



**FPT SCHOOL OF BUSINESS
& TECHNOLOGY**

Digital Signal Processing

Chuyển đổi Fourier số

Phd. Trần Thanh Trúc

Lý thuyết: Chuyển đổi Fourier số 1D và 2D

Nội dung

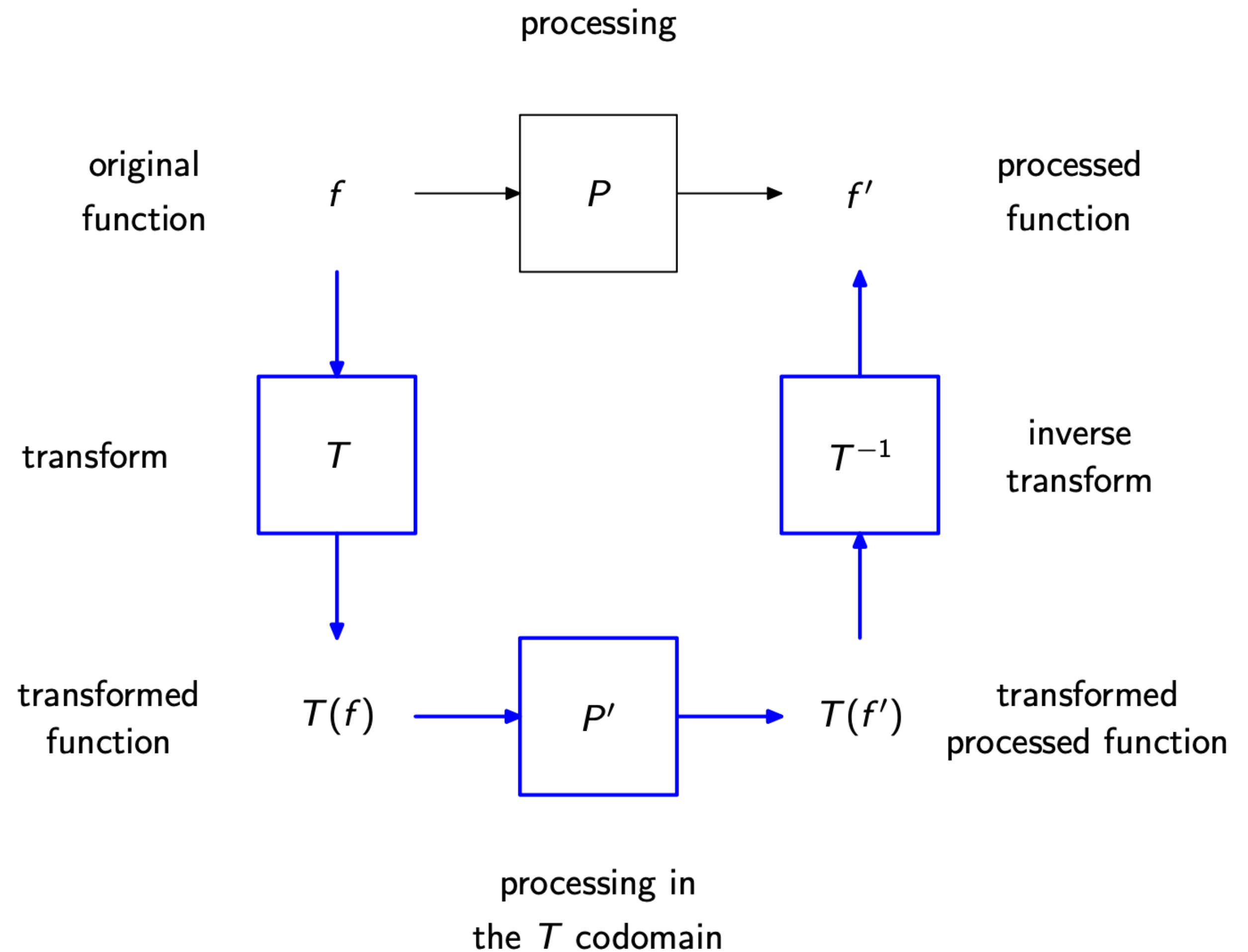
- 1 - D Fourier Transformation
- 2 - D Fourier Transformation

Phần 1: Chuyển đổi Fourier 1-D

Chuyển đổi Fourier số 1D

Tại sao cần các hàm chuyển đổi miền?

- Câu hỏi:
 - Ở các bài trước, các bộ lọc được thiết kế hoặc xử lý ở miền nào?
 - A) Thời gian
 - B) Tần số
 - Hãy liệt kê những hoạt động mà các bài trước đã làm liên quan đến các miền thời gian hoặc tần số (các hoạt động ở vùng P, P')



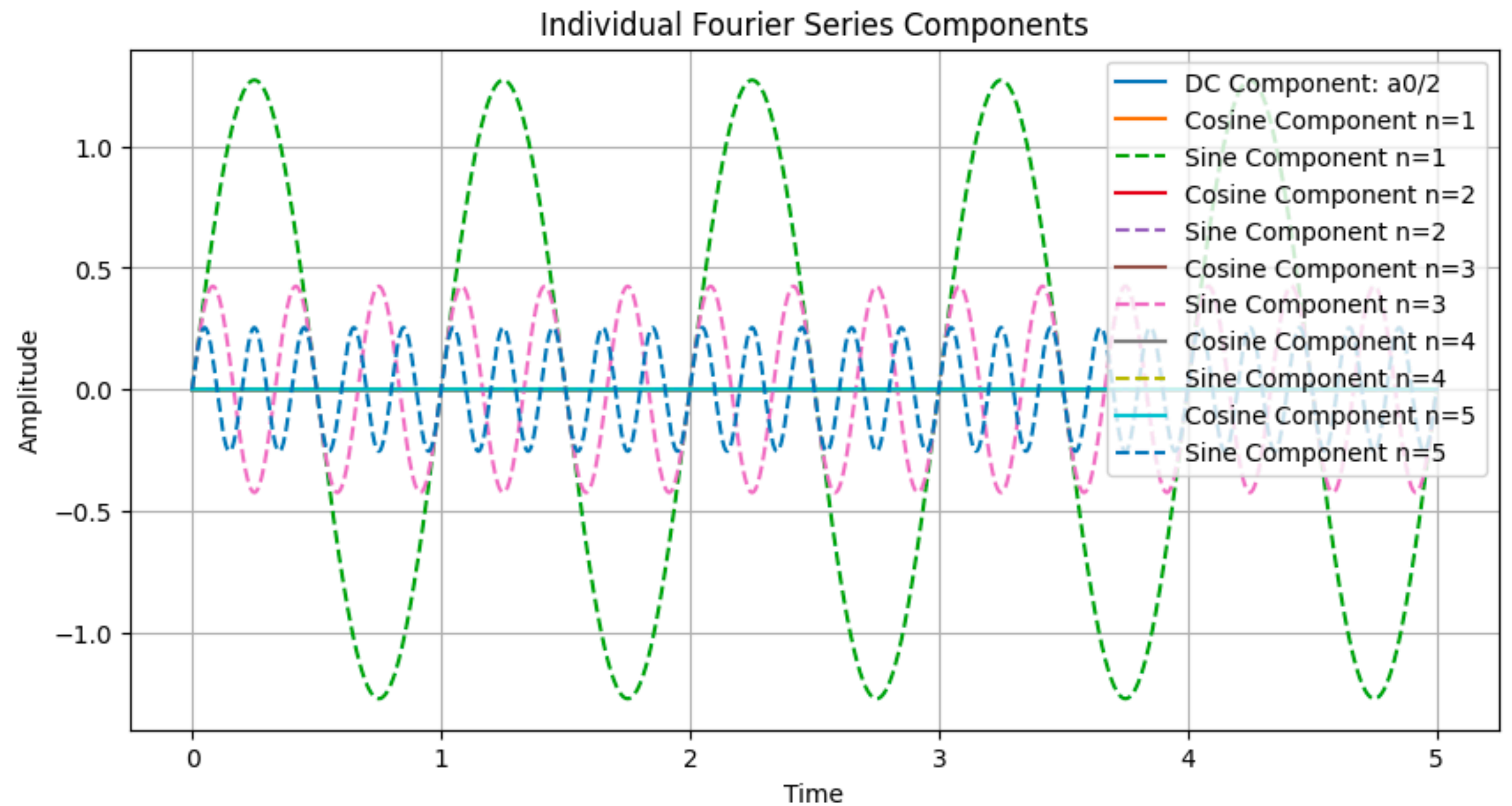
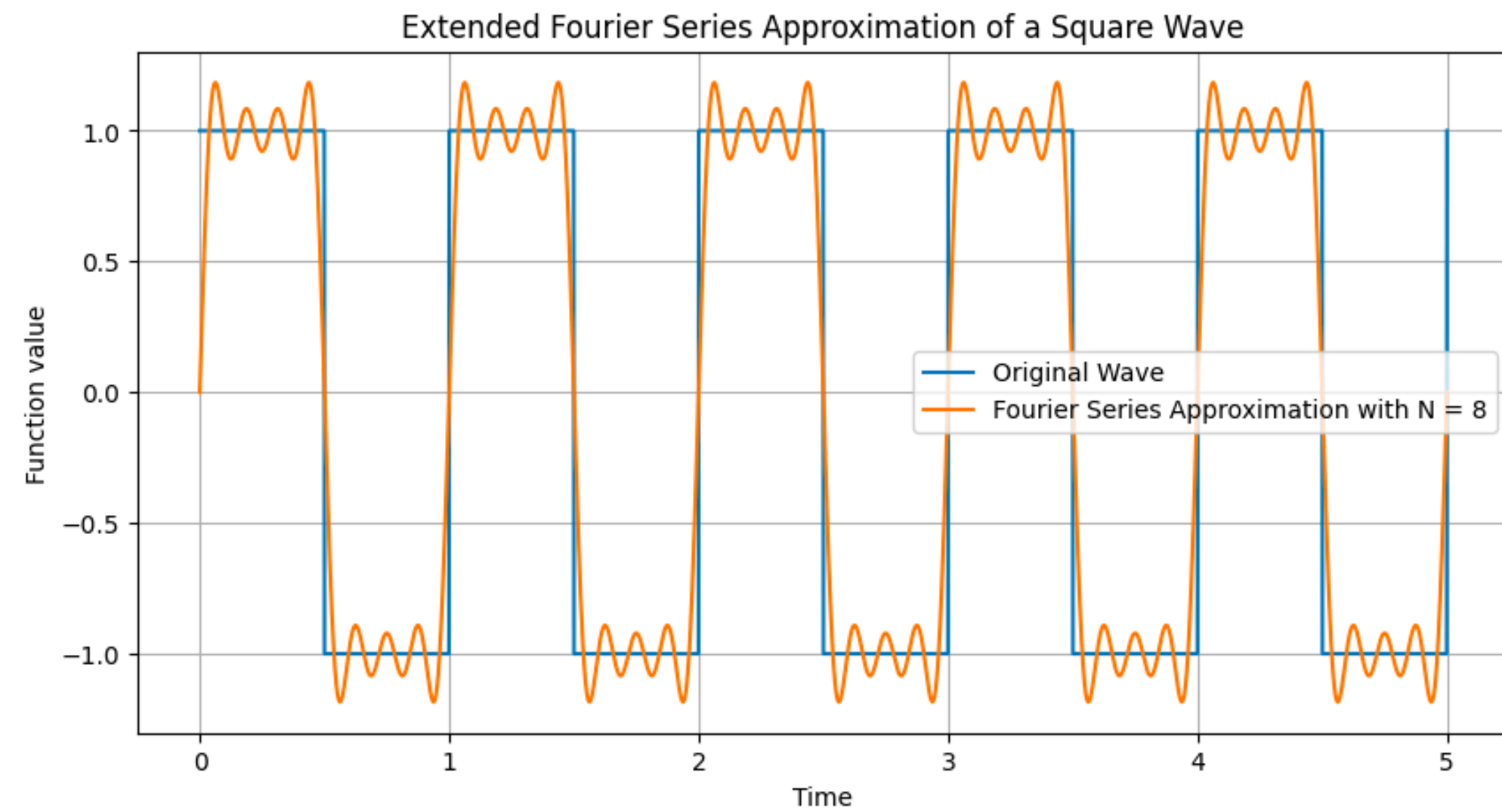
Liệu chúng ta có thể phân rã một tín hiệu tuần hoàn thành một tổng các sóng sin đơn tần ?



