Phương pháp chéo hóa ma trận bất kỳ.

Bước 1:	Tìm nghiệm λ của phương trình đặc trưng sau: $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$.
Bước 2:	Tương ứng với mỗi λ. Giải hệ phương trình $(A-\lambda I)X=\theta$ với $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ hoặc $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ → để tìm nghiệm cơ bản (nghĩa là ứng với mỗi thì hệ PT $(A-\lambda I)X=0$ luôn có $rank(A)=rank(\bar{A})<n$).
Bước 3:	Xác định Bội đại số (BĐS) và Bội hình học (BHH). Trong đó: ✓ BĐS: là số lần lặp của nghiệm λ trong phương trình đặc trưng. ✓ BHH: là số nghiệm cơ bản tương ứng với mỗi λ.
Bước 4:	Check BĐS $\overset{(???)}{=}$ BHH ứng với mỗi λ. → (???) đúng: Chéo hóa được: sang bước 5. → (???) sai: Không chéo hóa được: Dừng.
Bước 5:	P là ma trận vuông với các nghiệm cơ bản được xếp lại thành cột. $D=P^{-1}AP$ là ma trận chéo của A.

Ví dụ 1: $A=\begin{pmatrix}5&-3&1\\-3&5&1\\0&0&8\end{pmatrix}$.

Bước 1: Ta có.

$$A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}5&-3&1\\-3&5&1\\0&0&8\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-\lambda&-3&1\\-3&5-\lambda&1\\0&0&8-\lambda\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}5-\lambda&-3&1\\-3&5-\lambda&1\\0&0&8-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+18\lambda^2-96\lambda+128.$$

Khi đó $P_A(\lambda)=-\lambda^3+18\lambda^2-96\lambda+128=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda=2\,(\text{BĐS}=1)\\ \lambda=8\,(\text{BĐS}=2)\end{array}\right.$.

Bước 2:

Trường hợp $\lambda = 2$: Giải hệ phương trình $(A - 2I_3)X = \theta_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rankA = rankA = 2 < n = 3$. (Có 3 – 2 = 1 tham số phụ thuộc)

Trả về hệ phương trình:

$E_2 = \{t(1,1,0), t \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ hoặc } t(1,1,0), t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra có **một** nghiệm cơ bản là $(1,1,0)$. **(BHH = 1 = BĐS) (1)**

Trường hợp $\lambda = 8$: Giải hệ phương trình $(A - 8I_3)X = \theta_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rankA = rankA = 1 < n = 3$. (Có 3 – 1 = 2 tham số phụ thuộc)

Trả về hệ phương trình:

$E_8 = \{t(1,0,3) + s(0,1,3), s,t \in \mathbb{R}\}$

$$-3x - 3y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 3t + 3s \end{cases}, s,t \in \mathbb{R} \text{ hoặc } t(1,0,3) + s(0,1,3), s,t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra có **hai** nghiệm cơ bản là $(1,0,3)$ và $(0,1,3)$. **(BHH = 2 = BĐS) (2)**

Bước 4: Từ (1) và (2) ta suy ra **chéo hóa được**.

$\lambda = 2$ $\lambda = 8$

$t(1,1,0), t \in \mathbb{R}$. $(1,0,3)$ và $(0,1,3)$.

Bước 5: Vậy $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ và

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Bước 1: Ta có.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Khi đó $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 (\text{BĐS} = 1) \\ \lambda = 2 (\text{BĐS} = 1) \\ \lambda = 3 (\text{BĐS} = 1) \end{array}\right.$.

Bước 2:

Trường hợp $\lambda = 1$: Giải hệ phương trình $(A - I_3)X = \theta_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rankA = rank\bar{A} = 2 < n = 3$. (Có 3 – 2 = 1 tham số phụ thuộc)

Trả về hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} ,t\in\mathbb{R} \ \textit{hoặc} \ t(-1,1,0),t\in\mathbb{R}.$$

Suy ra có **một** nghiệm cơ bản là $(-1,1,0)$. **(BHH = 1 = BĐS) (1)**

Trường hợp $\lambda=2$: Giải hệ phương trình $(A-2I_3)X=\theta_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rankA=rankA=1<n=3.$$ (Có 3 – 2 = 1 tham số phụ thuộc)

Trả về hệ phương trình:

$$\begin{cases} y-z=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases} ,t\in\mathbb{R} \ \textit{hoặc} \ t(0,1,1),t\in\mathbb{R}.$$

Suy ra có **một** nghiệm cơ bản là $(0,1,1)$. **(BHH = 1 = BĐS) (2)**

Trường hợp $\lambda=3$:

Giải hệ phương trình $(A-3I_3)X=\theta_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rankA=rankA=1<n=3.$$

(Có 3 – 2 = 1 tham số phụ thuộc)

Trả về hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ -z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t, t\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases} \text{ hoặc } t(1,1,0), t\in\mathbb{R}.$$

Suy ra có **một** nghiệm cơ bản là $(1,1,0)$. **(BHH = 1 = BĐS) (3)**

<u>Bước 4</u>: Từ (1), (2) và (3) ta suy ra **chéo hóa được**.

<u>Bước 5</u>: Vậy $P=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ và

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$