1 公式

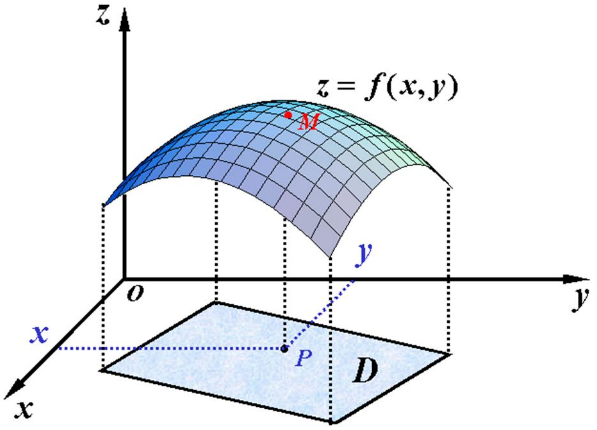
1.1 二维邻域

以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为圆心，δ 为半径围成一个圆。圆内所有的点 (不包括圆的边) 的集合称为 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0, \delta)$

1.2 二元函数

二元函数 $z = f(x, y)$ 的图像在三维坐标里是曲面

二元函数的可导与连续无关



1.3 二元函数的极限

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$

注意：二元函数求极限不能使用洛必达法则和单调有界准则

若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$，则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续

1.4 偏导数

偏导数的定义

$$f_x'(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

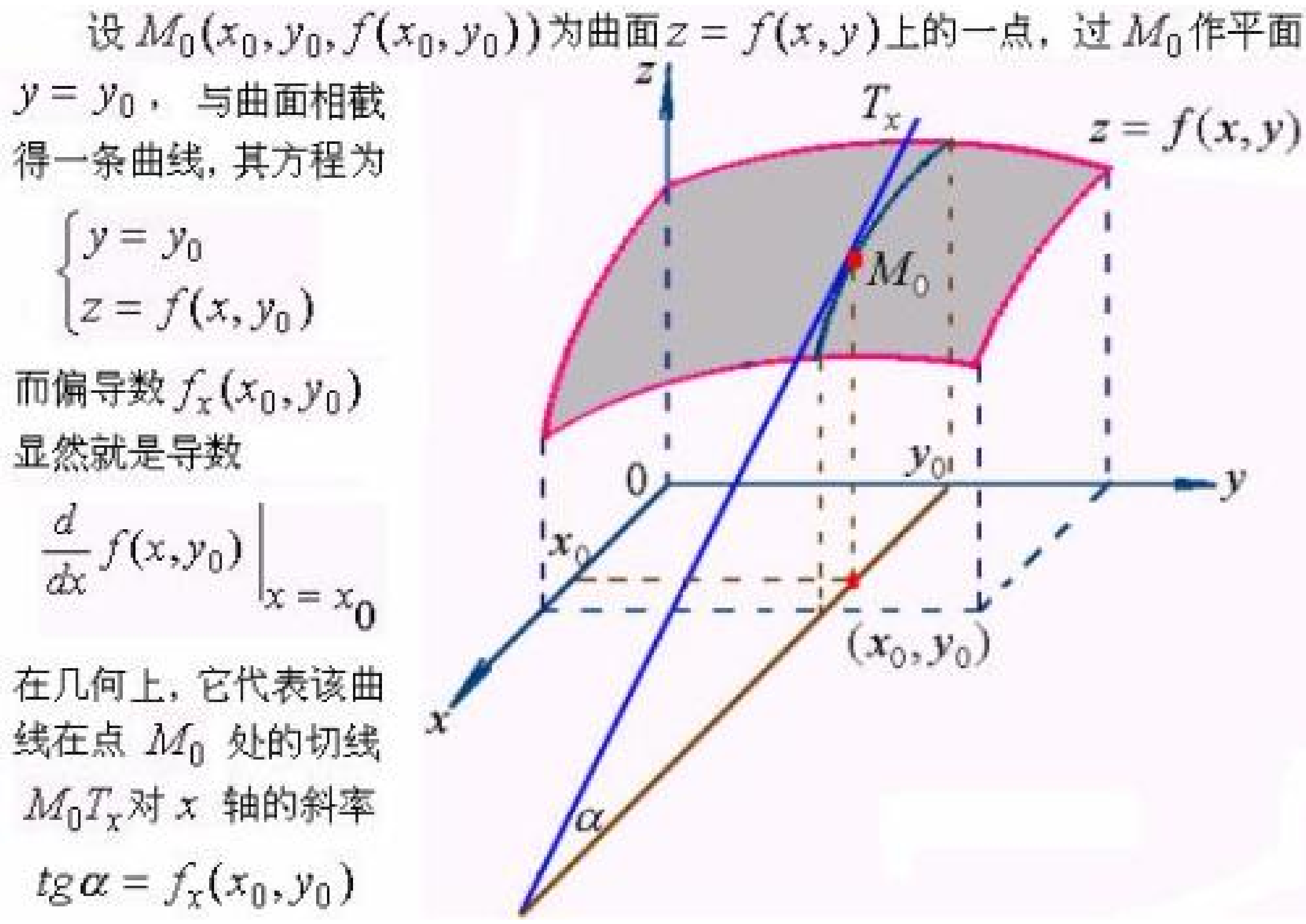
$$f_y'(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

求偏导数

1、对 x 求偏导：将 y 看作常数后再对 x 求导

2、对 y 求偏导：将 x 看作常数后再对 y 求导

偏导数的几何意义



1.5 二阶偏导数

按照对变量的求导顺序不同，二阶偏导数有以下四个

1、$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$
2、$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$
3、$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y)$
4、$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y)$

其中 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 称为混合偏导数

定理

若 $z = f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在点 (x_0, y_0) 处连续，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}|_{(x_0,y_0)}$

1.6 全微分