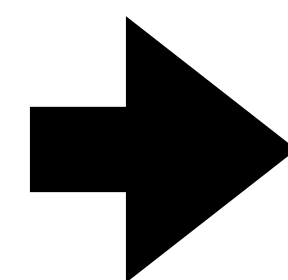
The answer is YES!

Chuyển đổi Fourier số 1D

Tín hiệu tuần hoàn và chuỗi các sóng sin

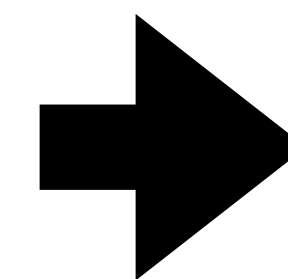


Tín hiệu tuần
hoàn



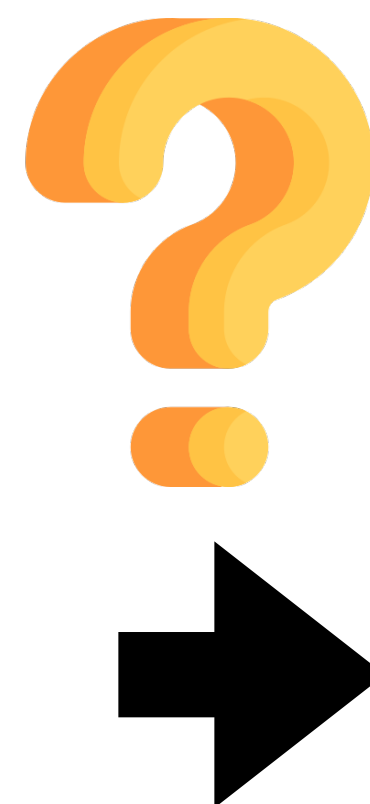
Chuỗi các
sóng sin

Tín hiệu không
tuần hoàn



Chuỗi các
sóng sin

Tín hiệu không
tuần hoàn



Chuỗi các
sóng sin



Được. Nhưng phải nhờ đến số phức thay vì
số thực !!!!

\mathbb{C} instead of \mathbb{R}

Trong trường hợp này, tín hiệu không tuần hoàn được biểu diễn dưới dạng chuỗi các sóng sin phức thay vì thuần thực.

Chuyển đổi Fourier được dùng thay cho Chuỗi Fourier

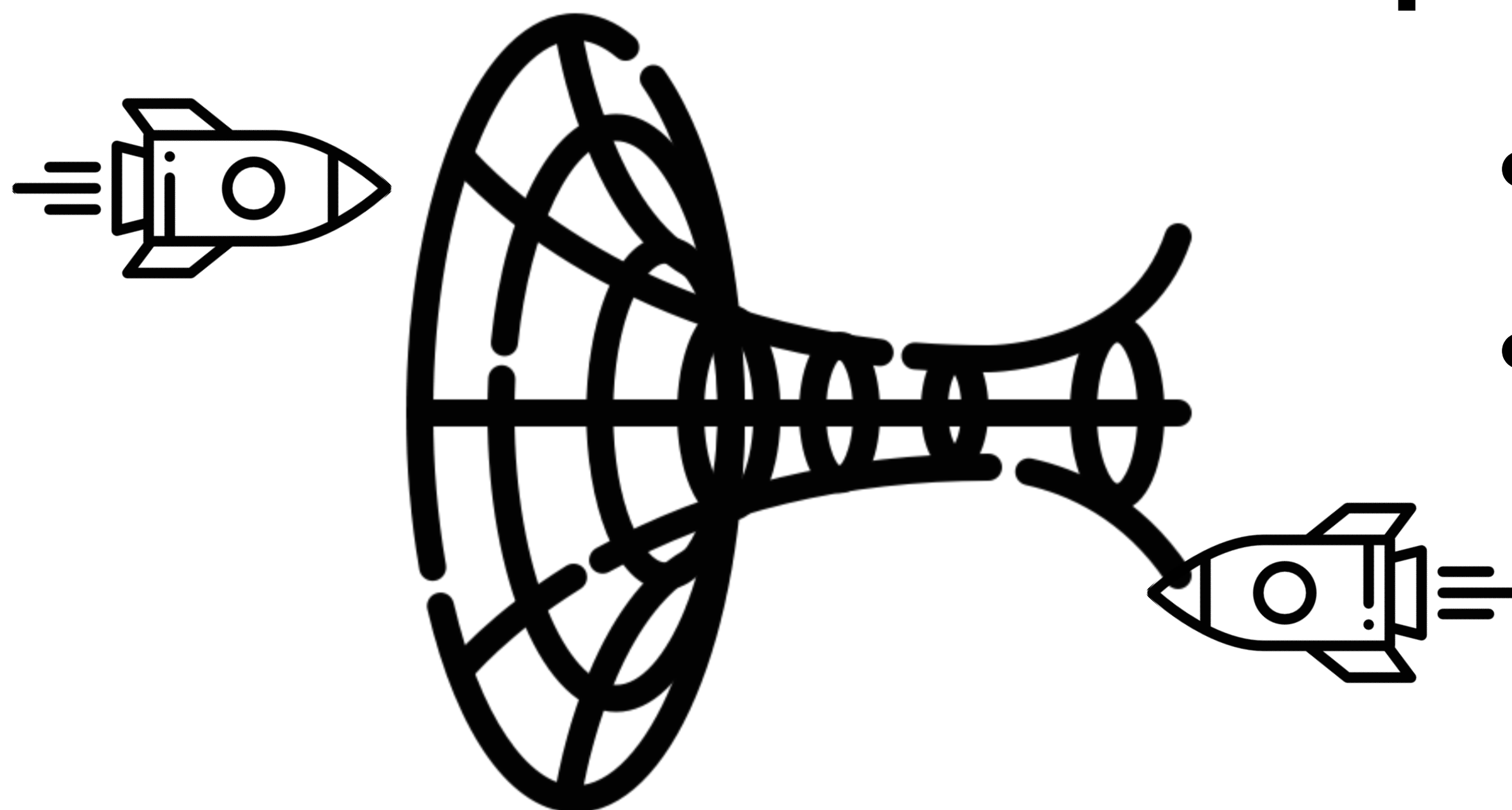
Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu liên tục

