

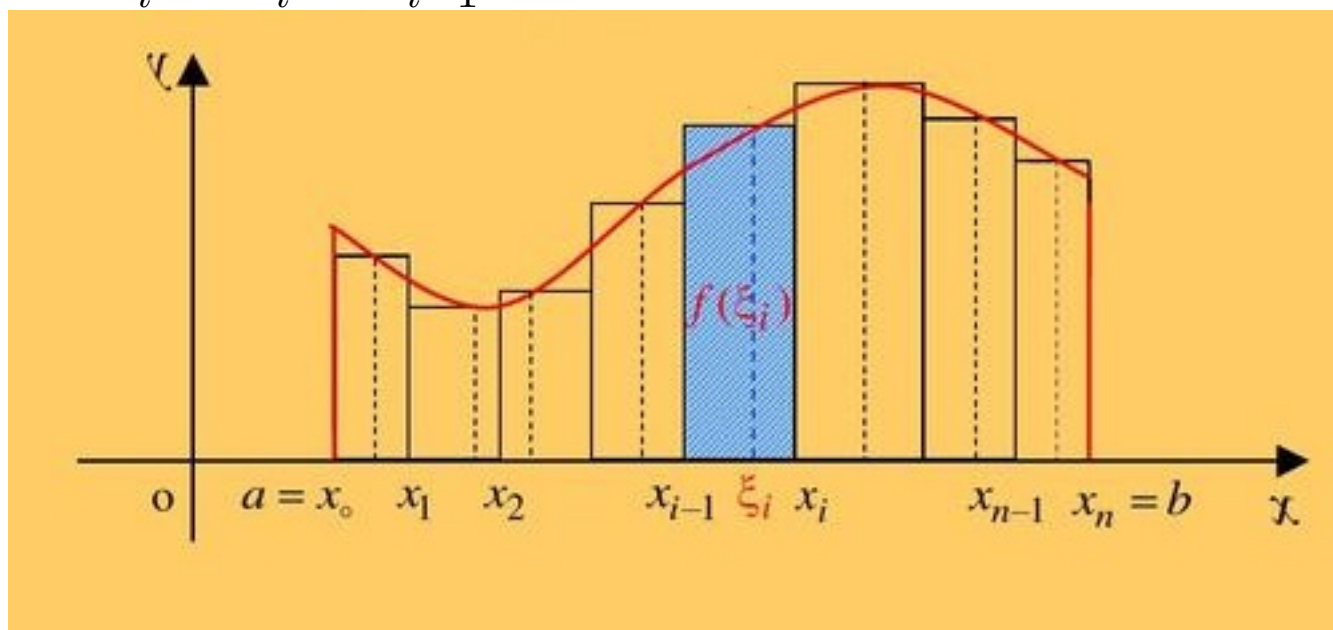
# 定积分

定积分是一个特殊的极限

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

其中  $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



定积分的几何意义: 曲边梯形的面积的代数和

若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积

若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 且只有有限个间断点, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积

# 定积分的性质

## 1. 等式性质

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

## 2. 不等式性质 (前提 $b > a$ )

$$\text{设 } f(x) \leq g(x), \text{ 则 } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$\text{设 } f(x) \geq 0, \text{ 则 } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\text{设 } m < f(x) < M, \text{ 则}$$

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

## 3. 积分中值定理

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $\exists \xi \in [a, b]$  或  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

## 使用定积分定义求极

$$\text{限: } \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

# 微积分基本公式

变上限积分函数: 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积,  $\forall x_0 \in [a, b], F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt, (a \leq x \leq b)$  称为变上限积分函数

变上限积分函数的性质:

1. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续
2. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $F'(x) = (\int_{x_0}^x f(t)dt)' = f(x)$
- 2.1. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $F(x) = \int_{x_0}^{\phi(x)} f(t)dt$ , 则  $F'(x) = f[\phi(x)]\phi'(x)$
- 2.2. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $F(x) = \int_{\Phi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt$ , 则  $F'(x) = f[\phi(x)]\phi'(x) - f[\Phi(x)]\Phi'(x)$

设  $f(x)$  是连续的奇 (偶) 函数, 则  $\int_0^x f(t)dt$  是偶 (奇) 函数

推广

设  $f(x)$  是连续的奇函数, 则  $\forall a$  都有  $\int_a^x f(t)dt$  是偶函数

4  
设  $f(x)$  是连续的偶函数, 则只有  $\int_0^x f(t)dt$  是奇函数

重要不等式:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

柯西不等式: 设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

牛顿-莱布尼兹公式:

若  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数,

则  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

## 换元积分法

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $x = \phi(t)$  满足:

1.  $\phi(\alpha) = a$  且  $\phi(\beta) = b$

2.  $\phi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  或  $[\beta, \alpha]$  上有连续导数, 且

$$a \leq \phi(t) \leq b$$

则  $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t)]d\phi(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t)]\phi'(t)dt$

常用的换元:

$$\frac{1}{x}dx = d\ln x$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = d2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{x^2}dx = d(-\frac{1}{x})$$

如果被积函数都是由  $\sin$  或  $\cos$  组成, 则:

1. 若  $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ , 则凑  $d\cos x$

2. 若  $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ , 则凑  $d\sin x$

3. 若  $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$ , 则凑  $d\tan x$

三角代换

$$\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a \sec t, 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

根式代换

$$\sqrt[n]{ax + b} \Rightarrow t$$

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t$$

倒代换: 若被积函数分母的次方比分子的次方高两次及以上, 则代换为  $x = \frac{1}{t}$

分部积分法

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

何时用? 两类不同的函数相乘做积分

$$\begin{aligned} 1. P_n(x) \text{ 作 } u & \begin{cases} \int_a^b P_n(x) e^{ax} dx \\ \int_a^b P_n(x) \sin ax dx \\ \int_a^b P_n(x) \cos ax dx \end{cases} \\ 2. P_n(x) \text{ 作 } v & \begin{cases} \int_a^b P_n(x) \ln x dx \\ \int_a^b P_n(x) \arcsin ax dx \\ \int_a^b P_n(x) \arctan ax dx \end{cases} \\ 3. \text{ 均可作 } u & \begin{cases} \int_a^b e^{ax} \sin \beta x dx \\ \int_a^b e^{ax} \cos \beta x dx \end{cases} \end{aligned}$$

## 重要公式

1. 若  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$

2. 若  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 为偶函数} \\ 0, & f(x) \text{ 为奇函数} \end{cases}$$

3. 若  $f(x)$  是连续函数且周期为  $T$ , 则:

$$(1) \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

$$(2) \int_a^{a+nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx$$

只要相差一个周期就相等

4. 若  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 则:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$(2) \int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$5. \int_a^b \frac{1}{1+e^t} dt = \int_a^b \left( \frac{1}{1+e^t} \frac{e^{-t}}{e^{-t}} \right) dt = - \int_a^b \frac{d(e^{-t}+1)}{e^{-t}+1} = -\ln(e^{-t}+1) \Big|_a^b$$

$$6. \text{ 华里氏公式: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx =$$

$$\begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 是大于 } 1 \text{ 的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$$

示例:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{8}{15}$$

## 反常积分