

1 高中基础

1.1 根式有理化

若分母 (或分子) 是两个无理数相加 (或相减), 则把分子和分母同乘这两个无理数的和 (或差), 分母 (或分子) 就变成了有理数

例:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}-x &= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\end{aligned}$$

1.2 立方差公式

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

例:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \\ &= \frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{3}{1-x^3} \\ &= \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} \\ &= \frac{x+x^2-2}{1-x^3}\end{aligned}$$

1.3 因式分解

$$1、x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

例:

$$\begin{aligned}x^2 - x - 2 \\ &= x^2 + (2-1)x + (2 \times (-1)) = (x+2)(x-1)\end{aligned}$$

2、十字相乘法：这个方法的关键是把二次项系数 a 分解成两个因数 a_1 和 a_2 的积，把常数项 c 分解成两个因数 c_1 和 c_2 的积，并使 $a_1c_2 + a_2c_1$ 正好等于一次项的系数 b 。那么可以直接写成结果：

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c \\ &= (a_1a_2)x^2 + (a_1c_2 + a_2c_1)x + (c_1c_2) \\ &= (a_1x + c_1)(a_2x + c_2) \end{aligned}$$

1.4 不等式

- 1、 $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- 2、 $|a \pm b| \leq |a| + |b|$

1.5 对数函数

- 1、 $\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$
- 2、 $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- 3、 $\log_a M^N = N \log_a M$
- 4、 $\log_{a^N} M = \frac{1}{N} \log_a M$
- 5、 $\ln 1 = 0$
- 6、 $\ln e = 1$
- 7、 $M^N = e^{\ln(M^N)} = e^{N \ln M}$

1.6 三角函数

- 1、倍角公式： $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

2 函数

2.1 取整函数

$y = [x]$ 向左取整: $x - 1 < [x] \leq x$

一般搭配夹逼准则

2.2 分段函数

例题

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$

解

所有的 x 都换成 $g(x)$:

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1 \text{ 即 } x < 0 \\ 0, & |e^x| = 1 \text{ 即 } x = 0 \\ -1, & |e^x| > 1 \text{ 即 } x > 0 \end{cases}$$

所有的 x 都换成 $f(x)$:

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

2.3 奇偶性

若 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数

若 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数

2.4 单调性

若 $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 D 上单调递增

若 $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 D 上单调递减

2.5 有界性

若 $\exists M > 0$, 对 $\forall x \in D$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则 $f(x)$ 有界

若 $\forall x \in D$, 有 $f(x) \geq M_1$, 则 $f(x)$ 有下界

若 $\forall x \in D$, 有 $f(x) \leq M_2$, 则 $f(x)$ 有上界

例题

$y = x \cos x$ 在 $(-\infty + \infty)$ 是否有界?

是否为 $x \rightarrow +\infty$ 的无穷大?

解

取 $x = 2k\pi \in (-\infty + \infty)$ 时, $y = 2k\pi$ 大于任意的常数 M , 所以函数无界

取 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in (-\infty + \infty)$ 时, $y = 0$, 所以不是无穷大

2.6 周期性

若 $\exists T > 0$, 对 $\forall x \in D$ 且 $x + T \in D$, 有 $f(x + T) = f(x)$, 则 $f(x)$ 有周期 T

3 极限

3.1 要分左右极限的情况

1、分段函数的分段点处

2、 e 的无穷大型, 如 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}}$

3、 $\arctan \infty$ 型, 如 $\arctan \frac{1}{x-1}$

例题

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases},$$

证明当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 的极限不存在

解

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x + 1 = 1$$

由于左右极限不相等, 所以极限不存在

3.2 极限的四则运算

设 $\lim f(x) = A$ $\lim g(x) = B$, 则:

$$1、\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$$

$$2、\lim[f(x)g(x)] = AB$$

$$3、\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

若 $\lim f(x)$ 存在 $\lim g(x)$ 不存在, 则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 不存在, 其他情况都没有结论

3.3 多项式除多项式求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + \dots + a_m x^0}{b_0 x^n + \dots + b_n x^0} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & m < n \\ \infty, & m > n \end{cases}$$

例:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \frac{3}{7}$$

3.4 复合函数求极限

如果 $f(x)$ 连续, 且 $g(x)$ 有极限 A , 则:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right] = f(A)$$

例题

求极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2+9}}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2+9}}$$

$f = \sqrt{u}$ 是连续函数，且 $u = \frac{x-3}{x^2+9}$ 有极限，则

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2+9}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6}}$$

3.5 幂指数函数求极限

若 $\lim f(x) = A > 0$ 且 $\lim g(x) = B$ ，则： $\lim f(x)^{g(x)} = A^B$

3.6 夹逼准则

函数 $A > B > C$ ，函数 A 的极限是 X ，函数 C 的极限也是 X ，那么函数 B 的极限就一定是 X

例题

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right]$

解

使用取整函数的性质 $x - 1 < [x] \leq x$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$$

由于 $x \rightarrow 0^+$, 知 $x > 0$

$$\Rightarrow 1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$

由夹逼准则可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

3.7 单调有界准则

单调递增且有上界, 则有极限, 单调递减且有下界, 则有极限

例题

证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ 有极限, 并求极限

解

设 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $x_1 = \sqrt{2}$

由 $x_1 < \sqrt{2} < 2$, 设 $x_k < 2$, 则 $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$

