1 公式

1.1 导数

可导必连续, 不连续必不可导

求某一点 x_0 的导数: 用导数的定义 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

导数的几何意义

切线的斜率 k
切线方程:$y-y_0=k(x-x_0)$

设 $f(x)$ 是 $(-a,a)$ 上的偶 (奇) 函数且可导, 则 $f(x)^{'}$ 是 $(-a,a)$ 上的奇 (偶) 函数
设 $f(x)$ 以 T 为周期且可导, 则 $f(x)^{'}$ 也以 T 为周期

可导 $\pm$ 不可导 = 不可导

$y=f(x)$ 的反函数为 $x=\phi(y)$, 则 $f^{'}(x)=\frac{1}{\phi^{'}(y)}$

复合函数求导: 从外到里层层求导

$f(x)$ 可导,$g(x)$ 连续但不可导, 若 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $f(x_0)=0$

1.2 基本求导公式

$(C)^{'}=0$
$(x^u)^{'}=ux^{u-1}$
$(\sin x)^{'}=\cos x$
$(\cos x)^{'}=-\sin x$
$(\tan x)^{'}=\sec^2 x$
$(\cot x)^{'}=-\csc^2 x$
$(\sec x)^{'}=\sec x\tan x$
$(\csc x)^{'}=-\csc x\cot x$
$(a^x)^{'}=a^x lna$
$(e^x)^{'}=e^x$
$(log_a x)^{'}=\frac{1}{xlna}$
$(lnx)^{'}=\frac{1}{x}$
$(\arcsin x)^{'}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos x)^{'}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)^{'} = \frac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arccot} x)^{'} = -\frac{1}{1+x^2}$

$(ln|x|)^{'} = \frac{1}{x}$

1.3 导数的四则运算

设 u, v 均可导, 则:

$(u \pm v)^{'} = u^{'} + v^{'}$

$(uv)^{'} = u^{'}v + uv^{'}$

$(\frac{u}{v})^{'} = \frac{u^{'}v - uv^{'}}{v^2}$

1.4 求 n 阶导数

$(e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}$

$[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$

$[\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$

$[ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \frac{(n-1)!}{(ax+b)^n}$

$(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = (-1)^n a^n \frac{(n)!}{(ax+b)^{n+1}}$

若 $f(x)$ 可分解成 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 且知道 $f_1^{(n)}(x)$ 和 $f_2^{(n)}(x)$, 则 $f^{(n)}(x) = f_1^{(n)}(x) + f_2^{(n)}(x)$

莱布尼兹公式

$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$
$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
$C_n^0 = 1$

1.5 隐函数求导

$y = y(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定,
在方程 $F(x, y) = 0$ 两端直接对 x 求导

1.6 参数方程求导

$y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \Phi(t) \end{cases}$ 确定, 且 $\phi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 均可导, 则 $y^{'} = \frac{y_t^{'}}{x_t^{'}} = \frac{\Phi^{'}(t)}{\phi^{'}(t)}$

1.7 微分

微分的定义: 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 如果函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$(其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是可微的, 且 $A\Delta x$ 称作函数在点

x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 dy，即

$dy = A\Delta x$

若 x 是自变量, 则 $\Delta x = dx$

可微必可导, 可导必可微, 且 $dy = f^{'}(x)dx$