1 公式

1.1 函数

取整函数

$y = [x]$ 向左取整：$x - 1 < [x] \le x$
一般搭配夹逼准则

1.2 极限

要分左右极限的情况

1、分段函数的分段点处
2、e 的无穷大型，如 $\lim\limits_{x \to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$
3、$arctan\infty$ 型，如 $\arctan \frac{1}{x-1}$

极限的四则运算

设 $\lim f(x) = A\ \lim g(x) = B$，则：
1、$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
2、$\lim[f(x)g(x)] = AB$
3、$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0)$

若 $\lim f(x)$ 存在 $\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 不存在，其他情况都没有结论

多项式除多项式求极限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m+...+a_mx^0}{b_0x^n+...+b_nx^0} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m=n \\ 0, & m<n \\ \infty, & m>n \end{cases}$$

例:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3} = \frac{3}{7}$$

复合函数求极限

如果 $f(x)$ 连续，且 $g(x)$ 有极限 A，则:

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x\to x_0} g(x)] = f(A)$$

例:

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

幂指函数求极限

若 $\lim f(x) = A > 0$ 且 $\lim g(x) = B$，则：
$\lim f(x)^{g(x)} = A^B$

1.3 重要极限

夹逼准则

函数 $A > B > C$，函数 A 的极限是 X，函数 C 的极限也是 X，那么函数 B 的极限就一定是 X

单调有界准则

单调递增且有上界，则有极限，单调递减且有下界，则有极限

重要极限

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

1.4 无穷小

无穷小：极限为 0，(0 也是无穷小)

有界函数 $\times$ 无穷小仍是无穷小

设 α 和 β 是无穷小，且 $\alpha \neq 0$，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，则 β 是比 α 的高阶无穷小，记为：$\beta = o(\alpha)$

$o(x^2) \pm o(x^2) = o(x^2)$

$o(x^2) \pm o(x^3) = o(x^2)$

$x^2 o(x^3) = o(x^5)$

$o(x^2) o(x^3) = o(x^5)$

$o(2x^2) = o(x^2)$

1.5 常用的等价

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则 β 与 α 是等价无穷小，记为：$\beta \sim \alpha$

$\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

x 的高次方 $\pm x$ 的低次方 $\sim x$ 的低次方

例：$x^3 + 3x \sim 3x$

若 $\alpha \sim \alpha_1$ 且 $\beta \sim \beta_1$，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$

当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$
当 $x \to 0$ 时，$\arcsin x \sim x$
当 $x \to 0$ 时，$\tan x \sim x$
当 $x \to 0$ 时，$\arctan x \sim x$

当 $x \to 0$ 时，$ln(1+x) \sim x$
当 $x \to 0$ 时，$e^x - 1 \sim x$

当 $x \to 0$ 时，$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
当 $x \to 0$ 时，$\sec x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$

当 $x \to 0$ 时，$(1+\alpha x)^\beta - 1 \sim \alpha\beta x$

当 $x \to 0$ 时，$\alpha^x - 1 \sim xln\alpha$

1.6 连续

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

连续 $\pm \times \div$ 连续 $=$ 连续
连续 $\pm$ 不连续 $=$ 不连续
若 $f(x)$ 连续 $g(x)$ 也连续，则 $f[g(x)]$ 连续

单调连续函数的反函数也连续，且单调性相同

闭区间内连续函数必有界
推广：
$f(x)$ 在 $(a\ b)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $(a\ b)$ 内有界

零点定理

$f(x)$ 在 $(a\ b)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 异号，则 $\exists \xi \in (a\ b)$，使得 $f(\xi) = 0$

1.7 间断点

第一类间断点

1、可去间断点：左右极限均存在且相等
2、跳跃间断点：左右极限均存在且不相等

第二类间断点

左右极限至少一个不存在

1、无穷间断点：$x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$ 时，$f(x) \to \infty$

2、振荡间断点：$x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$ 时，$f(x)$ 上下振荡

1.8 高中基础

根式有理化

若分母 (或分子) 是两个无理数相加 (或相减)，则把分子和分母同乘这两个无理数的和 (或差)，分母 (或分子) 就变成了有理数

例:

$$\sqrt{x^2}+1-x=\frac{\sqrt{x^2}+1-x}{1}$$
$$=\frac{(\sqrt{x^2}+1-x)(\sqrt{x^2}+1+x)}{\sqrt{x^2}+1+x}$$
$$=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2}+1+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2}+1+x}$$

立方差公式

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

例:

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}$$

$$= \frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{3}{1-x^3}$$
$$= \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}$$
$$= \frac{x+x^2-2}{1-x^3}$$

因式分解

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

例:

$$x^2 - x - 2$$
$$= x^2 + (2-1)x + (2\times(-1)) = (x+2)(x-1)$$

2 题目

2.1 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -1, & |x|>1 \end{cases}$ $g(x) = e^x$,

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$

所有的 x 都换成 $g(x)$:

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & |e^x|<1 \text{ 即} x<0 \\ 0, & |e^x|=1 \text{ 即} x=0 \\ -1, & |e^x|>1 \text{ 即} x>0 \end{cases}$$

所有的 x 都换成 $f(x)$:

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

2.2 设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ **，**

证明当 $x \to 0$ **时，**$f(x)$ **的极限不存在**

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = x - 1 = -1$
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = x + 1 = 1$
由于左右极限不相等，所以极限不存在

2.3 $y = xcosx$ **在** $(-\infty \ \ +\infty)$ **是否有界？**

是否为 $x \to +\infty$ **的无穷大？**

取 $x = 2k\pi \in (-\infty \ \ +\infty)$ 时，$y = 2k\pi$ 大于任意的常数 M，所以函数无界

取 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in (x \ \ +\infty)$ 时，$y = 0$，所以不是无穷大

2.4 求极限 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$

函数连续，则函数值与极限相等，直接代入极限

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{2^3-1}{2^2-5\times 2+3}=\frac{7}{-3}$

2.5 求极限 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$

代入极限发现这是 $\frac{0}{0}$ 型的极限

则需要先消去 0 因子，再代入极限

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$

2.6 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

代入极限发现这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

则需要先消去 ∞ 因子，再代入极限

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

分子分母同除以最高次方

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}$

代入极限

$=\frac{3+0+0}{7+0-0}=\frac{3}{7}$

由此可推出多项式除多项式求极限的公式

2.7 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$

代入极限发现这是 $0\cdot\infty$ 型的极限

则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，再继续求

$\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$
根式有理化
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$
此时已变成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限
在 $x\to\infty$ 时，x^2+1 中的常数 1 对整体 x^2+1 的影响微乎其微，所以常数 1 可以忽略
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+x}=\frac{1}{2}$

2.8 求极限 $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$

代入极限发现这是 $\infty-\infty$ 型的极限
则需要先化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，再继续求
$\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$
使用立方差公式化简
$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2-2}{1-x^3}$
此时已变成 $\frac{0}{0}$ 型的极限
因式分解
$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$
$=-\frac{1+2}{1+1+1}=-1$