

1 微分中值定理

1.1 费马引理

$f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 有定义，并在 x_0 可导，如果 $f(x_0)$ 是极大 (小) 值，则 $f'(x) = 0$

1.2 罗尔定理

如果 $f(x)$ 满足：

- 1、在 $[a, b]$ 上连续
 - 2、在 (a, b) 内可导
 - 3、 $f(a) = f(b)$ 或 $f(a) = f(c)$ $a < c < b$
- 则在 (a, b) 内至少有一点 ξ ，使 $f'(\xi) = 0$

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内有二阶导数，且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ ，其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ ，则在 (x_1, x_3) 内至少有一点 ξ ，使 $f''(\xi) = 0$

推论：

- 1、两个点相等，则二阶导为 0
- 2、三个点相等，则三阶导为 0
- 3、.....

1.3 拉格朗日中值定理

如果 $f(x)$ 满足：

1、在 $[a, b]$ 上连续

2、在 (a, b) 内可导

则在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 在 I 内可导且导数恒为 0, 则 $f(x)$ 在 I 上是一个常数

当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

1.4 柯西中值定理

若 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足:

1、在 $[a, b]$ 上连续

2、在 (a, b) 内可导

3、对 $\forall x \in (a, b)$ $F'(x) \neq 0$

则在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

2 洛必达法则

若满足:

1、求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

2、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为 ∞

则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$

2.1 重要的等价

- 1、当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$
- 2、 $\sin(\arcsin x) = x$
- 3、当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3$
- 4、当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$
- 5、当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$
- 6、当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\ln x \ll x^n$
- 7、当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $x^n \ll e^{\lambda x}$ ($\lambda > 0$)
- 8、当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 对数函数 \ll 幂函数 \ll 指数函数

3 泰勒公式

泰勒公式 1

如果 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 则对 $\forall x \in U(x_0, \delta)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$$

* 其中 $o[(x - x_0)^n]$ 叫做佩亚诺余项

泰勒公式 2

如果 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内有 $n + 1$ 阶导数, 则对 $\forall x \in U(x_0, \delta)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$$x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

* 其中 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ 叫做拉格朗日余项

若 $x_0 = 0$ ，则上述泰勒公式又叫麦克劳林公式

3.1 重要的麦克劳林公式

1、 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$

2、 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$

3、 $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$

4、 $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

5、 $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$

4 导数与函数的单调性

一阶导大于 0，则函数单调增

一阶导小于 0，则函数单调减

驻点：导数为 0 的点

只有驻点和不可导的点才能成为单调区间的分界点

5 导数与曲线的凹凸性

二阶导大于 0，则曲线是凹的

二阶导小于 0，则曲线是凸的

拐点：连续曲线凹与凸的分界点

拐点的二阶导为 0 或不存在

5.1 拐点的第二判别法

若在 $\dot{U}(x_0)$ 内二阶可导，则：

- 1、 $f''(x)$ 在 x_0 两侧变号，则 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点
- 2、 $f''(x)$ 在 x_0 两侧不变号，则 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点

5.2 拐点的第二判别法

若 $f''(x_0) = 0$ ，则：

- 1、 $f'''(x_0) \neq 0$ ，则 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点
- 2、 $f'''(x_0) = 0$ ，则没有结论

凹曲线的切线在曲线下面

凸曲线的切线在曲线上面

6 导数与极值

极值点的一阶导为 0 或不存在

6.1 极值点的第一判别法

- 1、 $f'(x)$ 在 x_0 两侧变号，则 $(x_0, f(x_0))$ 是极值点
 $f'(x)$ 由正变负，则 $f(x_0)$ 是极大值

$f'(x)$ 由负变正, 则 $f(x_0)$ 是极小值

2、 $f'(x)$ 在 x_0 两侧不变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 不是极值点

6.2 极值点的第二判别法

若 $f'(x_0) = 0$, 则:

1、 $f''(x_0) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是极值点

$f''(x_0) > 0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值

$f''(x_0) < 0$, 则 $f(x_0)$ 是极大值

2、 $f''(x_0) = 0$, 则没有结论

若 $f'(x_0)$ 到 $f^{(n-1)}(x_0)$ 都为 0, 且 $f^{(n)} \neq 0$, 则:

1、若 n 为奇数, 则 $f(x_0)$ 不是极值

2、若 n 为偶数, 则 $f(x_0)$ 是极值

$f^{(n)}(x_0) > 0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值

$f^{(n)}(x_0) < 0$, 则 $f(x_0)$ 是极大值

7 导数与最值

连续函数在闭区间内必有最值

求最值:

1、求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的所有驻点和不可导的点

2、计算 $f(x)$ 在驻点, 不可导的点和端点 a 和 b 处的函数值

3、比较这些函数值, 最大的为最大值, 最小的为最小值

若连续函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一的极值点 x_0 , 则这个点就是最值点

8 渐近线

$x = a$ 是铅直渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = b$ 是水平渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = kx + b$ 是斜渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$

9 曲率

若曲线由直角坐标方程 $y = y(x)$ 给出, 则曲率 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

若曲线由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出, 则曲率 $k = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

曲率半径 $R = \frac{1}{K}$