1　公式

1.1　函数

取整函数

$y=[x]$ 向左取整：$x-1<[x]\leq x$
一般搭配夹逼准则

奇偶性

若 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数
若 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数

单调性

若 $\forall x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 D 上单调递增
若 $\forall x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 D 上单调递减

有界性

若 $\exists M>0$，对 $\forall x\in D$，有 $|f(x)|\leq M$，则 $f(x)$ 有界
　　若 $\forall x\in D$，有 $f(x)\geq M_1$，则 $f(x)$ 有下界
　　若 $\forall x\in D$，有 $f(x)\leq M_2$，则 $f(x)$ 有上界

周期性

若 $\exists T>0$，对 $\forall x\in D$ 且 $x+T\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，则 $f(x)$ 有周期 T

1.2 极限

要分左右极限的情况

1、分段函数的分段点处
2、e 的无穷大型，如 $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$
3、$arctan\infty$ 型，如 $\arctan\frac{1}{x-1}$

极限的四则运算

设 $\lim f(x)=A\ \lim g(x)=B$，则：
1、$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$
2、$\lim[f(x)g(x)]=AB$
3、$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0)$

若 $\lim f(x)$ 存在 $\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 不存在，其他情况都没有结论

多项式除多项式求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+...+a_mx^0}{b_0x^n+...+b_nx^0}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & m<n\\ \infty, & m>n\end{cases}$$

例:

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\frac{3}{7}$

复合函数求极限

如果 $f(x)$ 连续，且 $g(x)$ 有极限 A，则:

$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim_{x\to x_0}g(x)]=f(A)$

例:

$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\frac{1}{6}}$

幂指函数求极限

若 $\lim f(x)=A>0$ 且 $\lim g(x)=B$，则: $\lim f(x)^{g(x)}=A^B$

1.3 重要极限

夹逼准则

函数 $A>B>C$，函数 A 的极限是 X，函数 C 的极限也是 X，那么函数 B 的极限就一定是 X

单调有界准则

单调递增且有上界，则有极限，单调递减且有下界，则有极限

重要极限

1、$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

1、推广 $\lim\limits_{A\to0}\frac{\sin A}{A}=1$，其中 A 为任意的表达式

2、$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

2、推广：$\lim(1+A)^B=e$，其中 A 和 B 为任意的表达式，且 $A\to0$，$B\to\infty$

1.4 无穷小

无穷小：极限为 0 的函数，(0 也是无穷小)

有界函数 $\times$ 无穷小仍是无穷小

设 α 和 β 是无穷小，且 $\alpha\neq0$，若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则 β 是比 α 的高阶无穷小，记为：$\beta=o(\alpha)$

$o(x^2)\pm o(x^2)=o(x^2)$

$o(x^2) \pm o(x^3) = o(x^2)$
$x^2 o(x^3) = o(x^5)$
$o(x^2) o(x^3) = o(x^5)$
$o(2x^2) = o(x^2)$

1.5 常用的等价

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则 β 与 α 是等价无穷小，记为：$\beta \sim \alpha$

$\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$
x 的高次方 $\pm x$ 的低次方 $\sim x$ 的低次方
　　例：$x^3 + 3x \sim 3x$

若 $\alpha \sim \alpha_1$ 且 $\beta \sim \beta_1$，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$

当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$
当 $x \to 0$ 时，$\arcsin x \sim x$
当 $x \to 0$ 时，$\tan x \sim x$
当 $x \to 0$ 时，$\arctan x \sim x$

当 $x \to 0$ 时，$ln(1+x) \sim x$
当 $x \to 0$ 时，$e^x - 1 \sim x$

当 $x \to 0$ 时，$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
当 $x \to 0$ 时，$\sec x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \to 0$ 时，$(1+\alpha x)^{\beta} - 1 \sim \alpha\beta x$

当 $x \to 0$ 时，$\alpha^{x} - 1 \sim x ln \alpha$

1.6 连续

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

连续 $\pm \times \div$ 连续 $=$ 连续
连续 $\pm$ 不连续 $=$ 不连续
若 $f(x)$ 连续 $g(x)$ 也连续，则 $f[g(x)]$ 连续

单调连续函数的反函数也连续，且单调性相同

闭区间内连续函数必有界
推广：
$f(x)$ 在 $(a\ b)$ 内连续，且 $\lim_{x \to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \to b^-} f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $(a\ b)$ 内有界

零点定理

$f(x)$ 在 $(a\ b)$ 内连续，且 $\lim_{x \to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \to b^-} f(x)$ 异号，则 $\exists \xi \in (a\ b)$，使得 $f(\xi) = 0$

1.7 间断点

第一类间断点

1、可去间断点：左右极限均存在且相等
2、跳跃间断点：左右极限均存在且不相等

第二类间断点

左右极限至少一个不存在
1、无穷间断点：$x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$ 时，$f(x) \to \infty$
2、振荡间断点：$x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$ 时，$f(x)$ 上下振荡

1.8 高中基础

根式有理化

若分母 (或分子) 是两个无理数相加 (或相减)，则把分子和分母同乘这两个无理数的和 (或差)，分母 (或分子) 就变成了有理数
例：

$$\sqrt{x^2}+1-x=\frac{\sqrt{x^2}+1-x}{1}$$
$$=\frac{(\sqrt{x^2}+1-x)(\sqrt{x^2}+1+x)}{\sqrt{x^2}+1+x}$$
$$=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2}+1+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2}+1+x}$$

