

1 公式

1.1 微分方程的基本概念

微分方程

表示未知函数，未知函数的导数与自变量之间的关系方程

微分方程的阶

未知函数最高阶导数的阶数

微分方程的解

找到一个函数代入微分方程能使该方程成为恒等式，找到的这个函数就是微分方程的解

微分方程的通解

找到的微分方程中含有任意常数，即我们经常用 C 表示常数，这一类函数能使微分方程成为恒等式，统称为微分方程的通解

微分方程的特解

在微分方程的基础上给出了初始条件（通常给出 x 和 y 的值关系）来确定出那个常数 C ，从而确定出一个函数，这个函数即为该微分方程的特解

1.2 一阶微分方程

可分离变量的微分方程

定义：形如 $g(y)dy = f(x)dx$ 的方程

解法：方程两端直接积分，得出 $G(y) = F(x) + C$

齐次方程

定义：形如 $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$ 的方程

解法：令 $u = \frac{y}{x}$ 做换元，化成可分离变量的微分方程

一阶线性微分方程

定义：形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的方程

当 $Q(x) = 0$ 时，称为一阶线性齐次微分方程

当 $Q(x) \neq 0$ 时，称为一阶线性非齐次微分方程

解法： $y = e^{-\int P(x)dx} (\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C)$

伯努利方程

定义：形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ 的方程

解法：方程两端同乘 y^{-n} ，再令 $z = y^{1-n}$ 做换元，化成一阶线性微分方程

1.3 高阶微分方程求解

高阶可降价微分方程

1、 $y^{(n)} = f(x)$ 型

解法：方程两端直接做 n 次积分

2、 $y'' = f(x y')$ 型

解法：令 $y' = p$ ，则 $y'' = p'$ ，带入原方程，化为一阶方程

3、 $y'' = f(y y')$ 型

解法：令 $y' = p$ ，则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$ ，带入原方程，化为一阶方程

高阶线性微分方程

1、设 y_1 和 y_2 是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的两个无关解 (不成比例的解)，则 $Y = C_1y_1 + C_2y_2$ 是该齐次方程的通解，其中 C_1 和 C_2 是任意常数

2、设 y^* 是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解， Y 是对应的齐次方程的通解，则 $y = Y + y^*$ 是该非齐次方程的通解

3、设 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ ，其中 y_1^* 是对应 $f_1(x)$ 的特解， y_2^* 是对应 $f_2(x)$ 的特解，则 $y_1^* + y_2^*$ 是该非齐次方程的特解

4、设 y_1^* 和 y_2^* 都是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的特解，则 $y_1^* - y_2^*$ 是对应的齐次方程的解

二阶常系数齐次线性微分方程

定义：形如 $y'' + py' + qy = 0$ 的方程

解法：写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

1、若特征方程有两个不相等实根 $r_1 \neq r_2$ ，

则通解为 $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

2、若特征方程有两个相等实根 $r_1 = r_2$,

则通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$

3、若特征方程有两个虚根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$,

则通解为 $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

定义：形如 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的方程

1、若 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$, 则特解为 $y^* = e^{\lambda x} R_m(x) x^k$

其中 $R_m(x)$ 是 m 次一般多项式

$$k = \begin{cases} 0, & \lambda \text{不是特征方程的根} \\ 1, & \lambda \text{是特征方程的单根} \\ 2, & \lambda \text{是特征方程的重根} \end{cases}$$

2、若 $f(x) = e^{\lambda x}[P_m(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$, 则特解为

$$y^* = e^{\lambda x}[R_l(x)\cos\omega x + S_l(x)\sin\omega x]x^k$$

其中 $R_l(x)$ 和 $S_l(x)$ 是两个不同的 m 次一般多项式, 且

$$l = \max(m, n)$$

$$k = \begin{cases} 0, & \lambda \pm \omega i \text{不是特征根} \\ 1, & \lambda \pm \omega i \text{是特征根} \end{cases}$$

二阶欧拉方程

定义：形如 $x^2y'' + axy' + by = f(x)$ 的方程

解法：令 $x = e^t (x > 0)$ 或 $x = -e^t (x < 0)$ 换元, 化成二阶常系数线性微分方程