Linear Algebra

Bổ sung thêm cho bài giảng

2019

Nội dung bổ sung

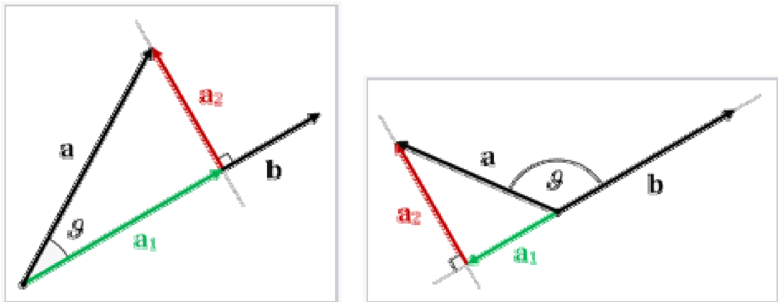
1. Vectơ
2. Ma trận
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Định thức
5. Ma trận thưa

1. Vectơ

❑ Vector Dot Product

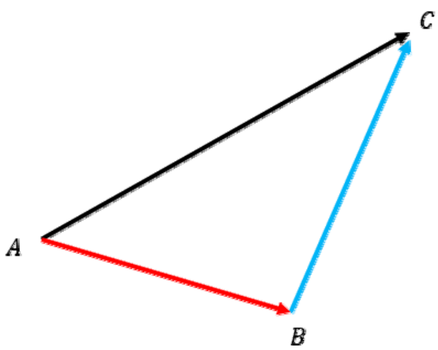
$$\vec{u}.\vec{v} = |u|.|v|.\cos(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i.v_i$$

❑ Vector projection



1. Vectơ (tt.)

❑ Vector decomposition



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Nội dung bổ sung

1. Vectơ
2. **Ma trận**
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Định thức
5. Ma trận thưa

2. Ma trận

- **Ý nghĩa**
  - thể hiện mối liên hệ giữa các đại lượng (tập hợp)
  - thể hiện mối liên hệ nội tại trong một tập hợp
- **Ma trận A cấp (m, n) trên tập số thực $\mathbb{R}$:** $\mathbf{A}_{m,n} \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$A_{m,n} = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}, a_{ij} \in R$$

  - a_{ij} hay $a_{i,j} \in \mathbb{R}$: các hệ số
  - vector là ma trận đặc biệt: $A_{1,n}$
  - ma trận **O**: $a_{ij} = 0, \forall i, j$

2. Ma trận (tt.)

- Nhân ma trận với vô hướng

$$\alpha.\vec{v} = \vec{v}.\alpha = (\alpha.v_1, \alpha.v_2, ..., \alpha.v_n)$$

- Nhân ma trận với ma trận

$$A_{m,n}.B_{n,p} = C_{n,p}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

2. Ma trận (tt.)

- Các vectors v_1, v_2, …, v_k được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại các vô hướng α_1, α_2, …, α_k không đồng thời = 0:

$$\alpha_1.\vec{v}_1 + \alpha_2.\vec{v}_2 + ... + \alpha_k.\vec{v}_k = \vec{0}$$

Ngược lại, v_1, v_2, …, v_k được gọi là độc lập tuyến tính

- Hạng của A, rank(A), là số dòng tối đa độc lập tuyến tính
  - nhiều phương pháp tính hạng của ma trận

Nội dung bổ sung

1. Vectơ
2. Ma trận
3. **Hệ phương trình tuyến tính**
4. Định thức
5. Ma trận thưa

3. Hệ phương trình tuyến tính

- Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn số

$$A.X = B$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Các phép biến đổi sơ cấp trên DÒNG φ**

  Loại 1: hoán vị giữa dòng (i) và dòng (k), ký hiệu: (i) $\leftrightarrow$ (k)

  Loại 2: nhân dòng (i) với vô hướng α, ký hiệu: (i) $\to$ α(i)

  Loại 3: thay dòng (i) bằng dòng (i) + α(k), ký hiệu: (i) $\to$ [(i) + α(k)]

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -5 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)\to[(2)+2(1)]]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)\leftrightarrow(3)]{} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)\to\frac{-1}{4}(1)]{} \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)\to[(3)-8(1)]]{} \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 16 & 5 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

- **A và B tương đương dòng, ký hiệu A~B, nếu A có thể biến đổi thành B** (và ngược lại) **bằng một số hữu hạn các phép φ_k**

