Gv. Nguyễn Bá Hùng mail: bahung2681988@gmail.com

Công thức toán

1. Phương trình bậc hai một ẩn: $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

➢ ***Phương pháp:***

$$\Delta = b^2-4ac$$

- $\Delta>0 \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta=0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$
- $\Delta<0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

$$\Delta' = b'^2-ac$$

- $\Delta'>0 \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}, x_2=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$
- $\Delta'=0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=\dfrac{-b'}{a}$
- $\Delta'<0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

Áp dụng định lý Vi-ét nhẩm nghiệm:

+ Nếu $a+b+c=0$ thì pt có 1 nghiệm $x=1$ còn nghiệm kia là $x=\dfrac{c}{a}$.

+ Nếu $a-b+c=0$ thì pt có 1 nghiệm $x=-1$ còn nghiệm kia là $x=-\dfrac{c}{a}$.

2. Xét dấu tam thức bậc hai: $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0;\alpha,\beta\in\Re;\alpha<\beta;S=-\dfrac{b}{a})$

- $f(x)\geq 0,\forall x\in\Re \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\leq 0\\ a>0\end{cases}$
- $f(x)\leq 0,\forall x\in\Re \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\leq 0\\ a<0\end{cases}$
- α là nghiệm của $f(x) \Leftrightarrow f(\alpha)=0$
- $x_1<\alpha<x_2 \Leftrightarrow af(\alpha)<0$
- $\alpha<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ af(\alpha)>0\\ S/2-\alpha>0\end{cases}$
- $x_1<x_2<\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ af(\alpha)>0\\ S/2-\alpha<0\end{cases}$
- $x_1<\alpha<\beta<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}af(\alpha)<0\\ af(\beta)<0\end{cases}$
- $x_1<\alpha<x_2<\beta \Leftrightarrow \begin{cases}af(\alpha)<0\\ af(\beta)>0\end{cases}$
- $\alpha<x_1<\beta<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}af(\alpha)>0\\ af(\beta)<0\end{cases}$
- $\left[\begin{array}{l}\alpha<x_1<x_2\\ x_1<x_2<\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ af(\alpha)>0\end{cases}$
- $\left[\begin{array}{l}x_1<\alpha<x_2<\beta\\ \alpha<x_1<\beta<x_2\end{array}\right. \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)<0$
- $\alpha<x_1<x_2<\beta \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ af(\alpha)>0\\ af(\beta)>0\\ S/2-\alpha>0\\ S/2-\alpha<0\end{cases}$

3. Cấp số cộng:

a/. Định nghĩa: Dãy số $u_1,u_2,...,u_n,...$ gọi là một cấp số cộng có công sai d nếu $u_k=u_{k-1}+d$.

b/. Số hạng thứ n:

$u_n=u_1+(n-1)d$.

c/. Tổng n số hạng đầu tiên:

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=\frac{n}{2}[2u_1+(n-1)d].$$

4. Cấp số nhân:

a/. Định nghĩa: Dãy số $u_1,u_2,...,u_n,...$ gọi là một cấp số nhân có công bội q nếu $u_k=u_{k-1}.d$.

b/. Số hạng thứ n: $u_n=u_1.q^n$

c/. Tổng n số hạng đầu tiên:

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q} \quad (q\neq 1)$$

Nếu $-1 < q < 1$ ($|q| < 1$) thì $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{u_1}{1-q}$.

5. Bất đẳng thức Cauchy (Cô-Si):

- $a, b \ge 0$ thì $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$,dấu"="xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.
- $a, b, c \ge 0$ thì $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$,dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

6. Lũy thừa: a,b > 0

- $a^\alpha.a^\beta.a^\gamma = a^{\alpha+\beta+\gamma}$
- $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$
- $\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha$
- $a^\alpha b^\alpha = (a.b)^\alpha$
- $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^k}} = \sqrt[m.n]{a^k} = a^{\frac{k}{m.n}}$

7. Phương trình, bất phương trình mũ:

- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \ne 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 1 \\ f(x), g(x) \text{ có nghia} \end{cases}$
- $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] > 0 \end{cases}$

