

1 公式

1.1 函数

取整函数

$y = [x]$ 向左取整: $x - 1 < [x] \leq x$

一般搭配夹逼准则

奇偶性

若 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数

若 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数

单调性

若 $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 D 上单调递增

若 $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 D 上单调递减

有界性

若 $\exists M > 0$, 对 $\forall x \in D$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则 $f(x)$ 有界

若 $\forall x \in D$, 有 $f(x) \geq M_1$, 则 $f(x)$ 有下界

若 $\forall x \in D$, 有 $f(x) \leq M_2$, 则 $f(x)$ 有上界

周期性

若 $\exists T > 0$, 对 $\forall x \in D$ 且 $x + T \in D$, 有 $f(x + T) = f(x)$, 则 $f(x)$ 有周期 T

1.2 极限

要分左右极限的情况

- 1、分段函数的分段点处
- 2、e 的无穷大型, 如 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}}$
- 3、 $\arctan \infty$ 型, 如 $\arctan \frac{1}{x-1}$

极限的四则运算

设 $\lim f(x) = A$ $\lim g(x) = B$, 则:

- 1、 $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
- 2、 $\lim[f(x)g(x)] = AB$
- 3、 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

若 $\lim f(x)$ 存在 $\lim g(x)$ 不存在, 则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 不存在, 其他情况都没有结论

多项式除多项式求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + \dots + a_m x^0}{b_0 x^n + \dots + b_n x^0} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & m < n \\ \infty, & m > n \end{cases}$$

例：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \frac{3}{7}$$

复合函数求极限

如果 $f(x)$ 连续，且 $g(x)$ 有极限 A ，则：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right] = f(A)$$

例：

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

幂指函数求极限

若 $\lim f(x) = A > 0$ 且 $\lim g(x) = B$ ，则： $\lim f(x)^{g(x)} = A^B$

1.3 重要极限

夹逼准则

函数 $A > B > C$ ，函数 A 的极限是 X ，函数 C 的极限也是 X ，那么函数 B 的极限就一定是 X

单调有界准则

单调递增且有上界，则有极限，单调递减且有下界，则有极限

重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

1.4 无穷小

无穷小：极限为 0，(0 也是无穷小)

有界函数 \times 无穷小仍是无穷小

设 α 和 β 是无穷小，且 $\alpha \neq 0$ ，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ，则 β 是比 α 的高阶无穷小，记为： $\beta = o(\alpha)$

$$o(x^2) \pm o(x^2) = o(x^2)$$

$$o(x^2) \pm o(x^3) = o(x^2)$$

$$x^2 o(x^3) = o(x^5)$$

$$o(x^2) o(x^3) = o(x^5)$$

$$o(2x^2) = o(x^2)$$

1.5 常用的等价

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则 β 与 α 是等价无穷小, 记为: $\beta \sim \alpha$

$$\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$$

x 的高次方 $\pm x$ 的低次方 $\sim x$ 的低次方

$$\text{例: } x^3 + 3x \sim 3x$$

若 $\alpha \sim \alpha_1$ 且 $\beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sec x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 + \alpha x)^\beta - 1 \sim \alpha\beta x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha^x - 1 \sim x \ln \alpha$

1.6 连续

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

连续 $\pm \times \div$ 连续 = 连续

连续 \pm 不连续 = 不连续

若 $f(x)$ 连续 $g(x)$ 也连续, 则 $f[g(x)]$ 连续

单调连续函数的反函数也连续, 且单调性相同

闭区间内连续函数必有界

推广:

$f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界

零点定理

$f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 异号, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$

1.7 间断点

第一类间断点

1、可去间断点: 左右极限均存在且相等

2、跳跃间断点: 左右极限均存在且不相等

第二类间断点

左右极限至少一个不存在

- 1、无穷间断点： $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时， $f(x) \rightarrow \infty$
- 2、振荡间断点： $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时， $f(x)$ 上下振荡

1.8 高中基础

根式有理化

若分母 (或分子) 是两个无理数相加 (或相减)，则把分子和分母同乘这两个无理数的和 (或差)，分母 (或分子) 就变成了有理数

例：

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1}-x &= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \end{aligned}$$

立方差公式

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

例：

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \\ &= \frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{3}{1-x^3} \\ &= \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} \\ &= \frac{x+x^2-2}{1-x^3} \end{aligned}$$

因式分解

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

例：

$$\begin{aligned} & x^2 - x - 2 \\ &= x^2 + (2 - 1)x + (2 \times (-1)) = (x + 2)(x - 1) \end{aligned}$$

2 题目

$$2.1 \quad \text{设 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$

所有的 x 都换成 $g(x)$ ：

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1 \text{ 即 } x < 0 \\ 0, & |e^x| = 1 \text{ 即 } x = 0 \\ -1, & |e^x| > 1 \text{ 即 } x > 0 \end{cases}$$

所有的 x 都换成 $f(x)$ ：

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

2.2 设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$,

证明当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 的极限不存在

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x + 1 = 1$$

由于左右极限不相等, 所以极限不存在

2.3 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty + \infty)$ 是否有界?

