Λογική Πρώτης Τάξης

Κατηγορηματική Λογική ή

Κατηγορηματικός Λογισμός Πρώτης Τάξης ή

FOL ή FOPC

Γιατί λογική πρώτης τάξης;

- Η προτασιακή λογική μας επιτρέπει να εκφράζουμε τι παραδοχές κάνουμε για την πραγματικότητα, δηλαδή τι γεγονότα είναι αληθή ή ψευδή στον κόσμο.

- Η λογική πρώτης τάξης μας επιτρέπει να εκφράζουμε περισσότερα πράγματα:
  - Τι γεγονότα είναι αληθή ή ψευδή στον κόσμο
  - Τι αντικείμενα υπάρχουν στον κόσμο και τι σχέσεις έχουν μεταξύ τους
  - Τι κανόνες διέπουν **όλα** ή **μερικά** από τα αντικείμενα του κόσμου

Κατηγορηματική Λογική-συντακτικό (1)

Σύμβολα σταθερών: αντιπροσωπεύουν αντικείμενα,

π.χ μαρία, 3, ζκβ4965, ...

Σύμβολα μεταβλητών: αντιπροσωπεύουν αντικείμενα που δεν έχουν κατονομαστεί

Π.χ. X, Y, Z, ...

Σύμβολα συναρτήσεων: αντιπροσωπεύουν συναρτήσεις. Κάθε συνάρτηση έχει την **τάξη** της, δηλαδή το πλήθος των ορισμάτων (παραμέτρων) που δέχεται. Κάθε συνάρτηση ορίζεται σε ένα η περισσότερα σύνολα αντικειμένων και παίρνει τιμές από ένα σύνολο αντικειμένων.

Π.χ. πατέρας(πέτρου)= ο πατέρας του Πέτρου

πατέρας(πατέρας(πέτρου))= ?

παιδί(γιώργου, μαρίας)= πέτρος

παιδί(γιώργου, X)=?

Κατηγορηματική Λογική-συντακτικό (2)

Όροι: εκφράσεις που αναφέρονται σε αντικείμενα. Επιτρεπτοί όροι είναι: Σταθερές, Μεταβλητές, Συναρτήσεις με τα ορίσματά τους, όπου όρισμα κάθε συνάρτησης είναι οποιοσδήποτε επιτρεπτός όρος.

Κατηγορήματα: αντιπροσωπεύουν σχέσεις μεταξύ όρων. Κάθε κατηγόρημα έχει την **τάξη** του, δηλαδή το πλήθος των ορισμάτων που δέχεται.

Π.χ. αγαπά(γιώργος, μαρία)

αγαπά(γιώργος, μητέρα(πέτρου))

οικογένεια(γιώργος, μαρία, πέτρος)

ψηλός(γιώργος)

οικογένεια(Χ, Υ, παιδί(Χ,Υ))

Κατηγορηματική Λογική-συντακτικό (3)

[illegible]

[illegible] $\forall$ [illegible] $\exists$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]

$\neg P$

$(P \wedge Q)$

$(P \vee Q)$

$(P \rightarrow Q)$

$(P \leftrightarrow Q)$

$\forall x(P)$

$\exists x(P)$

[illegible]

Κατηγορηματική Λογική-σημασιολογία

Προκύπτει από την εφαρμογή μιας συνάρτησης ερμηνείας στις ατομικές προτάσεις, η οποία τους αποδίδει τιμή *αληθής* ή *ψευδής*.

Η τιμή αλήθειας των σύνθετων προτάσεων προκύπτει σύμφωνα με τους πίνακες αλήθειας των λογικών συνδετικών.

Η τιμή αλήθειας των ποσοδεικτούμενων σύνθετων προτάσεων:

$\forall X(P)$ είναι αληθής όταν η P είναι αληθής για όλες τις δυνατές τιμές του X στο μοντέλο της.

$\exists X(P)$ είναι αληθής όταν η P είναι αληθής τουλάχιστον για μια τιμή του X στο μοντέλο της.

Παράδειγμα αναπαράστασης γνώσης σε κατηγορηματική λογική (1)

Ο πράκτορας καθαριστής ....

agent(A): το A είναι πράκτορας
place(X): το X είναι χώρος
position(A,X): ο πράκτορας A είναι στο χώρο X. Πεδίο τιμών του X = {a, b}
action(A,X): ο πράκτορας A κάνει την ενέργεια X.. Πεδίο τιμών του X = {l, r, s}
dirty(X): ο χώρος X είναι σκονισμένος

Περιγράψτε την ακόλουθη γνώση για τον πράκτορα καθαριστή:

Ο πράκτορας βρίσκεται πάντα σε ένα χώρο και δεν μπορεί να βρίσκεται ταυτόχρονα σε δύο χώρους.

$$\forall X\ (agent(X) \rightarrow \exists Y\ (place(Y) \wedge position(X,Y)) \wedge$$
$$\forall Z\ ((place(Z) \wedge position(X,Z)) \rightarrow Y = Z))$$

Παράδειγμα αναπαράστασης γνώσης σε κατηγορηματική λογική (2)

Ο πράκτορας καθαριστής ....

agent(A): το A είναι πράκτορας
place(X): το X είναι χώρος
act(X): το X είναι ενέργεια
position(A, X): ο πράκτορας A είναι στο χώρο X.
does(A, X): ο πράκτορας A κάνει την ενέργεια X..
dirty(X): ο χώρος X είναι σκονισμένος

Περιγράψτε την ακόλουθη γνώση για τον πράκτορα καθαριστή:

Ο πράκτορας κάνει πάντα μια ενέργεια και δεν μπορεί να κάνει ταυτόχρονα πολλές από τις ενέργειές του.