Miền thời gian

- *time t*
- *Real number \mathbb{R}*

CĐ Fourier thuận



Miền Tần số

- *frequency ν*
- *Complex number \mathbb{C}*
- *Real part*
- *Imaginary part (unreal)*

Chuyển đổi Fourier ngược

Chuyển đổi Fourier số 1D

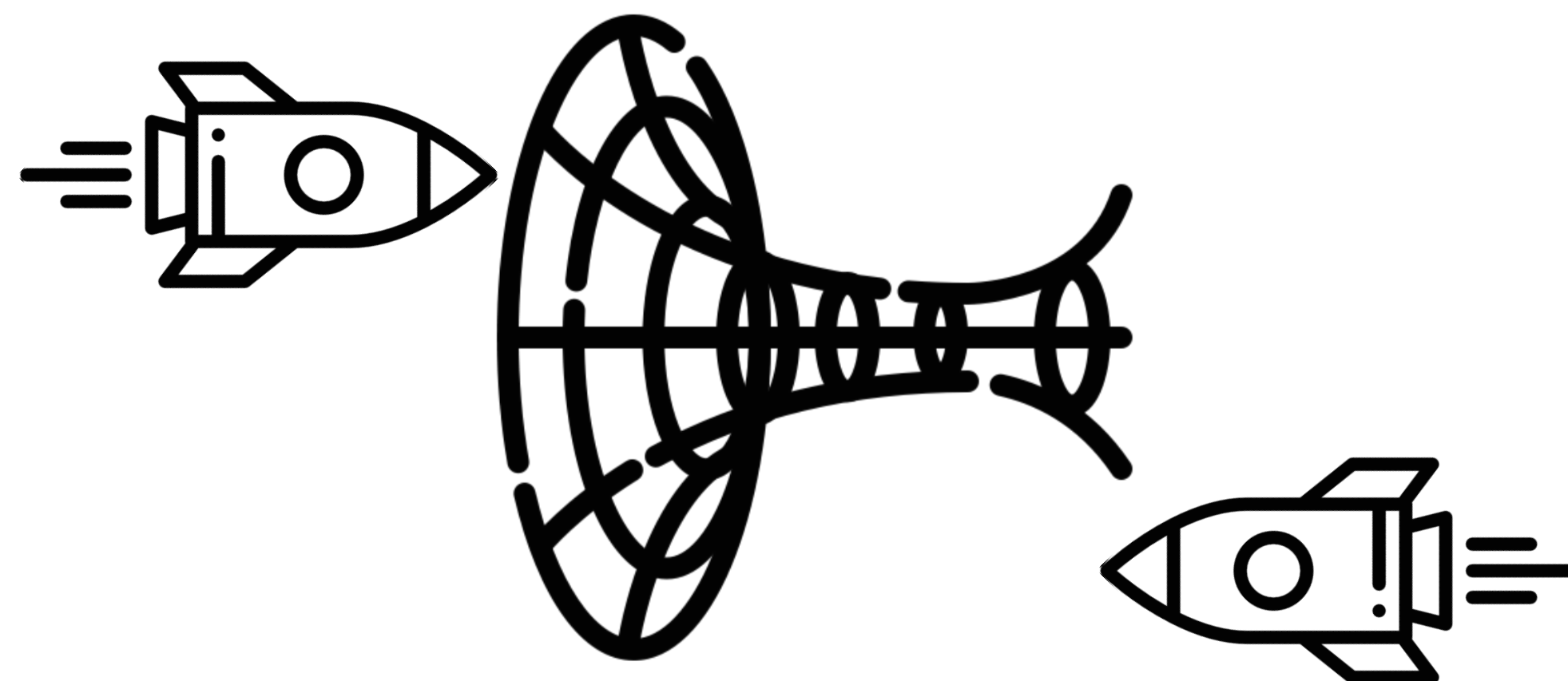
Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu liên tục

Miền thời gian

CĐ Fourier thuận

Miền Tần số

$$\mathcal{F} \{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i2\pi vt) dt$$



$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} \{F(v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \exp(i2\pi vt) dv$$

Chuyển đổi Fourier ngược

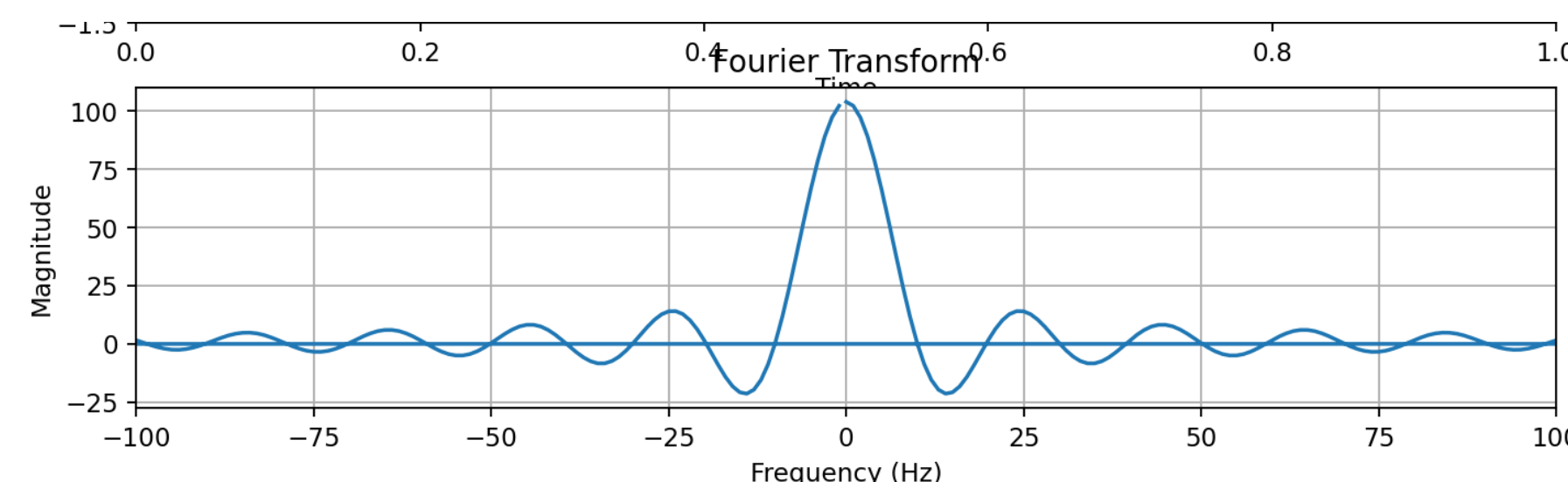
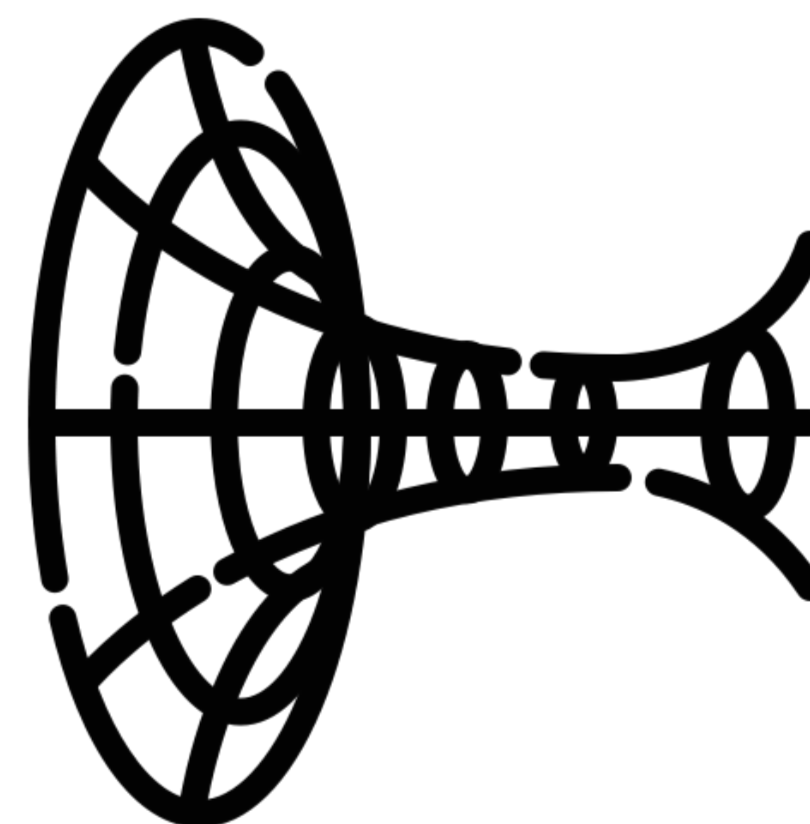
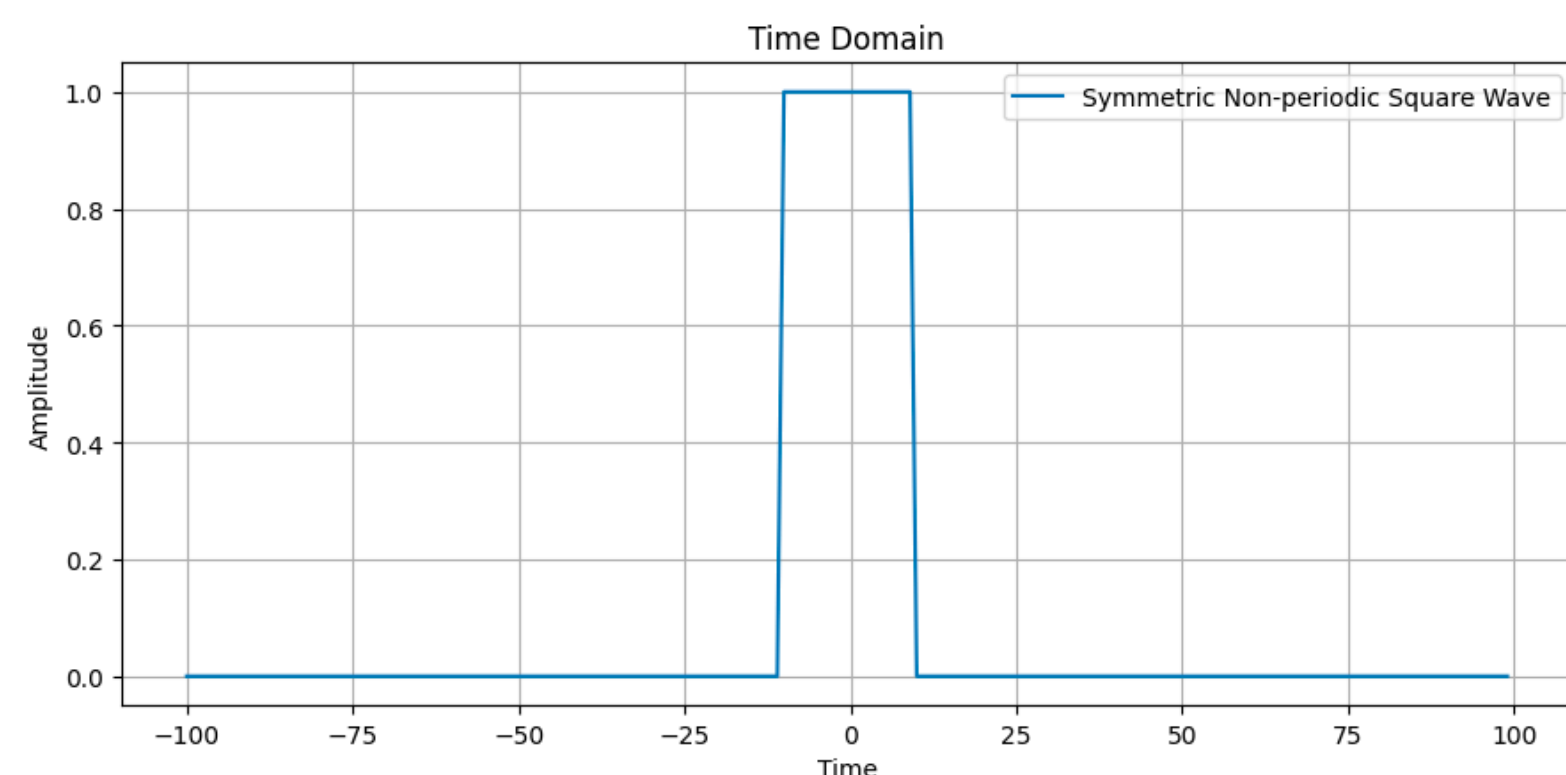
Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu liên tục + không tuần hoàn

