1 公式

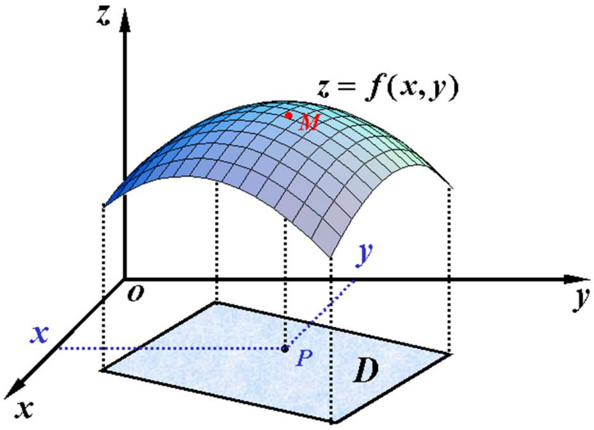
1.1 二维邻域

以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为圆心，δ 为半径围成一个圆。圆内所有的点 (不包括圆的边) 的集合称为 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0, \delta)$

1.2 二元函数

二元函数 $z = f(x, y)$ 的图像在三维坐标里是曲面

二元函数的可导与连续无关



1.3 二元函数的极限

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

注意：二元函数求极限不能使用洛必达法则和单调有界准则

若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$，则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续

1.4 偏导数

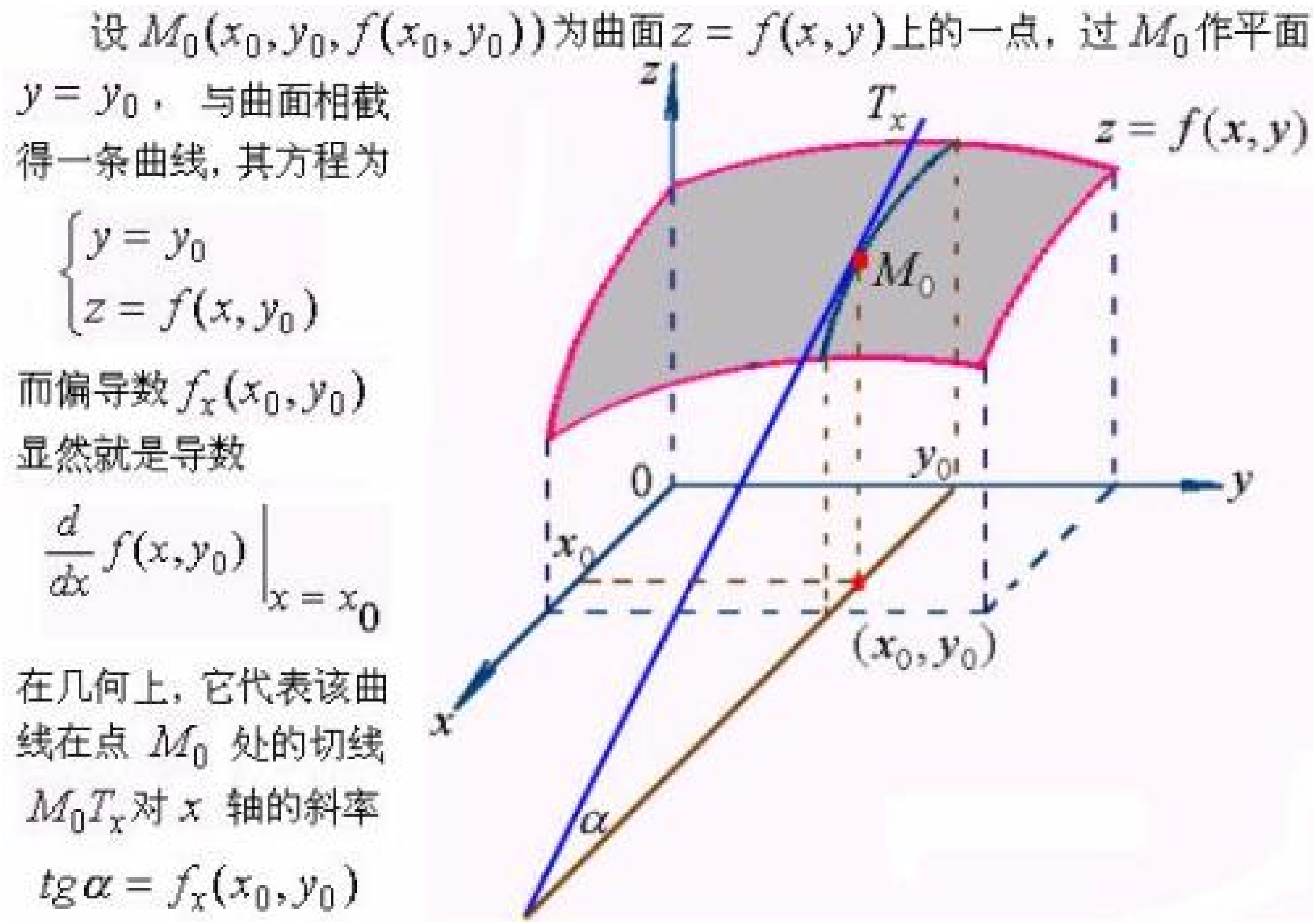
偏导数的定义

$$f_x'(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$
$$f_y'(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

