Nội dung bổ sung

1. Matrix decomposition
2. Eigendecomposition
3. Singular Value Decomposition (SVD)

1. Matrix decomposition

- **Giải hệ phương trình A.X = B: dễ dàng hơn với A là ma trận ∆**
  - *forward subsitution* → A là ma trận ∆ dưới, $A_{ii} \neq 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1/A_{11} \\ x_2 &= (b_2 - A_{21}x_1)/A_{22} \\ x_3 &= (b_3 - A_{31}x_1 - A_{32}x_2)/A_{33} \\ &\vdots \\ x_n &= (b_n - A_{n1}x_1 - A_{n2}x_2 - \cdots - A_{n,n-1}x_{n-1})/A_{nn} \end{aligned}$$

  - *backward subsitution* → A là ma trận ∆ trên, $A_{ii} \neq 0$

$$\begin{aligned} x_n &= b_n/A_{nn} \\ x_{n-1} &= (b_{n-1} - A_{n-1,n}x_n)/A_{n-1,n-1} \\ x_{n-2} &= (b_{n-2} - A_{n-2,n-1}x_{n-1} - A_{n-2,n}x_n)/A_{n-2,n-2} \\ &\vdots \\ x_1 &= (b_1 - A_{12}x_2 - A_{13}x_3 - \cdots - A_{1n}x_n)/A_{11} \end{aligned}$$

1.1 LU decomposition

❑ Giải hệ phương trình A.X = B

- Áp dụng phân rã A = L.U:

$$A.X = B \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad L.\boxed{U.X} = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L.Y = B & (2) \\ U.X = Y & (3) \end{cases}$$

Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

B1. Giải hệ phương trình (2), tìm Y, với L là ma trận tam giác

B2. Giải hệ phương trình (3), tìm X, với U là ma trận tam giác

1.1 LU decomposition (tt.)

❑ VD: Giải hệ phương trình dựa trên phép phân rã LU

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

B1. Giải L.Y = B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

B2. Giải U.X = Y

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Lời giải, nếu có, của A = L.U là KHÔNG DUY NHẤT**
  - Có tổng cộng n^2 phương trình với $(n^2 + n)$ biến
  - Doolittle factorization: diag(L) = 1
  - Crout factorization: diag(U) = 1

1.1 LU decomposition (tt.)

- **<u>Bài tập</u>: Áp dụng phép phân rã LU**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L = ? \quad U = ?$$

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Có phải mọi A $\in M_n(\mathbb{R})$ đều có thể áp dụng phép phân rã LU ?**
  - *leading [principal] submatrix* A_k: k dòng và k cột đầu tiên ($k \le n$)
  - A khả nghịch, $|A_k| \neq 0, \forall k \le n \Rightarrow$ có thể áp dụng phân rã LU

VD: Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ không thể áp dụng phân rã LU vì

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ có $|A_2| = (1 * 4) - (2 * 2) = 0$

- hoán vị các dòng $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ có thể áp dụng phân rã LU!

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Ma trận hoán vị (*permutation matrix*): P $\in M_n(\mathbb{R})$**
  - mỗi dòng, mỗi cột có một hệ số = 1, tất cả các hệ số khác = 0
  - hoán vị các dòng của I hay các cột chuẩn E_i (Gauss – Jordan)

$$P = (E_{k1}, E_{k2}, \ldots, E_{kn}), \qquad p_{ij} = \begin{cases} 1, & j = k_i \\ 0, & j \neq k_i \end{cases}$$

- **Nhận xét:**

  (i) $|P| = \pm 1$

  (ii) $P.P^T = I$

  (iii) $P = P^{-1} = P^T$

- **Mọi ma trận vuông A $\in M_n(R)$: P.A = L.U**

1.1 LU decomposition (tt.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

φ_1: $d_2 \leftrightarrow d_3$

$$P_{\varphi 1}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\varphi 1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

φ_2: $d_2 \to d_2 - d_1$

$$P_{\varphi 2}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\varphi 2} . P_{\varphi 1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

φ_3: $d_3 \to d_3 - 2d_1$

$$P_{\varphi 3}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\varphi 3} . P_{\varphi 2} . P_{\varphi 1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Ma trận hoán vị P:

$$P = P_{\varphi 1}$$

Ma trận tam giác dưới L:

$$L = \left[P_{\varphi 3} . P_{\varphi 2} \right]^{-1}$$

$$P.A = L.U$$

1.1 LU decomposition (tt.)

- **<u>Bài tập</u>: Áp dụng phép phân rã PA = LU**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.1 LU decomposition

- **Giải hệ phương trình A.X = B**
  - Áp dụng phân rã P.A = L.U:

$$A.X = B \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad P.A.X = L.\boxed{U.X} = P.B = B' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L.Y = B' & (2) \\ U.X = Y & (3) \end{cases}$$

  - Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

    B1. Giải hệ phương trình (2), tìm Y, với L là ma trận tam giác

    B2. Giải hệ phương trình (3), tìm X, với U là ma trận tam giác

1.2 QR decomposition

- **A $\in$ $M_{m,n}(\mathbb{R})$, A khả nghịch (các cột độc lập tuyến tính):**

A = Q.R

  - thừa số Q$\in M_{m,n}$(R) (*Q-factor*): gồm các cột trực chuẩn (*orthonormal columns*):

$$Q^T.Q = I_n$$

  - thừa số R$\in M_n(\mathbb{R})$ (*R-factor*): ma trận Δ trên, $R_{ii} \neq 0$, khả nghịch
  - nếu ràng buộc $R_{ii} > 0$ thì $\exists!$ <Q, R>

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Thuật toán Gram-Schmidt

Bước thứ k

$$\begin{bmatrix} a_1^T & a_2^T & \cdots & a_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^T & q_2^T & \cdots & q_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1k} \\ 0 & R_{22} & \cdots & R_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{kk} \end{bmatrix}$$

- các cột $q_1^T, \ldots, q_k^T$: trực chuẩn
- các hệ số $R_{11}, \ldots, R_{kk} > 0$

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Thuật toán Gram-Schmidt

$$R_{11} = \left\| a_1^T \right\|$$
$$\tilde{q}_1 = a_1$$
$$q_1 = \frac{1}{R_{11}} \tilde{q}_1$$

for $k = 2$ to n

$$R_{1k} = q_1 a_k^T$$
$$\vdots$$
$$R_{k-1,k} = q_{k-1} a_k^T$$

$$\tilde{q}_k = a_k - (R_{1k} q_1 + R_{2k} q_2 + \cdots + R_{k-1,k} q_{k-1})$$
$$R_{kk} = \left\| \tilde{q}_k^T \right\|$$
$$q_k = \frac{1}{R_{kk}} \tilde{q}_k$$

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Thuật toán Gram-Schmidt

$$\begin{pmatrix} a_1^T & a_2^T & a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^T & q_2^T & q_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix}$$

- k = 1

$$\tilde{q}_1 = a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \qquad R_{11} = \|\tilde{q}_1^T\| = 2, \qquad q_1 = \frac{1}{R_{11}}\tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}^T$$

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Thuật toán Gram-Schmidt

- k = 2

$$R_{12} = q_1 a_2^T = 4$$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - R_{12}q_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}^T - 4 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T$$

$$R_{22} = \|\tilde{q}_2^T\| = 2, \qquad q_2 = \frac{1}{R_{22}}\tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}^T$$

1.2 QR decomposition (tt.)

- **Thuật toán Gram-Schmidt**
  - <u>k = 3</u>

$$R_{13} = q_1^{T} a_3 = 2$$

$$R_{23} = q_2^{T} a_3 = 8$$

$$\tilde{q}_3 = a_3 - R_{13}q_1 - R_{23}q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}^{T} - 2\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}^{T} - 8\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}^{T}$$

$$R_{33} = \|\tilde{q}_3^{T}\| = 4, \qquad q_3 = \frac{1}{R_{33}}\tilde{q}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}^{T}$$

1.2 QR decomposition (tt.)

- **Thuật toán Gram-Schmidt**
  - Kết quả phân rã QR

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- **Một số cải biên**
  - Givens rotations
  - Householder reflections

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Bài tập: Áp dụng phép phân rã QR

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Giải hệ phương trình A.X = B

- Áp dụng phân rã QR:

$$A.X = B \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad Q.R.X = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Q.Y = B & (2) \\ R.X = Y & (3) \end{cases}$$

- Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

  B1. Giải hệ phương trình (2), tìm Y = Q^T.B (Q^T.Q = I)

  B2. Giải hệ phương trình (3), tìm X, với R là ma trận tam giác

❑ Định thức: $|A| = \prod_{i=1}^{n} R_{ii}$

❑ Ma trận nghịch đảo: $A^{-1} = (Q.R)^{-1} = R^{-1}.Q^{-1}$

1.3 Cholesky decomposition

- **Ma trận "xác định dương"** (*positive definite matrix*)
  - ma trận vuông, đối xứng A ∈ $M_n(R)$: $x^T.A.x > 0, \forall x \neq \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1^2 + x_2^2) > 0 \qquad (x_1 \neq x_2)$$

  - dạng toàn phương (*quadratic form*):

$$x^T.A.x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.x_i.x_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}.x_i^2 + 2\sum_{i>j} A_{ij}.x_i.x_j$$

