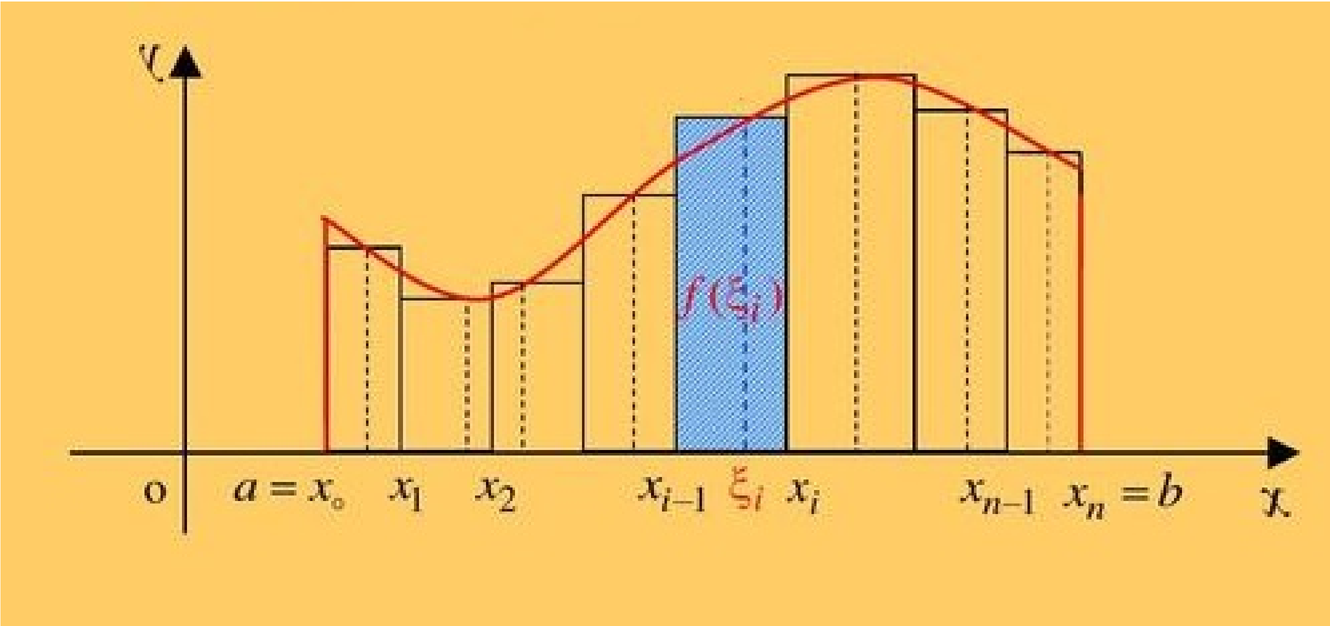
定积分

定积分是一个特殊的极限

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

其中 $\lambda = max\{\Delta x_1, \Delta x_2 ... \Delta x_n\}$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



定积分的几何意义: 曲边梯形的面积的代数和

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

定积分的性质

1. 等式性质

$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

2. 不等式性质 (前提 $b > a$)

设 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

设 $m < f(x) < M$, 则

$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

3. 积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 或 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

使用定积分定义求极限:$\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$

微积分基本公式

变上限积分函数: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,$\forall x_0 \in [a,b]$,$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, (a \leq x \leq b)$ 称为变上限积分函数

变上限积分函数的性质:

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $F^{'}(x) = (\int_{x_0}^{x} f(t)dt)^{'} = f(x)$

2.1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x) = \int_{x_0}^{\phi(x)} f(t)dt$, 则 $F^{'}(x) = f[\phi(x)]\phi^{'}(x)$

2.2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x) = \int_{\Phi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt$, 则 $F^{'}(x) = f[\phi(x)]\phi^{'}(x) - f[\Phi(x)]\Phi^{'}(x)$

设 $f(x)$ 是连续的奇 (偶) 函数, 则 $\int_{0}^{x} f(t)dt$ 是偶 (奇) 函数

推广

设 $f(x)$ 是连续的奇函数, 则 $\forall a$ 都有 $\int_{a}^{x} f(t)dt$ 是偶函数

设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 则只有 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数

重要不等式:$a+b \geq 2\sqrt{ab}$

柯西不等式: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则
$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

