1 公式

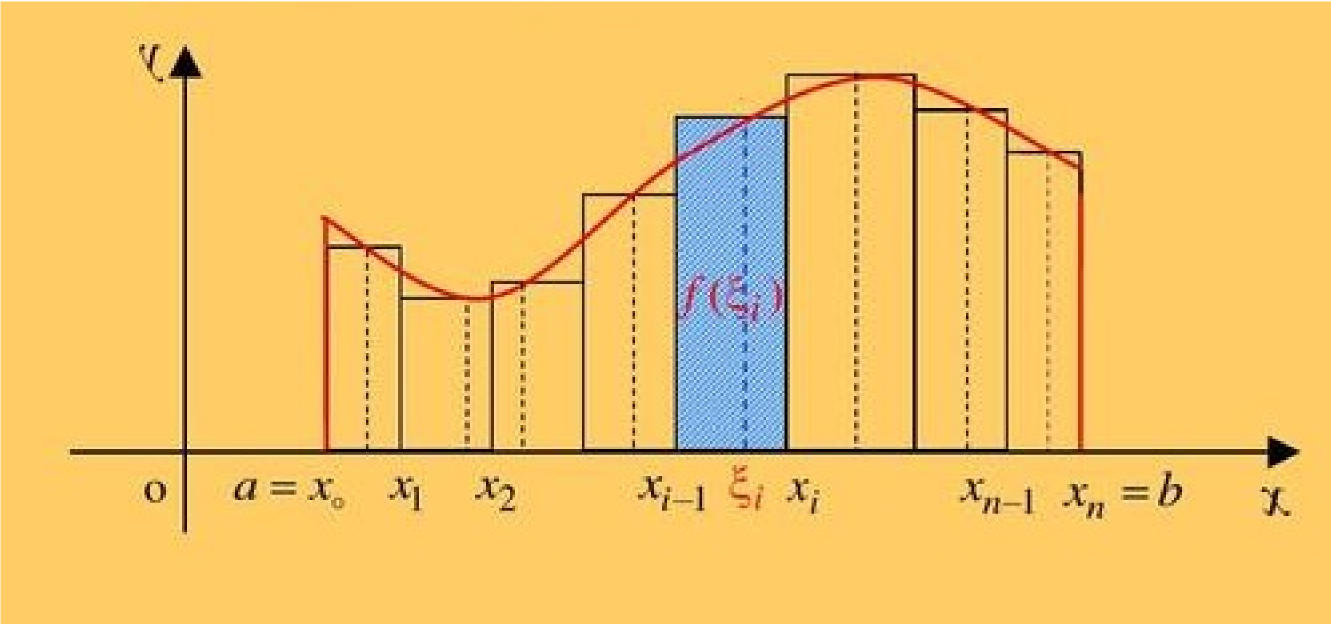
1.1 定积分

定积分是一个特殊的极限

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

其中 $\lambda = max\{\Delta x_1, \Delta x_2 ... \Delta x_n\}$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



定积分的几何意义: 曲边梯形的面积的代数和

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

1.2 定积分的性质

1. 等式性质

$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

2. 不等式性质 (前提 $b > a$)

设 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

设 $m < f(x) < M$, 则 $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

3. 积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 或 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

使用定积分定义求极限:$\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})$

1.3 微积分基本公式

变上限积分函数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,$\forall x_0 \in [a,b]$,$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt, (a \leq x \leq b)$ 称为变上限积分函数

变上限积分函数的性质

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续
2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且
$F^{'}(x) = (\int_{x_0}^{x} f(t)dt)^{'} = f(x)$
3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x) = \int_{x_0}^{\phi(x)} f(t)dt$, 则
$F^{'}(x) = f[\phi(x)]\phi^{'}(x)$
4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x) = \int_{\Phi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt$, 则
$F^{'}(x) = f[\phi(x)]\phi^{'}(x) - f[\Phi(x)]\Phi^{'}(x)$

设 $f(x)$ 是连续的奇 (偶) 函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶 (奇) 函数
推广
设 $f(x)$ 是连续的奇函数, 则 $\forall a$ 都有 $\int_a^x f(t)dt$ 是偶函数
设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 则只有 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数

