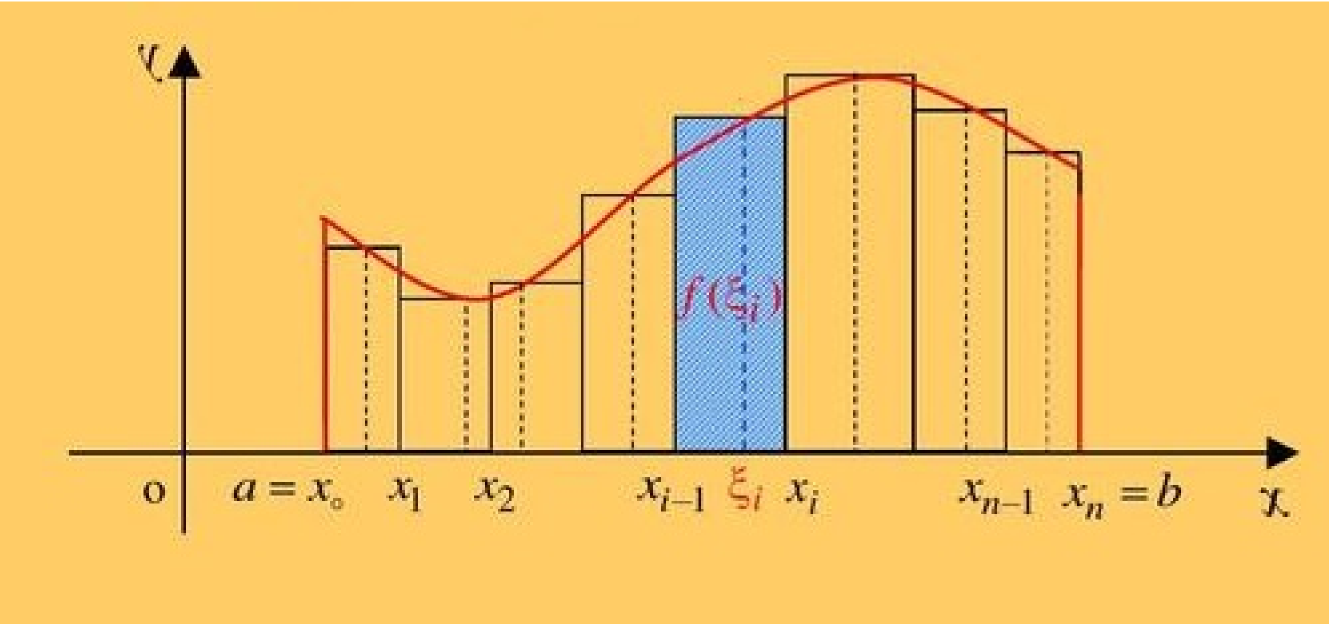
定积分

定积分是一个特殊的极限

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

其中 $\lambda = max\{\Delta x_1, \Delta x_2 ... \Delta x_n\}$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



定积分的几何意义: 曲边梯形的面积的代数和

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

定积分的性质

1. 等式性质

$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

2. 不等式性质 (前提 $b > a$)

设 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

设 $m < f(x) < M$, 则

$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

3. 积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists\xi \in [a,b]$ 或 $\exists\xi \in (a,b)$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

使用定积分定义求极限:$\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})$

微积分基本公式

变上限积分函数: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,$\forall x_0 \in [a,b]$,$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt, (a \leq x \leq b)$ 称为变上限积分函数

变上限积分函数的性质:

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $F^{'}(x)=(\int_{x_0}^{x} f(t)dt)^{'}=f(x)$

2.1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x)=\int_{x_0}^{\phi(x)} f(t)dt$, 则 $F^{'}(x)=f[\phi(x)]\phi^{'}(x)$

2.2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x)=\int_{\Phi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt$, 则 $F^{'}(x)=f[\phi(x)]\phi^{'}(x)-f[\Phi(x)]\Phi^{'}(x)$

设 $f(x)$ 是连续的奇 (偶) 函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶 (奇) 函数

推广

设 $f(x)$ 是连续的奇函数, 则 $\forall a$ 都有 $\int_a^x f(t)dt$ 是偶函数

设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 则只有 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数

重要不等式:$a+b \geq 2\sqrt{ab}$

柯西不等式: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

牛顿-莱布尼兹公式:

若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数,

则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$