta_{InsScr}) \quad (32)$$

trong đó ζ_{InsScr} không có đơn vị là độ rỗ của lưới, nghĩa là tỷ lệ diện tích các lỗ trên lưới và tổng diện tích lưới chắn côn trùng. Với hệ số rò rỉ $c_{leakage}$ không có đơn vị, tốc độ trao đổi không khí thường được xấp xỉ khoảng 50% tốc độ

$$f_{leakage} = \begin{cases} 0.25 \cdot c_{leakage}, & v_{Wind} < 0.25, \\ v_{Wind} \cdot c_{leakage}, & v_{Wind} \geq 0.25. \end{cases} \quad (33)$$

Một cách ngầm hiểu, giả thiết về phân bố đều của sự rò rỉ của nhà kính đã được sử dụng.

Gọi η_{Side_Thr} là ngưỡng Stack, nghĩa là nếu η_{Side} là tỷ lệ giữa diện tích các nơi thông gió trên tường bao quanh nhà kính và diện tích của tất cả các nơi thông gió trên nhà kính và η_{Side} vượt ngưỡng Stack thì hiệu ứng Stack không xảy ra và ngược lại. Khi đó, $f_{VentSide}$ được cho bởi công thức sau:

$$f_{VentSide} = \begin{cases} \eta_{InsScr} \cdot f_{VentSide}'' + 0.5 f_{leakage}, & \eta_{Side} \geq \eta_{Side_Thr}, \\ \eta_{InsScr} \cdot [U_{ThScr} \cdot f_{VentSide}'' + (1 - U_{ThScr}) \cdot f_{VentRoofSide} \cdot \eta_{Side}] + 0.5 f_{leakage}, & \eta_{Side} < \eta_{Side_Thr}. \end{cases} \quad (34)$$

Trong đó, $f_{VentSide}''$ là $f_{VentRoofSide}$ tính tại $A_{Roof} = 0$. Lưu ý, ở những nơi phủ bởi màn chắn nhiệt, hiệu ứng Stack cũng không xảy ra.

Tốc độ $f_{VentForced}$ bởi hệ thống quạt gió bên trong nhà kính được tính bởi công thức sau.

$$f_{VentForced} = \frac{\eta_{InsScr} U_{VentForced} \phi_{VentForced}}{A_{Flr}} \quad (35)$$

Kí hiệu $U_{VentForced}$ (không có đơn vị) thể hiện sự điều chỉnh tốc độ gió mà hệ thống có thể $\phi_{VentForced}$ ($m^3 s^{-1}$) và có giá trị trong khoảng $[0, 1]$.

Tương tự như MC_{AirOut} , lượng khí CO_2 đi từ gian trên nhà kính ra ngoài thông qua ô mở trên mái nhà kính được tính bởi công thức sau:

$$MC_{TopOut} = f_{VentRoof} (CO_{2Top} - CO_{2Out}) \quad (36)$$

Trong đó, $f_{VentRoof}$ là tốc độ luồng không khí đi qua ô mở mái nhà kính được cho bởi công thức sau:

$$f_{VentRoof} = \begin{cases} \eta_{InsScr} \cdot f''_{VentRoof} + 0.5 f_{leakage}, & \eta_{Roof} \geq \eta_{Roof_Thr}, \\ \eta_{InsScr} \cdot [U_{ThScr} \cdot f''_{VentRoof} + (1 - U_{ThScr}) \cdot f_{VentRoofSide} \cdot \eta_{Side}] + 0.5 f_{leakage}, & \eta_{Roof} < \eta_{Roof_Thr}. \end{cases} \quad (37)$$

Tuy nhiên, khác với công thức (34), khi tỷ lệ η_{Roof} giữa diện tích ô mở trên mái nhà kính và tổng diện tích các ô thông gió trên nhà kính vượt ngưỡng Stack là η_{Roof_Thr} , nghĩa là hiệu ứng Stack không xảy ra, ta không thể sử dụng công thức $f_{VentRoofSide}$ tổng quát trong (31) tổng quát với $A_{Side} = 0$ để tính $f''_{VentRoof}$ mà phải sử dụng công thức sau bởi [4].

$$f''_{VentRoof} = \frac{C_d U_{Roof} A_{Roof}}{2 A_{Flr}} \left[\frac{g h_{Roof} (T_{Air} - T_{Out})}{2 T_{Air}^{Mean}} + C_w \cdot v_{Wind}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

3.1.3 Sự ảnh hưởng của quá trình quang hợp tới nồng độ CO_2

Chúng ta cần mô tả lượng khí CO_2 bị hấp thụ vào trong tán lá thông qua quá trình quang hợp.

$$MC_{AirCan} = M_{CH_2O} h_{C_{Buf}} (P - R) \quad (39)$$

Trong đó M_{CH_2O} là khối lượng mol CH_2O ($mg \mu mol^{-1}$), P là tốc độ quang hợp ($\mu mol\{CO_2\} m^{-2} s^{-1}$), R là tốc độ hô hấp của cây ($\mu mol\{CO_2\} m^{-2} s^{-1}$) và hệ số

$$h_{C_{Buf}} = \begin{cases} 0, & C_{Buf} > C_{Buf}^{Max}, \\ 1, & C_{Buf} \leq C_{Buf}^{Max}. \end{cases} \quad (40)$$

thể hiện sự ngưng quá trình quang hợp khi lượng CH_2O là $C_{Buf} (mg\{CH_2O\} m^{-2})$ sinh ra đã vượt sức chứa của cây $C_{Buf}^{Max} (mg\{CH_2O\} m^{-2})$.

Trong phạm vi của BTL này, $h_{C_{Buf}}$ sẽ luôn có giá trị bằng 1, tức là C_{Buf} sẽ không có ảnh

hưởng đến sự thay đổi CO_2 Tốc độ quang hợp diễn ra ở lá cây được cho bởi công thức:

$$P = \frac{J \cdot (CO2_{stom} - \Gamma)}{4 \cdot (CO2_{stom} + 2\Gamma)} \quad (41)$$

Trong đó $J(\mu mol \ e^{-} m^{-2} s^{-1})$ là tốc độ vận chuyển của electron, 4 là số lượng electron trong mỗi phân tử CO_2 , $CO2_{stom}$ là nồng độ CO_2 trong khí khổng và Γ là điểm bù CO_2 , hay nồng độ CO_2 tối thiểu mà tại đó tốc độ quang hợp bằng với tốc độ hô hấp.

Tốc độ hô hấp R được mô tả bởi phương trình:

$$R = P \frac{\Gamma}{CO2_{stom}} \quad (42)$$

Nồng độ CO_2 trong khí khổng ($CO2_{stom}$) phụ thuộc vào độ dẫn của khí khổng và thịt lá, sự cản trở của lớp ranh giới, tốc độ quang hợp và nồng độ CO_2 trong không khí nhà kính. Theo [10], nồng độ CO_2 trong khí khổng được cho là chiếm một tỉ lệ cố định trong nồng độ CO_2 trong nhà kính.

$$CO2_{stom} = \eta_{CO2 \ Air_stom} \cdot CO2_{Air} \quad (43)$$

Trong đó $\eta_{CO2 \ Air_stom}$ là hệ số chuyển đổi từ nồng độ CO_2 trong không khí sang nồng độ CO_2 trong khí khổng

Điểm bù CO_2 , Γ , tác động trực tiếp tới tốc độ quang hợp và phụ thuộc vào nhiệt độ hiện tại của lá cây //Todo

3.2 Sự quang hợp của thực vật nhóm C3

Trong đề tài này, chúng ta chỉ xét đến thực vật thuộc nhóm C3 gồm các giống cây trồng và hoa màu chúng ta thường thấy trong đời sống như cà chua, dưa leo,... Quang hợp là quá trình sử dụng khí CO_2 , nước và năng lượng từ ánh sáng mặt trời để tạo thành các hợp chất hữu cơ nuôi cây. Quá trình này chủ yếu được thực hiện nhờ diệp lục (chlorophyll) chứa trong lục lạp (chloroplast), một bào quan đặc biệt, của tế bào lá cây và cây. Sự quang hợp diễn ra theo hai pha gồm pha sáng và pha tối. Ở pha sáng, lá cây hấp thụ ánh sáng mặt trời và thực hiện quá trình chuyển hóa thành năng lượng ở thành phần thylakoid trên lục lạp nhằm cung cấp năng lượng cho pha tối. Sản phẩm của pha sáng là NADPH (Nicotinamide Adenine Dinucleotide phosphate) và ATP (Adenosine Triphosphate). Ở pha tối, thông qua một chu trình Calvin, gồm một chuỗi các phản ứng hóa sinh cố định CO_2 , khử CO_2 , tái tạo chất nhận CO_2 là enzyme Rubisco xảy ra ở chất nền (stroma) của lục lạp mà không cần đến ánh sáng.

