1 行列式定义

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

三阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - fha - ibd$

1.1 逆序数

在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序。一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数。记为 $\tau(i_1, i_2, ..., i_n)$

例：求 $\tau(32514)$

3 后面比它小的数有 2 个

2 后面比它小的数有 1 个

5 后面比它小的数有 2 个

1 后面比它小的数有 0 个

4 后面比它小的数有 0 个

即 $\tau(32514) = 2 + 1 + 2 + 0 + 0 = 5$

2 行列式的性质

1、行列互换，行列式的值不变

2、两行（列）互换，行列式的值变号

推论：两行（列）相同，行列式的值为 0

3、可以把某行（列）的公因子 k 提到行列式的外面

推论：某行（列）为 0，行列式的值为 0

推论：某两行（列）的元素对应成比例，行列式的值为 0

4、$\begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12}+c & a_{13}+d \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

5、某行（列）的 k 倍加到另外一行（列）上，行列式的值不变

3 行列式按行（列）展开

3.1 余子式

余子式 M_{ij} 为去掉第 i 行和第 j 列后，剩下的元素组成的行列式

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的一个余子式 $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

3.2 代数余子式

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

3.3 行列式按行（列）展开公式

行列式的值等于它的任意一行元素与其对应的代数余子式乘积之和

$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$

4 重要行列式

4.1 上（下）三角

主对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

4.2 拉普拉斯展开式