$\forall X\ (agent(X) \rightarrow \exists Y\ (act(Y) \wedge does(X, Y)) \wedge$

$\forall Z\ ((act(Z) \wedge does(X, Z)) \rightarrow Z = Y))$

Παράδειγμα αναπαράστασης γνώσης σε κατηγορηματική λογική (3)

Παράδειγμα αναπαράστασης γνώσης σε κατηγορηματική λογική (4)

Ο πράκτορας καθαριστής ....

agent(A)= το A είναι πράκτορας
place(X)= το X είναι χώρος
act(X)=το X είναι ενέργεια
position(A, X)= ο πράκτορας A είναι στο χώρο X.
does(A, X) = ο πράκτορας A κάνει την ενέργεια X..
dirty(X)= ο χώρος X είναι σκονισμένος

Περιγράψτε την ακόλουθη γνώση για τον πράκτορα καθαριστή:

Αν βρίσκεται στο χώρο A και κάνει δεξιά τότε βρίσκεται στο χώρο B (ανάλογα για το χώρο B)

Αν βρίσκεται σε ένα χώρο που είναι σκονισμένος και κάνει αναρρόφηση τότε ο χώρος γίνεται καθαρός.

Παράδειγμα αναπαράστασης γνώσης σε κατηγορηματική λογική (5)

Τώρα μπορούμε να μιλήσουμε για δύο πράκτορες ....

agent1, agent2 τα ονόματα (σταθερές) των πρακτόρων
position(A, X)= ο πράκτορας A είναι στο χώρο X. Πεδίο τιμών του X={a, b}, πεδίο τιμών του A={agent1, agent2}
action(A, X) = ο πράκτορας A κάνει την ενέργεια X.. Πεδίο τιμών του X={l, r, s}
dirty(X)= ο χώρος X είναι σκονισμένος

Περιγράψτε την ακόλουθη γνώση:

Όταν ένας πράκτορας βρίσκεται σε ένα χώρο, και βρίσκεται και άλλος πράκτορας στον ίδιο χώρο, τότε ο πρώτος πράκτορας πρέπει να αλλάξει χώρο.

Αλλάζει χώρο ένας πράκτορας όταν, εάν είναι στον A επιλέγει δεξιά και αν είναι στον B επιλέγει αριστερά.

O agent1 είναι στον A, o agent2 είναι στον B, o A είναι σκονισμένος και ο B είναι καθαρός.

Παράδειγμα αναπαράστασης γνώσης σε κατηγορηματική λογική (6)

Εκφράστε την παρακάτω γνώση σε κατηγορηματική λογική:

Κάθε άνθρωπος έχει δύο γονείς, έναν πατέρα και μια μητέρα.
Όλοι οι άνθρωποι έχουν τον ίδιο πατέρα και την ίδια μητέρα.
Κάθε άνθρωπος είναι είτε αρσενικού είτε θηλυκού φύλου.
Κάθε άνθρωπος που είναι αρσενικός δεν είναι θηλυκός.
Ο πατέρας του Γιώργου είναι ο πατέρας του Πέτρου.
Όποτε δύο άνθρωποι έχουν ίδιο πατέρα είναι αδέλφια.
Κάθε φοιτητής περνά τα μαθήματά του όταν πάρει βαθμό πάνω από 5 σε αυτά.

Συμπερασμός στη λογική πρώτης τάξης

Αν ήταν δύσκολο στην προτασιακή λογική να αποδεικνύουμε συμπεράσματα με πίνακες αλήθειας τώρα είναι ακόμα δυσκολότερο. Γιατί; Σκεφτείτε τις ποσοδεικτούμενες προτάσεις....

Κανόνες εξαγωγής συμπεράσματος

Όλοι (10) οι κανόνες της προτασιακής λογικής και τέσσερις νέοι, δύο για την εισαγωγή των ποσοδεικτών και δύο για την απαλοιφή τους.

Οι νέοι κανόνες εξαγωγής συμπεράσματος

Απαλοιφή του ∀: $\dfrac{\forall X(P(X))}{P(a)}$ για οποιοδήποτε σύμβολο σταθεράς α.

Απαλοιφή του ∃: $\dfrac{\exists X(P(X))}{P(a)}$ για σταθερά α καινούρια στην απόδειξη

Εισαγωγή του ∀: $\dfrac{P(a)}{\forall X(P(X))}$ για καινούρια σταθερά α

Εισαγωγή του ∃: $\dfrac{P(a)}{\exists X(P(X))}$ για οποιαδήποτε σταθερά α

Παράδειγμα απόδειξης

Αποδείξτε τα παρακάτω:

$$\{\forall X(human(X) \rightarrow mortal(X)), human(bob)\} \models mortal(bob)$$

$$\{\ \{\forall X(p(X))\} \models \exists X(p(X))$$

$$\{\forall X(p(X))\} \models \neg\exists X(\neg p(X))$$

$$\{\exists X(p(X))\} \models \neg\forall X(\neg p(X))$$

$$\{\forall X(p(X) \wedge q(X))\} \models p(a)$$