

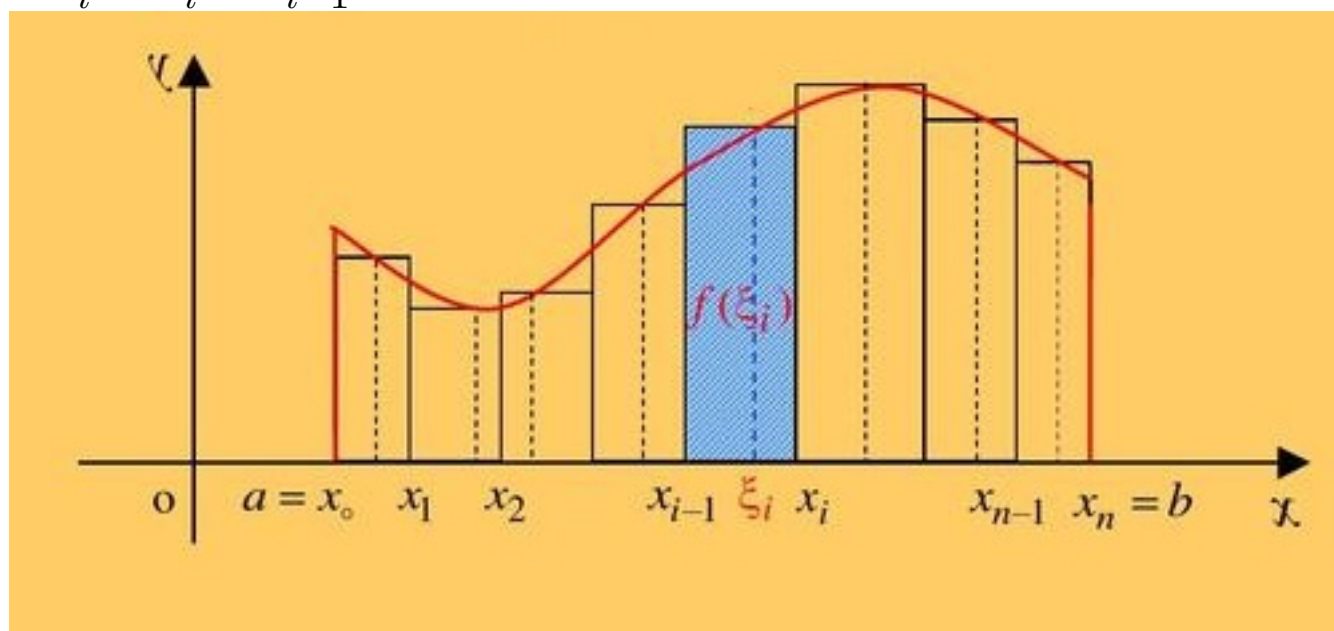
1 定积分

定积分是一个特殊的极限

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

，其中 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



定积分的几何意义：曲边梯形的面积的代数和

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

2 定积分的性质

等式性质

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

不等式性质 (前提 $b > a$)

$$\text{设 } f(x) \leq g(x), \text{ 则 } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$\text{设 } f(x) \geq 0, \text{ 则 } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\text{设 } m < f(x) < M, \text{ 则 } m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 或 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

使用定积分定义求极限

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

3 微积分基本公式

3.1 变上限积分函数

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $\forall x_0 \in [a, b]$, $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ ($a \leq x \leq b$) 称为变上限积分函数

3.2 变上限积分函数的性质

- 1、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续
- 2、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(x) = (\int_{x_0}^x f(t)dt)' = f(x)$
- 3、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(x) = \int_{x_0}^{\phi(x)} f(t)dt$, 则 $F'(x) = f[\phi(x)]\phi'(x)$
- 4、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(x) = \int_{\Phi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt$, 则 $F'(x) = f[\phi(x)]\phi'(x) - f[\Phi(x)]\Phi'(x)$

设 $f(x)$ 是连续的奇 (偶) 函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶 (奇) 函数
推广

