

# 1 公式

## 1.1 函数

### 取整函数

$y = [x]$  向左取整:  $x - 1 < [x] \leq x$

一般搭配夹逼准则

## 1.2 极限

### 要分左右极限的情况

1、分段函数的分段点处

2、e 的无穷大型, 如  $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}}$

3、 $\arctan \infty$  型, 如  $\arctan \frac{1}{x-1}$

### 极限的四则运算

设  $\lim f(x) = A$   $\lim g(x) = B$ , 则:

1、 $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

2、 $\lim[f(x)g(x)] = AB$

3、 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

若  $\lim f(x)$  存在  $\lim g(x)$  不存在, 则  $\lim[f(x) \pm g(x)]$  不存在, 其他情况都没有结论

### 多项式除多项式求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + \dots + a_m x^0}{b_0 x^n + \dots + b_n x^0} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & m = n \\ 0 & m < n \\ \infty & m > n \end{cases}$$

例:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \frac{3}{7}$$

### 复合函数求极限

如果  $f(x)$  连续, 且  $g(x)$  有极限  $A$ , 则:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right] = f(A)$$

例:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

## 幂指函数求极限

若  $\lim f(x) = A > 0$  且  $\lim g(x) = B$ ,

则:  $\lim f(x)^{g(x)} = A^B$

## 1.3 重要极限

### 夹逼准则

函数  $A > B > C$ , 函数  $A$  的极限是  $X$ , 函数  $C$  的极限也是  $X$ , 那么函数  $B$  的极限就一定是  $X$

### 单调有界准则

单调递增且有上界, 则有极限, 单调递减且有下界, 则有极限

### 重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

## 1.4 无穷小

无穷小: 极限为 0, (0 也是无穷小)

有界函数  $\times$  无穷小仍是无穷小

设  $\alpha$  和  $\beta$  是无穷小, 且  $\alpha \neq 0$ , 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 则  $\beta$  是比  $\alpha$  的高阶无穷小, 记为:  $\beta = o(\alpha)$

$$o(x^2) \pm o(x^2) = o(x^2)$$

$$o(x^2) \pm o(x^3) = o(x^2)$$

$$x^2 o(x^3) = o(x^5)$$

$$o(x^2) o(x^3) = o(x^5)$$

$$o(2x^2) = o(x^2)$$

## 1.5 常用的等价

若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 则  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小, 记为:  $\beta \sim \alpha$

$$\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$$

$x$  的高次方  $\pm x$  的低次方  $\sim x$  的低次方

$$\text{例: } x^3 + 3x \sim 3x$$

若  $\alpha \sim \alpha_1$  且  $\beta \sim \beta_1$ , 则  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x \sim x$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\arcsin x \sim x$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan x \sim x$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\arctan x \sim x$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x) \sim x$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x - 1 \sim x$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sec x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 + \alpha x)^\beta - 1 \sim \alpha\beta x$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha^x - 1 \sim x \ln \alpha$

## 1.6 连续

若  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

连续  $\pm \times \div$  连续 = 连续

连续  $\pm$  不连续 = 不连续

若  $f(x)$  连续  $g(x)$  也连续, 则  $f[g(x)]$  连续

单调连续函数的反函数也连续, 且单调性相同

闭区间内连续函数必有界

推广:

$f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有界

## 零点定理

$f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  异号, 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$

## 1.7 间断点

### 第一类间断点

1、可去间断点: 左右极限均存在且相等

2、跳跃间断点: 左右极限均存在且不相等

## 第二类间断点

左右极限至少一个不存在

1、无穷间断点: $x \rightarrow x_0^-$  或  $x \rightarrow x_0^+$  时,  $f(x) \rightarrow \infty$

2、振荡间断点: $x \rightarrow x_0^-$  或  $x \rightarrow x_0^+$  时,  $f(x)$  上下振荡

## 2 题目

$$2.1 \quad \text{设 } f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -1 & |x| > 1 \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求  $f[g(x)]$  和  $g[f(x)]$

所有的  $x$  都换成  $g(x)$ :

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1 & |e^x| < 1 \text{ 即 } x < 0 \\ 0 & |e^x| = 1 \text{ 即 } x = 0 \\ -1 & |e^x| > 1 \text{ 即 } x > 0 \end{cases}$$

所有的  $x$  都换成  $f(x)$ :

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e & |x| < 1 \\ 1 & |x| = 1 \\ e^{-1} & |x| > 1 \end{cases}$$

**2.2 设**  $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases},$

**证明当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  的极限不存在**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x + 1 = 1$$

由于左右极限不相等, 所以极限不存在

**2.3  $y = x \cos x$  在  $(-\infty + \infty)$  是否有界?**

**是否为  $x \rightarrow +\infty$  的无穷大?**

取  $x = 2k\pi \in (-\infty + \infty)$  时,  $y = 2k\pi$  大于任意的常数  $M$ , 所以函数无界

取  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in (-\infty + \infty)$  时,  $y = 0$ , 所以不是无穷大