不定积分

若 $F^{'}(x)=f(x)$, 则 $F(x)$ 叫原函数

连续函数一定有原函数

不定积分:$\int f(x)dx=F(x)+C$

基本积分表

$\int kdx=kx+C$

$\int x^u dx=\frac{x^{u+1}}{u+1}+C$

$\int \frac{1}{x}dx=ln|x|+C$

$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

$\int \cos xdx=\sin x+C$

$\int \sin xdx=-\cos x+C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}=\tan x+C$

$\int \sec^2 x=\tan x+C$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$
$$\int \csc^2 x = -\cot x + C$$
$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$
$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$$
$$\int \tan x dx = -ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x dx = ln|\sin x| + C$$
$$\int \sec x dx = ln|\sec x + \tan x| + C$$
$$\int \csc x dx = ln|\csc x - \cot x| + C$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

不定积分的性质

$$\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = f(x)$$
$$\int F^{'}(x)dx = F(x)$$

$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

设 $f(x)$ 在区间 I 上除 $x = c$ 之外处处连续, 且 $x = c$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 则 $f(x)$ 在 I 上没有原函数

$f(x)$ 是奇函数, 则 $\int f(x)dx$ 和 $f^{'}(x)$ 是偶函数

换元积分法

第一类换元法: 设 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则
$\int f[\phi(x)]\phi^{'}(x)dx = \int f[\phi(x)]d\phi(x) = F[\phi(x)] + C$

常用的换元:
$\frac{1}{x}dx = dlnx$
$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = d2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x^2}dx = d(-\frac{1}{x})$

如果被积函数都是由 sin 或 cos 组成, 则:

1. 若 $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\cos x$
2. 若 $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\sin x$
3. 若 $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\tan x$

第二类换元法:

1. 三角代换

$\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x = a\sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow x = a\tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow x = a\sec t, 0 < t < \frac{\pi}{2}$

2. 根式代换

$\sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow t$

$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t$

3. 倒代换: 若被积函数分母的次方比分子的次方高两次及以上, 则代换为 $x = \frac{1}{t}$

分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

何时用? 两类不同的函数相乘做积分

$$1.P_n(x) \text{ 作 } u \begin{cases} \int P_n(x)e^{ax}dx \\ \int P_n(x)\sin axdx \\ \int P_n(x)\cos axdx \end{cases}$$

$$2.P_n(x) \text{ 作 } v \begin{cases} \int P_n(x)lnxdx \\ \int P_n(x)\arcsin axdx \\ \int P_n(x)\arctan axdx \end{cases}$$

$$3. \text{ 均可作 } u \begin{cases} \int e^{ax}\sin \beta xdx \\ \int e^{ax}\cos \beta xdx \end{cases}$$

有理函数积分法

前提:$\frac{P(x)}{Q(x)}$,P 和 Q 是多项式,$Q(x)$ 可以因式分解

1. 若 $Q(x)$ 中有一个因子 $(x-a)^n$, 则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的分解式中有 $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_n}{(x-a)^n}$

2. 若 $Q(x)$ 中有一个因子 (x^2+px+q) 且 $p^2-4q<0$, 则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的分解式中有
$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}$