

Các bạn cần chuẩn bị

Máy tính bỏ túi (Casio fx)

Vở ghi + giấy nháp

Đánh dấu chỗ cần hỏi vào giấy nháp, cuối buổi hỏi lại

Chú ý: Có lưu lại video buổi học!

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.1. Giới hạn cơ bản

1.1.1. Kí hiệu giới hạn

Ví dụ $f(x) = \frac{1}{x} \quad x \rightarrow +\infty \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{10000}, \dots, 0$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Biểu thức

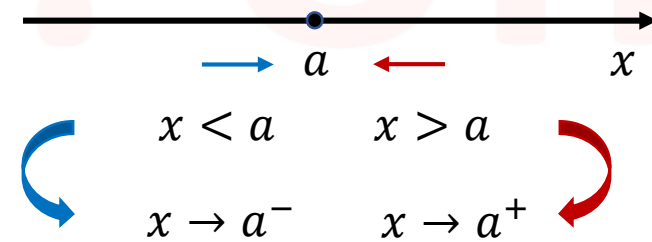


$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Cận

$$x \rightarrow a \Rightarrow \begin{cases} x \text{ ngày càng gần với } a \\ x \neq a \end{cases}$$

Kết quả
Duy nhất
(Chỉ có 1)



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.1. Giới hạn cơ bản

1.1.2. Giới hạn các hàm sơ cấp cơ bản (S1)

Lũy thừa

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

$$y = x^\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$(0; +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{0,3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-0,3} = +\infty$$

Mũ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$y = a^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$$

$$(-\infty; +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$y = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^x = +\infty$$

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.1. Giới hạn cơ bản

1.1.2. Giới hạn các hàm sơ cấp cơ bản (S2)

Loga

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$y = \log_a x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{0,5} x = -\infty$$

$$(0; +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$y = \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{0,5} x = +\infty$$

Lượng giác

Không tồn tại: $\sin(\infty)$, $\cos(\infty)$, $\tan(\infty)$, $\cot(\infty)$

Lượng giác
ngược

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \arcsin x = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arccos x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \arccos x = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$$

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.2. Giới hạn dạng vô định cơ bản

Vô định

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\infty - \infty$$

$$1^\infty$$

$$\infty^0$$

$$0^0$$

0/0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arcsin u}{u} = 1$$

1^∞

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u)}{u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.1. Quy tắc

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \pm n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \cdot n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{m}{n} \quad (n \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = m^n$$

Lim tổng = tổng lim

Lim tích = tích lim

Lim thương = thương lim

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.2. Chia cho lũy thừa bậc cao nhất

Dạng

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x^3} + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 5}{x\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x^3} + 2x - 3}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x\sqrt{x}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x\sqrt{x}}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 1$$

1.3.3. Nhân liên hợp

Dạng

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] \quad (\infty - \infty)$$

Bậc 2 $A^2 - B^2$

Bậc 3 $A^3 - B^3$

Liên hợp của

$$(A - B)$$

$$A + B$$

$$\sqrt{u(x)}$$

$$A^2 + AB + B^2$$

$$\sqrt[3]{u(x)}$$

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.3. Nhân liên hợp

Liên hợp của

$$(A - B)$$

Bậc 2

$$A + B$$

$$\sqrt{u(x)}$$

Bậc 3

$$A^2 + AB + B^2$$

$$\sqrt[3]{u(x)}$$

VD1

$$\begin{aligned} L_3 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1} = \frac{-3}{\sqrt{1 - 0} + 1} = -3 \end{aligned}$$

VD2

$$\begin{aligned} L_4 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 1) - 8}{(x - 3) [\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2 - 1} + 4]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2 - 1} + 4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.4. Vô cùng bé (VCB) tương đương

Dạng	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} \left(\frac{0}{0} \right)$	$\lim_{x \rightarrow a} u(x) \cdot f(x) \quad (0 \cdot \infty)$
VCB?	$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0 \Rightarrow u(x) \text{ là một VCB khi } x \rightarrow a$	
VD	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x^2) = 0 \Rightarrow \sin(x^2) \text{ là VCB khi } x \rightarrow 0$ $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \Rightarrow \ln x \text{ là VCB khi } x \rightarrow 1$	
VCB tương đương?	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = 1 \Rightarrow u(x) \sim v(x) \text{ khi } x \rightarrow a$ $= 0 \Rightarrow u(x) = o[v(x)]$ $= k \Rightarrow u(x) \text{ cùng bậc } v(x) \quad (k \neq 0, 1)$	

Thay thế
biểu thức
phức tạp
khi
tính giới hạn

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.4. Vô cùng bé (VCB) tương đương

Thường dùng

$$x \rightarrow 0$$

$$\sin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$(1 - \cos x) \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\ln(1 + x) \sim x$$

$$(e^x - 1) \sim x$$

$$(ax^m + a_1x^{m+1} + \dots + a_nx^{m+n}) \sim ax^m$$

(Giữ lại VCB bậc thấp nhất)

$$x \rightarrow a \Rightarrow u(x) \rightarrow 0$$

$$\sin u \sim u$$

$$\tan u \sim u$$

$$(1 - \cos u) \sim \frac{u^2}{2}$$

$$\arcsin u \sim u$$

$$\ln(1 + u) \sim u$$

$$(e^u - 1) \sim u$$

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.4. Vô cùng bé (VCB) tương đương (S3)