8. Logarit: $0 < N_1, N_2, N$ và $0 < a, b \ne 1$ ta có:

- $\log_a N = M \Leftrightarrow N = a^M$
- $\log_a \left(\dfrac{N_1}{N_2}\right) = \log_a N_1 - \log_a N_2$
- $\log_a a^M = M$
- $\log_a N^\alpha = \alpha \log_a N$
- $a^{\log_a N} = N$
- $\log_{a^\beta} N^\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta} \log_a N$
- $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$
- $N_1^{\log_a N_2} = N_2^{\log_a N_1}$
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
- $\log_a (N_1.N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$
- $\log_a \sqrt{N} = \log_a N^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \log_a N$

9. Phương trình, bất phương trình logarit:

- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \ne 1 \\ f(x) > 0 \ \text{v}\langle g(x) > 0 \rangle \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
- $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \ne 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] > 0 \end{cases}$

II. LƯỢNG GIÁC

A. Công thức lượng giác:

1. Hệ thức cơ bản.

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan x.\cot x = 1$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
- $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2. Các cung liên kết:

➢ ***Đối***

- cos(- x) = cos x
- sin(- x) = - sin x
- tan(- x) = - tan x
- cot(- x) = - cot x

➢ ***Bù***

- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\tan(\pi - x) = \tan x$
- $\cot(\pi - x) = -\cot x$

➢ ***Phụ***

- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$
- $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

➢ ***Hơn kém*** π

- $\tan(x + \pi) = \tan x$
- $\cot(x + \pi) = \cot x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$

➢ ***Hơn kém*** $\dfrac{\pi}{2}$

- $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$
- $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
- $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot x$
- $\cot\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\tan x$

3. Công thức nhân đôi

- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
  $= 2\cos^2 x - 1$
  $= 1 - 2\sin^2 x$
- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

4. Công thức hạ bậc

♦ $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

♦ $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

5. Công thức nhân ba

♦ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

♦ $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

♦ $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

6. Ct biêủ diễn qua $t = \tan\dfrac{x}{2}$

♦ $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

♦ $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

♦ $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

B. Công thức biến đổi

1. Công thức cộng

♦ $\sin(x \pm y) = \sin x.\cos y \pm \cos x.\sin y$

♦ $\cos(x \pm y) = \cos x.\cos y \mp \sin x.\sin y$

♦ $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x.\tan y}$

2. Tích thành tổng

♦ $\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

♦ $\sin a.\sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

♦ $\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$

Đặc biệt

♦ $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

♦ $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

♦ $1 \pm \sin 2x = (\sin x \pm \cos x)^2$

3. Tổng thành tích

♦ $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

♦ $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

♦ $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

♦ $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

♦ $\tan x \pm \tan y = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos x.\cos y}$

♦ $\cot x \pm \cot y = \dfrac{\sin(y \pm x)}{\sin x.\sin y}$

4. Phương trình lượng giác

a/. Phương trình cơ bản

➢ $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Đặc biệt:

♦ $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi;$

♦ $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi;$

♦ $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

➢ $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Đặc biệt:

♦ $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

♦ $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

♦ $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

➢ $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

➢ $\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

b/. Phương trình bậc n theo một hàm lượng giác

➢ ***Phương pháp:*** Đặt t = sin x (hoặc cos x, tan x, cot x) ta có

$$a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

Nếu t = cosx hoặc t = sinx thì có điều kiện $-1 \le t \le 1$

c/. Phương trình bậc nhất theo sinx và cosx

$$a\sin x + b\cos x = c \text{ (a.b} \neq 0)$$

Điều kiện có nghiệm $a^2 + b^2 \ge c^2$

➢***Phương pháp:*** Chia cả hai vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$ sau đó đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

c./ Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với sinx và cosx

$a.\sin^2 x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2 x = 0$

➢***Phương pháp:***

+ Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ có phải là nghiệm không.

