

# 1 公式

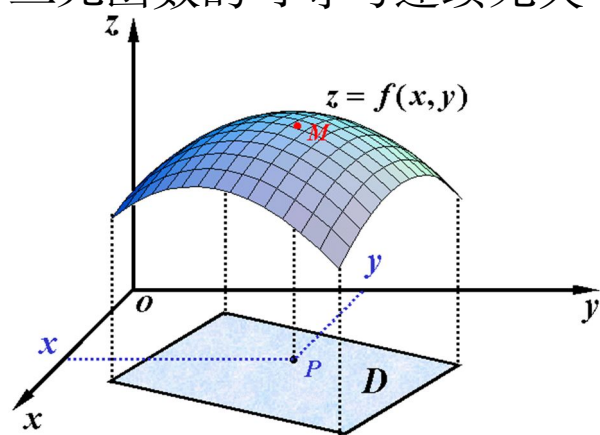
## 1.1 二维邻域

以点  $P_0(x_0, y_0)$  为圆心,  $\delta$  为半径围成一个圆。圆内所有的点 (不包括圆的边) 的集合称为  $P_0$  的  $\delta$  邻域, 记为  $U(P_0, \delta)$

## 1.2 二元函数

二元函数  $z = f(x, y)$  的图像在三维坐标里是曲面

二元函数的可导与连续无关



## 1.3 二元函数的极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

注意: 二元函数求极限不能使用洛必达法则和单调有界准则

若  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ , 则  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续

## 1.4 偏导数

### 偏导数的定义

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

### 求偏导数

- 1、对  $x$  求偏导：将  $y$  看作常数后再对  $x$  求导
- 2、对  $y$  求偏导：将  $x$  看作常数后再对  $y$  求导

### 偏导数的几何意义

设  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  为曲面  $z = f(x, y)$  上的一点，过  $M_0$  作平面  $y = y_0$ ，与曲面相截得一条曲线，其方程为

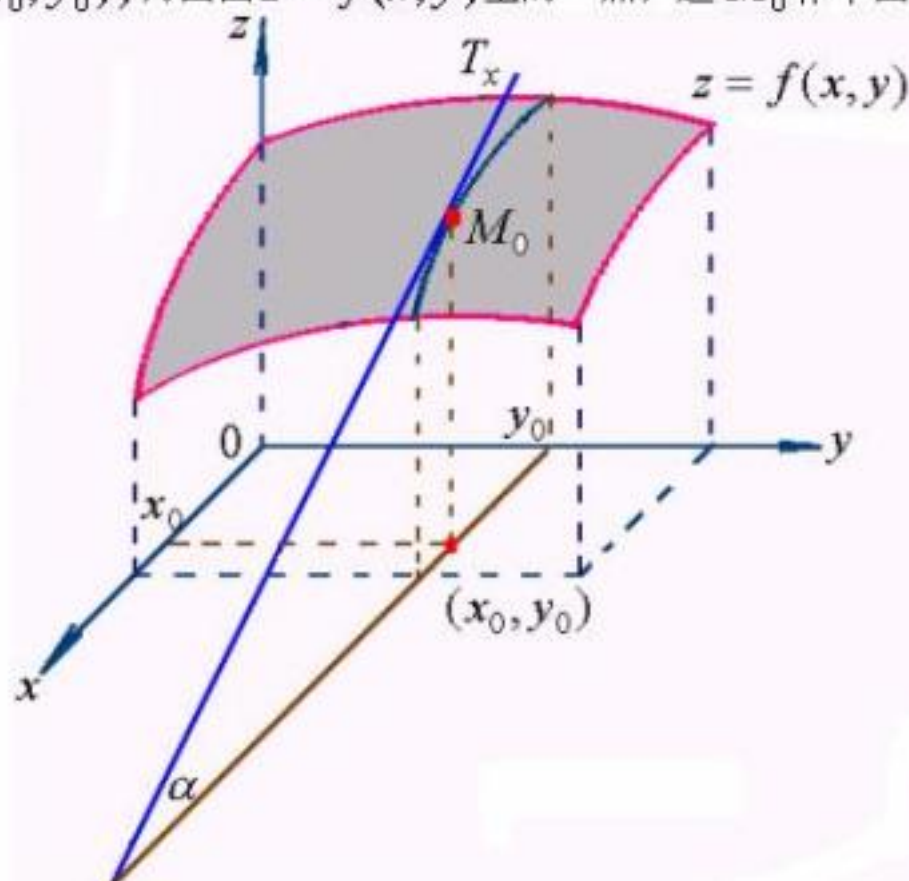
$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x, y_0) \end{cases}$$

而偏导数  $f'_x(x_0, y_0)$  显然就是导数

$$\left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0}$$

在几何上，它代表该曲线在点  $M_0$  处的切线  $M_0T_x$  对  $x$  轴的斜率

$$\operatorname{tg} \alpha = f'_x(x_0, y_0)$$



## 1.5 二阶偏导数

按照对变量的求导顺序不同，二阶偏导数有以下四个

- 1、 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$
- 2、 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$
- 3、 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$
- 4、 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$

其中  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  称为混合偏导数

### 定理

若  $z = f(x, y)$  的两个二阶混合偏导数  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  在点  $(x_0, y_0)$  处连续，则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}|_{(x_0, y_0)}$

## 1.6 全微分