3. Singular Value Decomposition

- **Ma trận U $\in$ $M_m(R)$ trực giao** (*orthogonal matrix*)

$$U.U^T = U^T.U = I$$

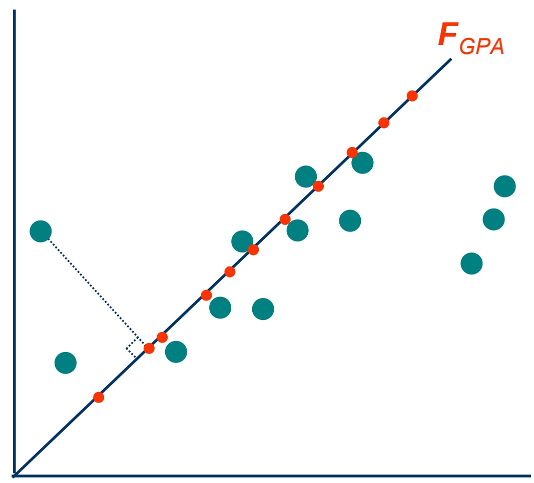
- **Singular Value Decomposition**

$$A = U.S.V^T$$

- U $\in$ $M_m(R)$: trực giao (chuẩn); các cột: *left-singular vectors*
- S $\in$ $M_{m,n}(R)$: đường chéo, hệ số không âm *singular values* $\sqrt{\lambda_i}$, sắp xếp giảm dần
- V $\in$ $M_m(R)$: trực giao (chuẩn); các cột: *right-singular vectors*

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Tìm <u>không gian đặc trưng</u> mới *F'* tạo phân hoạch trên items tốt hơn không gian đặc trưng ban đầu *F***



3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Các bước thực hiện**

Bước 1: Tạo ma trận P = A^T.A

⬇

Bước 2: Tạo ma trận V^T

Tìm eigenvectors của **P** và chuẩn hóa thành ma trận trực giao để tạo thành các dòng của ma trận **V^T**

(ưu tiên eigenvectors có eigenvalues lớn thì được xếp trước)

⬇

Bước 3: Tạo ma trận đường chéo S và S^{-1}

Tính singular values trong *S*: $s_i = \sqrt{\lambda_i}, s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_r$

⬇

Bước 4: Tạo ma trận U = A.V.S^{-1}

3. Singular Value Decomposition (tt.)

Bước 1: Tạo ma trận P = A^T.A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = A^T.A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Bước 2: Tạo V^T

a. Tìm eigenvalues, eigenvectors của P

$$P.\vec{x} = \lambda.\vec{x} \Rightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 10-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-10)(\lambda-12) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 10 \\ \lambda = 12 \end{array}\right.$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

b. Chuẩn hóa thành ma trận trực giao (trực chuẩn)

- Với λ_2 = 12

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_3 = 1 \qquad x_2 = 2 \Rightarrow \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

- Với λ_2 = 10

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0 \qquad x_1 = -2 = -2x_2 \Rightarrow \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \Rightarrow V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

Bước 3: Tạo ma trận đường chéo S và S^{-1}

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Bước 4: Tạo ma trận U = A.V.S^{-1}

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$U.S.V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Giả sử A $\in M_{m,n}(R)$, với (m < n)**

  $P = A^T.A \in M_n(R) \Rightarrow$ tính định thức cấp **n** để tìm λ: $|P - \lambda.I_n| = 0$

  Xét $B = A^T \in M_{n,\,m}(R)$

  Ta có: $Q = B^T.B = (A^T)^T.A^T = A.A^T \in M_m(R)$

  Chỉ cần tính định thức cấp **m** để tìm λ: $|Q - \lambda.I_m| = 0$

  $A = B^T = (U_B.S_B.V_B^T)^T = V_B.S_B.U_B^T$

  Nhận xét: Vai trò của U_A và V_B hoán đổi cho nhau

3. Singular Value Decomposition (tt.)

Bước 1: Tạo ma trận $Q = A.A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = A.A^T = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Bước 2: Tạo U

a. Tìm eigenvalues, eigenvectors của Q

$$Q.\vec{x} = \lambda.\vec{x} \Rightarrow \begin{vmatrix} 11-\lambda & 1 \\ 1 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)^2 - 1 = (\lambda - 12)(\lambda - 10) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 10 \\ \lambda = 12 \end{array}\right.$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

b. Chuẩn hóa thành ma trận trực giao (trực chuẩn)

