1 公式

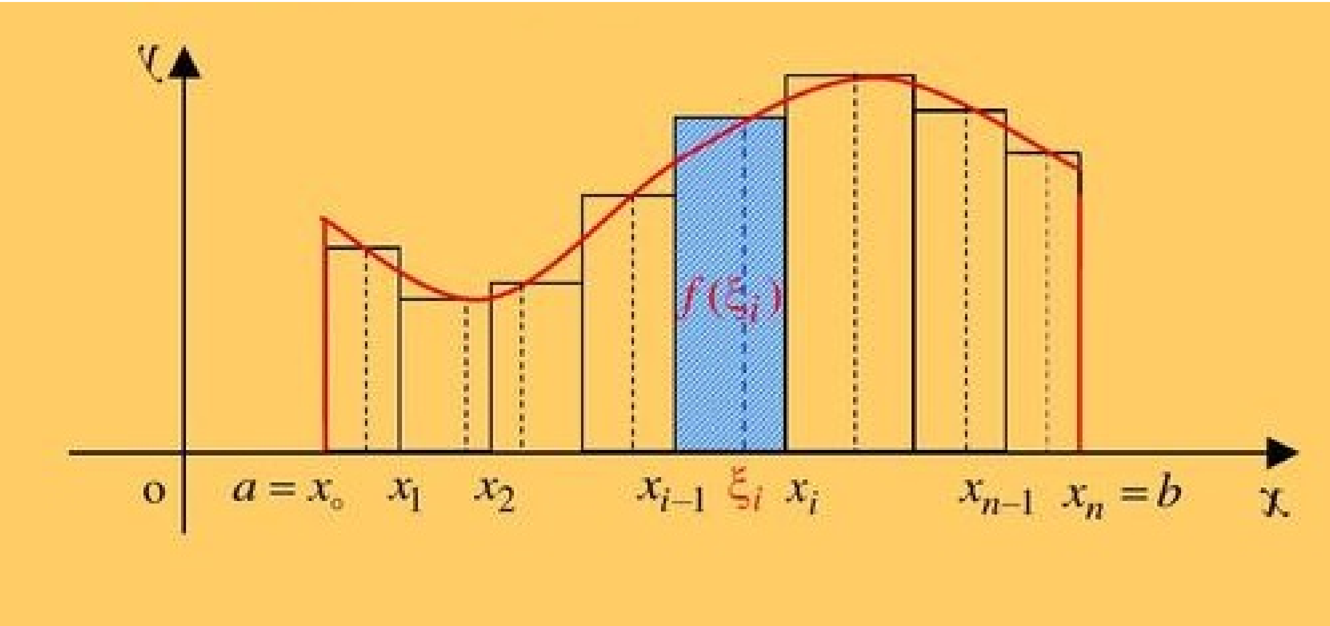
1.1 定积分

定积分是一个特殊的极限

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

其中 $\lambda = max\{\Delta x_1, \Delta x_2 ... \Delta x_n\}$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



定积分的几何意义: 曲边梯形的面积的代数和

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

1.2 定积分的性质

1. 等式性质

$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

2. 不等式性质 (前提 $b > a$)

设 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

设 $m < f(x) < M$, 则

$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

3. 积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists\xi \in [a,b]$ 或 $\exists\xi \in (a,b)$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

使用定积分定义求极限:$\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})$

1.3 微积分基本公式

变上限积分函数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,$\forall x_0 \in [a,b]$,$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt, (a \le x \le b)$ 称为变上限积分函数

变上限积分函数的性质

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续
2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $F^{'}(x)=(\int_{x_0}^{x} f(t)dt)^{'}=f(x)$
3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x)=\int_{x_0}^{\phi(x)} f(t)dt$, 则 $F^{'}(x)=f[\phi(x)]\phi^{'}(x)$
4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x)=\int_{\Phi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt$, 则 $F^{'}(x)=f[\phi(x)]\phi^{'}(x)-f[\Phi(x)]\Phi^{'}(x)$

设 $f(x)$ 是连续的奇 (偶) 函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶 (奇) 函数

推广

设 $f(x)$ 是连续的奇函数, 则 $\forall a$ 都有 $\int_a^x f(t)dt$ 是偶函数

设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 则只有 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数

