1 高中基础

1.1 根式有理化

若分母 (或分子) 是两个无理数相加 (或相减)，则把分子和分母同乘这两个无理数的和 (或差)，分母 (或分子) 就变成了有理数

例：

$$\sqrt{x^2}+1-x=\frac{\sqrt{x^2}+1-x}{1}$$
$$=\frac{(\sqrt{x^2}+1-x)(\sqrt{x^2}+1+x)}{\sqrt{x^2}+1+x}$$
$$=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2}+1+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2}+1+x}$$

1.2 立方差公式

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

例：

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}$$
$$=\frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{3}{1-x^3}$$
$$=\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}$$
$$=\frac{x+x^2-2}{1-x^3}$$

1.3 因式分解

1、$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

例：

$$x^2-x-2$$
$$=x^2+(2-1)x+(2\times(-1))=(x+2)(x-1)$$

2、十字相乘法：ax^2+bx+c 把二次项系数 a 分解成两个因数 a_1 和 a_2 的积，把常数项 c 分解成两个因数 c_1 和 c_2 的积，并使
$a_1c_2+a_2c_1$ 正好等于一次项的系数 b。
即:

$$
\begin{aligned}
&ax^2+bx+c\\
&=(a_1a_2)x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+(c_1c_2)\\
&=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)
\end{aligned}
$$

1.4 不等式

1、$||a|-|b||\leq|a-b|$

2、$|a\pm b|\leq|a|+|b|$

1.5 对数函数

1、$log_a(M\times N)=log_aM+log_aN$

2、$log_a\frac{M}{N}=log_aM-log_aN$

3、$log_aM^N=Nlog_aM$

4、$log_{a^N}M=\frac{1}{N}log_aM$

5、$ln1=0$

6、$lne=1$

7、$M^N=e^{ln(M^N)}=e^{NlnM}$

1.6 三角函数

1、倍角公式：$sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha$

2 函数

2.1 取整函数

$y=[x]$ 向左取整：$x-1<[x]\le x$
一般搭配夹逼准则

2.2 分段函数

例题

设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -1, & |x|>1 \end{cases}$ $g(x)=e^x$，
求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$

解

所有的 x 都换成 $g(x)$：
$$f[g(x)]=\begin{cases} 1, & |e^x|<1 \text{ 即} x<0 \\ 0, & |e^x|=1 \text{ 即} x=0 \\ -1, & |e^x|>1 \text{ 即} x>0 \end{cases}$$
所有的 x 都换成 $f(x)$：
$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases} e, & |x|<1 \\ 1, & |x|=1 \\ e^{-1}, & |x|>1 \end{cases}$$

2.3 奇偶性

若 $\forall x \in D$，有 $f(-x) = -f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数
若 $\forall x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数

2.4 单调性

若 $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 D 上单调递增
若 $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 D 上单调递减

2.5 有界性

若 $\exists M > 0$，对 $\forall x \in D$，有 $|f(x)| \leq M$，则 $f(x)$ 有界

若 $\forall x \in D$，有 $f(x) \geq M_1$，则 $f(x)$ 有下界

若 $\forall x \in D$，有 $f(x) \leq M_2$，则 $f(x)$ 有上界

例题

$y = xcosx$ 在 $(-\infty \ +\infty)$ 是否有界?
是否为 $x \to +\infty$ 的无穷大?

解

取 $x = 2k\pi \in (-\infty \ +\infty)$ 时，$y = 2k\pi$ 大于任意的常数 M，所以函数无界
取 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in (x \ +\infty)$ 时，$y = 0$，所以不是无穷大

2.6 周期性

若 $\exists T>0$，对 $\forall x\in D$ 且 $x+T\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，则 $f(x)$ 有周期 T

3 极限

3.1 要分左右极限的情况

1、分段函数的分段点处
2、e 的无穷大型，如 $\lim\limits_{x\to1} e^{\frac{1}{x-1}}$
3、$arctan\infty$ 型，如 $\arctan\frac{1}{x-1}$

例题

设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$，
证明当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在

解

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=x-1=-1$
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=x+1=1$
由于左右极限不相等，所以极限不存在