Miền Thời gian

Miền tần số

Fourier thuận



Fourier nghịch

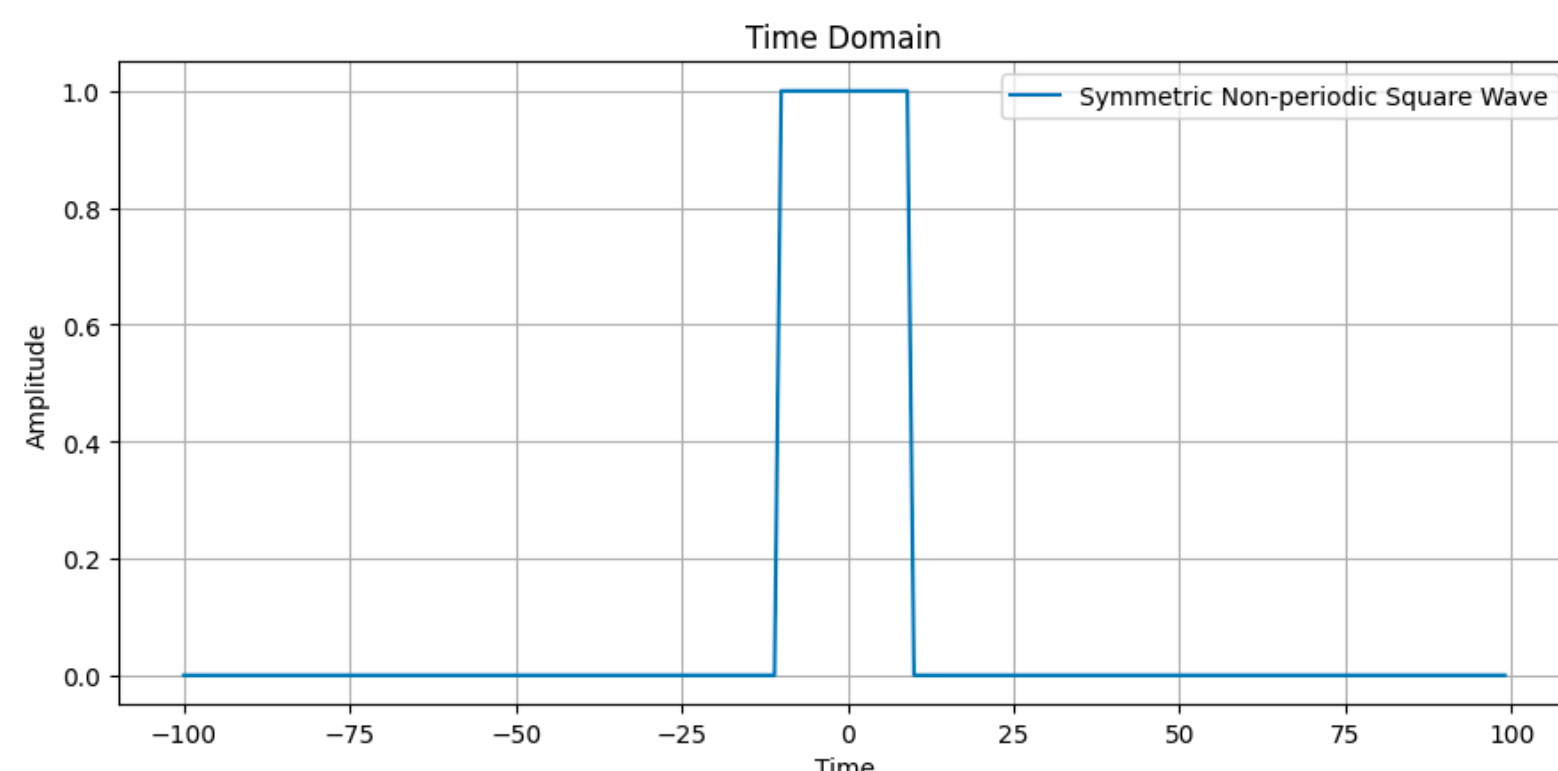
$$f(t) = \begin{cases} A, & -\frac{W}{2} \leq t \leq \frac{W}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \mathcal{F} \{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt \\ &= \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} A \exp(-i2\pi\nu t) dt = A \text{sinc}(\nu W) \end{aligned}$$