重要不等式

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$

柯西不等式

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则
$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

牛顿-莱布尼兹公式

若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则
$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

1.4 换元积分法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $x=\phi(t)$ 满足:
1.$\phi(\alpha)=a$ 且 $\phi(\beta)=b$
2.$\phi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上有连续导数, 且 $a \leq \phi(t) \leq b$
则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]d\phi(t) = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi^{'}(t)dt$

常用的换元

$\frac{1}{x}dx = dlnx$

$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = d2\sqrt{x}$

$\frac{1}{x^2}dx = d(-\frac{1}{x})$

如果被积函数都是由 sin 或 cos 组成, 则:

1. 若 $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\cos x$
2. 若 $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\sin x$
3. 若 $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\tan x$

三角代换

$\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a\sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a\tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a\sec t, 0 < t < \frac{\pi}{2}$

根式代换

$\sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow t$

$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t$

倒代换

若被积函数分母的次方比分子的次方高两次及以上, 则代换为 $x=\frac{1}{t}$

1.5 分部积分法

$\int_a^b udv = uv|_b^a - \int_a^b vdu$

何时用

两类不同的函数相乘做积分

$$1.P_n(x) \text{ 作 } u \begin{cases} \int_a^b P_n(x)e^{ax}dx \\ \int_a^b P_n(x)\sin axdx \\ \int_a^b P_n(x)\cos axdx \end{cases}$$

$$2.P_n(x) \text{ 作 } v \begin{cases} \int_a^b P_n(x)lnxdx \\ \int_a^b P_n(x)\arcsin axdx \\ \int_a^b P_n(x)\arctan axdx \end{cases}$$

$$3. \text{ 均可作 } u \begin{cases} \int_a^b e^{ax}\sin\beta xdx \\ \int_a^b e^{ax}\cos\beta xdx \end{cases}$$

1.6 重要公式

1. 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 则

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$

2. 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数} \\ 0, & f(x)\text{为奇函数} \end{cases}$$

3. 若 $f(x)$ 是连续函数且周期为 T, 则:

(1)$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

(2)$\int_{a}^{a+nT} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx$

只要相差一个周期就相等

4. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 则:

(1)$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)dx$

(2)$\int_{0}^{\pi} xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(sinx)dx$

5.$\int_{a}^{b} \frac{1}{1+e^t}dt = \int_{a}^{b}(\frac{1}{1+e^t}\frac{e^{-t}}{e^{-t}})dt = -\int_{a}^{b} \frac{d(e^{-t}+1)}{e^{-t}+1} = -ln(e^{-t}+1)|_{a}^{b}$

6. 华里氏公式:$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^n xdx =$

$$\begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{是大于 1 的奇数} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, & n\text{是偶数} \end{cases}$$

示例:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5xdx = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^6xdx = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{8}{15}$

1.7 反常积分

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数:
1.$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) - F(a)$
若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散
2.$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$
若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散
3.$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$
若右端的积分都收敛, 则称反常积分收敛, 否则发散

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数:
1. 若 $x = a$ 是瑕点, 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim\limits_{x \to a^+} F(x)$
若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散
2. 若 $x = b$ 是瑕点, 则 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{x \to b^-} F(x) - F(a)$
若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散
3. 若 $c \in (a, b)$ 是瑕点, 则
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

若右端的积分都收敛, 则称反常积分收敛, 否则发散

瑕点: 使 $f(x)$ 无界的点

1.8 重要结论

1.$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\begin{cases}p>1,\text{ 收敛}\\p\le 1,\text{ 发散}\end{cases}(a>0)$

2.$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x(lnx)^p}\begin{cases}p>1,\text{ 收敛}\\p\le 1,\text{ 发散}\end{cases}(a>1)$

3.$\int_a^{+\infty}x^ke^{-\lambda x}dx\begin{cases}\lambda>0,\text{ 收敛}\\\lambda\le 0,\text{ 发散}\end{cases}(k\ge 0)$

4.$\int_a^{b}\frac{dx}{(x-a)^p}\begin{cases}p>1,\text{ 收敛}\\p\le 1,\text{ 发散}\end{cases}$

5. 泊松积分:$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0^+}xlnx=0$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且是偶函数, 若 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\int_0^{+\infty}f(x)dx$