3.2 极限的四则运算

设 $\lim f(x) = A$ $\lim g(x) = B$，则：

1、$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

2、$\lim[f(x)g(x)] = AB$

3、$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0)$

若 $\lim f(x)$ 存在 $\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 不存在，其他情况都没有结论

3.3 多项式除多项式求极限

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + ... + a_m x^0}{b_0 x^n + ... + b_n x^0} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & m < n \\ \infty, & m > n \end{cases}$$

例：

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \frac{3}{7}$$

3.4 复合函数求极限

如果 $f(x)$ 连续，且 $g(x)$ 有极限 A，则：

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \to x_0} g(x)] = f(A)$$

例题

求极限 $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2+9}}$

解

$\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2+9}}$
$f = \sqrt{u}$ 是连续函数，且 $u = \frac{x-3}{x^2+9}$ 有极限，则
$= \sqrt{\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2+9}}$
$= \sqrt{\frac{1}{6}}$

3.5 幂指函数求极限

若 $\lim f(x) = A > 0$ 且 $\lim g(x) = B$，则：$\lim f(x)^{g(x)} = A^B$

3.6 夹逼准则

函数 $A > B > C$，函数 A 的极限是 X，函数 C 的极限也是 X，那么函数 B 的极限就一定是 X

例题

求极限 $\lim\limits_{x \to 0^+} x[\frac{1}{x}]$

解

使用取整函数的性质 $x - 1 < [x] \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] \leq \frac{1}{x}$
由于 $x \to 0^+$，所以 $x > 0$

则两边同乘 x 得：$1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1$
由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$
由夹逼准则可得 $\lim\limits_{x\to 0^+}x[\frac{1}{x}]=1$

3.7 单调有界准则

单调递增且有上界，则有极限，单调递减且有下界，则有极限

例题

证明数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ 有极限，并求极限

解

设 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，$x_1=\sqrt{2}$
由 $x_1<\sqrt{2}<2$，设 $x_k<2$，则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$ 可知 $x_n<2$，即数列有上界 2
判断单调性：
$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n$
根式有理化
$=\frac{x_n+2-x_n^2}{\sqrt{x_n+2}+x_n}=\frac{(2-x_n)(1+x_n)}{\sqrt{x_n+2}+x_n}$
由于 $1+x_n$ 和 $\sqrt{x_n+2},x_n$ 都大于 0，此时整个式子的正负由 $2-x_n$ 决定
由于 x_n 的上界为 2，则 $2-x_n>0$
由于 $x_{n+1}-x_n>0$ 即 $x_{n+1}>x_n$，则数列单调递增
根据单调有界准则，数列有极限

令 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = A$

在 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ 两端取极限

$\lim\limits_{x\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2+x_n}$

$\lim\limits_{x\to\infty} x_{n+1} = \sqrt{2+A}$

x_{n+1} 可以看作是 x_n 的子列

子列与数列极限相同，则 $\lim\limits_{x\to\infty} x_{n+1} = A$

即 $A = \sqrt{2+A}$

$A = 2$ 或 $A = -1$

由于数列大于 0，则 $A = 2$

3.8 重要极限

1、$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{tanx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsinx}{x} = 1$

推广 $\lim\limits_{A\to 0} \frac{\sin A}{A} = 1$，其中 A 为任意的表达式

2、$\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

推广：$\lim(1+A)^B = e$，其中 A 和 B 为任意的表达式，且 $A\to 0$，$B\to\infty$

4 无穷小

无穷小：极限为 0 的函数，(0 也是无穷小)

有界函数 $\times$ 无穷小仍是无穷小

例题

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx}{x}$

解

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx}{x}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}sinx\frac{1}{x}$
由于有界函数 $\times$ 无穷小 $=$ 无穷小
$=0$

4.1 高阶无穷小

设 α 和 β 是无穷小，且 $\alpha\neq 0$，若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则 β 是比 α 的高阶无穷小，记为：$\beta=o(\alpha)$

1、$o(x^2)\pm o(x^2)=o(x^2)$
2、$o(x^2)\pm o(x^3)=o(x^2)$
3、$x^2o(x^3)=o(x^5)$
4、$o(x^2)o(x^3)=o(x^5)$
5、$o(2x^2)=o(x^2)$