Chuyển đổi Fourier số 1D

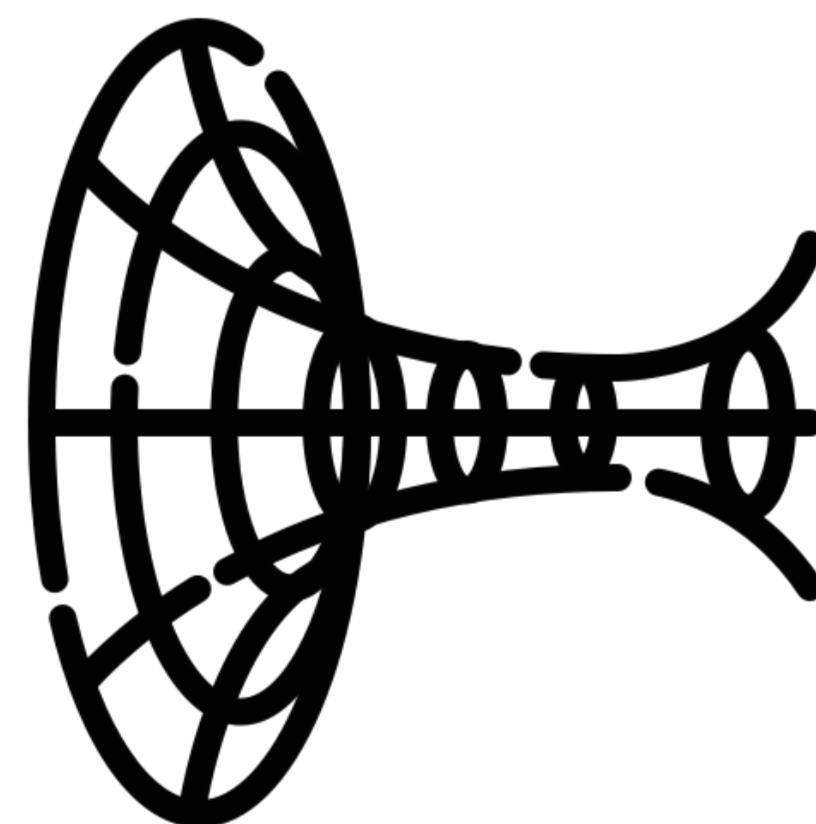
Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu liên tục + không tuần hoàn

Miền Thời gian



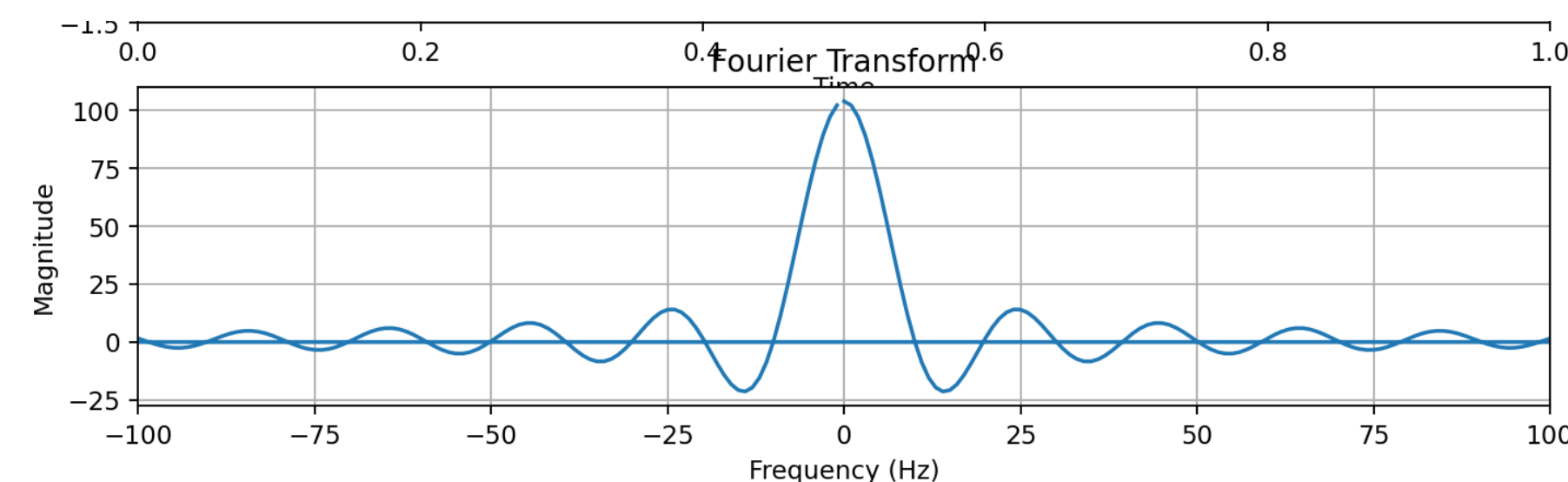
tín hiệu liên tục
+ không tuần hoàn

Fourier thuận



Fourier nghịch

Miền tần số



Câu hỏi:

Đáp ứng tần số có đặc tính nào?

- a) Liên tục
- b) Tuần hoàn
- c) Không tuần hoàn
- d) Rời rạc

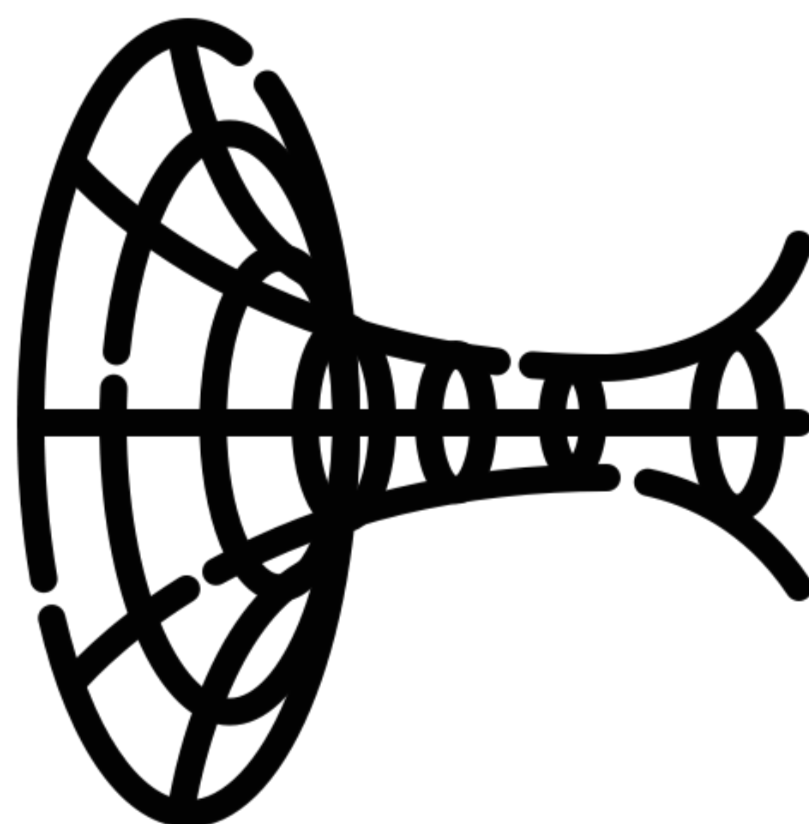
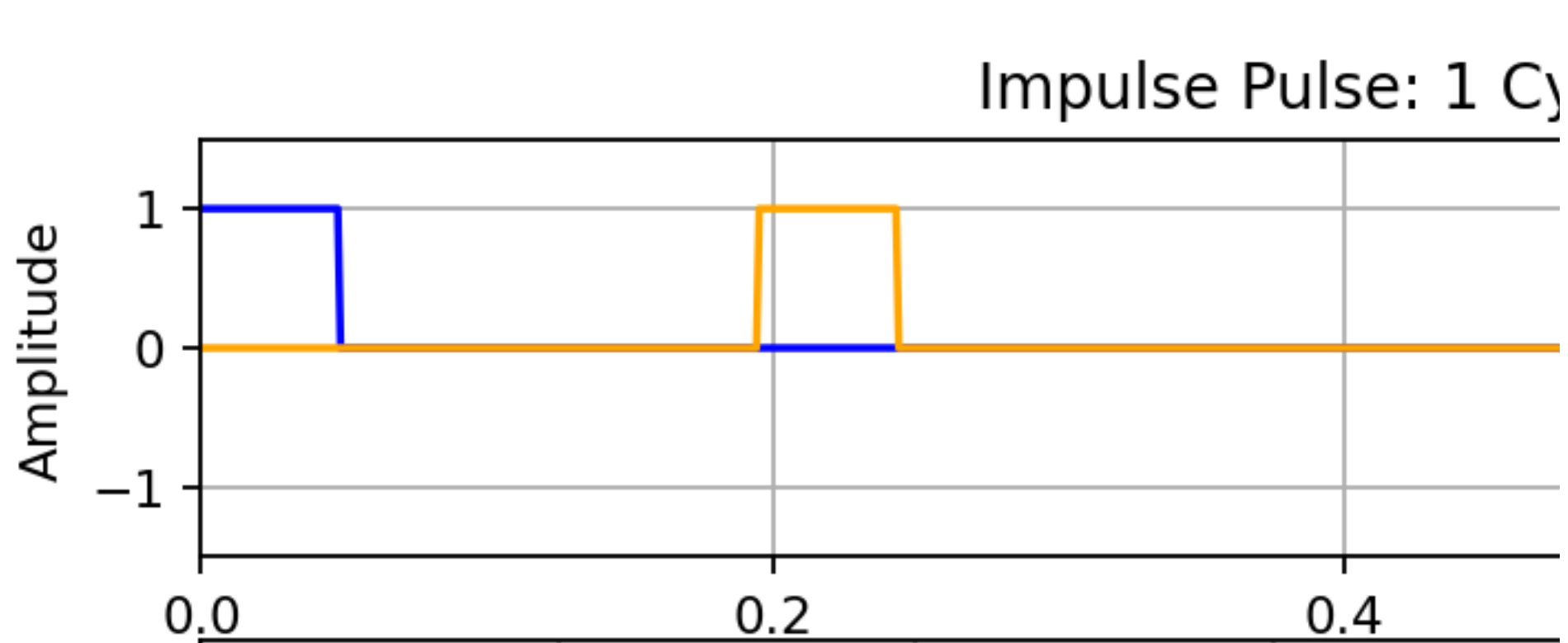
Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu liên tục + không tuần hoàn