VD1

$$L_5 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{\sin(2x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln[1+(x-2)]}{\sin(2x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(2x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} \ln(1+u) \sim u \\ \sin u \sim u \end{array} \right)$$

VD2

$$L_6 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan 2x)}{\tan(\sin 3x)} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \quad (1), (2): \begin{cases} \sin u \sim u \\ \tan u \sim u \end{cases}$$

VD3

$$L_7 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1+(\cos x - 1)]}{\ln[1+(\cos 3x - 1)]} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\cos 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 3x} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{(3x)^2/2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

$$(1): \ln(1+u) \sim u$$

$$(2): (1 - \cos u) \sim \frac{u^2}{2}$$

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.4. Vô cùng bé (VCB) tương đương (S3)

Lưu ý

Đưa về đúng dạng (công thức) VCB tương đương trước khi thay

Xét dạng VCB tương đương từ ngoài vào

Có thể dung nhiều lần liên tiếp

Nên thay cho phép nhân (chia)

Hạn chế thay cho phép cộng (trừ)

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.5. Lôpitan (S1)

Dạng

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} \quad \left(\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0} = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0 - 0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

Quy tắc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

Đạo hàm tử số và đạo hàm mẫu số

Lưu ý

(1) Để ở phân thức trước khi (L)

(2) (L) xong cần thay cận vào kiểm tra xem hết vô định chưa?

(3) Có thể phải (L) nhiều lần

(4) Nên kết hợp VCB tương đương để dễ đạo hàm

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.5. Lôpitan (S2)

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$$

VD1 $L_8 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 3x)} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{-\frac{3 \sin 3x}{\cos 3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{3 \tan 3x} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x}{9(1 + \tan^2 3x)} = \frac{1}{9}$

VD2 $L_9 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \stackrel{\sin x \sim x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} = 0$

VD3 $L_{10} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^{\sin x}) \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \stackrel{(\infty/\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.6. Quy tắc kẹp

Dạng

$$L = \lim_{x \rightarrow a} u(x) \cdot v(x) = 0$$

Nếu $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ và $|v(x)| \leq M$

VD1

$$L_{11} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x$$

$$\text{Có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ |\sin x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow L_{11} = 0$$

VD2

$$L_{12} = \lim_{x \rightarrow 3} (e^x - e^3) \cos \frac{1}{3-x}$$

$$\text{Có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3} (e^x - e^3) = 0 \\ \left| \cos \frac{1}{3-x} \right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow L_{12} = 0$$

VD3

$$L_{13} = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[5]{x+1} \cos \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[5]{x+1} = 0 \\ \left| \cos \frac{1}{x+1} \right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow L_{13} = 0$$

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.7. Giới hạn của hàm lũy thừa mũ (S1)

Dạng

$$L = \lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)} \quad (1^\infty, \infty^0, 0^0)$$

Logarit hóa

B1

$$y = [u(x)]^{v(x)} \Leftrightarrow \ln y = v(x) \cdot \ln[u(x)]$$

B2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \ln y &= \lim_{x \rightarrow a} v(x) \cdot \ln[u(x)] \quad (0 \cdot \infty) \\ &= k \end{aligned}$$

B3

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow a} \ln y} = e^k$$

Chuyển dạng lũy thừa mũ
về dạng thông thường

Đạo hàm

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.7. Giới hạn của hàm lũy thừa mũ (S2)

VD1 $L_{14} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

B1 Đặt $y = (e^{2x} + \sin x)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{x} \ln(e^{2x} + \sin x)$

B2 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(e^{2x} + \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + \sin x)}{x} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} + \cos x}{e^{2x} + \sin x} = \frac{2 + 1}{1 + 0} = 3$

B3 $L_{14} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln y} = e^3$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

1. Giới hạn và các phương pháp tính

1.3. Các phương pháp tính

1.3.7. Giới hạn của hàm lũy thừa mũ (S2)

VD2 $L_{15} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + x)^{\frac{1}{x}}$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

B1 Đặt $y = (2^x + x)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{x} \ln(2^x + x)$

B2
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(2^x + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2^x + x)}{x} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln 2 + 1}{2^x + x} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln^2 2}{2^x \ln 2 + 1}$$

$$\stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln^3 2}{2^x \ln^2 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 2 = \ln 2$$

B3 $L_{15} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y} = e^{\ln 2} = 2$

Tổng kết

1. Nhân liên hợp – chia rút gọn
2. Thay thế biểu thức tương đương Vô cùng bé
3. Đạo hàm – Quy tắc Lôpitan
4. Quy tắc kẹp
5. Dạng lũy thừa mũ – Phương pháp Logarit hóa

Hỏi đáp cuối bài

Thẻ lệ đăng kí học Online TCC 2

PA1: Lập nhóm 5 – 10 người + thống nhất lịch học + gửi ảnh

PA2: Gửi lịch rảnh cá nhân + chờ ảnh xếp ghép nhóm

Thông tin sơ bộ

1 buổi thử (free) + 5 buổi học chính = 250k/người