1 微分中值定理

1.1 费马引理

$f(x)$ 在 $U(x_0\ \delta)$ 有定义，并在 x_0 可导，如果 $f(x_0)$ 是极大 (小) 值，则 $f^{'}(x) = 0$

1.2 罗尔定理

如果 $f(x)$ 满足：
1、在 $[a\ b]$ 上连续
2、在 $(a\ b)$ 内可导
3、$f(a) = f(b)$
则在 $(a\ b)$ 内至少有一点 ξ，使 $f^{'}(\xi) = 0$

1.3 拉格朗日中值定理

如果 $f(x)$ 满足：
1、在 $[a\ b]$ 上连续
2、在 $(a\ b)$ 内可导
则在 $(a\ b)$ 内至少有一点 ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^{'}(\xi)$

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在 I 内可导且导数恒为 0，则 $f(x)$ 在 I 上是一个常数

当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<ln(1+x)<x$

1.4 柯西中值定理

若 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足：

1、在 $[a\ b]$ 上连续

2、在 $(a\ b)$ 内可导

3、对 $\forall x\in(a\ b)\ F^{'}(x)\neq 0$

则在 $(a\ b)$ 内至少有一点 ξ，使 $\frac{f(b-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f^{'}(\xi)}{F^{'}(\xi)}$

2 洛必达法则

若满足：

1、求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

2、$\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$ 存在或为 ∞

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$

2.1 重要的等价

1、当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

2、 $\sin(\arcsin x)=x$

3、当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3$

4、当 $x\to 0$ 时，$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$

5、当 $x\to 0$ 时，$x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3$

6、当 $x \to +\infty$ 时，$lnx << x^n$

7、当 $x \to +\infty$ 时，$x^n << e\lambda x \; (\lambda \; n > 0)$

8、当 $x \to +\infty$ 时，对数函数 << 幂函数 << 指数函数

3 泰勒公式

泰勒公式 1

如果 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，则对 $\forall x \in U(x_0 \; \delta)$，有

$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$

* 其中 $o[(x - x_0)^n]$ 叫做佩亚诺余项

泰勒公式 2

如果 $f(x)$ 在 $U(x_0 \; \delta)$ 内有 $n+1$ 阶导数，则对 $\forall x \in U(x_0 \; \delta)$，有

$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

* 其中 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ 叫做拉格朗日余项

3.1 重要的麦克劳林公式

若 $x_0 = 0$，则上述泰勒公式又叫麦克劳林公式

1、$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$

2、$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$
3、$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$
4、$ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
5、$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$

4 导数与函数的单调性

一阶导大于 0，则函数单调增
一阶导小于 0，则函数单调减

驻点：导数为 0 的点

只有驻点和不可导的点才能成为单调区间的分界点

5 导数与曲线的凹凸性

二阶导大于 0，则曲线是凹的
二阶导小于 0，则曲线是凸的

拐点：连续曲线凹与凸的分界点

拐点的二阶导为 0 或不存在

5.1 拐点的第一判别法

若在 $\mathring{U}(x_0)$ 内二阶可导，则：

1、$f^{''}(x)$ 在 x_0 两侧变号，则 $(x_0\ f(x_0))$ 是拐点
2、$f^{''}(x)$ 在 x_0 两侧不变号，则 $(x_0\ f(x_0))$ 不是拐点

5.2 拐点的第二判别法

若 $f^{''}(x_0) = 0$，则：
1、$f^{'''}(x_0) \neq 0$，则 $(x_0\ f(x_0))$ 是拐点
2、$f^{'''}(x_0) = 0$，则没有结论

凹曲线的切线在曲线下面
凸曲线的切线在曲线上面

6 导数与极值

极值点的一阶导为 0 或不存在

6.1 极值点的第一判别法

1、$f^{'}(x)$ 在 x_0 两侧变号，则 $(x_0\ f(x_0))$ 是极值点
 $f^{'}(x)$ 由正变负，则 $f(x_0)$ 是极大值
 $f^{'}(x)$ 由负变正，则 $f(x_0)$ 是极小值
2、$f^{'}(x)$ 在 x_0 两侧不变号，则 $(x_0\ f(x_0))$ 不是极值点

6.2 极值点的第二判别法

若 $f^{'}(x_0) = 0$，则：
1、$f^{''}(x_0) \neq 0$，则 $(x_0\ f(x_0))$ 是极值点
 $f^{''}(x_0) > 0$，则 $f(x_0)$ 是极小值

$f^{''}(x_0) < 0$，则 $f(x_0)$ 是极大值

2、$f^{''}(x_0) = 0$，则没有结论

若 $f^{'}(x_0)$ 到 $f^{(n-1)}(x_0)$ 都为 0，且 $f^{(n)} \neq 0$，则：

1、若 n 为奇数，则 $f(x_0)$ 不是极值

2、若 n 为偶数，则 $f(x_0)$ 是极值

$f^{(n)}(x_0) > 0$，则 $f(x_0)$ 是极小值

$f^{(n)}(x_0) < 0$，则 $f(x_0)$ 是极大值

7 导数与最值

连续函数在闭区间内必由最值

求最值：

1、求出 $f(x)$ 在 $(a\ b)$ 内的所有驻点和不可导的点

2、计算 $f(x)$ 在驻点，不可导的点和端点 a 和 b 处的函数值

3、比较这些函数值，最大的为最大值，最小的为最小值

若连续函数 $f(x)$ 在 $(a\ b)$ 内有唯一的极值点 x_0，则这个点就是最值点

8 渐近线

$x = a$ 是铅直渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$

当 $x \to +\infty$ 时，$y = b$ 是水平渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

当 $x \to +\infty$ 时，$y = kx + b$ 是斜渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0$，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$

9 曲率

若曲线由直角坐标方程 $y = y(x)$ 给出，则曲率 $k = \frac{|y^{''}|}{(1+y^{'2})^{\frac{3}{2}}}$

若曲线由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出，则曲率 $k = \frac{|y^{''}x^{'} - y^{'}x^{''}|}{(x^{'2}+y^{'2})^{\frac{3}{2}}}$

曲率半径 $R = \frac{1}{K}$