Miền Thời gian

Miền tần số

Fourier thuận



Câu hỏi:

- Bạn hãy dự đoán dạng sóng.
- Có gì khác nhau.

$$g(t) = f(t - nT)$$

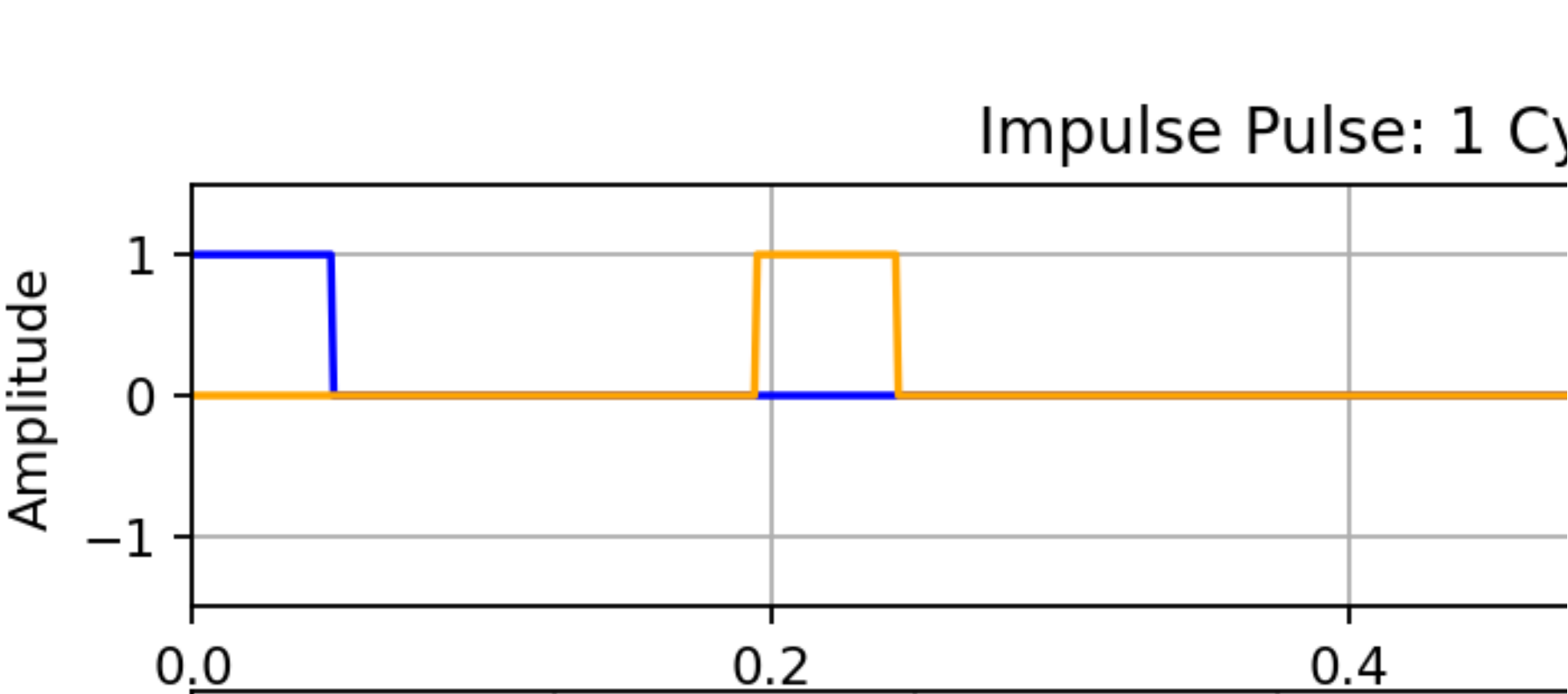
$$\begin{aligned} F(\nu) &= \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt \\ &= \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} A \exp(-i2\pi\nu t) dt = ? \end{aligned}$$

Chuyển đổi Fourier số 1D

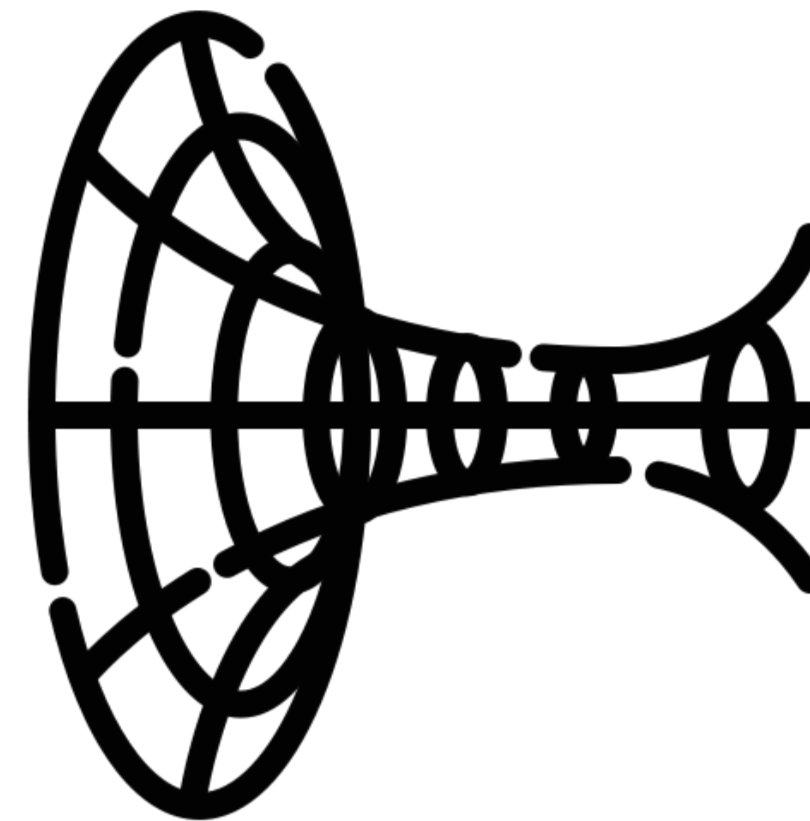
Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu liên tục + không tuần hoàn

Miền Thời gian

Miền tần số



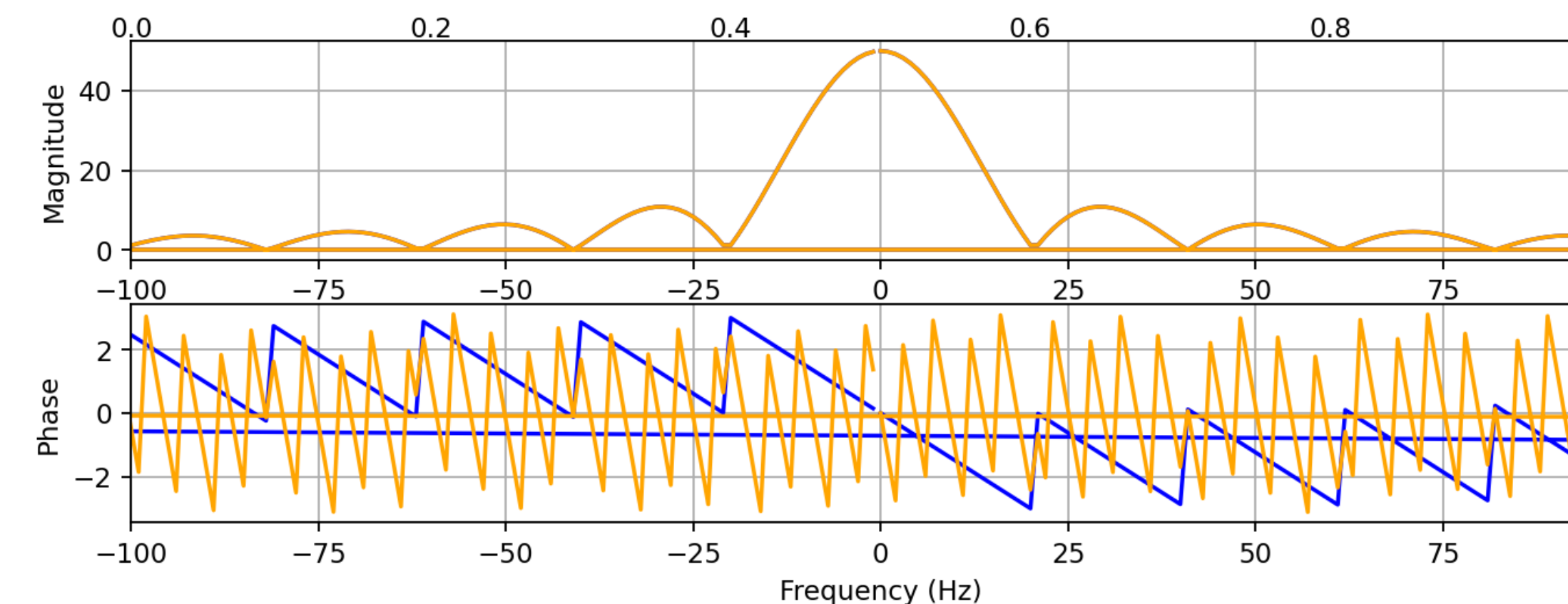
Fourier thuận



$$g(t) = f(t - nT)$$

Câu hỏi:

- Dự đoán nếu cộng dồn 2 sóng này lại



$$F(\nu) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt$$

$$= \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} A \exp(-i2\pi\nu t) dt = ?$$

Chuyển đổi Fourier số 1D

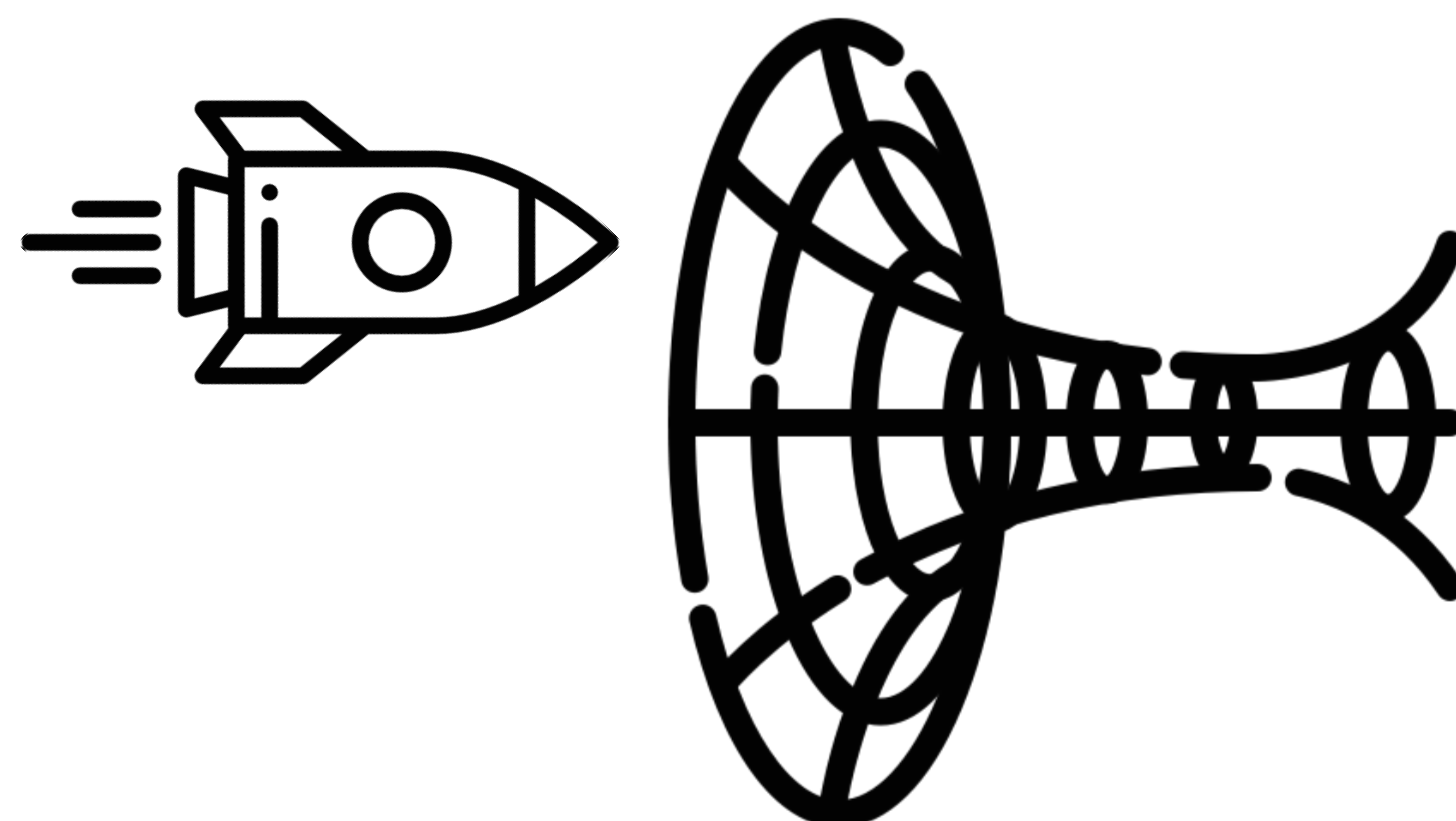
Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn

Miền Thời gian

Một xung lý tưởng rời rạc



Fourier transform



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Miền Tần Số



Câu hỏi 1:

Đáp ứng tần số có đặc tính nào?

- a) Liên tục
- b) Tuần hoàn
- c) Không tuần hoàn
- d) Rời rạc

Câu hỏi 2:

Bạn có thể dự báo dạng sóng không?

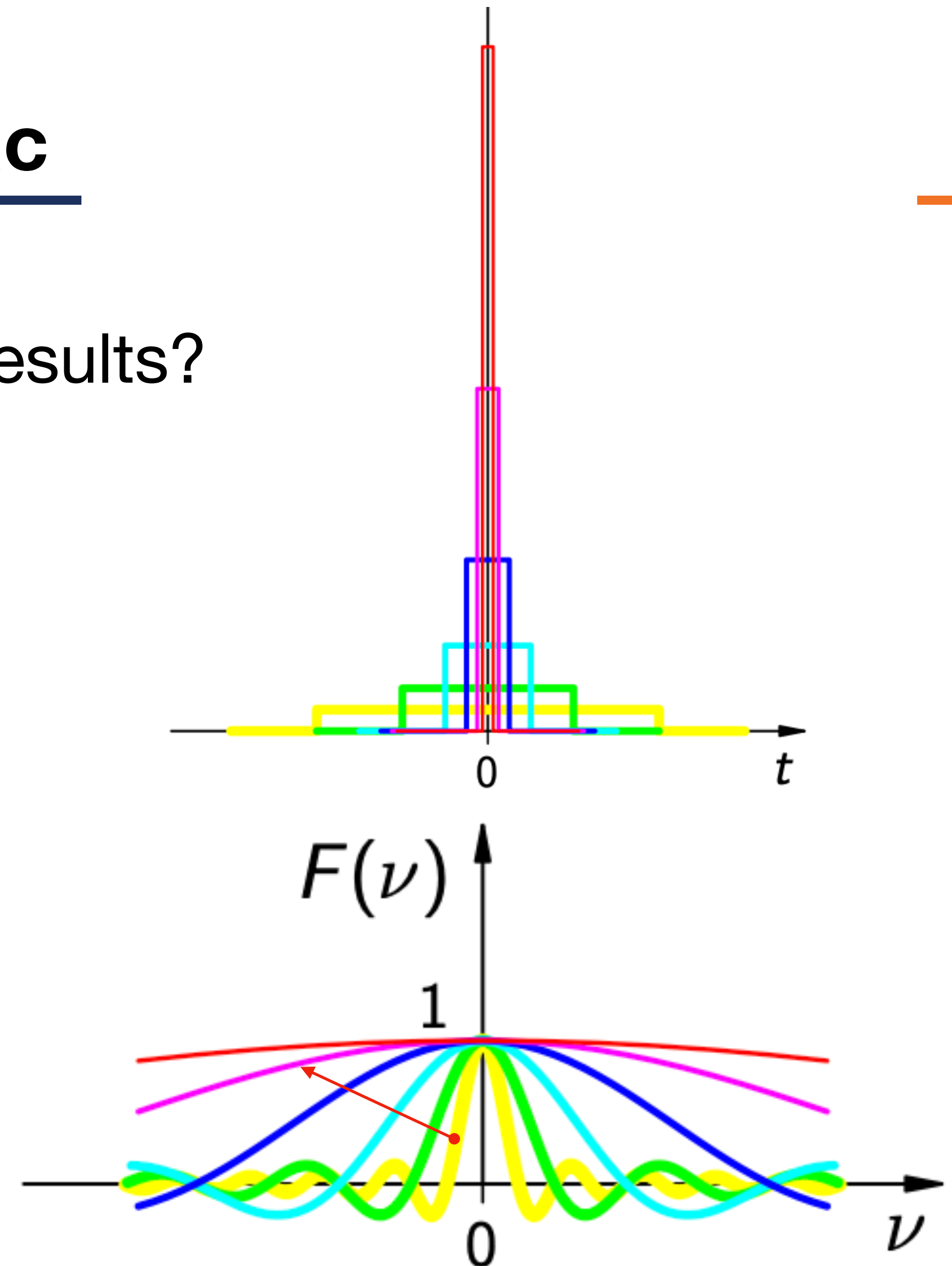
Chuyển đổi Fourier số 1D

Dự đoán dạng phổ tần số của xung Dirac

- When box function has $W \rightarrow 0$, what are the results?