Có nhiều cách để mô hình tốc độ quang hợp ở cây. Trong khuôn khổ đề tài này chúng ta sẽ kết hợp các mô hình lại với nhau (chi tiết hơn xem [2]).

3.2.1 Sự khuếch tán CO_2 vào trong lá

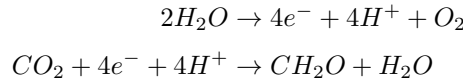
Tốc độ quang hợp P của một đơn vị lá có thể được xem như tốc độ khí CO_2 khuếch tán từ không khí vào bên trong tế bào lá thông qua các lỗ khí khổng (stomata) nằm rải rác trên hai mặt lá. Quá trình khuếch tán được biểu diễn bởi định luật Fick cho bởi:

$$P = \frac{CO_{2Air} - CO_{2Stom}}{Res} \quad (44)$$

Trong đó CO_{2Stom} là nồng độ khí CO_2 hấp thụ vào trong khí khổng ($\mu mol m^{-3}$) và Res là hệ số cản trở sự hấp thụ CO_2 vào bên trong tế bào lá ($s m^{-1}$). Hệ số cản trở này phụ thuộc vào nhiều yếu tố trong đó có tốc độ gió thổi qua lá cây.

3.2.2 Quá trình sinh hóa ở pha tối

Các mô hình động lực Michaelis–Menten (do nhà sinh học người Đức Leonor Michaelis và nhà vật lý người Canada Maud Menten) có thể được dùng để biểu diễn các quá trình sinh hóa ở pha tối của quá trình quang hợp. Quá trình này xảy ra trong chất nền của lục lạp giữa lượng khí CO_2 đã được hấp thụ và enzyme Rubisco có trong chất nền của lục lạp để tạo thành phức hợp không bền và tiếp tục phân tách tái tạo lại thành enzyme và sinh ra các sản phẩm kèm theo. Một ví dụ về phản ứng hóa học ở pha tối diễn ra như sau. Ở bước đầu tiên nước sẽ được tách ra thành 4 ion H^+ và 4 electron tự do cùng với sản phẩm kèm theo là khí CO_2 . Ở bước thứ hai, CO_2 trong chất nền được kết hợp với các electron tự do và ion H^+ để tạo ra carbohydrate CH_2O và nước trở lại.



Michaelis và Menten đã nhận thấy rằng, tốc độ phản ứng cũng là tốc độ thay đổi của sản phẩm sinh ra bởi sự phân tách của phức hợp không bền đúng bằng tốc độ phản ứng ở điểm bão hòa (có thể hiểu như tốc độ tối đa mà phản ứng có thể đạt được) nhân với tỷ lệ giữa nồng độ chất tham gia phản ứng trong chất nền và tổng của chính nó và nồng độ của chất tham gia phản ứng khi tốc độ phản ứng bằng đúng 50% tốc độ phản ứng tại điểm bão hòa. Khi đó, tốc độ quang hợp cho bởi công thức:

$$P = \frac{P_{Max} \cdot CO_{2Stom}}{CO_{2Stom} + CO_{20.5}} \quad (45)$$

Trong đó $CO_{20.5}$ là nồng độ khí CO_2 trong chất nền khi $P = P_{Max}/2$ ($\mu mol m^{-3}$). Giải tìm CO_{2Stom} , từ (44) và (53), tốc độ quang hợp P thỏa phương trình.

$$ResP^2 - (CO_{2Air} + CO_{20.5} + ResP_{Max})P + CO_{2Air} + P_{Max} = 0 \quad (46)$$

Đối với phương trình bậc 2 trên, ta chỉ quan tâm đến nghiệm P sao cho $P \rightarrow P_{Max}$ khi

$CO_{2Air} \rightarrow +\infty$. Lưu ý, lúc này tốc độ quang hợp P không còn phụ thuộc vào nồng độ CO_2 trong khí khổng nữa mà chỉ phụ thuộc vào nồng độ CO_2 trong không khí, hệ số cản trở Res và tốc độ quang hợp cực đại.

3.2.3 Tốc độ quang hợp cực đại

Để giải phương trình (46), tốc độ quang hợp cực đại cần được xác định. Đối với mô hình cho sự quang hợp của một đơn vị lá, tốc độ quang hợp cực đại được xem như một hàm số phụ thuộc vào nhiệt độ của lá, năng lượng hoạt hóa và năng lượng ức chế enzyme. Thông thường, tốc độ đó sẽ được xác định bởi mô hình phản ứng hóa học Arrhenius:

$$k(T) = k(T_0)e^{-\frac{H_a}{R}(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})} \quad (47)$$

trong đó $k(T)$ là tốc độ phản ứng tại nhiệt độ T (K), T_0 là nhiệt độ tối ưu mà tốc độ phản ứng đã biết (K), H_a là năng lượng hoạt hóa phản ứng ($J mol^{-1}$) và R là hằng số khí lý tưởng ($J mol^{-1} K^{-1}$).

Tuy nhiên, khi nhiệt độ càng cao, đến một ngưỡng nào đó, hoạt động của enzyme sẽ bị ức chế và làm giảm tốc độ của quá trình quang hợp. Khi đó, mô hình Arrhenius không đủ để giải thích sự ức chế của enzyme và mô hình sau được xem như là mô hình cho sự hoạt động của enzyme Rubisco trong quá trình quang hợp và phụ thuộc vào nhiệt độ của lá.

$$f(T) = \frac{1 + e^{-\frac{H_d}{R}(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{H_d})}}{1 + e^{-\frac{H_d}{R}(\frac{1}{T} - \frac{1}{H_d})}} \quad (48)$$

$f(T)$ đại diện cho sự hoạt động của enzyme ở nhiệt độ T (K), H_d là năng lượng ức chế enzyme ($J mol^{-1}$) và S là một đại lượng entropy tương ứng ($J mol^{-1} K^{-1}$).

Bằng cách kết hợp mô hình (47) và (48) tốc độ quang hợp tối đa trên mỗi đơn vị lá được cho bởi công thức

$$P_{Max}(T) = k(T)f(T) \quad (49)$$

3.2.4 Mô hình quang hợp cho cả tán lá

3.2.4.a Chỉ số diện tích lá

Trước hết ta cần xét đến khái niệm chỉ số diện tích lá (leaf area index - LAI). Chỉ số LAI được tính bởi tổng mật độ độ lá trên một đơn vị diện tích đất trong nhà kính. Khi đó, nếu tán lá càng dày thì chỉ số LAI càng cao. Chỉ số này rất quan trọng đối với mô hình quang hợp cho cả tán lá vì độ hấp thụ ánh sáng phụ thuộc chặt chẽ vào LAI. Thông qua LAI và định luật Beer, năng lượng ánh sáng đi đến tán lá trước khi vào tán lá là I_0 ($\mu mol \{photon\} m^{-2} s^{-1}$) và sau xuyên qua tán lá là I ($\mu mol \{photon\} m^{-2} s^{-1}$) đúng bằng:

$$I = \frac{I_0 \cdot K \cdot e^{-K \cdot LAI}}{1 - m} \quad (50)$$

trong đó K là hệ số tắt có giá trị từ 0.7 đến 1.0 nếu lá cây phân tầng ngang như cây cà chua và từ 0.3 đến 0.5 nếu lá cây nằm nghiêng như trong trường hợp cây lúa nước và m là hệ số truyền ánh sáng của lá cây thường mặc định là 0.1. Khi đó, năng lượng ánh sáng lá cây nhận được là sự chênh lệch của lượng năng lượng của tia tới trước khi vào tán lá và năng lượng của tia ló sau khi đi qua tán lá và được tính bởi công thức:

$$L = L_0 \left(1 - \frac{K \cdot e^{-K \cdot LAI}}{1 - m}\right) \quad (51)$$

Kí hiệu L là lượng photon nhận vào bởi lá cây và L_0 ($\mu \text{ mol } \{photon\} m^{-2} s^{-1}$) là lượng photon ban đầu phía trên tán lá. Lưu ý, công thức (51) chưa xét đến yếu tố phản xạ ánh sáng và sự hấp thụ bức xạ từ nền nhà kính và các vật dụng khác.

3.2.4.b Công thức Arrhenius mở rộng

Để tính giá trị P_{Max} , là tốc độ quang hợp tối đa của toàn bộ lá cây trong nhà kính, công thức mở rộng sau của Arrhenius được sử dụng trong công thức (49) thay cho (47):

$$k(T) = LAI \cdot k(T_0) \cdot e^{-\frac{H_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)} \quad (52)$$

Ở đây, $k(T)$ là tốc độ phản ứng cho toàn bộ lá cây ở nhiệt độ T (K) và $k(T_0)$ là tốc độ phản ứng ở điều kiện tối ưu T_0 (K) của một đơn vị lá và H_a cũng là năng lượng hoạt hóa cho một đơn vị lá cây.