是否为 $x \rightarrow +\infty$ 的无穷大?

取 $x = 2k\pi \in (-\infty + \infty)$ 时, $y = 2k\pi$ 大于任意的常数 M , 所以函数无界

取 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in (x + \infty)$ 时, $y = 0$, 所以不是无穷大

2.4 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-1}{x^2-5x+3}$

函数连续, 则函数值与极限相等, 直接代入极限

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-1}{x^2-5x+3} = \frac{2^3-1}{2^2-5 \times 2+3} = \frac{7}{-3}$$

2.5 求极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

代入极限发现这是 $\frac{0}{0}$ 型的极限

则需要先消去 0 因子, 再代入极限

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

2.6 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

代入极限发现这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

则需要先消去 ∞ 因子，再代入极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$$

分子分母同除以最高次方

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}$$

代入极限

$$= \frac{3+0+0}{7+0-0} = \frac{3}{7}$$

由此可推出多项式除多项式求极限的公式

2.7 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

代入极限发现这是 $0 \cdot \infty$ 型的极限

则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，再继续求

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$$

根式有理化

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

此时已变成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

在 $x \rightarrow \infty$ 时， x^2+1 中的常数 1 对整体 x^2+1 的影响微乎其微，所以常数 1 可以忽略

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+x} = \frac{1}{2}$$

2.8 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

代入极限发现这是 $\infty - \infty$ 型的极限

则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，再继续求

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

使用立方差公式化简

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2-2}{1-x^3}$$

此时已变成 $\frac{0}{0}$ 型的极限

因式分解

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= -\frac{1+2}{1+1+1} = -1 \end{aligned}$$

2.9 求极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2+9}}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2+9}}$$

$f = \sqrt{u}$ 是连续函数，且 $u = \frac{x-3}{x^2+9}$ 有极限，则

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2+9}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

2.10 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \frac{1}{x}$$

有界函数 \times 无穷小 = 无穷小

$$= 0$$

2.11 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

代入极限发现这是 1^∞ 型的极限

则需要凑重要极限

$$\text{凑 } (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{2x} \cdot \frac{6x}{\sin x}}$$

幂指函数求极限

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x}}$$

$$= e^6$$

2.12 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right]$

使用取整函数的性质 $x - 1 < [x] \leq x$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$$

由于 $x \rightarrow 0^+$, 知 $x > 0$

$$\Rightarrow 1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$

由夹逼准则可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

2.13 证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ 有极限, 并求极限

设 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $x_1 = \sqrt{2}$

由 $x_1 < \sqrt{2} < 2$, 设 $x_k < 2$, 则 $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$

可知 $x_n < 2$, 即数列有上界 2

判断单调性:

$$\begin{aligned} & x_{n+1} - x_n \\ &= \sqrt{2 + x_n} - x_n \end{aligned}$$

根式有理化

$$\begin{aligned} &= \frac{x_n + 2 - x_n^2}{\sqrt{x_n + 2} + x_n} \\ &= \frac{(2 - x_n)(1 + x_n)}{\sqrt{x_n + 2} + x_n} \end{aligned}$$

由于 $1 + x_n, \sqrt{x_n + 2}, x_n$ 都大于 0, 此时整个式子的正负由 $2 - x_n$ 决定

由于 x_n 的上界为 2, 则 $2 - x_n > 0$

$x_{n+1} - x_n > 0$ 即 $x_{n+1} > x_n$

则数列单调递增

由单调有界准则知, 数列有极限

$$\text{令 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$$

在 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ 两端取极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + x_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \sqrt{2 + A}$$

x_{n+1} 可以看作是 x_n 的子列

子列与数列极限相同，则 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_{n+1} = A$

即 $A = \sqrt{2 + A}$

$A = 2$ 或 $A = -1$

由于数列大于 0，则 $A = 2$