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n}.X_{n,1} = B_{m,1}$**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{C1} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1^*} & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow{C2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 7 & -16 & 26 \\ 0 & 1^* & -2 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -90 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1^* & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1^* & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -36 \end{array}\right) \xrightarrow{C4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$$

C1 : $(2) \to (2) + 2(1),\ (3) \to (3) - 3(1),\ (4) \to (4) - 2(1)$

C2 : $(2) \to (2) + (3),\ (1) \to (1) - 2(2),\ (3) \to (3) + 4(2),\ (4) \to (4) + 7(2)$

C3 : $(4) \to (4) - (3),\ (3) \to -18^{-1}(3),\ (1) \to (1) - 7(3),\ (2) \to (2) + 2(3)$

C4 : $(4) \to 18^{-1}(4),\ (1) \to (1) + 2(4),\ (2) \to (2) - 3(4),\ (3) \to (3) + 2(4)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

❑ **Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n}.X_{n,1} = B_{m,1}$**

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & 6 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) : \text{vô nghiệm}$$

$(4) \to (4) - (1),\ (1) \to (1) - (2),\ (2) \to (2) - 2(3),\ (3) \to (3) - (1)$
$(2) \leftrightarrow (3)$
$(1) \to (1) - 2(2),\ (3) \to (3) + 7(2),\ (4) \to (4) + 3(2)$
$(3) \to (3) - 2(4)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

❑ **Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n}.X_{n,1} = B_{m,1}$**

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & -2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1^* & -1 & -1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 & -7/6 & 5/6 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 & -5/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

: các cột (3) và (5) không biến đổi được
Hệ có vô số nghiệm

$(2) \to (2) - (1),\ (3) \to (3) - 4(1),\ (4) \to (4) - 2(1)$
$(3) \to (3) - 3(2),\ (4) \to (4) + (2)\ (2) \to -2^{-1}(2),\ (1) \to (1) - (2)$
$(3) \to 9^{-1}(3),\ (4) \to (4) - 12(3),\ (1) \to (1) + 2(3),\ (2) \to (2) + (3)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n}.X_{n,1} = B_{m,1}$**
  - cột chuẩn E_i (m dòng): hệ số dòng i bằng 1, các hệ số khác = 0

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(E_1 \quad E_2 \quad \ldots \quad E_m\right)?$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n}.X_{n,1} = B_{m,1}$**
  - Bước 1 – Chuẩn hóa các cột: xây dựng tuần tự E_1, E_2, …
    - Khi xây dựng E_k thì không được làm thay đổi E_1, …, E_{k-1}
    - Nếu không thể chuẩn hóa cột k thành E_k thì xét cột (k + 1)
  - Bước 2 – Xem xét nghiệm của hệ phương trình
    - Chuẩn hóa E_1, E_2, …, E_n: nghiệm duy nhất
    - Xuất hiện 1 dòng mâu thuẫn: (0 0 … 0 | a $\neq$ 0): vô nghiệm
    - Tạo E_1,…, E_k (k < n) không mâu thuẫn: vô số nghiệm

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Điều kiện chuẩn hóa cột k thành E_k**
  - nếu $v_k = v_{k+1} = \ldots = v_m = 0$: không thể chuẩn hóa
  - nếu $0 \neq v_j \in \{v_k, v_{k+1}, \ldots, v_m\}$: (k) ↔ (j) để chuẩn hóa (đưa về 1)

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_{k-1} \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \ldots \\ v_m \end{pmatrix} \to E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Phương pháp Gauss dựa trên cột bán chuẩn**

$$F_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, F_{m-1} = \begin{pmatrix} f_{1(m-1)} \\ f_{2(m-1)} \\ f_{3(m-1)} \\ \ldots \\ f_{(m-1)(m-1)} \\ 0 \end{pmatrix}, F_m = \begin{pmatrix} f_{1(m-1)} \\ f_{2(m-1)} \\ f_{3(m-1)} \\ \ldots \\ f_{(m-1)(m-1)} \\ f_{(mm} \end{pmatrix}$$

$$f_{ij} \neq 0, \forall i \leq j \qquad f_{ij} = 0, \forall i > j$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