3.2.4.c Mô hình động lực Michaelis–Menten cho P_{Max}

Khác với mô hình quang hợp cho một đơn vị lá, lượng năng lượng ánh sáng hấp thụ vào trong tán lá bị ảnh hưởng bởi LAI cần được thêm vào và ảnh hưởng đến tốc độ quang hợp cực đại P_{Max} . Do đó, ta xét mô hình sau cho P_{Max} , là hàm số phụ thuộc vào L và T .

$$P_{Max}(L, T) = \frac{P_{MLT} \cdot P_{Max}(T) \cdot L}{L + L_{0.5}} \quad (53)$$

Trong đó, $L_{0.5}$ là năng lượng ánh sáng khi $P_{Max}(L, T) = P_{Max}(T)/2$ ($\mu \text{ mol } \{photon\} m^{-2} s^{-1}$), $P_{Max}(T)$ được tính bởi công thức (49) với $k(T)$ tính theo công thức (53) và P_{MLT} là tốc độ quang hợp cực đại tại điểm bão hòa ánh sáng và nhiệt độ tối ưu T . Thông thường P_{MLT} được xác định dựa trên các nghiên cứu trước đó và thực nghiệm.

3.3 Mô hình hệ động lực đối với áp suất hơi nước trong nhà kính

Sự thay đổi của áp suất hơi nước ở gian dưới và gian trên bên trong nhà kính được biểu diễn qua hệ gồm 2 phương trình sau đây:

$$\begin{cases} cap_{VP_{Air}} VP'_{Air} &= MV_{CanAir} + MV_{PadAir} + MV_{FogAir} + MV_{BlowAir} - MV_{AirThScr} \\ &\quad - MV_{AirTop} - MV_{AirOut} - MV_{AirOut_Pad} - MV_{AirMech} \\ cap_{VP_{Top}} VP'_{Top} &= MV_{AirTop} - MV_{TopCov,in} - MV_{TopOut} \end{cases}$$

Trong đó cap_{VP_A} là khả năng chứa hơi nước trong không khí ở $A(kg\ m^3J^{-1})$. VP_A và VP'_A lần lượt là áp suất hơi nước trong A (Pa) và tốc độ thay đổi áp suất hơi nước trong A (Pa/s^{-1}). Air và Top có ý nghĩa như phần trên là đại diện cho gian trên và gian dưới.

Hơi nước trong không khí ở gian dưới được trao đổi với các yếu tố xung quanh, cụ thể:

- MV_{CanAir} biểu diễn sự trao đổi hơi nước ở gian dưới qua các tán lá.
- MV_{PadAir} biểu diễn sự trao đổi hơi nước ở gian dưới qua tấm làm mát.
- MV_{FogAir} biểu diễn sự trao đổi hơi nước ở gian dưới qua hệ thống phun sương.
- $MV_{BlowAir}$ biểu diễn sự trao đổi hơi nước ở gian dưới với máy sưởi.
- $MV_{AirThScr}$ biểu diễn sự trao đổi hơi nước ở gian dưới với màn chắn nhiệt .
- MV_{AirTop} biểu diễn sự trao đổi hơi nước giữa hai gian.
- MV_{AirOut} biểu diễn sự trao đổi hơi nước ở gian dưới với không khí ngoài trời.
- MV_{AirOut_Pad} biểu diễn sự trao đổi hơi nước ở gian dưới với không khí ngoài trời qua hệ thống làm quạt.
- $MV_{AirMech}$ biểu diễn sự trao đổi hơi nước ở gian dưới qua hệ thống làm mát cơ học.
- $MV_{TopCov,in}$ biểu diễn sự trao đổi hơi nước giữa ở gian trên với lớp màn phủ ở trong.
- MV_{TopOut} biểu diễn sự trao đổi hơi nước giữa ở gian trên với không khí ngoài trời.

Lưu lượng hơi nước được tính theo đơn vị $kg\ m^{-2}s^{-1}$.

Đầu tiên, công thức tính sức chứa hơi nước trong không khí gian dưới $cap_{VP_{Air}}(kg\ m^3J^{-1})$:

$$cap_{VP_{Air}} = \frac{M_{Water}h_{Air}}{R(T_{Air} + 273.15)} \quad (54)$$

Trong đó $M_{Water}(kg\ kmol^{-1})$ là khối lượng mol của nước, $h_{Air}(m)$ là chiều cao từ sàn nhà tới màn chắn nhiệt, $R(J\ kmol^{-1}K^{-1})$ là hằng số mol khí.

Tương tự, sức chứa hơi nước của gian trên tính bằng công thức

$$cap_{VP_{Top}} = \frac{M_{Water} h_{Top}}{R(T_{Top} + 273.15)} \quad (55)$$

Trong đó $h_{Top}(m)$ là chiều cao của nhà kính phía trên màn chắn nhiệt, có thể xấp xỉ bằng với chiều cao ngăn dưới màn chắn nhiệt h_{Air} .

3.3.1 Thông lượng hơi nước

Hệ số trao đổi nhiệt giữa không khí và vật thể có quan hệ tuyến tính với hệ số trao đổi nhiệt đối lưu. Do đó, lưu lượng hơi nước đi từ không khí qua vật thể bằng sự ngưng tụ được cho bởi:

$$MV_{12} = \begin{cases} 0 & , VP_1 < VP_2 \\ 6.4 \cdot 10^{-9} HEC_{12}(VP_1 - VP_2) & , VP_1 > VP_2 \end{cases} \quad (56)$$

Trong đó, $MV_{12}(kgm^{-2}s^{-1})$ là thông lượng hơi nước từ không khí ở địa điểm 1 vào vật thể 2. $6.4 \cdot 10^{-9}$ là hệ số chuyển đổi từ hệ số trao đổi nhiệt ($Wm^{-2}K^{-1}$) sang hệ số trao đổi hơi ($kgm^{-2}s^{-1}Pa^{-1}$). HEC_{12} ($Wm^{-2}K^{-1}$) là hệ số trao đổi nhiệt đối lưu giữa không khí ở địa điểm 1 và vật thể 2. VP_1, VP_2 (Pa) lần lượt là áp suất hơi nước của không khí ở địa điểm 1 và áp suất hơi nước bão hòa của vật thể 2 ở nhiệt độ của nó.

Tuy nhiên, mô hình hệ động lực chỉ bao gồm các phương trình khả vi, do đó công thức 56 được làm khả vi bằng một hàm "công tắc" (switch function):

$$MV_{12} = \frac{1}{1 + \exp(s_{MV_{12}}(VP_1 - VP_2))} 6.4 \cdot 10^{-9} HEC_{12}(VP_1 - VP_2) \quad (57)$$

Trong đó $s_{MV_{12}}$ là hệ số góc của hàm công tắc khả vi cho độ chênh lệch áp suất hơi nước và được chọn là -0.1 .

Thông lượng hơi nước từ không khí trong nhà kính vào màn chắn nhiệt $MC_{AirThScr}$ và thông lượng hơi nước từ ngăn trên của nhà kính vào màn phủ bên trong $MV_{TopCov,in}$ được mô tả tương tự như công thức trên. Cụ thể là:

$$MV_{AirThScr} = \frac{1}{1 + \exp(s_{MV_{AirThScr}}(VP_{Air} - VP_{ThScr}))} 6.4 \cdot 10^{-9} HEC_{AirThScr}(VP_{Air} - VP_{ThScr}) \quad (58)$$

Với VP_{ThScr} (Pa) là áp suất hơi nước trong màn chắn nhiệt tại nhiệt độ T_{ThScr} ($^{\circ}C$) và được tính theo phương trình Tetens[12]:

$$VP_{ThScr} = 610.78 e^{\frac{17.27 T_{ThScr}}{T_{ThScr} + 237.3}} \quad (59)$$

Hệ số trao đổi nhiệt đối lưu giữa không khí trong nhà kính và màn chắn nhiệt, $HEC_{AirThScr}(Wm^{-2}s^{-1})$, được tính bằng công thức

$$HEC_{AirThScr} = 1.7 U_{ThScr} |T_{Air} - T_{ThScr}|^{0.33} \quad (60)$$

Trong đó T_{Air}, T_{ThScr} là nhiệt độ của không khí nhà kính và của màn tại thời điểm đang xét

Tương tự, sự trao đổi hơi nước giữa gian trên và màn phủ bên trong $MV_{TopCov,in} (kg m^{-2} s^{-1})$ được tính như sau:

$$MV_{TopCov,in} = \frac{1}{1 + \exp(s_{MV_{TopCov,in}})(VP_{Top} - VP_{Cov,in})} 6,4 \cdot 10^{-9} HEC_{TopCov,in} (VP_{Top} - VP_{Cov,in}) \quad (61)$$

Trong đó $VP_{Cov,in}$ là áp suất hơi bão hòa của màn phủ bên trong tại nhiệt độ khảo sát $T_{Cov,in}$ và được tính bằng phương trình Tetens

$$VP_{Cov,in} = 610.78 e^{\frac{17.27 T_{Cov,in}}{T_{Cov,in} + 237.3}} \quad (62)$$