- Với λ_2 = 12

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1 \qquad \Rightarrow \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

- Với λ_2 = 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -1 = -x_2 \qquad \Rightarrow \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \qquad \Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

Bước 3: Tạo ma trận đường chéo S

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Bước 4: Tạo ma trận V ($V^T = S^{-1}.U^{-1}.A = S^{-1}.U^T.A$)

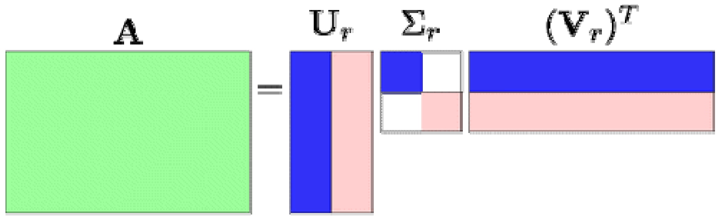
$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$U.S.V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Compact SVD**

  r = rank(A)



- **Truncated SVD** (*Low-rank approximation*)

  Chọn r = k << MIN(m, n)

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Giả sử A $\in$ $M_{m,n}$(R)**
  - Ma trận nghịch đảo TRÁI (*left inverse*): X.A = I
  - Ma trận nghịch đảo PHẢI (*right inverse*): A.X = I
  - Với ma trận vuông A $\in$ M_n(R)

Khả đảo bên TRÁI → Các CỘT độc lập tuyến tính

Các CỘT độc lập tuyến tính → Khả đảo bên PHẢI

Khả đảo bên PHẢI → Các DÒNG độc lập tuyến tính

Các DÒNG độc lập tuyến tính → Khả đảo bên TRÁI

Nonsingular matrix
khả nghịch

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Ma trận giả nghịch đảo** (*pseudo-inverse* – Moore-Penrose)

  Giả sử $A \in M_{m,n}(R)$

  - Nếu ($m \geq n$) và các CỘT của A độc lập tuyến tính

    Khi đó, ma trận ($A^T.A$) khả nghịch

    Ma trận nghịch đảo TRÁI của A: $A^{\dagger} = (A^T.A)^{-1}.A^T$

    $$A^{\dagger}.A = (A^T.A)^{-1}.A^T.A = I$$

  - Nếu ($m \leq n$) và các DÒNG của A độc lập tuyến tính

    Khi đó, ma trận ($A.A^T$) khả nghịch

    Ma trận nghịch đảo PHẢI của A: $A^{\dagger} = A^T.(A.A^T)^{-1}$

    $$A.A^{\dagger} = A.A^T.(A.A^T)^{-1} = I$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Các ma trận trực giao U, V và ma trận đường chéo S**

$$A = U.S.V^T$$

$(A^T.A) = (V.S^T.U^T).U.S.V^T = V.S^2.V^T$

$A^{\dagger} = (A^T.A)^{-1}.A^T = (V.S^2.V^T)^{-1}.(U.S.V^T)^T = (V^T)^{-1}.(S^2)^{-1}.V^{-1}.V.S^T.U^T$

Vì S là ma trận đường chéo nên: $A^{\dagger} = (V^T)^{-1}.S^{-1}.U^T$

Vì V là ma trận trực giao nên: $A^{\dagger} = V.S^{-1}.U^T$

Tài liệu tham khảo

Boyd S. & Vandenberghe L., *Introduction to Applied Linear Algebra. Vectors, Matrices, and Least Squares*, Cambridge University Press, 2018.

Đậu Thế Cấp, *Đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục, 2008.

Lê Văn Hợp, *Bài giảng môn Toán Đại số B1* (Đại số tuyến tính).

Nguyễn Duy Thuận và các tác giả, *Đại số tuyến tính*, NXB ĐH Sư phạm, 2003.