1 公式

1.1 微分方程的基本概念

微分方程

表示未知函数，未知函数的导数与自变量之间的关系的方程

微分方程的阶

未知函数最高阶导数的阶数

微分方程的解

找到一个函数代入微分方程能使该方程成为恒等式，找到的这个函数就是微分方程的解

微分方程的通解

找到的微分方程中含有任意常数，即我们经常用 C 表示常数，这一类函数能使微分方程成为恒等式，统称为微分方程的通解

微分方程的特解

在微分方程的基础上给出了初始条件（通常给出 x 和 y 的值关系）来确定出那个常数 C，从而确定出一个函数，这个函数即为该微分方程的特解

1.2 一阶微分方程

可分离变量的微分方程

定义：形如 $g(y)dy = f(x)dx$ 的方程
解法：方程两端直接积分，得出 $G(y) = F(x) + C$

齐次方程

定义：形如 $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$ 的方程
解法：令 $u = \frac{y}{x}$ 做换元，化成可分离变量的微分方程

一阶线性微分方程

定义：形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的方程
当 $Q(x) = 0$ 时，称为一阶线性齐次微分方程
当 $Q(x) \neq 0$ 时，称为一阶线性非齐次微分方程
解法：$y = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)$

伯努利方程

定义：形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ 的方程
解法：方程两端同乘 y^{-n}，再令 $z = y^{1-n}$ 做换元，化成一阶线性微分方程

1.3 高阶微分方程求解

高阶可降价微分方程

1、$y^{(n)} = f(x)$ 型

解法：方程两端直接做 n 次积分

2、$y^{''}=f(x\,y^{'})$ 型
解法：令 $y^{'}=p$，则 $y^{''}=p^{'}$，带入原方程，化为一阶方程

3、$y^{''}=f(y\,y^{'})$ 型
解法：令 $y^{'}=p$，则 $y^{''}=p\frac{dp}{dy}$，带入原方程，化为一阶方程

高阶线性微分方程

1、设 y_1 和 y_2 是 $y^{''}+P(x)y^{'}+Q(x)y=0$ 的两个无关解 (不成比例的解)，则 $Y=C_1y_1+C_2y_2$ 是该齐次方程的通解，其中 C_1 和 C_2 是任意常数
2、设 y^* 是 $y^{''}+P(x)y^{'}+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解，Y 是对应的齐次方程的通解，则 $y=Y+y^*$ 是该非齐次方程的通解
3、设 $y^{''}+P(x)y^{'}+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$，其中 y_1^* 是对应 $f_1(x)$ 的特解，y_2^* 是对应 $f_2(x)$ 的特解，则 $y_1^*+y_2^*$ 是该非齐次方程的特解
4、设 y_1^* 和 y_2^* 都是 $y^{''}+P(x)y^{'}+Q(x)y=f(x)$ 的特解，则 $y_1^*-y_2^*$ 是对应的齐次方程的解

二阶常系数齐次线性微分方程

定义：形如 $y^{''}+py^{'}+qy=0$ 的方程
解法：写出特征方程 $r_p^2r+q=0$
1、若特征方程有两个不相等实根 $r_1\neq r_2$，
则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

2、若特征方程有两个相等实根 $r_1 = r_2$，
则通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$
3、若特征方程有两个虚根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta_i$，
则通解为 $y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

定义：形如 $y^{''} + py^{'} + qy = f(x)$ 的方程
1、若 $f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$，则特解为 $y^{*} = e^{\lambda x}R_m(x)x^k$
其中 $R_m(x)$ 是 m 次一般多项式

$$k = \begin{cases} 0, & \lambda\text{不是特征方程的根} \\ 1, & \lambda\text{是特征方程的单根} \\ 2, & \lambda\text{是特征方程的重根} \end{cases}$$

2、若 $f(x) = e^{\lambda x}[P_m(x)cos\omega x + Q_n(x)sin\omega x]$，则特解为
$y^{*} = e^{\lambda x}[R_l(x)cos\omega x + S_l(x)sin\omega x]x^k$
其中 $R_l(x)$ 和 $S_l(x)$ 是两个不同的 m 次一般多项式，且
$l = max(m, n)$

$$k = \begin{cases} 0, & \lambda \pm \omega i\text{不是特征根} \\ 1, & \lambda \pm \omega i\text{是特征根} \end{cases}$$

二阶欧拉方程

定义：形如 $x^2 y^{''} + axy^{'} + by = f(x)$ 的方程
解法：令 $x = e^t (x > 0)$ 或 $x = -e^t (x < 0)$ 换元，化成二阶常系数线性微分方程