Và hệ số trao đổi nhiệt $HEC_{TopCov,in} (W m^{-2} K^{-1})$ tính bằng

$$HEC_{TopCov,in} = c_{HECin} (T_{Top} - T_{Cov,in})^{0.33} \frac{A_{Cov}}{A_{Flr}} \quad (63)$$

Với c_{HECin} là tham số trao đổi nhiệt đối lưu giữa màn phủ bên trong nhà kính và không khí bên ngoài ($W m^{-2} K^{-2}$), $T_{Cov,in}$ (C) và T_{Top} (C) lần lượt là các giá trị nhiệt độ của màn chắn nhiệt và của không khí phía trên màn chắn nhiệt tại thời điểm khảo sát, A_{Cov} và $A_{Flr} (m^2)$ lần lượt là diện tích màn phủ bên trong nhà kính và diện tích của nhà kính

Dạng tổng quan của lưu lượng hơi nước đi từ không khí 1 vào không khí 2 được cho bởi:

$$MV_{12} = \frac{M_{Water}}{R} f_{12} \left(\frac{VP_1}{T_1 + 273.15} - \frac{VP_2}{T_2 + 273.15} \right) \quad (64)$$

Trong đó f_{12} là thông lượng không khí từ địa điểm 1 vào địa điểm 2, T_1 và T_2 (°C) lần lượt là nhiệt độ ở địa điểm 1 và nhiệt độ ở địa điểm 2

Các thông lượng hơi nước MV_{AirTop} , MV_{AirOut} và MV_{TopOut} được tính tương tự như công thức trên mà trong đó biểu thức thông lượng không khí của chúng lần lượt là f_{ThScr} (thông lượng qua màn chắn nhiệt), $f_{VentSide} + f_{VentForced}$ (thông lượng tạo ra do sự thông gió tự nhiên qua cửa sổ và do các hệ thống thông gió nhân tạo) và $f_{VentRoof}$ (thông lượng tạo ra do sự thông gió của mái nhà). Cụ thể là:

$$\begin{aligned} MV_{AirTop} &= \frac{M_{water}}{R} f_{ThScr} \left(\frac{VP_{Air}}{T_{Air} + 273.15} - \frac{VP_{Top}}{T_{Top} + 273.15} \right) \\ MV_{AirOut} &= \frac{M_{water}}{R} (f_{VentSide} + f_{VentForced}) \left(\frac{VP_{Air}}{T_{Air} + 273.15} - \frac{VP_{Out}}{T_{Out} + 273.15} \right) \\ MV_{TopOut} &= \frac{M_{water}}{R} f_{VentRoof} \left(\frac{VP_{Top}}{T_{Top} + 273.15} - \frac{VP_{Out}}{T_{Out} + 273.15} \right) \end{aligned} \quad (65)$$

3.3.2 Sự tác động của các thành phần bên trong nhà kính

Lưu lượng hơi nước từ máy thổi nhiệt vào không khí trong nhà kính tỉ lệ thuận với lưu lượng nhiệt:

$$MV_{BlowAir} = \eta_{HeatVap} H_{BlowAir}$$

Trong đó $\eta_{HeatVap}$ (kg hinc J^{-1}) là lượng hơi nước được sinh ra khi 1 Joule nhiệt hiện được tạo ra bởi máy sưởi trực tiếp, $H_{BlowAir}$ ($W m^{-2}$) là lưu lượng nhiệt từ máy sưởi trực tiếp vào không khí trong nhà kính và được cho bởi công thức:

$$H_{BlowAir} = U_{Blow} P_{Blow} / A_{Flr}$$

Trong đó U_{Blow} là van điều khiển của máy sưởi trực tiếp, P_{Blow} (W) là dung tích nhiệt của máy sưởi trực tiếp.

Lưu lượng hơi nước từ tấm làm mát và quạt vào không khí trong nhà kính được mô tả bởi:

$$MV_{PadAir} = \rho_{Air} f_{Pad} (\eta_{Pad} (x_{Pad} - x_{Out}) + x_{Out})$$

Trong đó ρ_{Air} ($kg m^{-3}$) là mật độ của không khí trong nhà kính, f_{Pad} ($m^3 m^{-2} s^{-1}$) là lưu lượng thông gió do hệ thống tấm làm mát và quạt, η_{Pad} là năng suất của hệ thống tấm làm mát và quạt, x_{Pad} ((kg nước) / (kg khí)) là tỉ lệ độ ẩm của tấm làm mát và x_{Out} ((kg nước) / (kg khí)) là tỉ lệ độ ẩm của không khí ngoài trời. Lưu lượng thông gió do hệ thống tấm làm mát và quạt được tính bởi:

$$f_{Pad} = U_{Pad} \phi_{Pad} / A_{Flr}$$

Trong đó U_{Pad} là van điều khiển của hệ thống tấm làm mát và quạt, ϕ_{Pad} ($m^3 s^{-1}$) là dung tích của lưu lượng khí qua tấm làm mát.

Với giả thiết mật độ không khí không đổi và như nhau tại mọi điểm trong nhà kính, ta có thể tính mật độ không khí theo [11]:

$$\rho_{Air} = \frac{P}{R_{Gas} (T_{Air} + 273.15)} \quad (66)$$

Các ký hiệu P, R_{Gas} lần lượt là áp suất tuyệt đối của khí (Pa) và hằng số khí lý tưởng ($J kg^{-1} K^{-1}$).

Thông lượng hơi nước từ không khí trong nhà kính ra không khí bên ngoài nhà kính khi sử dụng hệ thống tấm làm mát và quạt được mô tả bởi:

$$MV_{AirOut_Pad} = f_{Pad} \frac{M_{water}}{R} \left(\frac{V P_{Air}}{T_{Air} + 273.15} \right)$$

Trong đó R ($J kmol^{-1} K^{-1}$) là hằng số mol khí

Mật độ lưu thông hơi nước từ ngăn dưới nhà kính qua máy làm lạnh

$$MV_{AirMech} = \frac{1}{1 + \exp(s_{MV_{AirMech}})(VP_{Air} - VP_{MechCool})} 6,4 \cdot 10^{-9} HEC_{AirMech} (VP_{Air} - VP_{MechCool})$$

$VP_{MechCool}$ (Pa) là áp suất hơi bão hòa của hệ thống máy làm mát tại $T_{MechCool}$ (°C), nhiệt độ của bề mặt làm lạnh, hằng số trao đổi nhiệt $HEC_{MechAir}$ ($Wm^{-2}s^{-1}$) tính bằng

$$HEC_{MechAir} = \frac{U_{MechCool} COP_{MechCool} P_{MechCool} / A_{flr}}{T_{Air} - T_{MechCool} + 6,4 \cdot 10^{-9} \Delta H (VP_{Air} - VP_{MechCool})}$$

Trong đó $COP_{MechCool}$ là hệ số hiệu suất của máy làm lạnh, $P_{MechCool}$ (W) là công suất điện tối đa của máy làm lạnh, $U_{MechCool}$ là van điều chỉnh khả năng thu nhiệt của máy làm lạnh. $VP_{MechCool}$ (Pa) là áp suất hơi nước bão hòa của máy làm lạnh tại nhiệt độ $T_{MechCool}$ (°C), ΔH ($J kg^{-1}$) là nhiệt hóa hơi của nước.

Áp suất hơi bão hòa của hệ thống máy làm mát $VP_{MechCool}$ (Pa) tại nhiệt độ $T_{MechCool}$ (°C) được tính dựa trên phương trình Tetens giống với VP_{ThScr} :

$$VP_{MechCool} = 610,78 e^{\frac{17,27 T_{MechCool}}{T_{MechCool} + 237,3}}$$

Lưu lượng hơi nước từ hệ thống phun sương vào không khí trong nhà kính được mô tả bởi:

$$MV_{FogAir} = U_{Fog} \phi_{Fog} / A_{Flr}$$

Trong đó U_{Fog} là van điều khiển của hệ thống phun sương và ϕ_{Fog} ($kg s^{-1}$) là sức chứa của hệ thống phun sương.

3.3.3 Sự thoát hơi nước của tán lá

Quá trình thoát hơi nước của tán lá được mô tả bởi phương trình:

$$MV_{CanAir} = VEC_{CanAir} (VP_{Can} - VP_{Air})$$

Trong đó VEC_{CanAir} ($kgPs^{-1}$) là hệ số trao đổi hơi nước giữa tán lá và không khí, VP_{Can} là áp suất hơi nước bão hòa ở nhiệt độ của tán lá. Hệ số truyền hơi nước của quá trình thoát hơi nước của tán được tính bởi:

$$VEC_{CanAir} = \frac{2\rho_{Air} c_{p,Air} LAI}{\Delta H \gamma (r_b + r_s)}$$

Trong đó $c_{p,Air}$ ($JK^{-1}kg^{-1}$) là nhiệt dung riêng của không khí trong nhà kính, LAI (m^2m^{-2}) là chỉ số diện tích lá, ΔH (JKg^{-1}) là nhiệt hóa hơi của nước, γ (PaK^{-1}) là hằng số, r_b (sm^{-1}) là sức cản của lớp ranh giới của tán trong việc vận chuyển hơi nước và r_s (sm^{-1}) là sức cản của khí

khổng của tán lá trong việc vận chuyển hơi nước.

