

1 公式

1.1 函数

取整函数

$y = [x]$ 向左取整: $x - 1 < [x] \leq x$

一般搭配夹逼准则

1.2 极限

要分左右极限的情况

1、分段函数的分段点处

2、e 的无穷大型, 如 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}}$

3、 $\arctan \infty$ 型, 如 $\arctan \frac{1}{x-1}$

极限的四则运算

设 $\lim f(x) = A$ $\lim g(x) = B$, 则:

1、 $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

2、 $\lim[f(x)g(x)] = AB$

3、 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

若 $\lim f(x)$ 存在 $\lim g(x)$ 不存在, 则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 不存在, 其他情况都没有结论

多项式除多项式求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + \dots + a_m x^0}{b_0 x^n + \dots + b_n x^0} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & m < n \\ \infty, & m > n \end{cases}$$

例:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \frac{3}{7}$$

复合函数求极限

如果 $f(x)$ 连续, 且 $g(x)$ 有极限 A , 则:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right] = f(A)$$

例:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

幂指函数求极限

若 $\lim f(x) = A > 0$ 且 $\lim g(x) = B$ ，则：

$$\lim f(x)^{g(x)} = A^B$$

1.3 重要极限

夹逼准则

函数 $A > B > C$ ，函数 A 的极限是 X ，函数 C 的极限也是 X ，那么函数 B 的极限就一定是 X

单调有界准则

单调递增且有上界，则有极限，单调递减且有下界，则有极限

重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

1.4 无穷小

无穷小：极限为 0，(0 也是无穷小)

有界函数 \times 无穷小仍是无穷小

设 α 和 β 是无穷小，且 $\alpha \neq 0$ ，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ，则 β 是比 α 的高阶无穷小，记为： $\beta = o(\alpha)$

$$o(x^2) \pm o(x^2) = o(x^2)$$

$$o(x^2) \pm o(x^3) = o(x^2)$$

$$x^2 o(x^3) = o(x^5)$$

$$o(x^2) o(x^3) = o(x^5)$$

$$o(2x^2) = o(x^2)$$

1.5 常用的等价

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ ，则 β 与 α 是等价无穷小，记为： $\beta \sim \alpha$

$$\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$$

x 的高次方 $\pm x$ 的低次方 $\sim x$ 的低次方

$$\text{例： } x^3 + 3x \sim 3x$$

若 $\alpha \sim \alpha_1$ 且 $\beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sec x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 + \alpha x)^\beta - 1 \sim \alpha\beta x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha^x - 1 \sim x \ln \alpha$

1.6 连续

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

连续 $\pm \times \div$ 连续 = 连续

连续 \pm 不连续 = 不连续

若 $f(x)$ 连续 $g(x)$ 也连续, 则 $f[g(x)]$ 连续

单调连续函数的反函数也连续, 且单调性相同

闭区间内连续函数必有界

推广:

$f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界

零点定理

$f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 异号, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$

1.7 间断点

第一类间断点

- 1、可去间断点: 左右极限均存在且相等
- 2、跳跃间断点: 左右极限均存在且不相等

第二类间断点

左右极限至少一个不存在

1、无穷间断点： $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时， $f(x) \rightarrow \infty$

2、振荡间断点： $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时， $f(x)$ 上下振荡

1.8 高中基础

根式有理化

若分母 (或分子) 是两个无理数相加 (或相减)，则把分子和分母同乘这两个无理数的和 (或差)，分母 (或分子) 就变成了有理数

例：

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}-x &= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\end{aligned}$$

立方差公式

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

例：

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{3}{1-x^3} \\
 &= \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} \\
 &= \frac{x+x^2-2}{1-x^3}
 \end{aligned}$$

因式分解

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

例：

$$\begin{aligned}
 &x^2 - x - 2 \\
 &= x^2 + (2-1)x + (2 \times (-1)) = (x+2)(x-1)
 \end{aligned}$$

2 题目

$$\text{2.1 设 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$

所有的 x 都换成 $g(x)$ ：

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1 \text{ 即 } x < 0 \\ 0, & |e^x| = 1 \text{ 即 } x = 0 \\ -1, & |e^x| > 1 \text{ 即 } x > 0 \end{cases}$$

所有的 x 都换成 $f(x)$ ：

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

2.2 设 $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$,

证明当 $x \rightarrow 0$ **时，** $f(x)$ **的极限不存在**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x + 1 = 1$$

由于左右极限不相等，所以极限不存在

2.3 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty + \infty)$ 是否有界？

是否为 $x \rightarrow +\infty$ **的无穷大？**

取 $x = 2k\pi \in (-\infty + \infty)$ 时， $y = 2k\pi$ 大于任意的常数 M ，所以函数无界

取 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in (-\infty + \infty)$ 时， $y = 0$ ，所以不是无穷大

2.4 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$

函数连续，则函数值与极限相等，直接代入极限

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-1}{x^2-5x+3} = \frac{2^3-1}{2^2-5 \times 2+3} = \frac{7}{-3}$$

2.5 求极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

代入极限发现这是 $\frac{0}{0}$ 型的极限

则需要先消去 0 因子，再代入极限

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

2.6 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

代入极限发现这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

则需要先消去 ∞ 因子，再代入极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$$

分子分母同除以最高次方

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}$$

代入极限

$$= \frac{3+0+0}{7+0-0} = \frac{3}{7}$$

由此可推出多项式除多项式求极限的公式

2.7 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

代入极限发现这是 $0 \cdot \infty$ 型的极限

则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，再继续求

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

根式有理化

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

此时已变成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

在 $x \rightarrow \infty$ 时, $x^2 + 1$ 中的常数 1 对整体 $x^2 + 1$ 的影响微乎其微, 所以常数 1 可以忽略

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + x} = \frac{1}{2}$$

2.8 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

代入极限发现这是 $\infty - \infty$ 型的极限

则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限, 再继续求

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

使用立方差公式化简

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 - 2}{1 - x^3}$$

此时已变成 $\frac{0}{0}$ 型的极限

因式分解

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$= -\frac{1+2}{1+1+1} = -1$$

2.9 求极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2+9}}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2+9}}$$

$f = \sqrt{u}$ 是连续函数, 且 $u = \frac{x-3}{x^2+9}$ 有极限, 则

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2+9}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6}}$$

2.10 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \frac{1}{x}$$

有界函数 \times 无穷小 = 无穷小

$$= 0$$