牛顿-莱布尼兹公式:
若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数,
则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

换元积分法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $x = \phi(t)$ 满足:

1.$\phi(\alpha) = a$ 且 $\phi(\beta) = b$

2.$\phi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上有连续导数, 且
$a \leq \phi(t) \leq b$

则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]d\phi(t) = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi^{'}(t)dt$

常用的换元:

$\frac{1}{x}dx = dlnx$

$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = d2\sqrt{x}$

$\frac{1}{x^2}dx = d(-\frac{1}{x})$

如果被积函数都是由 sin 或 cos 组成, 则:

1. 若 $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\cos x$

2. 若 $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\sin x$

3. 若 $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$, 则凑 $d\tan x$

三角代换

$\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a\sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a\tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a\sec t, 0 < t < \frac{\pi}{2}$

根式代换

$\sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow t$

$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t$

倒代换: 若被积函数分母的次方比分子的次方高两次及以上, 则代换为 $x = \frac{1}{t}$

分部积分法

$\int_a^b udv = uv|_b^a - \int_a^b vdu$

何时用? 两类不同的函数相乘做积分

$$1.P_n(x) \text{ 作 } u \begin{cases} \int_a^b P_n(x)e^{ax}dx \\ \int_a^b P_n(x)\sin axdx \\ \int_a^b P_n(x)\cos axdx \end{cases}$$

$$2.P_n(x) \text{ 作 } v \begin{cases} \int_a^b P_n(x)lnxdx \\ \int_a^b P_n(x)\arcsin axdx \\ \int_a^b P_n(x)\arctan axdx \end{cases}$$

$$3. \text{ 均可作 } u \begin{cases} \int_a^b e^{ax}\sin \beta xdx \\ \int_a^b e^{ax}\cos \beta xdx \end{cases}$$

重要公式

1. 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 则
$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$
2. 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 则
$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数} \\ 0, & f(x)\text{为奇函数} \end{cases}$$
3. 若 $f(x)$ 是连续函数且周期为 T, 则:

(1)$\int_{a}^{a+T} f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx$

(2)$\int_{a}^{a+nT} f(x)dx=n\int_{0}^{T} f(x)dx$

只要相差一个周期就相等

4. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 则:

(1)$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)dx$

(2)$\int_{0}^{\pi} xf(sinx)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(sinx)dx$

5.$\int_{a}^{b} \frac{1}{1+e^t}dt=\int_{a}^{b}(\frac{1}{1+e^t}\frac{e^{-t}}{e^{-t}})dt=-\int_{a}^{b} \frac{d(e^{-t}+1)}{e^{-t}+1}=$
$-ln(e^{-t}+1)|_{a}^{b}$

6. 华里氏公式:$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^n xdx=$
$$\begin{cases}\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{是大于 1 的奇数}\\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, & n\text{是偶数}\end{cases}$$

示例:

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^5 xdx=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^6 xdx=\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{8}{15}$

反常积分

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数:

1.$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)-F(a)$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

2.$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

3.$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$

若右端的积分都收敛, 则称反常积分收敛, 否则发散

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数:

1. 若 $x = a$ 是瑕点, 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

2. 若 $x = b$ 是瑕点, 则 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则发散

3. 若 $c \in (a, b)$ 是瑕点, 则

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

若右端的积分都收敛, 则称反常积分收敛, 否则发散

瑕点: 使 $f(x)$ 无界的点

重要结论

$1.\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\begin{cases}p>1,\ 收敛\\p\leq 1,\ 发散\end{cases}(a>0)$

$2.\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x(lnx)^p}\begin{cases}p>1,\ 收敛\\p\leq 1,\ 发散\end{cases}(a>1)$

$3.\int_a^{+\infty}x^ke^{-\lambda x}dx\begin{cases}\lambda>0,\ 收敛\\\lambda\leq 0,\ 发散\end{cases}(k\geq 0)$

$4.\int_a^{b}\frac{dx}{(x-a)^p}\begin{cases}p>1,\ 收敛\\p\leq 1,\ 发散\end{cases}$

5. 泊松积分:$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$6.\lim\limits_{x\to 0^+}xlnx=0$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且是偶函数, 若 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\int_0^{+\infty}f(x)dx$