Theo [10], sức cản của lớp ranh giới trong việc vận chuyển hơi nước là hằng số, còn sức cản của khí khổng của tán lá được mô tả bởi công thức sau:

$$r_s = r_{s,min} \cdot rf(R_{Can}) \cdot rf(CO_2_{Air_ppm}) \cdot rf(VP_{Can} - VP_{Air})$$

Trong đó $r_{s,min}(sm^{-1})$ là sức cản tối thiểu của tán lá và rf là hệ số cản trở cho mức độ bức xạ, nồng độ CO_2 và sự chênh lệch áp suất.

Trong phạm vi của BTL này, sức cản của khí khổng tán lá trong việc vận chuyển hơi nước của cây được đơn giản hóa thành:

$$r_s = r_{s,min}$$

4 Kết quả ứng dụng

4.1 Xây dựng mô hình nhà kính

Phương pháp giải quyết: Thiết kế theo hướng top-down

- Xây dựng một cấu trúc dữ liệu tổng quát GreenhouseModel dự báo tốc độ biến thiên của các giá trị CO_{2Air} , CO_{2Top} , VP_{Air} , VP_{Top} tại mỗi thời điểm khác nhau. Giá trị dự đoán được bởi GreenhouseModel sẽ phụ thuộc vào các tham số được chia ra nhiều nhóm lưu trữ bởi các lớp riêng biệt
 - Lớp ModelState: gồm 4 giá trị trạng thái cần dự báo CO_{2Air} , CO_{2Top} , VP_{Air} , VP_{Top} , sẽ được cập nhật sau mỗi lần chạy hàm dự báo dựa trên tốc độ biến thiên dự báo được và bước nhảy theo thời gian tự chọn (1 giây, 5 giây, ..., 300 giây)
 - Lớp ModelParmeter: các hằng số đặc trưng khi xét một mô hình nhà kính cụ thể, các giá trị được khởi tạo và giữ nguyên trong suốt quá trình dự báo
 - Lớp ModelEnvironment: các tham số trong tự nhiên thay đổi theo thời gian, ví dụ như nồng độ CO_{2Out} bên ngoài, nhiệt độ, hệ số quang hợp LAI ,... Hầu hết các tham số đều giống nhau với mọi nhà kính, được khởi tạo và cập nhật tại mỗi bước gọi hàm dự báo của GreenhouseModel
 - Lớp ModelSetPoint: các tham số trong đoạn $[0, 1]$ thể hiện mức độ điều chỉnh của các van đóng mở để thay đổi cường độ của một số thông số như mức độ đốt nhiệt để tạo thêm CO_2 , mức độ cung cấp CO_2 từ các nguồn external bên ngoài. Tuy nhiên, trong hiện thực GreenhouseModel dưới đây, các giá trị thuộc lớp này chỉ mang mục đích để đơn giản hóa model, loại bỏ một số tính toán bị thiếu dữ kiện, được khởi tạo và giữ nguyên suốt quá trình dự báo
 - Lớp ModelConstant: lưu một số hằng số bất biến trong vật lý, sinh học
- Khi gọi hàm dự báo các giá trị ModelState của GreenhouseModel hàm dự báo sẽ tính 4 giá trị dCO_{2Air} , dCO_{2Top} , dVP_{Air} , dVP_{Top} bằng cách gọi các phương thức con $MC_{12}()$ và $MV_{12}()$ tính thông lượng của nồng độ CO_2 và của áp suất hơi nước VP qua các bề mặt diện tích, những phương thức con này sẽ tính các giá trị MC_{12} , MV_{12} theo công thức cho trước trong chương 3, dựa trên các tham số và hằng số lưu trữ trong các lớp con phía trên, hoặc lại gọi tiếp những phương thức con tính toán các tham số mong muốn.
- Cuối cùng hàm dự báo của GreenhouseModel sẽ trả về một vector chứa giá trị là tốc độ biến thiên của 4 biến trong ModelState, và các giá trị này sẽ được một cấu trúc dữ liệu khác tên ODESolver sử dụng để dự đoán giá trị tiếp theo của 4 biến trạng thái sau một bước nhảy thời gian h cho trước, theo các phương pháp xấp xỉ như Euler, Runge-Kutta bậc 4.

4.2 Mô hình dự báo bằng phương pháp xấp xỉ toán học

Cấu trúc dữ liệu ODESolver chứa tập hợp các phương thức hiện thực việc dự báo giá trị trạng sau dựa vào trạng thái ban đầu, vector đạo hàm tính được từ GreenhouseModel và bước nhảy được chọn khi khởi tạo cấu trúc dữ liệu

- Phương thức *du* nhận vào thông tin trạng thái hiện bước khi dự báo, thời điểm hiện tại và trả về kết quả là một vector tốc độ thay đổi của 4 thông số trong ModelState
- Phương thức *rk4_solver* và *euler_solver* sử dụng phương pháp xấp xỉ Runge-Kutta bậc 4 và phương pháp xấp xỉ Euler nhận vào trạng thái ban đầu trả về trạng thái sau khi dự báo được theo các bước sau

- Đưa các giá trị: CO_{2Air} , CO_{2Top} , VP_{Air} , VP_{Top} tại thời điểm t_0 thành một vector v chứa giá trị khởi tạo.
- Với bước nhảy h , ta tiến hành dự đoán các giá trị trên tại thời điểm $t_0 + h$ thông qua phương thức Euler hoặc Runge-Kutta 4. Cụ thể, với vector giá trị khởi tạo và mô hình nhà kính ta tính toán các giá trị dốc $d_{CO_{2Air}}$, $d_{CO_{2Top}}$, $d_{VP_{Air}}$, $d_{VP_{Top}}$ bằng cách gọi phương thức *du*, rồi gom vào vector dv .
- Với phương thức Euler, ta có

$$v_{sau} = v_{trc} + h * dv(v_{trc}, t)$$

- Với phương thức Runge-Kutta 4, ta tính 4 dốc tại các trạng thái khác nhau

$$k_1 = du(v_{trc}, t)$$

$$k_2 = du\left(v_{trc} + \frac{1}{2}k_1, t + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = du\left(v_{trc} + \frac{1}{2}k_2, t + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = du(v_{trc} + k_3, t + h)$$

$$v_{sau} = v_{trc} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Sau đó, thu được một vector v_{sau} . Vector này chứa giá trị dự đoán: CO_{2Air} , CO_{2Top} , VP_{Air} , VP_{Top} tại thời điểm $t_0 + h$.
- Phương thức *rk4_wrapper_for_GreenHouseModel* và *euler_wrapper_for_GreenHouseModel* cập nhật thông số SetPoint và Environment tại thời điểm tại dựa vào các tham số nhận được và gọi hàm xấp xỉ *rk4_solver* và *euler_solver*

4.3 Chạy mô hình

Mô hình được sử dụng để dự đoán áp lực hơi nước và nồng độ khí CO_2 trong những điều kiện thời tiết và thiết kế nhà kính đa dạng. Vì thế, mô hình được dùng để dự đoán hai thông số trên tại 2 nhà kính ở 2 điều kiện khí hậu khác nhau.

- Sicily, Italy: khí hậu Địa Trung Hải.
- Tây bắc Netherland: khí hậu ôn đới hải dương.
- Arizona, USA: khí hậu bán khô hạn.
- Texas, USA: khí hậu bán khô hạn.

Các thông số nhà kính cụ thể bao gồm:

- Vị trí nhà kính, đặc điểm nhà kính, kỹ thuật điều chỉnh khí hậu.
- Các hệ thống: làm mát, sưởi, làm giàu CO_2 , cách điện, làm ẩm, khử ẩm.
- Các yếu tố vật lý của cấu trúc nhà kính: màn chắn nhiệt, sàn, đặc điểm hệ thống thông gió,...