+ Xét $\cos x \neq 0$ chia 2 vế cho $\cos^2 x$ và đặt $t = \tan x$.

d/. Phương trình dạng:

$a.(\sin x \pm \cos x) + b.\sin x.\cos x = c$

➢***Phương pháp:*** Đặt

$t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \dfrac{\pi}{4}\right), \; -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin x.\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$ (hoặc $\sin x.\cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$) và giải phương trình bậc hai theo t.

C. Hệ thức lượng trong tam giác:

1. Định lý hàm số cosin:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

2. Định lý hàm số sin:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

3. Công thức đường trung tuyến:

$$m_a=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}}$$

4. Công thức diện tích tam giác

$$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}ab.\sin C=p.r=\frac{abc}{4R}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

III. Đạo hàm và tích phân

1. Đạo hàm:

- $(u\pm v)'=u'\pm v'$
- $(u.v)'=u'.v+v'.u$
- $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$
- $y=f(u(x))\Rightarrow y'_u.u'_x$
- $(x^\alpha)'=\alpha.x^{\alpha-1}$
- $(u^\alpha)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$
- $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\cot u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$
- $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(e^x)'=e^x$
- $(e^u)'=u'.e^u$
- $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
- $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
- $(a^x)'=a^x.\ln a$
- $(a^u)'=u'.a^u.\ln a$
- $(\sin x)'=\cos x$
- $(\sin u)'=u'.\cos u$
- $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
- $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$
- $(\cos x)'=-\sin x$
- $(\cos u)'=-u'.\sin u$
- $(\log_a x)'=\frac{1}{x.\ln a}$
- $(\log_a u)'=\frac{u'}{u.\ln a}$
- $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\tan u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

2. Bảng các nguyên hàm:

- $\int dx=x+C$
- $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1)$
- $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$
- $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
- $\int\cos xdx=\sin x+C$
- $\int\sin xdx=-\cos x+C$
- $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$
- $\int e^x dx=e^x+C$
- $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$
- $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C$

❋Chú ý: Nếu $\int f(x)dx=F(x)+C$ thì $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

IV. Số phức

➢ ***Đơn vị ảo*** i**:**

$i^2=-1$

- $i^{4k}=1$
- $i^{4k+1}=i$
- $i^{4k+2}=-1$
- $i^{4k+3}=-i$

➢ ***Dạng đại số:***

$z=a+bi;a,b\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ số đối $-z=-a-bi$

- $a+bi=a'+b'i$

$\Leftrightarrow\{a=a';b=b'\}$

- $(a+bi)\pm(a+bi)$

$=(a\pm a')+(b+b')i$

- $z=a+bi$

$\Rightarrow$ số phức liên hợp

$\bar{z}=a-bi$

- $(a+bi)(a'+b'i)$

$=(aa'-bb')+(ab'+ba')i$

- $\bar{\bar{z}}=z$
- $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$
- $\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z'}$
- z là số thực $\Leftrightarrow z=\bar{z}$
- z là số ảo $\Leftrightarrow z=-\bar{z}$
- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z.\bar{z}}$
- $|z.z'|=|z|.|z'|$
- $z^{-1}=\frac{1}{|z|^2}.\bar{z}$
- $\frac{z'}{z}=z'.z^{-1}=\frac{z'.\bar{z}}{|z|^2}$
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$
- $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$

➢ ***z là căn bậc hai của w***

$\Leftrightarrow z^2=\text{w}$

Nếu $z=x+yi$, $w=a+bi$ thì

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}$$

➢ ***Dạng lượng giác***

- $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ với

$$\begin{cases}r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}\\\cos\varphi=\frac{a}{r};\sin\varphi=\frac{b}{r}\end{cases}$$

- $z'=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$ suy ra

$$\begin{cases} zz' = rr'[\cos(\varphi+\varphi') + i \\ \dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}[\cos(\varphi-\varphi') + i \\ z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n \\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right. \end{cases}$$

$$k = \overline{0, n-1}$$

V. Nhị thức Niwton.

♦ $\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

♦ $C_n^n = C_n^0 = 1$ ♦ $C_n^k = C_n^{n-k}$ ♦ $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ ♦ $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ♦ $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ ♦ $P_n = n!$

Chúc các em học tập tốt!