求偏导数

1、对 x 求偏导：将 y 看作常数后再对 x 求导
2、对 y 求偏导：将 x 看作常数后再对 y 求导

偏导数的几何意义



1.5 二阶偏导数

按照对变量的求导顺序不同，二阶偏导数有以下四个

1、$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$
2、$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$
3、$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y)$
4、$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y)$

其中 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 称为混合偏导数

定理

若 $z = f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在点 (x_0, y_0) 处连续，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}|_{(x_0,y_0)}$

1.6 全微分

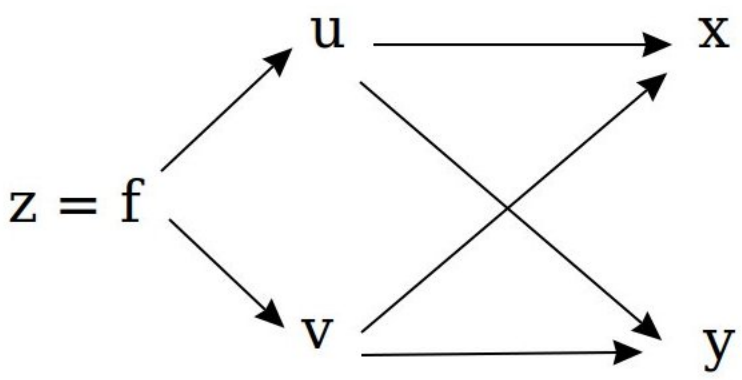
设 $z = f(x,y)$，若全增量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 可表示为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称 z 在 (x_0, y_0) 处可微
$A\Delta x + B\Delta y$ 称为 z 在 (x_0, y_0) 处的微分，记为
$dz|_{(x_0,y_0)} = A\Delta x + B\Delta y$，且 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$

若 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续且可偏导，且微分 $dz = \frac{\partial f}{\partial x}|_(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}|_(x_0, y_0)dy$

若 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都在点 (x_0,y_0) 处连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

1.7 多元复合函数求偏导

1、将函数 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 画成如下的关系图：



2、$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$
3、$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

1.8 隐函数求导

隐函数存在定理 1

设 $F(x,y)$ 有连续一阶偏导数，且 $F_y^{'}\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 确定 $y=y(x)$，且 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x^{'}}{F_y^{'}}$

隐函数存在定理 2

设 $F(x,y,z)$ 有连续一阶偏导数，且 $F_z^{'}\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 确定 $z=z(x,y)$，且 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y^{'}}{F_z^{'}}$

1.9 方程组求偏导

设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 确定，

在方程两端直接对 x 求偏导，有 $\begin{cases} F_x^{'}+F_u^{'}\frac{\partial u}{\partial x}+F_v^{'}\frac{\partial v}{\partial x} \\ G_x^{'}+G_u^{'}\frac{\partial u}{\partial x}+G_v^{'}\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ ，可以解出 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$

1.10 多元函数微分学的几何应用

曲面的切平面与法线

1、若曲面以隐式 $F(x,y,z)=0$ 给出，则法向量 $\vec{n}=(F_x^{'},F_y^{'},F_z^{'})$
2、若曲面以显式 $z=f(x,y)$ 给出，则法向量 $\vec{n}=(f_x^{'},f_y^{'},-1)$

切平面为 $F_x^{'}(P_0)(x-x_0)+F_y^{'}(P_0)(y-y_0)+F_z^{'}(P_0)(z-z_0)=0$
法线为 $\frac{x-x_0}{F_x^{'}(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y^{'}(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z^{'}(P_0)}$

空间曲线的切线与法平面

1、若空间曲线以参数形式 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 给出，且 $\alpha\le t\le\beta$，则切向量 $\vec{\tau}=(x^{'}(t),y^{'}(t),z^{'}(t))$
2、若空间曲线以一般形式 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出，则切向量 $\vec{\tau}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$，其中 $\vec{n_1}$ 和 $\vec{n_2}$ 是两个曲面的法向量

1.11 方向导数

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿着方向 $\vec{e_l}(cos\alpha,cos\beta)$ 的方向导数为 $\frac{\partial f}{\partial l}|_{P_0}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+tcos\alpha,y_0+tcos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$

方向导数是单侧的导数

方向导数的计算

若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 沿任一方向导数都存在，
且 $\frac{\partial f}{\partial l}|_{P_0}=f_x^{'}(x_0,y_0)cos\alpha+f_y^{'}(x_0,y_0)cos\beta$，
其中 $cos\alpha$ 和 $cos\beta$ 是方向 l 的方向余弦

1.12 梯度

梯度是一个向量，且
$gradf(x_0,y_0)=f_x^{'}(x_0,y_0)\vec{i}+f_y^{'}(x_0,y_0)\vec{j}=(f_x^{'}(x_0,y_0),f_y^{'}(x_0,y_0))$

方向导数与梯度向量的关系

$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0)}=|gradf(x_0,y_0)|cos\theta$，
其中 θ 是方向导数的方向与梯度方向的夹角，且 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

1、$\theta=0$ 时，方向导数最大，且值为梯度的值

2、$\theta=\pi$ 时，方向导数最小

3、$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，方向导数为零

1.13 多元函数的极值