

1 导数

可导必连续，不连续必不可导

求某一点 x_0 的导数：用导数的定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

导数的几何意义

切线的斜率 k

切线方程： $y - y_0 = k(x - x_0)$

设 $f(x)$ 是 $(-a, a)$ 上的偶 (奇) 函数且可导，则 $f'(x)$ 是 $(-a, a)$ 上的奇 (偶) 函数

设 $f(x)$ 以 T 为周期且可导，则 $f'(x)$ 也以 T 为周期

可导 \pm 不可导 = 不可导

$y = f(x)$ 的反函数为 $x = \phi(y)$ ，则 $f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$

复合函数求导：从外到里层层求导

$f(x)$ 可导， $g(x)$ 连续但不可导，若 $f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x_0) = 0$

1.1 基本求导公式

$$(C)' = 0$$

$$(x^u)' = ux^{u-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

1.2 导数的四则运算

设 u, v 均可导, 则:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

2 求 n 阶导数

$$(e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}$$

$$[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin(ax+b + \frac{n\pi}{2})$$

$$[\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos(ax+b + \frac{n\pi}{2})$$

$$[\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \frac{(n-1)!}{(ax+b)^n}$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n a^n \frac{(n)!}{(ax+b)^{n+1}}$$

若 $f(x)$ 可分解成 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 且知道 $f_1^{(n)}(x)$ 和 $f_2^{(n)}(x)$, 则
 $f^{(n)}(x) = f_1^{(n)}(x) + f_2^{(n)}(x)$

莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^0 = 1$$

2.1 隐函数求导

$y = y(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定,

在方程 $F(x, y) = 0$ 两端直接对 x 求导

2.2 参数方程求导

$y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \Phi(t) \end{cases}$ 确定, 且 $\phi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 均可导, 则

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\Phi'(t)}{\phi'(t)}$$

3 微分

微分的定义: 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 如果函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ (其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是可微的, 且 $A\Delta x$ 称作函数在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 dy , 即

$$dy = A\Delta x$$

若 x 是自变量, 则 $\Delta x = dx$

可微必可导, 可导必可微, 且 $dy = f'(x)dx$

