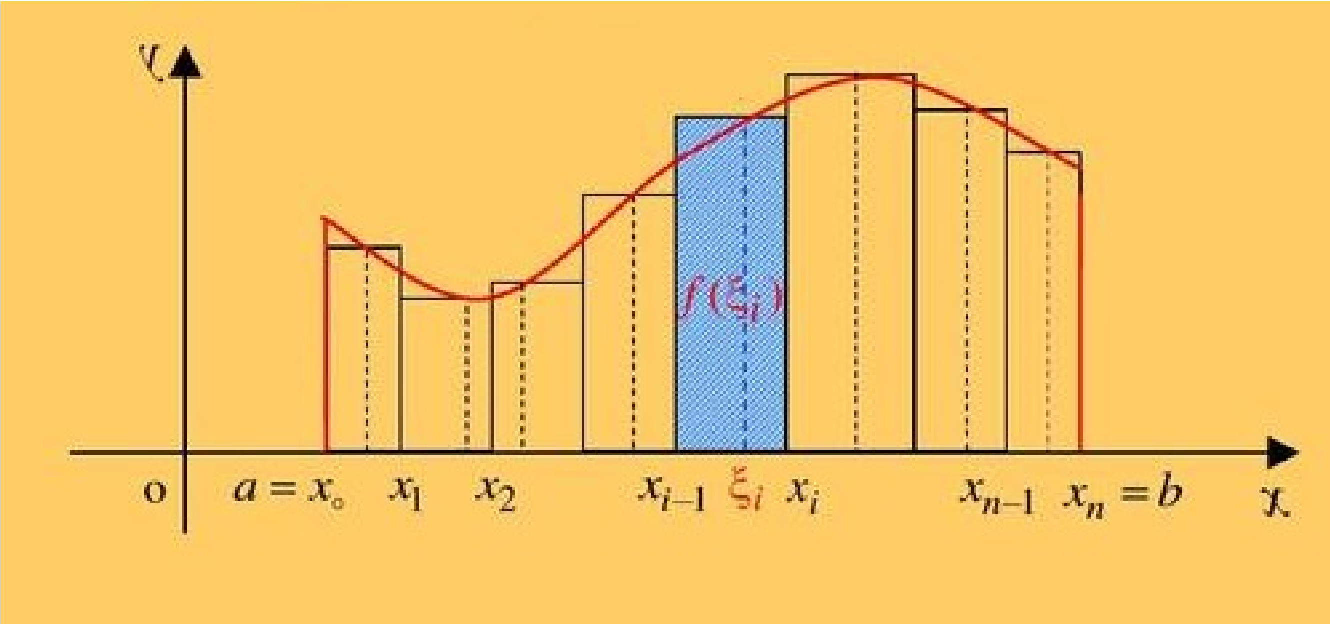
定积分

定积分是一个特殊的极限

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

其中 $\lambda = max\{\Delta x_1, \Delta x_2 ... \Delta x_n\}$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



定积分的几何意义: 曲边梯形的面积的代数和

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

定积分的性质

1. 等式性质

$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

2. 不等式性质 (前提 $b > a$)

设 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

设 $m < f(x) < M$, 则

$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

3. 积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 或 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

使用定积分定义求极限:$\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})$