Các thông số thời tiết:

- $T_{Out}, RH_{Out}, v_{Wind}$: được thu thập từ trạm thời tiết.
- $T_{Air}, RH_{Air}, CO_{2Air}$: được ghi lại bằng máy tính.
- VP_{Air}, VP_{Out} : được tính toán từ nhiệt độ không khí và độ ẩm tương đối.
- CO_{2Out} : được giả định bằng 668 mgm^{-3}

Sử dụng căn bậc hai trung bình bình phương độ lệch tương đối (relative root mean square error) để xác định độ chính xác của mô hình:

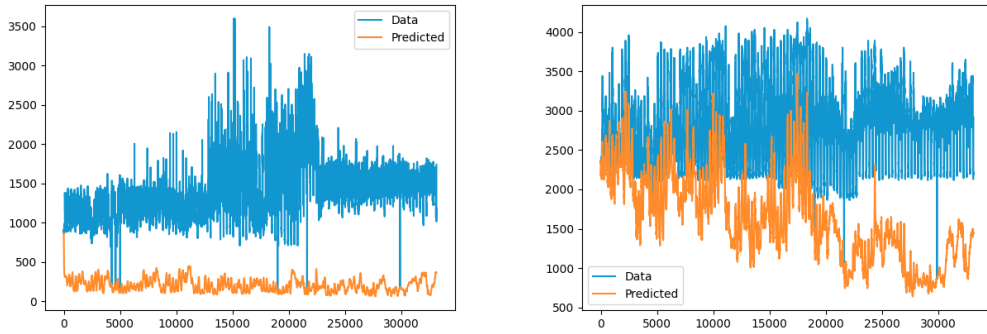
$$RRMSE = \frac{100}{\bar{y}_{Data}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{Mod,i} - y_{Data,i})^2} \quad (67)$$

Với \bar{y}_{Data} là trung bình dữ liệu được đo từ thực tế tại tất cả khoảng thời gian trong dữ liệu, n là số thời điểm đo dữ liệu, $y_{Mod,i}$ là thông số dự đoán từ mô hình tại thời điểm thứ i , $y_{Data,i}$ dữ liệu đo từ thực tế tại thời điểm thứ i . Để kiểm tra độ hiệu quả của mô hình thì giá trị RRMSE nên ít hơn hoặc bằng 10%.

4.4 Kết quả

Sau khi chạy mô hình với các thông số của nhà kính của từng nhà kính cụ thể, thu được kết quả:

- Nhà kính tại Sicily, Italy:
 - Phương thức Euler:

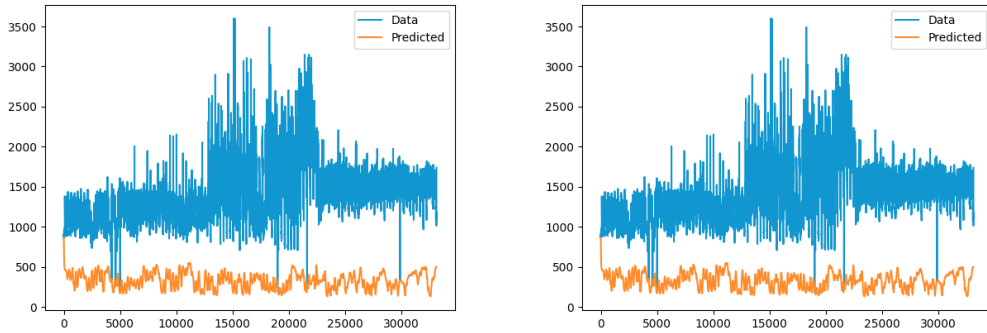


Hình 1: Đồ thị dự đoán giá trị của nồng độ khí CO_2 (trái) và áp suất hơi nước (phải) bằng phương pháp Euler tại Sicily, Italy

$$* RRMSE_{CO_2Air} = 88.6938 \%$$

$$* RRMSE_{VP_{Air}} = 47.5221 \%$$

- Phương thức Runge-Kutta 4:



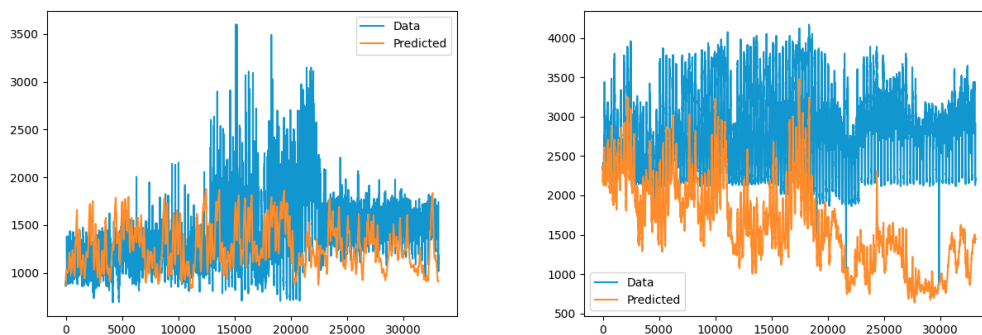
Hình 2: Đồ thị dự đoán giá trị của nồng độ khí CO_2 (trái) và áp suất hơi nước (phải) bằng phương pháp Runge-Kutta 4 tại Sicily, Italy

$$* RRMSE_{CO_2Air} = 79.8815 \%$$

$$* RRMSE_{VP_{Air}} = 47.5223 \%$$

- Nhà kính tại Netherland:

– Phương thức Euler:

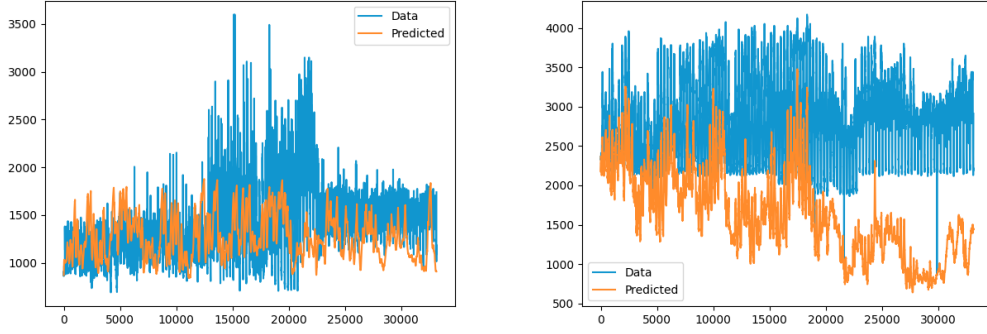


Hình 3: Đồ thị dự đoán giá trị của nồng độ khí CO_2 (trái) và áp suất hơi nước (phải) bằng phương pháp Euler tại Netheland

$$* RRMSE_{CO_2Air} = 28.508053505801666 \%$$

$$* RRMSE_{VP_{Air}} = 47.4893904113065 \%$$

– Phương thức Runge-Kutta 4:



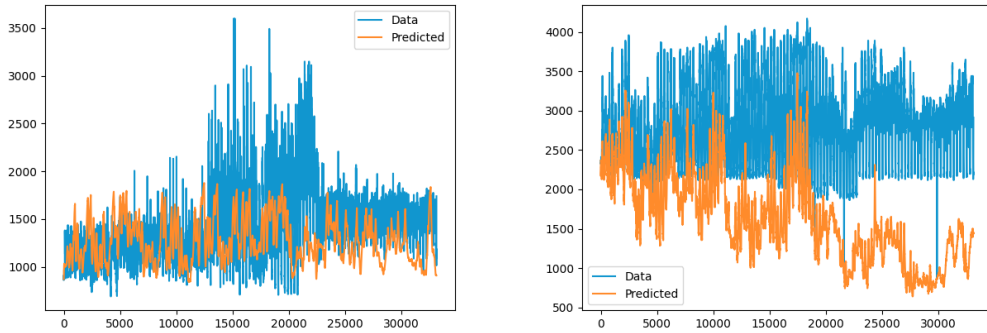
Hình 4: Đồ thị dự đoán giá trị của nồng độ khí CO_2 (trái) và áp suất hơi nước (phải) bằng phương pháp Runge-Kutta tại Netherland

$$* RRMSE_{CO_2Air} = 28.50779291651004 \%$$

$$* RRMSE_{VP_{Air}} = 47.48951279578634 \%$$

• Nhà kính tại Arizona, USA:

– Phương thức Euler:



Hình 5: Đồ thị dự đoán giá trị của nồng độ khí CO_2 (trái) và áp suất hơi nước (phải) bằng phương pháp Euler tại Arizona, USA

