

1 公式

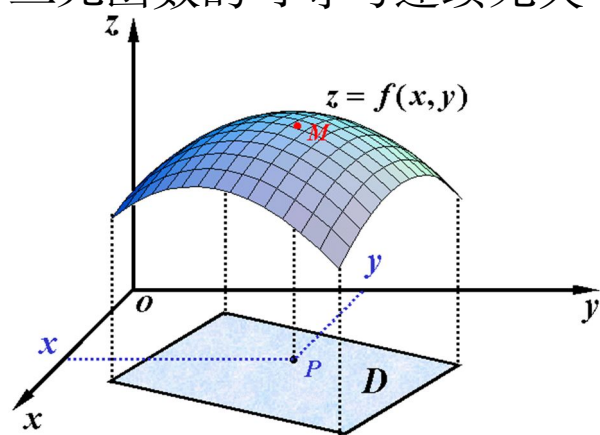
1.1 二维邻域

以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为圆心， δ 为半径围成一个圆。圆内所有的点（不包括圆的边）的集合称为 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0, \delta)$

1.2 二元函数

二元函数 $z = f(x, y)$ 的图像在三维坐标里是曲面

二元函数的可导与连续无关



1.3 二元函数的极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

注意：二元函数求极限不能使用洛必达法则和单调有界准则

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ，则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续

1.4 偏导数

偏导数的定义

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

求偏导数

- 1、对 x 求偏导：将 y 看作常数后再对 x 求导
- 2、对 y 求偏导：将 x 看作常数后再对 y 求导

偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点，过 M_0 作平面 $y = y_0$ ，与曲面相截得一条曲线，其方程为

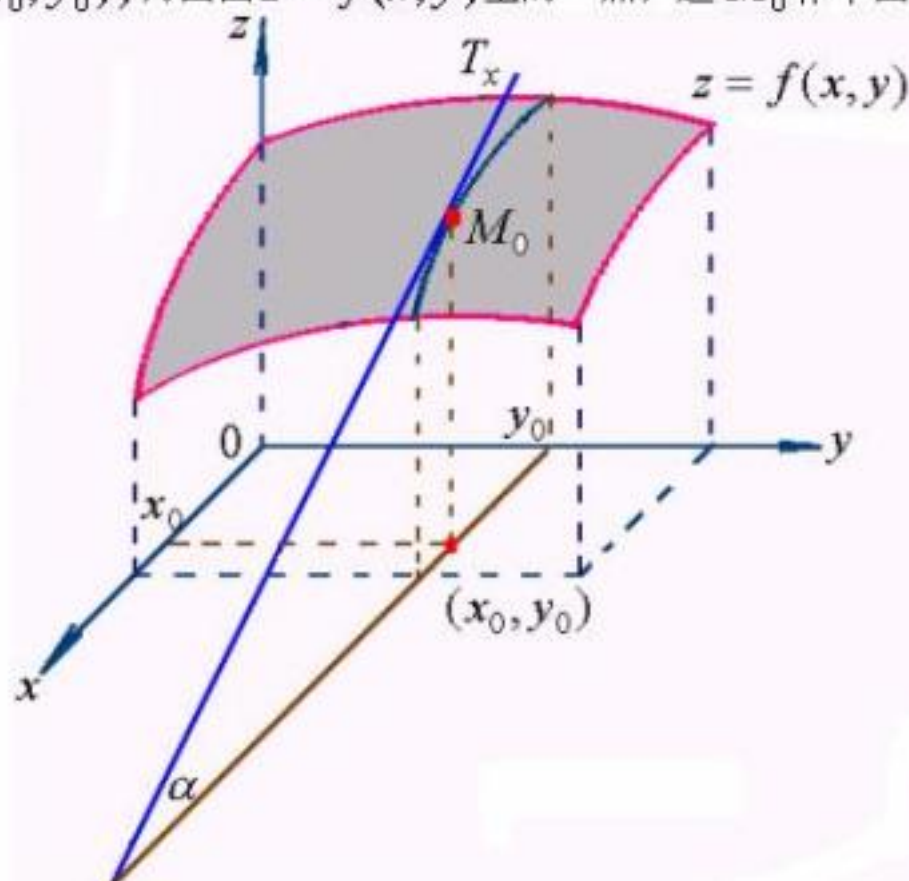
$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x, y_0) \end{cases}$$

而偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 显然就是导数

$$\left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0}$$

在几何上，它代表该曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率

$$\operatorname{tg} \alpha = f'_x(x_0, y_0)$$



1.5 二阶偏导数

按照对变量的求导顺序不同，二阶偏导数有以下四个

- 1、 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$
- 2、 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$
- 3、 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$
- 4、 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$

其中 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 称为混合偏导数

定理

若 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在点 (x_0, y_0) 处连续，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}|_{(x_0, y_0)}$

1.6 全微分