立方差公式

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
例：

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$
$$= \frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{3}{1-x^3}$$
$$= \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}$$
$$= \frac{x+x^2-2}{1-x^3}$$

因式分解

1、$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

例：

$$x^2 - x - 2$$
$$= x^2 + (2-1)x + (2 \times (-1)) = (x+2)(x-1)$$

不等式

1、$||a| - |b|| \leq |a-b|$

2、$|a \pm b| \leq |a| + |b|$

2 题目

2.1 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$ $g(x) = e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$

所有的 x 都换成 $g(x)$：

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1 \text{ 即} x < 0 \\ 0, & |e^x| = 1 \text{ 即} x = 0 \\ -1, & |e^x| > 1 \text{ 即} x > 0 \end{cases}$$

所有的 x 都换成 $f(x)$:

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

2.2 设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$，证明当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = x - 1 = -1$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = x + 1 = 1$$

由于左右极限不相等，所以极限不存在

2.3 $y = xcosx$ 在 $(-\infty \ +\infty)$ 是否有界? 是否为 $x \to +\infty$ 的无穷大?

取 $x = 2k\pi \in (-\infty \ +\infty)$ 时，$y = 2k\pi$ 大于任意的常数 M，所以函数无界

取 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in (x \ +\infty)$ 时，$y = 0$，所以不是无穷大

2.4 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}$

函数连续，则函数值与极限相等，直接代入极限

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+\sqrt{3}}=\frac{2^3-1}{2^2-5\times 2+3}=\frac{7}{-3}$

2.5 求极限 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$

代入极限发现这是 $\frac{0}{0}$ 型的极限

则需要先消去 0 因子，再代入极限

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$

2.6 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

代入极限发现这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

则需要先消去 ∞ 因子，再代入极限

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

分子分母同除以最高次方

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}$

代入极限

$=\frac{3+0+0}{7+0-0}=\frac{3}{7}$

由此可推出多项式除多项式求极限的公式

2.7 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$

代入极限发现这是 $0\cdot\infty$ 型的极限

则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，再继续求

$\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$
根式有理化
$=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$
此时已变成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限
在 $x\to\infty$ 时，x^2+1 中的常数 1 对整体 x^2+1 的影响微乎其微，所以常数 1 可以忽略
$=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+x}=\frac{1}{2}$

2.8 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$

代入极限发现这是 $\infty-\infty$ 型的极限
则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，再继续求
$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$
使用立方差公式化简
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2-2}{1-x^3}$
此时已变成 $\frac{0}{0}$ 型的极限
因式分解
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$
$=-\frac{1+2}{1+1+1}=-1$

2.9 求极限 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2+9}}$

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2+9}}$
$f=\sqrt{u}$ 是连续函数，且 $u=\frac{x-3}{x^2+9}$ 有极限，则

$= \sqrt{\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2+9}}$
$= \sqrt{\frac{1}{6}}$

2.10 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx}{x}$
$= \lim\limits_{x\to\infty} sinx\frac{1}{x}$
有界函数 $\times$ 无穷小 $=$ 无穷小
$= 0$

2.11 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{sinx}}$

代入极限发现这是 1^∞ 型的极限
则需要凑重要极限
凑 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{sinx}}$
$= \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\frac{6x}{sinx}}$
幂指函数求极限
$= \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{sinx}}$
$= e^6$

2.12 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}]$

使用取整函数的性质 $x-1 < [x] \leq x$
$\Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] \leq \frac{1}{x}$

由于 $x \to 0^+$，知 $x > 0$

$\Rightarrow 1 - x < x[\frac{1}{x}] \leq 1$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x) = 1$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$

由夹逼准则可得

$\lim\limits_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}] = 1$

2.13 证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ 有极限，并求极限

设 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$，$x_1 = \sqrt{2}$

由 $x_1 < \sqrt{2} < 2$，设 $x_k < 2$，则 $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = 2$

可知 $x_n < 2$，即数列有上界 2

判断单调性：

$x_{n+1} - x_n$

$= \sqrt{2+x_n} - x_n$

根式有理化

$= \frac{x_n+2-x_n^2}{\sqrt{x_n+2}+x_n}$

$= \frac{(2-x_n)(1+x_n)}{\sqrt{x_n+2}+x_n}$

由于 $1+x_n, \sqrt{x_n+2}, x_n$ 都大于 0，此时整个式子的正负由 $2-x_n$ 决定

由于 x_n 的上界为 2，则 $2 - x_n > 0$

$x_{n+1} - x_n > 0$ 即 $x_{n+1} > x_n$

则数列单调递增

由单调有界准则知，数列有极限

令 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = A$

在 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ 两端取极限

$\lim\limits_{x\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2+x_n}$

$\lim\limits_{x\to\infty} x_{n+1} = \sqrt{2+A}$

x_{n+1} 可以看作是 x_n 的子列

子列与数列极限相同，则 $\lim\limits_{x\to\infty} x_{n+1} = A$

即 $A = \sqrt{2+A}$

$A = 2$ 或 $A = -1$

由于数列大于 0，则 $A = 2$