

不定积分

若 $F'(x) = f(x)$, 则 $F(x)$ 叫原函数

连续函数一定有原函数

不定积分: $\int f(x)dx = F(x) + C$

基本积分表

$$\int kdx = kx + C$$

$$\int x^u dx = \frac{x^{u+1}}{u+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \sec^2 x = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \csc^2 x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

不定积分的性质

$$\frac{d}{dx} [\int f(x) dx] = f(x)$$

$$\int F'(x) dx = F(x)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

设 $f(x)$ 在区间 I 上除 $x = c$ 之外处处连续, 且 $x = c$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 则 $f(x)$ 在 I 上没有原函数

$f(x)$ 是奇函数, 则 $\int f(x) dx$ 和 $f'(x)$ 是偶函数

换元积分法

第一类换元法: 设 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则

$$\int f[\phi(x)] \phi'(x) dx = \int f[\phi(x)] d\phi(x) = F[\phi(x)] + C$$

常用的换元:

$$\frac{1}{x} dx = d \ln x$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} dx = d 2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{x^2} dx = d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

如果被积函数都是由 \sin 或 \cos 组成, 则:

1. 若 $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d \cos x$
2. 若 $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d \sin x$
3. 若 $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d \tan x$

第二类换元法:

1. 三角代换

$$\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a \sec t, 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

2. 根式代换

$$\sqrt[n]{ax + b} \Rightarrow t$$

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t$$

- ### 3. 倒代换: 若被积函数分母的次方比分子的次方高两次及以上, 则代换为 $x = \frac{1}{t}$

分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

何时用? 两类不同的函数相乘做积分

$$\begin{aligned}
1. P_n(x) \text{ 作 } u & \begin{cases} \int P_n(x) e^{ax} dx \\ \int P_n(x) \sin ax dx \\ \int P_n(x) \cos ax dx \end{cases} \\
2. P_n(x) \text{ 作 } v & \begin{cases} \int P_n(x) \ln x dx \\ \int P_n(x) \arcsin ax dx \\ \int P_n(x) \arctan ax dx \end{cases} \\
3. \text{ 均可作 } u & \begin{cases} \int e^{ax} \sin \beta x dx \\ \int e^{ax} \cos \beta x dx \end{cases}
\end{aligned}$$

有理函数积分法

前提: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, P 和 Q 是多项式, $Q(x)$ 可以因式分解

1. 若 $Q(x)$ 中有一个因子 $(x-a)^n$, 则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的分解式中有 $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$

2. 若 $Q(x)$ 中有一个因子 $(x^2 + px + q)$ 且 $p^2 - 4q < 0$, 则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的分解式中有

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{(x^2 + px + q)^n}$$