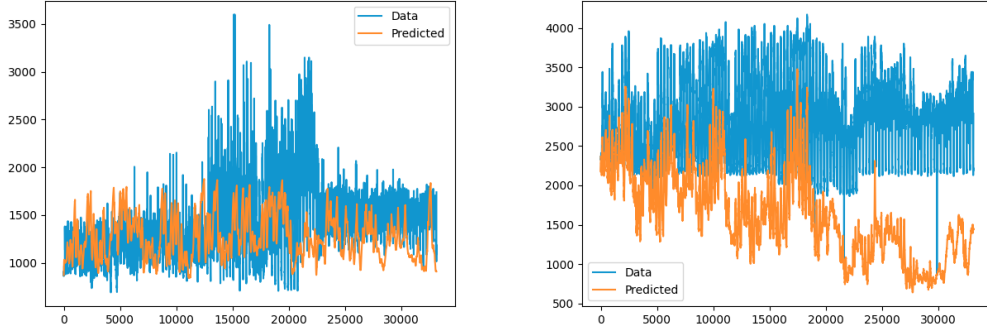
$$* RRMSE_{CO_2Air} = 78.9617211907605\%$$

$$* RRMSE_{VP_{Air}} = 47.543822450492605\%$$

– Phương thức Runge-Kutta 4:

$$* RRMSE_{CO_2Air} = 78.9619 \%$$

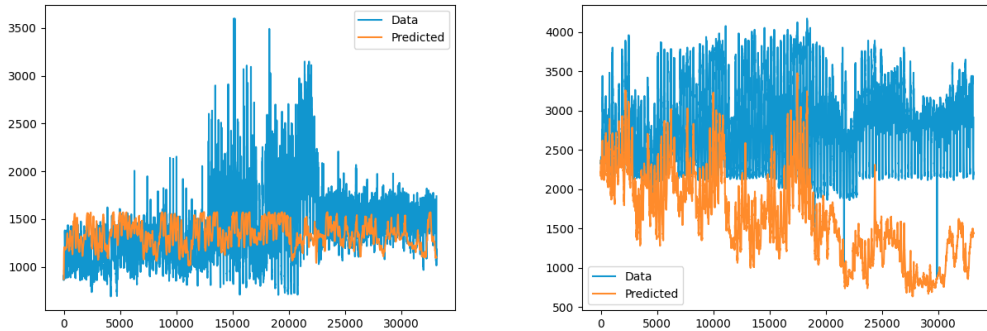
$$* RRMSE_{VP_{Air}} = 47.544 \%$$



Hình 6: Đồ thị dự đoán giá trị của nồng độ khí CO_2 (trái) và áp suất hơi nước (phải) bằng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 tại Arizona, USA

- Nhà kính tại Texas, USA:

- Phương thức Euler:



(a) Đồ thị dự đoán giá trị của nồng độ khí CO_2 (trái) và áp suất hơi nước (phải) bằng phương pháp Euler tại Texas, USA

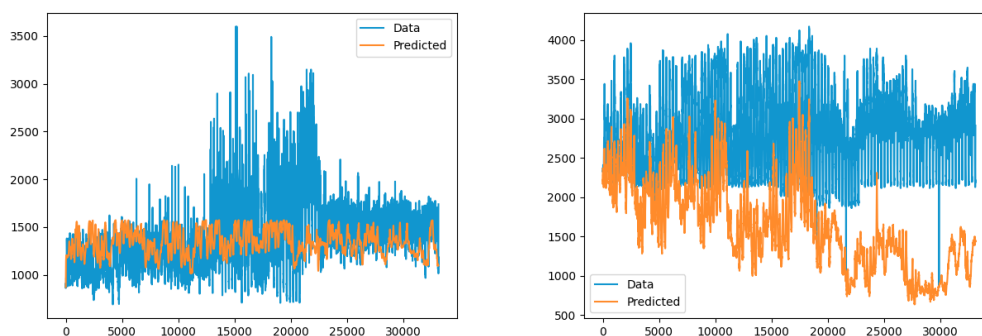
$$* RRMSE_{CO_2Air} = 24.329562244740373\%$$

$$* RRMSE_{VP_{Air}} = 47.51623491769452\%$$

- Phương thức Runge-Kutta 4:

$$* RRMSE_{CO_2Air} = 24.3294 \%$$

$$* RRMSE_{VP_{Air}} = 47.5164 \%$$



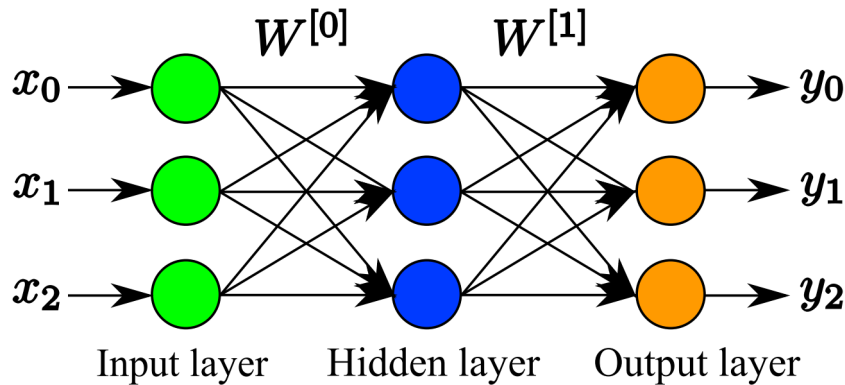
(a) Đồ thị dự đoán giá trị của nồng độ khí CO_2 (trái) và áp suất hơi nước (phải) bằng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 tại Texas, USA

5 Giải hệ phương trình vi phân bằng Deep Learning

5.1 Giới thiệu về mạng Neuron nhân tạo

Được lấy cảm hứng từ neuron và các liên kết thần kinh trong não bộ của sinh vật, những thành phần cơ bản cấu thành một mạng Neuron nhân tạo (ANN) là các đơn vị tính toán được liên kết với nhau, mỗi đơn vị tính toán còn được gọi là một unit hay một node. Một mạng ANN bao gồm các lớp (layer) chứa các unit, với mỗi lớp được kết nối với lớp tiếp theo bằng một bộ các trọng số (weight) $W^{[n]}$ giữa các unit trong các lớp khác nhau. Trong một lớp kết nối đầy đủ, tất cả các unit trong lớp thứ n được kết nối với tất cả các unit trong layer thứ $n + 1$ với một ma trận trọng số là $W^{[n]}$ như được mô tả trong hình dưới. Đầu vào của mỗi layer thứ $n + 1$ là đầu ra từ lớp trước đó $z^{[n]}$. Đầu ra được tính toán bằng cách tính tổng có trọng số của đầu vào của mỗi unit và cho kết quả vào một hàm activation function $a(x)$:

$$z^{[n+1]} = a(W^{[n]}z^{[n]}).$$



Hình 9: Biểu diễn trực quan của một mạng fully connected ANN đơn giản. Mỗi lớp thứ n của mạng được kết nối với lớp tiếp theo $n + 1$ bằng bộ trọng số $W^{[n]}$

5.1.1 Hàm kích hoạt (Activation Function)

Hàm kích hoạt mô phỏng tỷ lệ truyền xung qua axon của một neuron thần kinh. Trong một mạng ANN, hàm kích hoạt đóng vai trò là thành phần phi tuyến tại output của các neuron. Nó có vai trò hết sức quan trọng vì nếu không có nó thì mạng chỉ có khả năng học được các quan hệ tuyến tính trong khi dữ liệu trong thực tế thì lại có quan hệ rất phức tạp. Các hàm kích hoạt được sử dụng trong BTL này là Rectified Linear Unit (ReLU), tanh và sigmoid. Chúng được định nghĩa như sau:

- Hàm ReLU:

$$a(x) = \max(0, x)$$

- Hàm Sigmoid:

$$a(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

- Hàm tanh

$$a(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

5.1.2 Hàm mất mát

Đầu ra của lớp cuối cùng cũng là đầu ra của toàn bộ mạng ANN

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{z}^{[N]} = a(\mathbf{W}^{[N]}\mathbf{z}^{[N-1]})$$

Sai số của việc xấp xỉ dựa trên mạng Neuron nhân tạo là hàm mất mát $L(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}})$ được tính dựa trên output mong muốn, \mathbf{y} và output từ mạng, $\hat{\mathbf{y}}$. Hàm mất mát chính là hàm mục tiêu mà neural network cần làm tối thiểu.

$$L(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{m} \sum_i (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i)^2$$

5.2 Mô tả bài toán

Đề xuất thuật giải cho mô hình ODE tổng quát và hiện thực thuật giải đó bằng Tensorflow. Sau đó áp dụng vào model nhà kính đã xây dựng. Mô hình ODE tổng quát là hệ:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Trong đó, f là hàm số phụ thuộc vào t và $x(t)$ (lưu ý, kí hiệu này ở dạng vector).

Như trình bày ở mục, bằng phương pháp xấp xỉ Runge Kutta 4, kết quả nhận được là rất tốt với sai số rất thấp. Tuy nhiên, đối với phương pháp này, mỗi lần truy vấn giá trị $x(t)$ tại điểm t bất kì, chương trình sẽ chạy lại từ điểm bắt đầu t_0 mất rất nhiều thời gian ($O(n)$ với n là số bước nhảy từ t_0 đến t) nếu truy vấn liên tục nhiều lần. Với neural network, ta kỳ vọng sẽ xấp xỉ được hàm số kết quả $f(x)$ với độ chính xác chấp nhận được trong một khoảng cố định (a, b) . Có nghĩa là, độ phức tạp thời gian khi truy vấn giá trị $x(t) \forall t \in (a, b)$ là $O(1)$.

5.3 Mô tả giải thuật

Với ý tưởng dùng neural network để xấp xỉ hàm số $x(t)$, ta dựa trên các giả thiết bao gồm:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t) = rk4(t) \end{cases}$$

Trong đó phương trình thứ 3 có vẻ phải là $rk4(t)$ là giá trị xấp xỉ của $x(t)$ bởi phương pháp Runge Kutta 4 - trong trường hợp không biết nghiệm của hệ. Trong trường hợp data đúng đã có, ta có thể dùng data này để train. Trong phần hiện thực của nhóm sử dụng data ground-truth để train.

