行列式定义

## 1 行列式定义

三阶行列式 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
   
三阶行列式  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - fha - ibd$ 

#### 1.1 逆序数

在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么它们就称为一个逆序。一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数。记为  $\tau(i_1,i_2,...,i_n)$ 

例: 求  $\tau(32514)$ 

- 3后面比它小的数有2个
- 2后面比它小的数有1个
- 5后面比它小的数有2个
- 1后面比它小的数有0个
- 4后面比它小的数有0个

## 2 行列式的性质

- 1、行列互换,行列式的值不变
- 2、两行(列)互换,行列式的值变号

行列式按行(列)展开

推论:两行(列)相同,行列式的值为0

3、可以把某行(列)的公因子 k 提到行列式的外面

推论:某行(列)为0,行列式的值为0

推论:某两行(列)的元素对应成比例,行列式的值为0

$$4. \begin{vmatrix} a_{11} + b & a_{12} + c & a_{13} + d \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5、某行(列)的 k 倍加到另外一行(列)上,行列式的值不变

## 3 行列式按行(列)展开

### 3.1 余子式

余子式  $M_{ij}$  为去掉第 i 行和第 j 列后,剩下的元素组成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
的一个余子式  $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ 

## 3.2 代数余子式

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

### 3.3 行列式按行(列)展开公式

行列式的值等于它的任意一行元素与其对应的代数余子式乘积之和  $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$ 

重要行列式

## 4 重要行列式

#### 4.1 上(下)三角

#### 主对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

#### 副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

重要行列式

# 4.2 拉普拉斯展开式