函数

绝对值函数:

$y = |x|$ 连续不可导

取整函数:

$y = [x]$ 向左取整: $x - 1 < [x] \le x$

搭配夹逼准则幂指函数:

$y = f(x)^{g(x)}$

定义域关于原点对称的函数, 一定能写成奇函数 + 偶函数的形式

若 $D \in (-l, l)$, 则 $f(x) = g(x) + h(x)$

其中 $g(x)$ 是奇函数,$h(x)$ 是偶函数

应用: 积分公式:

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$

极限

要分左右极限的情况:

1. 分段函数的分段点处

2.e 的无穷大型, 如 $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$

3.arctan∞ 型, 如 $\arctan\frac{1}{x-1}$

极限存在 $\Leftrightarrow$ 左右极限都存在且相等

无穷小: 极限为 0,(0 也是无穷小)

有界函数 $\times$ 无穷小仍是无穷小

极限的四则运算:(前提是

$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$)

1.$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

2.$\lim[f(x)g(x)] = AB$

3.$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, (B \neq 0)$

若 $\lim f(x)$ 存在 $\lim g(x)$ 不存在, 则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 不存在

其他情况都没有结论

多项式除多项式求极限的公式:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+...+a_mx^0}{b_0x^n+...+b_nx^0}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & m<n\\ \infty & m>n\end{cases}$$

例:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\frac{3}{7}$$

复合函数求极限:

如果 $f(x)$ 连续, 且 $g(x)$ 有极限 A, 则:

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim_{x\to x_0}g(x)]=f(A)$$

例:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\frac{1}{6}}$$

幂指函数求极限:

若 $\lim f(x)=A>0$ 且 $\lim g(x)=B$,

则:$\lim f(x)^{g^{'}(x)}=A^B$

重要极限

夹逼准则: 函数 $A>B>C$, 函数 A 的极限是 X, 函数 C 的极限也是 X, 那么函数 B 的极限就一定是 X

单调有界准则: 单调递增且有上界, 则有极限, 单调递减且有下界, 则有极限

重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

无穷小

设 α 和 β 是无穷小, 且 $\alpha\neq 0$, 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$, 则 β 是比 α 的高阶无穷小, 记为:$\beta=o(\alpha)$

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$, 则 β 与 α 是等价无穷小, 记为:$\beta\sim\alpha$

$o(x^2)\pm o(x^2)=o(x^2)$

$o(x^2)\pm o(x^3)=o(x^2)$

$x^2o(x^3)=o(x^5)$

$o(x^2)o(x^3) = o(x^5)$

$o(2x^2) = o(x^2)$

常用的等价

$\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

x 的高次方 $\pm x$ 的低次方 $\sim x$ 的低次方

例:$x^3 + 3x \sim 3x$

若 $\alpha \sim \alpha_1$ 且 $\beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$

当 $x \to 0$ 时,$\sin x \sim x$

当 $x \to 0$ 时,$\arcsin x \sim x$

当 $x \to 0$ 时,$\tan x \sim x$

当 $x \to 0$ 时,$\arctan x \sim x$

当 $x \to 0$ 时,$ln(1+x) \sim x$

当 $x \to 0$ 时,$e^x - 1 \sim x$

当 $x \to 0$ 时,$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \to 0$ 时,$\sec x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \to 0$ 时,$(1+\alpha x)^{\beta} - 1 \sim \alpha\beta x$

当 $x \to 0$ 时,$\alpha^{x} - 1 \sim xln\alpha$

连续

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

连续 $\pm$ 连续 $=$ 连续
连续 $\times\div$ 连续 $=$ 连续
连续 $\pm$ 不连续 $=$ 不连续
若 $f(x)$ 连续 $g(x)$ 也连续, 则 $f[g(x)]$ 连续

单调连续函数的反函数也连续, 且单调性相同

闭区间内连续函数必有界
$f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界

零点定理:$f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 异号, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$

间断点

第一类间断点:

可去间断点: 左右极限均存在且相等

跳跃间断点: 左右极限均存在且不相等

第二类间断点: 左右极限至少一个不存在

无穷间断点:$x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)\to\infty$

振荡间断点:$x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$ 上下振荡