1.3 Cholesky decomposition (tt.)

- **Phân rã Cholesky: ma trận đối xứng, xác định dương**

$$A = L.L^T = U^T.U$$

  - L: ma trận <u>tam giác DƯỚI</u> khả nghịch, $L_{ii} > 0$
  - U: ma trận <u>tam giác TRÊN</u> khả nghịch, $U_{ii} > 0$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ 0 & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = \sum_{k=1}^{i} L_{ki}^2$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{i} L_{ik}.L_{kj} \qquad (i \neq j)$$

1.3 Cholesky decomposition (tt.)

❑ **Phân rã Cholesky: ma trận đối xứng, xác định dương**

$$i=1: \qquad L_{11}=\sqrt{A_{11}}$$

$$i=2: \qquad L_{21}=\frac{1}{L_{11}}A_{21}$$

$$L_{22}=\sqrt{A_{22}-L_{21}^2}$$

$$i\geq 3: \qquad L_{31}=\frac{1}{L_{11}}A_{31}$$

$$L_{ij}=\frac{1}{L_{jj}}(A_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}L_{ik}.L_{jk}) \qquad (2\leq j<i)$$

$$L_{ii}=\sqrt{A_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}L_{ik}^2}$$

1.3 Cholesky decomposition (tt.)

❑ **Phân rã Cholesky: ma trận đối xứng, xác định dương**

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}$$

$$L_{11}=\sqrt{A_{11}}=\sqrt{6}$$

$$L_{21}=\frac{A_{21}}{L_{11}}=\frac{15}{\sqrt{6}} \qquad L_{22}=\sqrt{A_{22}-L_{21}^2}=\sqrt{55-\frac{225}{6}}$$

$$L_{31}=\frac{A_{31}}{L_{11}}=\frac{55}{\sqrt{6}} \qquad L_{32}=\frac{A_{32}-(L_{31}.L_{21})}{L_{22}}=\frac{55}{\sqrt{6}} \qquad L_{33}=\sqrt{A_{33}-L_{31}^2-L_{32}^2}$$

1.3 Cholesky decomposition (tt.)

- Giải hệ phương trình A.X = B
  - Áp dụng phân rã Cholesky:

$$A.X = B \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad U^T.U.X = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} U^T.Y = B & (2) \\ U.X = Y & (3) \end{cases}$$

  - Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

    B1. Giải hệ phương trình (2), tìm Y, với U^T là ma trận Δ dưới

    B2. Giải hệ phương trình (3), tìm X, với U là ma trận Δ trên

Nội dung bổ sung

1. Matrix decomposition
2. **Eigendecomposition**
3. Singular Value Decomposition (SVD)

2. Eigendecomposition

- **Ma trận vuông cấp n: A $\in M_n(\mathbb{R})$**

  $\exists(\lambda \in \mathbb{R}), (0 \neq X \in M_{n,1}(R))$: $A.X = \lambda.X$

  - λ: giá trị riêng/trị riêng (*eigenvalue*) của A
  - X: vectơ riêng (*eigenvector*) của A ứng với λ
  - phương trình đặc trưng (*characteristic equation*): $|A - \lambda.I| = 0$

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Một số nhận xét**
  - λ là nghiệm của hệ phương trình *thuần nhất*: $(A - \lambda.I).X = 0$
  - Có nhiều vectơ riêng $\alpha.X$ (với $\alpha \in \mathbb{R}^+$) ứng với một trị riêng λ_0
  - Chỉ có 1 trị riêng λ_X ứng với một vectơ riêng X cho trước

$$trace(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

  - Nếu mọi giá trị riêng $\lambda \neq 0$ thì A khả nghịch

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Một số nhận xét**
  - A có n giá trị riêng (số thực và số phức)
  - Nếu A là ma trận đối xứng thì các giá trị riêng đều là số thực
  - Nếu A là ma trận xác định dương thì các giá trị riêng đều là số thực dương
  - Nếu A là ma trận đường chéo thì các hệ số trên đường chéo chính là các giá trị riêng

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Giải phương trình đặc trưng để tìm trị riêng λ của A**

$$|A - \lambda.I| = 0$$

- **Giải hệ phương trình *thuần nhất* để tìm các vectơ riêng $\neq 0$**

$$(A - \lambda.I).X = 0$$

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Chéo hóa ma trận** (*diagonalization*)
  - Với n eigenvectors, ứng với các λ_i phân biệt, độc lập tuyến tính
  - P (*modal matrix*) gồm eigenvectors X_i: $|P| \neq 0$ (P khả nghịch)
  - Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng λ_i

$$P = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

$$A = P.\Lambda.P^{-1}$$

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Ma trận vuông cấp n: A $\in M_n(\mathbb{R})$. Tính A^k, với k >> N !**