

1 公式

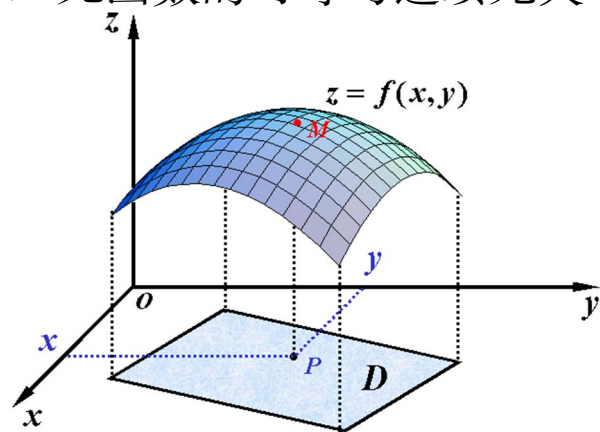
1.1 二维邻域

以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为圆心， δ 为半径围成一个圆。圆内所有的点（不包括圆的边）的集合称为 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0, \delta)$

1.2 二元函数

二元函数 $z = f(x, y)$ 的图像在三维坐标里是曲面

二元函数的可导与连续无关



1.3 二元函数的极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

注意：二元函数求极限不能使用洛必达法则和单调有界准则

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ，则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续

1.4 偏导数

偏导数的定义

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

求偏导数

- 1、对 x 求偏导：将 y 看作常数后再对 x 求导
- 2、对 y 求偏导：将 x 看作常数后再对 y 求导

偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点，过 M_0 作平面 $y = y_0$ ，与曲面相截得一条曲线，其方程为

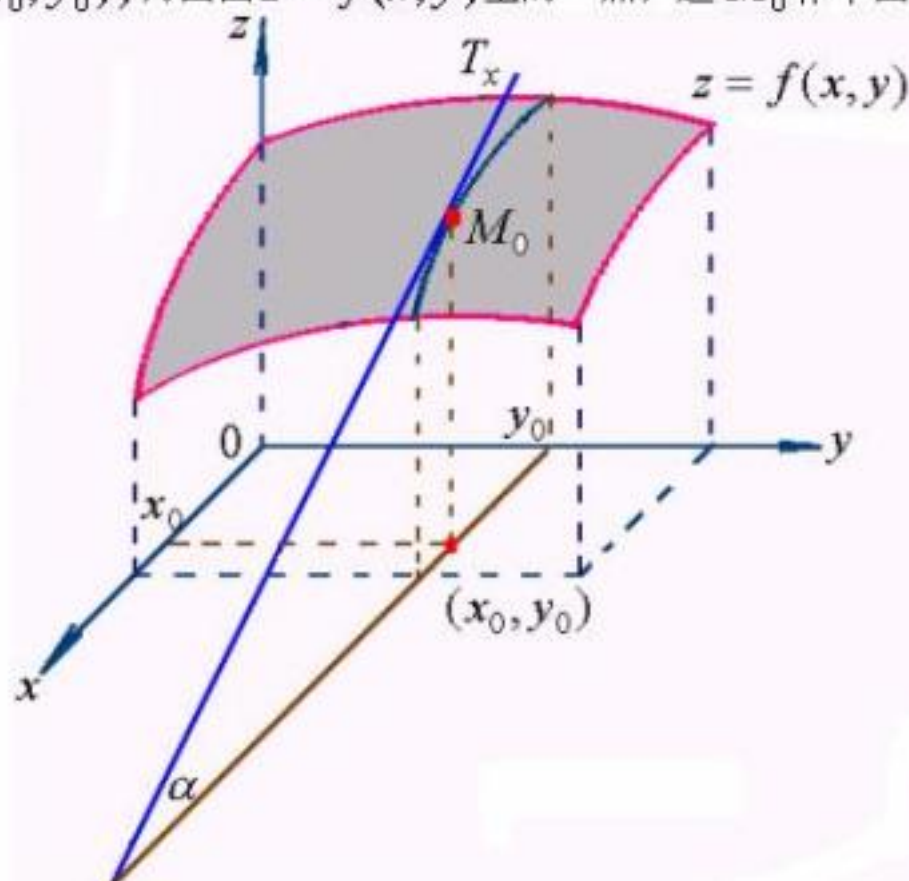
$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x, y_0) \end{cases}$$

而偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 显然就是导数

$$\left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0}$$

在几何上，它代表该曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率

$$\operatorname{tg} \alpha = f'_x(x_0, y_0)$$



1.5 二阶偏导数

按照对变量的求导顺序不同，二阶偏导数有以下四个

- 1、 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$
- 2、 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$
- 3、 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$
- 4、 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$

其中 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 称为混合偏导数

定理

若 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在点 (x_0, y_0) 处连续，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}|_{(x_0, y_0)}$

1.6 全微分

设 $z = f(x, y)$ ，若全增量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 可表示为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ ，其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ，则称 z 在 (x_0, y_0) 处可微

$A\Delta x + B\Delta y$ 称为 z 在 (x_0, y_0) 处的微分，记为

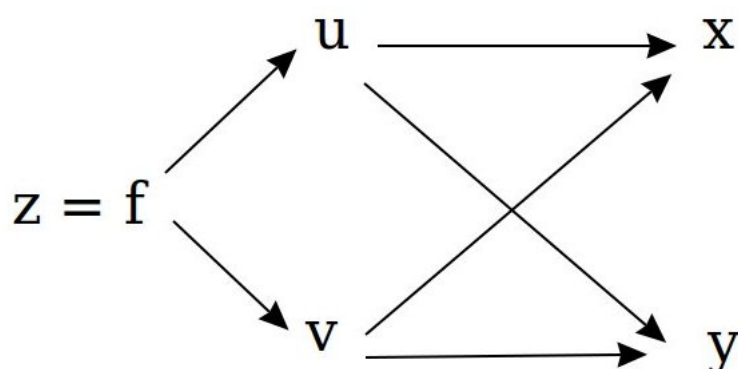
$$dz|_{(x_0, y_0)} = A\Delta x + B\Delta y, \text{ 且 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

若 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续且可偏导，且微分 $dz = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, y_0)}dx + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0, y_0)}dy$

若 $z = f(x, y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都在点 (x_0, y_0) 处连续, 则 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微

1.7 多元复合函数求偏导

1、将函数 $z = f(u(x, y), v(x, y))$ 画成如下的关系图:



$$2、\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$3、\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

1.8 隐函数求导

隐函数存在定理 1

设 $F(x, y)$ 有连续一阶偏导数, 且 $F'_y \neq 0$, 则方程 $F(x, y) = 0$ 确定 $y = y(x)$, 且 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$

隐函数存在定理 2

设 $F(x, y, z)$ 有连续一阶偏导数, 且 $F'_z \neq 0$, 则方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定 $z = z(x, y)$, 且 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$

1.9 方程组求偏导

设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 由方程组 $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 确定,

在方程两端直接对 x 求偏导, 有 $\begin{cases} F'_x + F'_u \frac{\partial u}{\partial x} + F'_v \frac{\partial v}{\partial x} \\ G'_x + G'_u \frac{\partial u}{\partial x} + G'_v \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$, 可以解出 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$

1.10 多元函数微分学的几何应用

曲面的切平面与法线

1、若曲面以隐式 $F(x, y, z) = 0$ 给出, 则法向量 $\vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z)$

2、若曲面以显式 $z = f(x, y)$ 给出, 则法向量 $\vec{n} = (f'_x, f'_y, -1)$

切平面为 $F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0$

法线为 $\frac{x-x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(P_0)}$

空间曲线的切线与法平面

1、若空间曲线以参数形式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 给出, 且 $\alpha \leq t \leq \beta$, 则切向

量 $\vec{\tau} = (x'(t), y'(t), z'(t))$

2、若空间曲线以一般形式 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 给出, 则切向量

$\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, 其中 \vec{n}_1 和 \vec{n}_2 是两个曲面的法向量

1.11 方向导数

二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处沿着方向 $\vec{e}_l(\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数为 $\frac{\partial f}{\partial l}|_{P_0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$

方向导数是单侧的导数

方向导数的计算

若二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微，则 $z = f(x, y)$ 在点 P_0 沿任一方向导数都存在，

且 $\frac{\partial f}{\partial l}|_{P_0} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta$,

其中 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 是方向 l 的方向余弦

1.12 梯度

梯度是一个向量，且

$$\text{grad} f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\vec{i} + f'_y(x_0, y_0)\vec{j} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$$

方向导数与梯度向量的关系

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0, y_0)} = |\text{grad} f(x_0, y_0)|\cos\theta,$$

其中 θ 是方向导数的方向与梯度方向的夹角，且 $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

1、 $\theta = 0$ 时，方向导数最大，且值为梯度的值

2、 $\theta = \pi$ 时，方向导数最小

3、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，方向导数为零