1 公式

1.1 函数

取整函数

$y = [x]$ 向左取整: $x - 1 < [x] \leq x$
一般搭配夹逼准则

1.2 极限

要分左右极限的情况

1. 分段函数的分段点处
2.e 的无穷大型, 如 $\lim\limits_{x \to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$
3.$arctan\infty$ 型, 如 $\arctan \frac{1}{x-1}$

极限的四则运算

设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则:
1.$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
2.$\lim[f(x)g(x)] = AB$
3.$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, (B \neq 0)$

若 $\lim f(x)$ 存在 $\lim g(x)$ 不存在, 则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 不存在, 其他情况都没有结论

多项式除多项式求极限

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + ... + a_m x^0}{b_0 x^n + ... + b_n x^0} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & m < n \\ \infty, & m > n \end{cases}$$

例:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \frac{3}{7}$$

复合函数求极限

如果 $f(x)$ 连续, 且 $g(x)$ 有极限 A, 则:

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \to x_0} g(x)] = f(A)$$

例:

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

幂指函数求极限

若 $\lim f(x) = A > 0$ 且 $\lim g(x) = B$,
则:$\lim f(x)^{g(x)} = A^B$

1.3 重要极限

夹逼准则

函数 $A > B > C$, 函数 A 的极限是 X, 函数 C 的极限也是 X, 那么函数 B 的极限就一定是 X

单调有界准则

单调递增且有上界, 则有极限, 单调递减且有下界, 则有极限

重要极限

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
$\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

1.4 无穷小

无穷小: 极限为 0,(0 也是无穷小)
有界函数 $\times$ 无穷小仍是无穷小

设 α 和 β 是无穷小, 且 $\alpha \neq 0$, 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则 β 是比 α 的高阶无穷小, 记为:$\beta = o(\alpha)$

$o(x^2) \pm o(x^2) = o(x^2)$
$o(x^2) \pm o(x^3) = o(x^2)$
$x^2 o(x^3) = o(x^5)$
$o(x^2) o(x^3) = o(x^5)$
$o(2x^2) = o(x^2)$

1.5 常用的等价

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则 β 与 α 是等价无穷小, 记为:$\beta \sim \alpha$

$\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$
x 的高次方 $\pm x$ 的低次方 $\sim x$ 的低次方
例:$x^3 + 3x \sim 3x$

若 $\alpha \sim \alpha_1$ 且 $\beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$

当 $x \to 0$ 时,$\sin x \sim x$
当 $x \to 0$ 时,$\arcsin x \sim x$
当 $x \to 0$ 时,$\tan x \sim x$
当 $x \to 0$ 时,$\arctan x \sim x$

当 $x \to 0$ 时,$ln(1+x) \sim x$
当 $x \to 0$ 时,$e^x - 1 \sim x$

当 $x \to 0$ 时,$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
当 $x \to 0$ 时,$\sec x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \to 0$ 时,$(1+\alpha x)^\beta - 1 \sim \alpha\beta x$

当 $x \to 0$ 时,$\alpha^x - 1 \sim xln\alpha$

1.6 连续

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

连续 $\pm \times \div$ 连续 $=$ 连续
连续 $\pm$ 不连续 $=$ 不连续
若 $f(x)$ 连续 $g(x)$ 也连续, 则 $f[g(x)]$ 连续

单调连续函数的反函数也连续, 且单调性相同

闭区间内连续函数必有界
推广:
$f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界

零点定理

$f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 异号, 则 $\exists\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$

1.7 间断点

第一类间断点

1. 可去间断点: 左右极限均存在且相等
2. 跳跃间断点: 左右极限均存在且不相等

第二类间断点

左右极限至少一个不存在

1. 无穷间断点:$x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$ 时,$f(x) \to \infty$

2. 振荡间断点:$x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$ 时,$f(x)$ 上下振荡

2 题目

2.1 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$

所有的 x 都换成 $g(x)$:

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1, 即x < 0 \\ 0, & |e^x| = 1, 即x = 0 \\ -1, & |e^x| > 1, 即x > 0 \end{cases}$$

所有的 x 都换成 $f(x)$:

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

2.2 设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ **,**
证明当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = x-1 = -1$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = x+1 = 1$
由于左右极限不相等, 所以极限不存在

2.3 $y = xcosx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是否有界?
是否为 $x \to +\infty$ 的无穷大?

取 $x = 2k\pi \in (-\infty,+\infty)$ 时,$y = 2k\pi$ 大于任意的常数 M, 所以函数无界
取 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in (x,+\infty)$ 时,$y = 0$, 所以不是无穷大