❑ **Phương pháp Gauss dựa trên cột bán chuẩn**

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 4 & -12 & 18 \\ -2 & -5 & 7 & -6 & 38 \\ 6 & 0 & -3 & 20 & -14 \end{array}\right)
\to
\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 24 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 41 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -23 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} F_1 & & & \end{array}\end{array}
\to
\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & & \end{array}\end{array}
\to
$$

$$
\to
\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* & 6 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array}\end{array}
$$

backward substitution

$$x_4 = -1, x_3 = 4, x_2 = -2, x_1 = 3$$

$(2) \to (2) + 2(1), (3) \to (3) + (1), (4) \to (4) - 3(1)$
$(3) \to (3) + 2(4), (4) \to (4) + (2)$
$(4) \to (4) - (3)$

❑ **Phương pháp Gauss dựa trên cột bán chuẩn**

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -19 & 12 & -15 & -16 \\ -2 & 8 & -5 & 7 & 7 \\ 4 & -8 & 9 & 4 & 2 \\ -7 & 15 & -17 & -4 & 0 \end{array}\right)
\to
\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 18 & 16 \\ 0 & -6 & -3 & -11 & -14 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} F_1 & & & \end{array}\end{array}
\to
\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2^* & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & & \end{array}\end{array}
\to
$$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$: hệ vô nghiệm.

$(3) \to (3) + 2(2), (1) \to (1) + 2(2), (2) \to (2) + 2(1), (4) \to (4) + 7(1)$
$(3) \to (3) - 4(2), (4) \to (4) + 3(2)$
$(4) \to (4) + 2(3)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Phương pháp Gauss dựa trên cột bán chuẩn**

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 7 & -11 \\ -2 & 6 & -5 & 2 & 5 & -20 \end{array}\right) \to \underset{F_1}{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 10 & 1 & -4 & 12 & -31 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 5 & -12 \end{array}\right)} \to \underset{F_1 \ F_2}{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)} \to$$

$$\to \underset{F_1 \ F_2 \ F_3}{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3^* & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

: các cột (4) và (5) không bán chuẩn hóa được.

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do : $x_4 = a$, $x_5 = b$

$(2) \to (2) - 3(1)$, $(3) \to (3) + (4)$, $(4) \to (4) + 2(1)$
$(3) \to (3) - 5(2)$, $(4) \to (4) - 2(2)$
$(3) \to 2^{-1}(3)$, $(4) \to (4) - (3)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **S_A, ma trận dạng bậc thang của A**
  - bán chuẩn hóa tối đa các cột của A (Gauss)
  - các dòng không tầm thường được xếp phía trên
  - mỗi ma trận A có thể có nhiều S_A
- **R_A, ma trận dạng bậc thang rút gọn của A**
  - chuẩn hóa tối đa các cột của A (Gauss – Jordan)
  - các dòng không tầm thường được xếp phía trên
  - mỗi ma trận A chỉ có một R_A

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Hạng của A, ký hiệu rank(A)**
  - số dòng không tầm thường của R_A (hay S_A)
  - số cột chuẩn trong R_A
  - số cột bán chuẩn trong S_A

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Hạng của A, ký hiệu rank(A)**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -16 & 32 \\ 3 & -1 & -4 & 13 & -24 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -10 & -10 & 16 & -45 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -15 \end{pmatrix} \to$$

$$F_1 \qquad\qquad F_1 \quad F_2$$

$$\to \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2^* & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_A \to \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A$$

$$F_1 \quad F_2 \quad F_3 \qquad\qquad E_1 \quad E_2 \qquad\qquad E_1 \quad E_2 \quad E_3$$

$(2) \to (2) + 2(1),\ (3) \to (3) + (4),\ (4) \to (4) + 3(1)$

$(4) \to (4) - 2(2),\ (2) \to -5^{-1}(2),\ (3) \to (3) - (2)$

$(4) \to (4) + 3(3)$

$(1) \to (1) + 3(2),\ (1) \to -(1)$

$(1) \to (1) + (3),\ (3) \to -2^{-1}(3),\ (2) \to (2) + (3)$

rank(A) = 3

- S_A (R_A) có 3 dòng $\neq 0$
- R_A có 3 cột chuẩn
- S_A có 3 cột bán chuẩn

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Định lý Kronecker – Capelli**
  - Nếu rank(A|B) = rank(A) + 1 thì (A|B) vô nghiệm
  - Nếu rank(A|B) = rank(A) = n thì (A|B) có 1 nghiệm duy nhất
  - Nếu rank(A|B) = rank(A) = k < n thì (A|B) có vô số nghiệm