可知 $x_n < 2$, 即数列有上界 2

判断单调性:

$$\begin{aligned} & x_{n+1} - x_n \\ &= \sqrt{2 + x_n} - x_n \end{aligned}$$

根式有理化

$$\begin{aligned} &= \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{\sqrt{x_{n+1}^2 + x_{n+1}} + \sqrt{x_n^2 + x_n}} \\ &= \frac{(2 + x_n) - x_n^2}{\sqrt{x_n + 2} + x_n} \end{aligned}$$

由于 $1 + x_n, \sqrt{x_n + 2}, x_n$ 都大于 0, 此时整个式子的正负由 $2 - x_n$

决定

由于 x_n 的上界为 2, 则 $2 - x_n > 0$

$x_{n+1} - x_n > 0$ 即 $x_{n+1} > x_n$

则数列单调递增

由单调有界准则知, 数列有极限

令 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = A$

在 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ 两端取极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 + x_n}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_{n+1} = \sqrt{2 + A}$$

x_{n+1} 可以看作是 x_n 的子列

子列与数列极限相同, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_{n+1} = A$

即 $A = \sqrt{2 + A}$

$A = 2$ 或 $A = -1$

由于数列大于 0, 则 $A = 2$

3.8 重要极限

$$1、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$1、\text{推广 } \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\sin A}{A} = 1, \text{ 其中 } A \text{ 为任意的表达式}$$

$$2、\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

2、推广： $\lim(1+A)^B = e$ ，其中 A 和 B 为任意的表达式，且 $A \rightarrow 0, B \rightarrow \infty$

4 无穷小

无穷小：极限为 0 的函数，(0 也是无穷小)

有界函数 \times 无穷小仍是无穷小

设 α 和 β 是无穷小，且 $\alpha \neq 0$ ，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ，则 β 是比 α 的高阶无穷小，记为： $\beta = o(\alpha)$

$$o(x^2) \pm o(x^2) = o(x^2)$$

$$o(x^2) \pm o(x^3) = o(x^2)$$

$$x^2 o(x^3) = o(x^5)$$

$$o(x^2) o(x^3) = o(x^5)$$

$$o(2x^2) = o(x^2)$$

例题

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

解

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \frac{1}{x} \end{aligned}$$

有界函数 \times 无穷小 = 无穷小
 $= 0$

4.1 常用的等价

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则 β 与 α 是等价无穷小, 记为: $\beta \sim \alpha$

$$\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$$

x 的高次方 $\pm x$ 的低次方 $\sim x$ 的低次方

例: $x^3 + 3x \sim 3x$

若 $\alpha \sim \alpha_1$ 且 $\beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sec x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 + \alpha x)^\beta - 1 \sim \alpha\beta x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha^x - 1 \sim x \ln \alpha$

5 连续

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

连续 $\pm \times \div$ 连续 = 连续

连续 \pm 不连续 = 不连续

若 $f(x)$ 连续 $g(x)$ 也连续, 则 $f[g(x)]$ 连续

单调连续函数的反函数也连续, 且单调性相同

初等函数在其定义域内都连续

闭区间内连续函数必有界

推广: $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界

例题

求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$

解

函数连续, 则函数值与极限相等, 直接代入极限

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-1}{x^2-5x+\sqrt{3}} = \frac{2^3-1}{2^2-5 \times 2+3} = \frac{7}{-3}$$

5.1 零点定理

$f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 异号, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$

5.2 间断点

第一类间断点

- 1、可去间断点: 左右极限均存在且相等
- 2、跳跃间断点: 左右极限均存在且不相等

第二类间断点

左右极限至少一个不存在

- 1、无穷间断点: $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$
- 2、振荡间断点: $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 上下振荡

6 常用极限

- 1、当 $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
例: $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$
- 2、当 $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$
例: $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$$3、\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{对数函数}}{\text{指数函数}} = 0$$

$$\text{例：}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

7 各种类型的极限

0 比 0 型

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$$

解

代入极限发现这是 $\frac{0}{0}$ 型的极限

则需要先消去 0 因子，再代入极限

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

无穷比无穷型

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$$

解

代入极限发现这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

则需要先消去 ∞ 因子，再代入极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$$

分子分母同除以最高次方

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}$$

代入极限

$$= \frac{3+0+0}{7+0-0} = \frac{3}{7}$$

由此可推出多项式除多项式求极限的公式

0 乘无穷型

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

解

代入极限发现这是 $0 \cdot \infty$ 型的极限

则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，再继续求

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

根式有理化

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

此时已变成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

在 $x \rightarrow \infty$ 时， $x^2 + 1$ 中的常数 1 对整体 $x^2 + 1$ 的影响微乎其微，所以常数 1 可以忽略

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + x} = \frac{1}{2}$$

无穷减无穷型

求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

解

代入极限发现这是 $\infty - \infty$ 型的极限

则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，再继续求

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

使用立方差公式化简

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2-2}{1-x^3}$$

此时已变成 $\frac{0}{0}$ 型的极限

因式分解

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= -\frac{1+2}{1+1+1} = -1 \end{aligned}$$

1 的无穷次方型

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解

代入极限发现这是 1^∞ 型的极限

则需要凑重要极限 2，即 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot \frac{6x}{\sin x}}$$

幂指函数求极限

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x} \\ &= e^6 \end{aligned}$$

0 的 0 次方型

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

解

代入极限发现这是 0^0 型的极限

则需要变形成为 e^{\ln} 的形式

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \cdot \ln x}$$

此时变成了 $0 \cdot \infty$ 型的极限

所以继续化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

将乘法变成除法：

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x}}$$

用洛必达法则

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x}}$$

$$= e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \tan x}{x}}$$

$$= e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x}}$$

$$= e^0 = 1$$