设 $f(x)$ 是连续的奇函数, 则 $\forall a$ 都有 $\int_a^x f(t)dt$ 是偶函数

设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 则只有 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数

3.3 重要不等式

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

3.4 柯西不等式

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

3.5 牛顿-莱布尼兹公式

若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

4 换元积分法

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $x = \phi(t)$ 满足:

1、 $\phi(\alpha) = a$ 且 $\phi(\beta) = b$

2、 $\phi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 或 $[\beta, \alpha]$ 上有连续导数, 且 $a \leq \phi(t) \leq b$

$$\text{则 } \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]d\phi(t) = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt$$

4.1 常用的换元

$$\frac{1}{x}dx = d\ln x$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = d2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{x^2}dx = d(-\frac{1}{x})$$

如果被积函数都是由 \sin 或 \cos 组成, 则:

1、若 $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\cos x$

2、若 $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\sin x$

3、若 $f(-\sin x - \cos x) = f(\sin x \cos x)$, 则凑 $d \tan x$

4.2 三角代换

$$\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \sin t \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a \tan t \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a \sec t \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

4.3 根式代换

$$\sqrt[n]{ax + b} \Rightarrow t$$

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t$$

4.4 倒代换

若被积函数分母的次方比分子的次方高两次及以上, 则代换为 $x = \frac{1}{t}$

5 分部积分法

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

5.1 何时用

两类不同的函数相乘做积分

$$1、P_n(x) \text{ 作 } u \begin{cases} \int_a^b P_n(x) e^{ax} dx \\ \int_a^b P_n(x) \sin ax dx \\ \int_a^b P_n(x) \cos ax dx \end{cases}$$

$$2、P_n(x) \text{ 作 } v \begin{cases} \int_a^b P_n(x) \ln x dx \\ \int_a^b P_n(x) \arcsin ax dx \\ \int_a^b P_n(x) \arctan ax dx \end{cases}$$

$$3、\text{均可作 } u \begin{cases} \int_a^b e^{ax} \sin \beta x dx \\ \int_a^b e^{ax} \cos \beta x dx \end{cases}$$

6 重要公式

1、若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$

2、若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 为偶函数} \\ 0, & f(x) \text{ 为奇函数} \end{cases}$$

3、若 $f(x)$ 是连续函数且周期为 T , 则:

$$(1) \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

$$(2) \int_a^{a+nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx$$

只要相差一个周期就相等

4、若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$(2) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

$$5、\int_a^b \frac{1}{1+e^t} dt = \int_a^b \left(\frac{1}{1+e^t} \frac{e^{-t}}{e^{-t}} \right) dt = - \int_a^b \frac{d(e^{-t}+1)}{e^{-t}+1} = -\ln(e^{-t}+1) \Big|_a^b$$

6、华里氏公式:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 是大于 } 1 \text{ 的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$$

示例:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{8}{15}$$

7 反常积分

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数:

$$1、\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a)$$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

$$2、\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

$$3、\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$$

若右端的积分都收敛, 则称反常积分收敛, 否则发散

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数:

$$1、\text{若 } x = a \text{ 是瑕点, 则 } \int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

$$2、\text{若 } x = b \text{ 是瑕点, 则 } \int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a)$$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

$$3、\text{若 } c \in (a, b) \text{ 是瑕点, 则 } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

若右端的积分都收敛, 则称反常积分收敛, 否则发散

瑕点: 使 $f(x)$ 无界的点

8 重要结论

$$1、 \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \leq 1, & \text{发散} \end{cases} (a > 0)$$

$$2、 \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \leq 1, & \text{发散} \end{cases} (a > 1)$$

$$3、 \int_a^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx \begin{cases} \lambda > 0, & \text{收敛} \\ \lambda \leq 0, & \text{发散} \end{cases} (k \geq 0)$$

$$4、 \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \leq 1, & \text{发散} \end{cases}$$

$$5、 \text{泊松积分: } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$6、 \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty + \infty)$ 内连续且是偶函数, 若 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx$$