4.2 等价无穷小

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则 β 与 α 是等价无穷小，记为：$\beta\sim\alpha$

$\beta\sim\alpha\Leftrightarrow\beta=\alpha+o(\alpha)$

x 的高次方 $\pm x$ 的低次方 $\sim x$ 的低次方

例：$x^3+3x\sim 3x$

若 $\alpha\sim\alpha_1$ 且 $\beta\sim\beta_1$，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta_1}{\alpha_1}$

5 常用的等价

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$

当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x\sim x$

当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$

当 $x\to 0$ 时，$\arctan x\sim x$

当 $x\to 0$ 时，$ln(1+x)\sim x$

当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

当 $x\to 0$ 时，$\sec x-1\sim\frac{1}{2}x^2$

当 $x\to 0$ 时，$(1+\alpha x)^\beta-1\sim\alpha\beta x$

当 $x\to 0$ 时，$\alpha^x-1\sim xln\alpha$

6 连续

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

连续 $\pm \times \div$ 连续 $=$ 连续

连续 $\pm$ 不连续 $=$ 不连续

若 $f(x)$ 连续 $g(x)$ 也连续，则 $f[g(x)]$ 连续

单调连续函数的反函数也连续，且单调性相同

初等函数在其定义域内都连续

闭区间内连续函数必有界

推广：$f(x)$ 在 $(a\ b)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $(a\ b)$ 内有界

例题

求极限 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^2-5x+3}$

解

函数连续，则函数值与极限相等，直接代入极限

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^2-5x+\sqrt{3}} = \frac{2^3-1}{2^2-5\times 2+3} = \frac{7}{-3}$

6.1 零点定理

$f(x)$ 在 $(a\ b)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 异号，则 $\exists\xi\in(a\ b)$，使得 $f(\xi)=0$

6.2 间断点

第一类间断点

1、可去间断点：左右极限均存在且相等

2、跳跃间断点：左右极限均存在且不相等

第二类间断点

左右极限至少一个不存在

1、无穷间断点：$x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)\to\infty$

2、振荡间断点：$x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$ 上下振荡

7 常用极限

1、当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$

例：$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$

2、当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$

例：$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

3、$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\text{对数函数}}{\text{指数函数}}=0$

例：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{lnx}{x^a}=0$

8 各种类型的极限

0 比 0 型

求极限 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}$

解

代入极限发现这是 $\frac{0}{0}$ 型的极限
则需要先消去 0 因子，再代入极限
$\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$

无穷比无穷型

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

解

代入极限发现这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限
则需要先消去 ∞ 因子，再代入极限
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$
分子分母同除以最高次方
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}$
代入极限
$=\frac{3+0+0}{7+0-0}=\frac{3}{7}$
由此可推出多项式除多项式求极限的公式

0 乘无穷型

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

解

代入极限发现这是 $0\cdot\infty$ 型的极限
则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，再继续求
$\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$
根式有理化
$=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$
此时已变成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限
在 $x\to\infty$ 时，x^2+1 中的常数 1 对整体 x^2+1 的影响微乎其微，所以常数 1 可以忽略
$=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+x}=\frac{1}{2}$

无穷减无穷型

求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$

解

代入极限发现这是 $\infty-\infty$ 型的极限
则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，再继续求
$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$
使用立方差公式化简
$=\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+x^2-2}{1-x^3}$

此时已变成 $\frac{0}{0}$ 型的极限

因式分解

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$= -\frac{1+2}{1+1+1} = -1$

1 的无穷次方型

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{sinx}}$

解

代入极限发现这是 1^{∞} 型的极限

则需要凑重要极限 2，即 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{sinx}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\frac{6x}{sinx}}$

幂指函数求极限

$= \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{sinx}}$

$= e^6$

0 的 0 次方型

求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{sinx}$

解

代入极限发现这是 0^0 型的极限

则需要变形成 e^{ln} 的形式

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{sinx\cdot lnx}$$

此时变成了 $0\cdot\infty$ 型的极限

所以继续化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

将乘法变成除法：

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{lnx}{\frac{1}{sinx}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{lnx}{cscx}}$$

用洛必达法则

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-cscxcotx}}$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{sinxtanx}{x}}$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}}$$

$$= e^0 = 1$$