重要不等式

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

柯西不等式

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则
$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

牛顿-莱布尼兹公式

若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

1.4 换元积分法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $x = \phi(t)$ 满足:
1.$\phi(\alpha) = a$ 且 $\phi(\beta) = b$
2.$\phi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上有连续导数, 且 $a \le \phi(t) \le b$
则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]d\phi(t) = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi^{'}(t)dt$

常用的换元

$\frac{1}{x}dx = dlnx$
$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = d2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x^2}dx = d(-\frac{1}{x})$

如果被积函数都是由 sin 或 cos 组成, 则:
1. 若 $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\cos x$
2. 若 $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\sin x$
3. 若 $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\tan x$

三角代换

$\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a\sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a\tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow x = a\sec t, 0 < t < \frac{\pi}{2}$

根式代换

$\sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow t$
$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t$

倒代换

若被积函数分母的次方比分子的次方高两次及以上, 则代换为 $x = \frac{1}{t}$

1.5 分部积分法

$\int_a^b udv = uv|_b^a - \int_a^b vdu$

何时用

两类不同的函数相乘做积分

$1.P_n(x)$ 作 $u \begin{cases} \int_a^b P_n(x)e^{ax}dx \\ \int_a^b P_n(x)\sin axdx \\ \int_a^b P_n(x)\cos axdx \end{cases}$

$2.P_n(x)$ 作 $v \begin{cases} \int_a^b P_n(x)lnxdx \\ \int_a^b P_n(x)\arcsin axdx \\ \int_a^b P_n(x)\arctan axdx \end{cases}$

3. 均可作 $u \begin{cases} \int_a^b e^{ax}\sin \beta xdx \\ \int_a^b e^{ax}\cos \beta xdx \end{cases}$

1.6 重要公式

1. 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$

2. 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 则
$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}2\int_{0}^{a}f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数}\\ 0, & f(x)\text{为奇函数}\end{cases}$

3. 若 $f(x)$ 是连续函数且周期为 T, 则:
(1)$\int_{a}^{a+T}f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx=\int_{0}^{T}f(x)dx$
(2)$\int_{a}^{a+nT}f(x)dx=n\int_{0}^{T}f(x)dx$
只要相差一个周期就相等

4. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 则:
(1)$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(sinx)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(cosx)dx$
(2)$\int_{0}^{\pi}xf(sinx)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(sinx)dx$

5.$\int_{a}^{b}\frac{1}{1+e^t}dt=\int_{a}^{b}(\frac{1}{1+e^t}\frac{e^{-t}}{e^{-t}})dt=-\int_{a}^{b}\frac{d(e^{-t}+1)}{e^{-t}+1}=-ln(e^{-t}+1)|_{a}^{b}$

6. 华里氏公式:$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}sin^nxdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}cos^nxdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{是大于 1 的奇数}\\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, & n\text{是偶数}\end{cases}$

示例:
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}sin^5xdx=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}cos^6xdx=\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{8}{15}$

1.7 反常积分

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数:

1.$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

2.$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

3.$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$

若右端的积分都收敛, 则称反常积分收敛, 否则发散

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数:

1. 若 $x = a$ 是瑕点, 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim\limits_{x \to a^+} F(x)$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

2. 若 $x = b$ 是瑕点, 则 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{x \to b^-} F(x) - F(a)$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

3. 若 $c \in (a, b)$ 是瑕点, 则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

若右端的积分都收敛, 则称反常积分收敛, 否则发散

瑕点: 使 $f(x)$ 无界的点

1.8 重要结论

1.$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} p > 1, \text{ 收敛} \\ p \leq 1, \text{ 发散} \end{cases} (a > 0)$

2.$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(lnx)^p} \begin{cases} p > 1, \text{ 收敛} \\ p \leq 1, \text{ 发散} \end{cases} (a > 1)$

3.$\int_a^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx \begin{cases} \lambda > 0, \text{ 收敛} \\ \lambda \leq 0, \text{ 发散} \end{cases} (k \geq 0)$

4.$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}\begin{cases} p>1，收敛 \\ p\leq 1，发散 \end{cases}$

5. 泊松积分:$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0^+} xlnx = 0$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且是偶函数, 若 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)dx$