Nội dung bổ sung

1. Vectơ
2. Ma trận
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. **Định thức**
5. Ma trận thưa

4. Định thức

❑ **Định thức của ma trận vuông A ∈ $M_n(R)$, ký hiệu det(A) hay |A|**

- A = [a] ∈ $M_1(R)$ $\Rightarrow$ |A| = a

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ∈ $M_2(R)$ $\Rightarrow$ |A| = (ad – bc)

- $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right)$ quy tắc SARRUS

$\Rightarrow$ |A| = (aei + bfg + cdh) – (ceg + afh + bdi)

4. Định thức (tt.)

❑ **Định thức của ma trận vuông A, ký hiệu det(A) hay |A|, n ≥ 2**

- Minor A(i, j): loại bỏ dòng i và cột j của A

- Cofactor: $C_{ij} = (-1)^{(i+j)}.|A(i, j)|$

- tính toán dựa trên dòng i: $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.C_{ik}$

- tính toán dựa trên cột j: $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.C_{kj}$

- chọn dòng hay cột có nhiều hệ số = 0

4. Định thức (tt.)

❑ **Định thức của ma trận vuông A $\in M_n(R)$, ký hiệu det(A) hay |A|**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

- Tính |A| dựa trên dòng (1):

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.C_{1k} = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13} =$$

$$= 4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(-20) + 17 + 2(11) = 41$$

4. Định thức (tt.)

❑ **Một số nhận xét**

- Nếu có dòng (hay cột) chỉ chứa hệ số 0 thì |A| = 0
- Nếu có 2 dòng (hay 2 cột) tỉ lệ với nhau thì |A| = 0
- Nếu A là ma trận *tam giác* trên hoặc dưới thì $|A| = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn}$
- $|A| = |A^T|$
- $|A_1.A_2\ldots A_k| = |A_1|.|A_2|\ldots|A_k|$

4. Định thức (tt.)

- **Các phép biến đổi sơ cấp trên CỘT** ρ

  Loại 1: hoán vị giữa cột (j) và cột (k), ký hiệu: (j)” $\leftrightarrow$ (k)”

  Loại 2: nhân cột (i) với vô hướng α, ký hiệu: (i)” $\rightarrow$ α(i)”

  Loại 3: thay cột (i) bằng cột (i) + α(k), ký hiệu: (i) $\rightarrow$ [(i) + α(k)]

4. Định thức (tt.)

- **Nhận xét**
  - Nếu A $\rightarrow$ B bằng 1 phép biến đổi loại 1 trên dòng hay cột thì

    $$|B| = -|A|$$

  - Nếu A $\rightarrow$ B bằng 1 phép biến đổi loại 2 trên dòng hay cột thì

    $$|B| = \alpha.|A|$$

    $\Rightarrow$ $|\alpha.A| = \alpha^n.|A|$ (nhân n dòng của A với α)

  - Nếu A $\rightarrow$ B bằng 1 phép biến đổi loại 3 trên dòng hay cột thì

    $|B| = |A|$ (độc lập với α)

4. Định thức (tt.)

❑ Ma trận (vuông) khả nghịch, ma trận nghịch đảo

- ma trận đơn vị cấp n (vuông): $I_{n,n} \equiv I_n$
- ma trận nghịch đảo của A, nếu có, là duy nhất, ký hiệu: A^{-1}

❑ Các phát biểu sau là tương đương đối với ma trận $A_{n,n}$

- A khả nghịch
- $|A| \neq 0$
- rank(A) = n

4. Định thức (tt.)

❑ Tìm ma trận nghịch đảo dựa trên định thức

- Minor A(i, j): loại bỏ dòng i và cột j của A
- Cofactor: $C_{ij} = (-1)^{(i+j)}.|A(i, j)|$
- Lập ma trận: $C_{n,n} = [C_{ij}]$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C^T$$

- n = 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4. Định thức (tt.)

- Tìm ma trận nghịch đảo dựa trên định thức

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -20 & -17 & 11 \\ -2 & -14 & -3 \\ -7 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-41}\begin{pmatrix} -20 & -2 & -7 \\ -17 & -14 & -8 \\ 11 & -3 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 20 & 2 & 7 \\ 17 & 14 & 8 \\ -11 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

4. Định thức (tt.)

- Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách giải A.X = I

- Giả sử ma trận $A_{n,n}$ là khả nghịch ($R_A = I_n$)
  - Nếu chuỗi các phép biến đổi sơ cấp trên dòng $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ biến A thành R_A (= I_n) thì chuỗi phép biến đổi đó cũng sẽ biến I_n thành A^{-1}.

- Phương pháp Gauss – Jordan tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}: thực hiện chuỗi $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ đồng thời trên A và I_n

  $(A \mid I_n) \to (A_1 \mid B_1) \to (A_2 \mid B_2) \to \ldots \to (A_k \mid B_k)$ trong đó $A_k = R_A$

  Nếu $R_A = I_n$ thì A khả nghịch và $A^{-1} = B_k$

4. Định thức (tt.)

❑ Tìm ma trận nghịch đảo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -12 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 22 & 53 & 7 & -7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -2 & 16 & -55 & -9 \\ 0 & 1^* & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -31 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 22 & -75 & -12 \\ 0 & 0 & 1^* & -9 & 31 & 5 \end{array}\right). \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix}$$

$(1) \to (1) - (2),\ (2) \to (2) - 2(1),\ (3) \to (3) + 7(1)$

$(3) \to (3) + 4(2),\ (2) \to (2) + 3(3)$

$(1) \to (1) - 3(2),\ (3) \to (3) - 2(2)$

$(1) \to (1) - 2(3),\ (2) \to (2) + 3(3),\ (3) \to -(3)$

4. Định thức (tt.)

❑ Các tính chất trên ma trận A khả nghịch

- A^{-1} khả nghịch: $(A^{-1})^{-1} = A$
- A^T khả nghịch: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\alpha \neq 0$, $\alpha.A$ khả nghịch: $(\alpha.A)^{-1} = \alpha^{-1}.A^{-1}$
- $r \in Z$, A^r khả nghịch: $(A^r)^{-1} = A^{-r}$
- A.B khả nghịch $\Leftrightarrow$ A và B khả nghịch và $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- A.X = B có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}.B$

Nội dung bổ sung

1. Vectơ
2. Ma trận
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Định thức
5. **Ma trận thưa**

5. Ma trận thưa

- **Coordinate List (COO)**

Giả sử p là số phần tử ≠ 0 của ma trận A

Tạo 3 mảng có *cùng kích thước p*:

- data[p] chứa p giá trị ≠ 0 của A
- col[p] chứa p chỉ số CỘT của các phần tử ≠ 0 của A
- row[p] chứa p chỉ số DÒNG của các phần tử ≠ 0 của A

A[row[i], col[i]] = data[i]

5. Ma trận thưa (tt.)

❑ Compressed Sparse Row (CSR) → row oriented

Giả sử p là số phần tử ≠ 0 của ma trận A

Tạo 3 mảng có *kích thước khác nhau*:

- data[ ] chứa p giá trị ≠ 0 của A
- indices[ ] chứa p chỉ số CỘT của các phần tử ≠ 0 của A
- indptr[ ] chứa một dãy số có (m + 1) phần tử tăng (không đều) từ 0 cho đến p

VỊ TRÍ BẮT ĐẦU rút trích trong data[ ] cho mỗi dòng i < m

idxptr = (start_r(0), start_r(1), start_r(2), ..., start_r(m-1), p)

start_r(0) = 0 (quy ước: chỉ số bắt đầu = 0)

5. Ma trận thưa (tt.)

❑ Compressed Sparse Row (CSR) → row oriented

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$data[\ ] = [8 \quad 6 \quad 9 \quad 4 \quad 3]$$

$$indices[\ ] = [0 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 3]$$

$$idxptr[\ ] = [0 \quad 2 \quad 4 \quad 5]$$

Gọi P(i) là tập các giá trị ≠ 0 của dòng A(i), được rút trích từ data[ ]

P(0) = { data[**0**], data[1] } = { 8, 6 }

P(1) = { data[**2**], data[3] } = { 9, 4 }

P(2) = { data[**4**] } = { 5 }

Tài liệu tham khảo

Đậu Thế Cấp, *Đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục, 2008.

Lê Văn Hợp, *Bài giảng môn Toán Đại số B1* (Đại số tuyến tính).

Nguyễn Duy Thuận và các tác giả, *Đại số tuyến tính*, NXB ĐH Sư phạm, 2003.