Về mặt lý thuyết, mô hình ODE tổng quát có vector x với độ dài tùy ý. Tuy nhiên, giải thuật này sử dụng hệ 2 phương trình vi phân (cùng với hai điểm xuất phát) với mục đích mô tả giải thuật. Việc tổng quát hóa có thể được phát triển một cách đơn giản.

Do đã có các giá trị xấp xỉ gần như là chính xác từ phương pháp Runge Kutta 4, bài toán có thể được xem như xây dựng một neural network xấp xỉ phương trình kết quả với các điểm cho trước lấy từ phương pháp Runge Kutta 4. Phương trình $x'(t) = f(t, x)$ đóng vai trò phụ trong giải thuật.

Từ đó, ta xây dựng các neural network cho mỗi phần tử của vector x . Các neural network này có cấu trúc tương tự nhau, gồm: 2 hidden layer với số hidden unit lần lượt là 128 và 256 (các con số được chọn vừa đủ lớn, và là một lũy thừa cơ số 2 để giúp việc tính toán hiệu quả hơn). Activation function cho layer 1 sẽ là sigmoid và cho layer 2 là relu, chủ yếu được chọn dựa trên kinh nghiệm là chính. Tuy nhiên, có thể hiểu layer 1 như các đặc điểm khác nhau của input t , việc dùng hàm sigmoid ở layer 1 như một cách để chuẩn hóa các đặc điểm.

Loss function của bài toán được tạo nên bởi tổng có trọng số của các subloss - tạo nên từ MS (mean square) của phương trình trong hệ trên bằng cách chuyển các hạng tử về một vế, vế còn lại bằng 0. Việc này đòi hỏi một thư viện deep learning có khả năng tùy biến loss function một cách dễ dàng và linh hoạt. Do đó, ta chọn thư viện Tensorflow core v2.4.0 - phiên bản mới nhất hiện tại. Tuy nhiên, về mặt bản chất, ta sử dụng core v1.15.0 được tích hợp chung với v2.4.0 vì 2 lý do sau:

- Phương pháp training trên v1.15.0 linh hoạt hơn, dễ dàng tùy biến loss function cũng như các bước cập nhật khác trong quá trình training.
- Do công cụ được dùng để train là Google Colab, mà Colab được cài đặt sẵn Tensorflow v2.4.0, việc cài đặt lại Tensorflow mỗi lần thực thi chương trình sẽ mất rất nhiều thời gian.



Các bước train và predict các phương trình được mô tả trong link google colab đính kèm dưới đây.

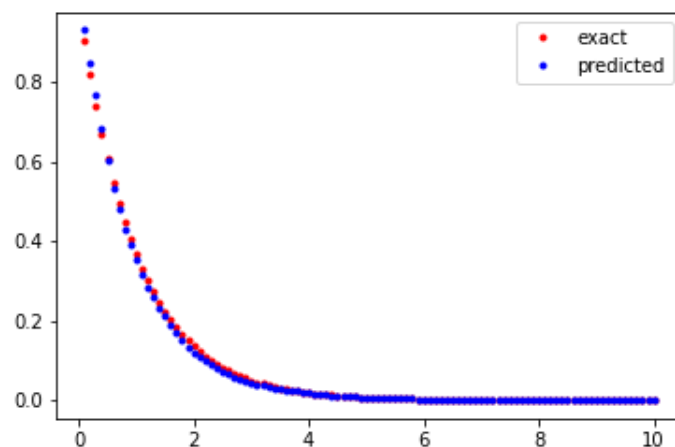
https://colab.research.google.com/drive/1ZUYGg7dx9qbDKMfzcg4fXWw0AeI_14m2?usp=sharing

5.4 Kết quả thí nghiệm

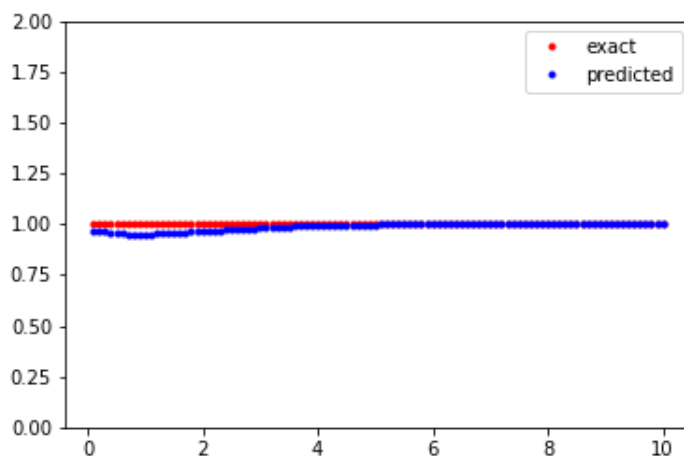
5.4.1 Sử dụng hệ phương trình vi phân ở phần trước

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) = x - 2y - 2e^{-t} + 2, & x_0 = x(0) = 1 \\ y' = \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) = 2x - y - 2e^{-t} + 1, & y_0 = y(0) = 1 \end{cases} \quad (68)$$

Khi train trên đoạn $(0, 20]$, ta được kết quả sau:



Hình 10: Giá trị của x từ công thức nghiệm chính xác và từ neural network
Sai số trung bình : 0.0046



Hình 11: Giá trị của y từ công thức nghiệm chính xác và từ neural network
Sai số trung bình: 0.0130

5.4.2 Một ví dụ khác

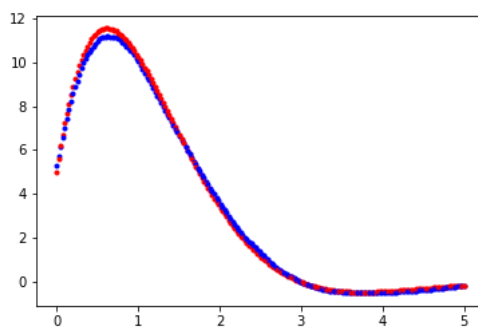
Xét bài toán sau:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \\ x(0) = 5 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

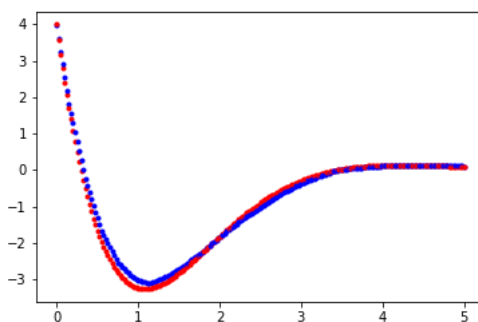
Nghiệm chính xác khi giải tay là

$$\begin{cases} x(t) = 5e^{-t}(\cos t + 6 \sin t) \\ y(t) = e^{-t}(4 \cos t - 13 \sin t) \end{cases}$$

Train trên khoảng (0,5), nhận được kết quả tương ứng với $x(t)$ $y(t)$ như sau



Average loss is 0.09891526361576196



Average loss is 0.09245352073456518

References

- [1] C Kittas et al. “Wind induced air exchange rates in a greenhouse tunnel with continuous side openings”. In: *Journal of Agricultural Engineering Research* 65.1 (1966), pp. 37–49.
- [2] Paul W Lommen et al. “Photosynthetic model”. In: *Perspectives of Biophysical Ecology* (1994), pp. 43–52.
- [3] Luc Balemans. “Assessment of criteria for energetic effectiveness of greenhouse screens”. PhD thesis. 1989. URL: <http://lib.ugent.be/catalog/rug01:000179946>.
- [4] Thierry Boulard and Alain Baille. “Modelling of air exchange rate in a greenhouse equipped with continuous roof vents”. In: *Journal of Agricultural Engineering Research* 61.1 (1995), pp. 37–47.
- [5] N.J.van de Braak MIGUEL A.F. and 1995 G.P.ABot. “Mass flow through materials with pores and openings: II-natural convection”. In: *submitted for publication in International Journal of Heat and Mass Transfer* ().
- [6] Nykamp DQ. *Dynamical system definition*. URL: http://mathinsight.org/definition/dynamical_system.
- [7] Christopher Molthrop. “A comparison of Euler and Runge-Kutta methods”. In: ().
- [8] Trịnh Đức Tài. *Phương trình vi phân*. URL: <https://www.slideshare.net/NguyenVietnam2/math-educare-bai-giang-phuong-trinh-vi-phantrinh-duc-tai>.
- [9] Christopher C. Tisdell. “What is a Lipschitz condition?” In: (2012).
- [10] B. Vanthoor. “A model-based greenhouse design method”. In: (Jan. 2011).
- [11] Wikipedia. *Density of Air*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Density_of_air.
- [12] Wikipedia. *Tetens equation*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Tetens_equation.