

函数

绝对值函数:

$$y = |x| \text{ 连续不可导}$$

取整函数:

$$y = [x] \text{ 向左取整: } x - 1 < [x] \leq x$$

搭配夹逼准则幂指函数:

$$y = f(x)^{g(x)}$$

定义域关于原点对称的函数, 一定能写成奇函数 + 偶函数的形式

$$\text{若 } D \in (-l, l), \text{ 则 } f(x) = g(x) + h(x)$$

其中 $g(x)$ 是奇函数, $h(x)$ 是偶函数

应用: 积分公式:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$

极限

要分左右极限的情况:

1. 分段函数的分段点处

2.e 的无穷大型, 如 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}}$

3.arctan ∞ 型, 如 $\arctan \frac{1}{x-1}$

极限存在 \Leftrightarrow 左右极限都存在且相等

无穷小: 极限为 0, (0 也是无穷小)

有界函数 \times 无穷小仍是无穷小

极限的四则运算:(前提是

$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$)

$$1. \lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$$

$$2. \lim [f(x)g(x)] = AB$$

$$3. \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, (B \neq 0)$$

若 $\lim f(x)$ 存在 $\lim g(x)$ 不存在, 则 $\lim [f(x) \pm g(x)]$ 不存在

其他情况都没有结论

多项式除多项式求极限的公式:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + \dots + a_m x^0}{b_0 x^n + \dots + b_n x^0} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & m = n \\ 0 & m < n \\ \infty & m > n \end{cases}$$

例:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \frac{3}{7}$$

复合函数求极限:

如果 $f(x)$ 连续, 且 $g(x)$ 有极限 A , 则:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right] = f(A)$$

例:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

幂指数函数求极限:

若 $\lim f(x) = A > 0$ 且 $\lim g(x) = B$,

则: $\lim f(x)^{g(x)} = A^B$

重要极限

夹逼准则: 函数 $A > B > C$, 函数 A 的极限是 X , 函数 C 的极限也是 X , 那么函数 B 的极限就一定是 X

单调有界准则: 单调递增且有上界, 则有极限, 单调递减且有下界, 则有极限

重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

无穷小

设 α 和 β 是无穷小, 且 $\alpha \neq 0$, 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则 β 是比 α 的高阶无穷小, 记为: $\beta = o(\alpha)$

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则 β 与 α 是等价无穷小, 记为: $\beta \sim \alpha$

$$o(x^2) \pm o(x^2) = o(x^2)$$

$$o(x^2) \pm o(x^3) = o(x^2)$$

$$x^2 o(x^3) = o(x^5)$$

$$o(x^2)o(x^3) = o(x^5)$$

$$o(2x^2) = o(x^2)$$

常用的等价

$$\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$$

x 的高次方 $\pm x$ 的低次方 $\sim x$ 的低次方

$$\text{例: } x^3 + 3x \sim 3x$$

若 $\alpha \sim \alpha_1$ 且 $\beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sec x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 + \alpha x)^\beta - 1 \sim \alpha\beta x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha^x - 1 \sim x \ln \alpha$

连续

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

连续 \pm 连续 = 连续

连续 $\times \div$ 连续 = 连续

连续 \pm 不连续 = 不连续

若 $f(x)$ 连续 $g(x)$ 也连续, 则 $f[g(x)]$ 连续

单调连续函数的反函数也连续, 且单调性相同

闭区间内连续函数必有界

$f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界

零点定理: $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 异号, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$

间断点

第一类间断点:

可去间断点: 左右极限均存在且相等

跳跃间断点: 左右极限均存在且不相等

第二类间断点: 左右极限至少一个不存在

无穷间断点: $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$

振荡间断点: $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 上下振荡