微分中值定理

费马引理:$f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 有定义, 并在 x_0 可导, 如果 $f(x_0)$ 是极大 (小) 值, 则 $f^{'}(x)=0$

罗尔定理: 如果 $f(x)$ 满足:

1. 在 $[a,b]$ 上连续
2. 在 (a,b) 内可导
3. $f(a)=f(b)$ 或 $f(a)=f(c), a<c<b$

则在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使 $f^{'}(\xi)=0$

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数, 且
$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$,
则在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ, 使 $f^{''}(\xi)=0$

推论:

两个点相等, 则二阶导为 0

三个点相等, 则三阶导为 0

……

拉格朗日中值定理: 如果 $f(x)$ 满足:

1. 在 $[a,b]$ 上连续
2. 在 (a,b) 内可导

则在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(\xi)$

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 在 I 内可导且导数恒为 0, 则 $f(x)$ 在 I 上是一个常数

当 $x>0$ 时,$\frac{x}{1+x}<ln(1+x)<x$

柯西中值定理: 若 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足:

1. 在 $[a,b]$ 上连续
2. 在 (a,b) 内可导
3. 对 $\forall x\in(a,b),F^{'}(x)\neq 0$

则在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使 $\frac{f(b-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f^{'}(\xi)}{F^{'}(\xi)}$

洛必达法则

若满足:

1. 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限
2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$ 存在或为 ∞

则 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$

重要的等价

当 $x \to 0$ 时,$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$

$\sin(\arcsin x) = x$

当 $x \to 0$ 时,$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3$

当 $x \to 0$ 时,$\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$

当 $x \to 0$ 时,$x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$

当 $x \to +\infty$ 时,$lnx << x^n$

当 $x \to +\infty$ 时,$x^n << e\lambda x, (\lambda, n > 0)$

当 $x \to +\infty$ 时, 对数函数 $<<$ 幂函数 $<<$ 指数函数

泰勒公式

泰勒公式 1: 如果 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 则对 $\forall x \in U(x_0, \delta)$, 有 $f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$

其中 $o[(x - x_0)^n]$ 叫做佩亚诺余项

泰勒公式 2: 如果 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有 $n+1$ 阶导数, 则对 $\forall x\in U(x_0,\delta)$, 有

$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$
$...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

其中 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 叫做拉格朗日余项

若 $x_0=0$, 则上述泰勒公式又叫麦克劳林公式

重要的麦克劳林公式

$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$
$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$
$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$
$ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$
$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)$

导数与函数的单调性

一阶导大于 0, 则函数单调增

一阶导小于 0, 则函数单调减

驻点: 导数为 0 的点

只有驻点和不可导的点才能成为单调区间的分界点

导数与曲线的凹凸性

二阶导大于 0, 则曲线是凹的
二阶导小于 0, 则曲线是凸的

拐点: 连续曲线凹与凸的分界点

拐点的二阶导为 0 或不存在

拐点的第一判别法: 若在 $\mathring{U}(x_0)$ 内二阶可导, 则:
$f^{''}(x)$ 在 x_0 两侧变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点
$f^{''}(x)$ 在 x_0 两侧不变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点

拐点的第二判别法: 若 $f^{''}(x_0) = 0$, 则:

$f'''(x_0) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点
$f'''(x_0) = 0$, 则没有结论

凹曲线的切线在曲线下面

凸曲线的切线在曲线上面

导数与极值

极值点的一阶导为 0 或不存在

极值点的第一判别法:

1.$f'(x)$ 在 x_0 两侧变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是极值点
$f'(x)$ 由正变负, 则 $f(x_0)$ 是极大值
$f'(x)$ 由负变正, 则 $f(x_0)$ 是极小值

2.$f'(x)$ 在 x_0 两侧不变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 不是极值点

极值点的第二判别法: 若 $f'(x_0) = 0$, 则:

1.$f''(x_0) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是极值点
$f''(x_0) > 0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值
$f''(x_0) < 0$, 则 $f(x_0)$ 是极大值

$2.f^{''}(x_0)=0$, 则没有结论

若 $f^{'}(x_0)$ 到 $f^{(n-1)}(x_0)$ 都为 0, 且 $f^{(n)}\neq 0$, 则:
1. 若 n 为奇数, 则 $f(x_0)$ 不是极值
2. 若 n 为偶数, 则 $f(x_0)$ 是极值
  $f^{(n)}(x_0)>0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值
  $f^{(n)}(x_0)<0$, 则 $f(x_0)$ 是极大值

导数与最值

连续函数在闭区间内必由最值

求最值:
1. 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的所有驻点和不可导的点
2. 计算 $f(x)$ 在驻点, 不可导的点和端点 a 和 b 处的函数值
3. 比较这些函数值, 最大的为最大值, 最小的为最小值

若连续函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有唯一的极值点 x_0, 则

这个点就是最值点

渐近线

$x=a$ 是铅直渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$

当 $x\to+\infty$ 时,$y=b$ 是水平渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$

当 $x\to+\infty$ 时,$y=kx+b$ 是斜渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=k\neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$

曲率

若曲线由直角坐标方程 $y=y(x)$ 给出, 则曲率 $k=\frac{|y^{''}|}{(1+y^{'2})^{\frac{3}{2}}}$

若曲线由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 给出, 则曲率

$$k = \frac{|y^{''} x^{'} - y^{'} x^{''}|}{(x^{'2} + y^{'2})^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径 $R = \frac{1}{K}$