- $W \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} A \rightarrow \infty \\ AW = 1 \end{cases} \Rightarrow f(t) \rightarrow \delta(t)$

- And $\frac{1}{W} \rightarrow \infty \Rightarrow F(\nu) = 1, \forall \nu \in (-\infty, \infty)$



Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn

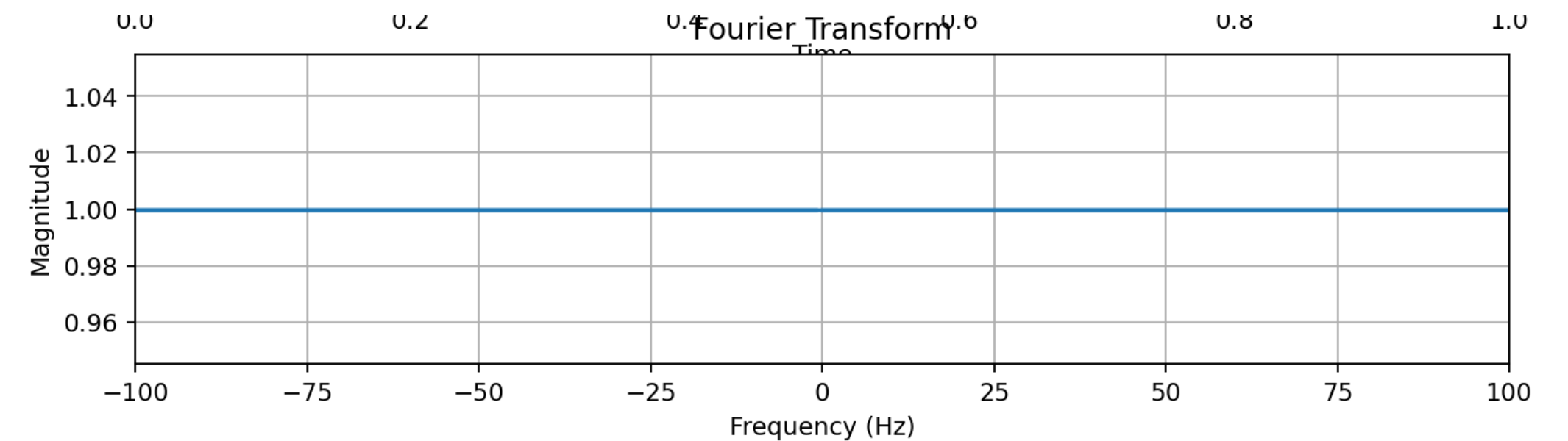
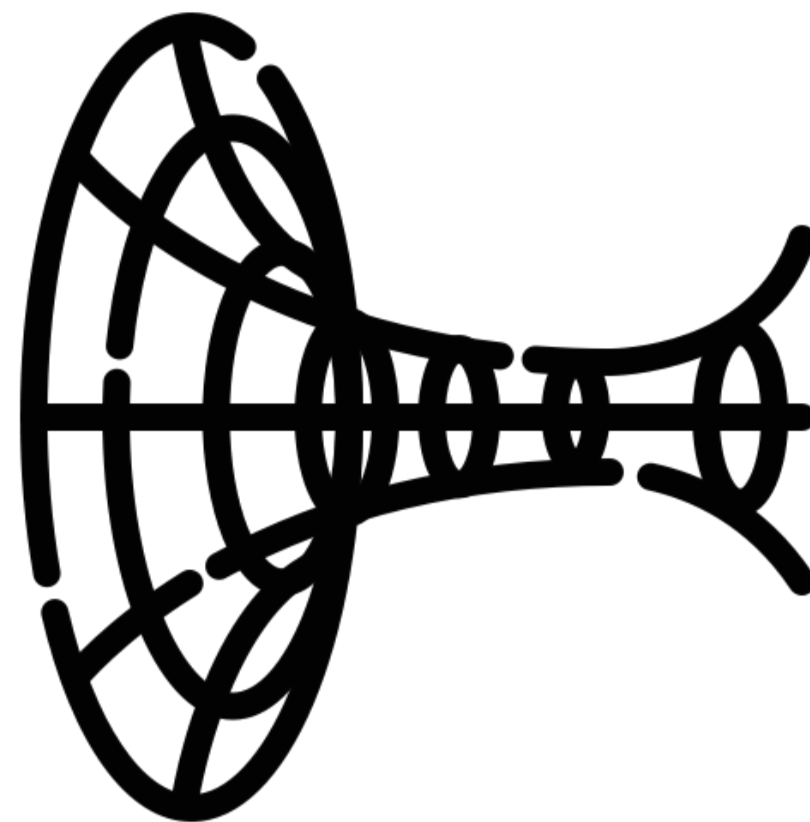
Miền thời gian

Miền tần số

A periodic sinusoidal signal



Fourier transform



Inverse Fourier transform

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn

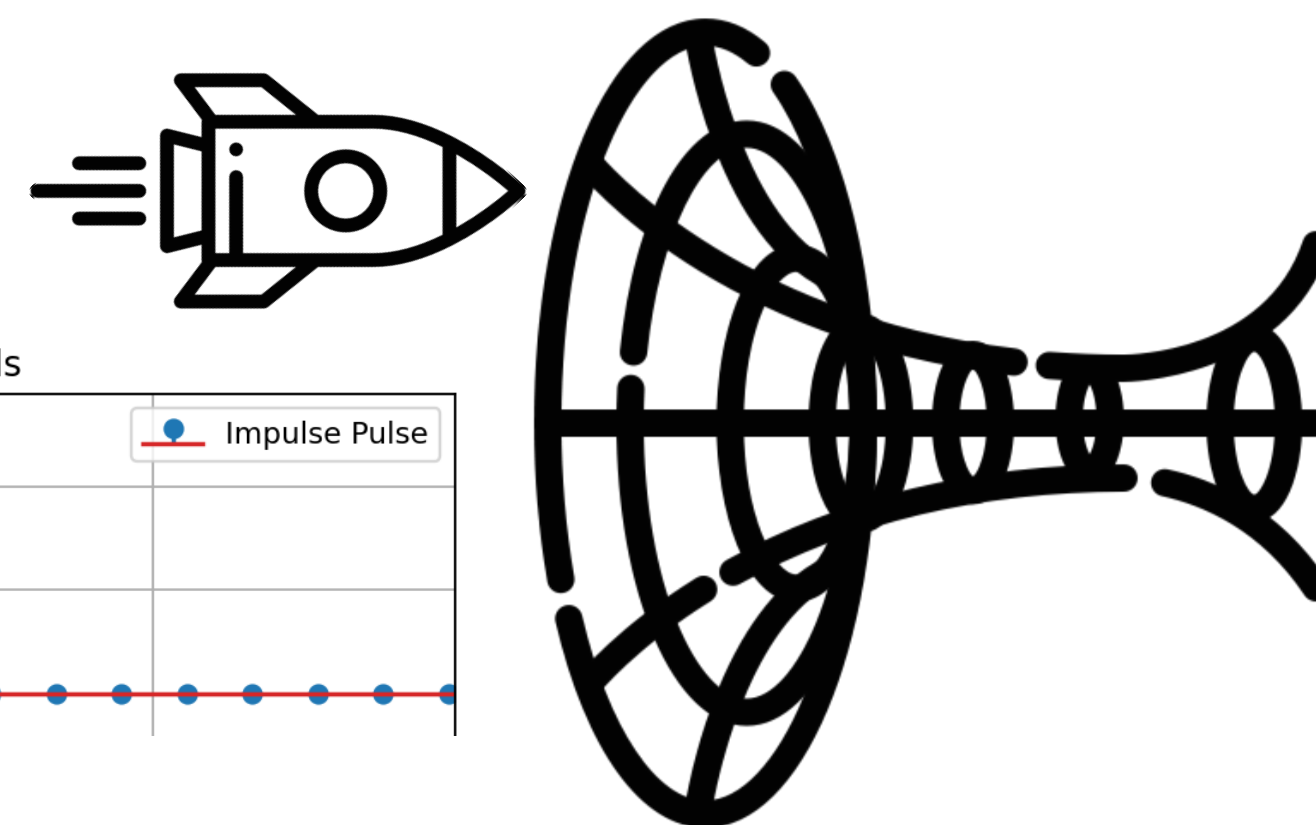
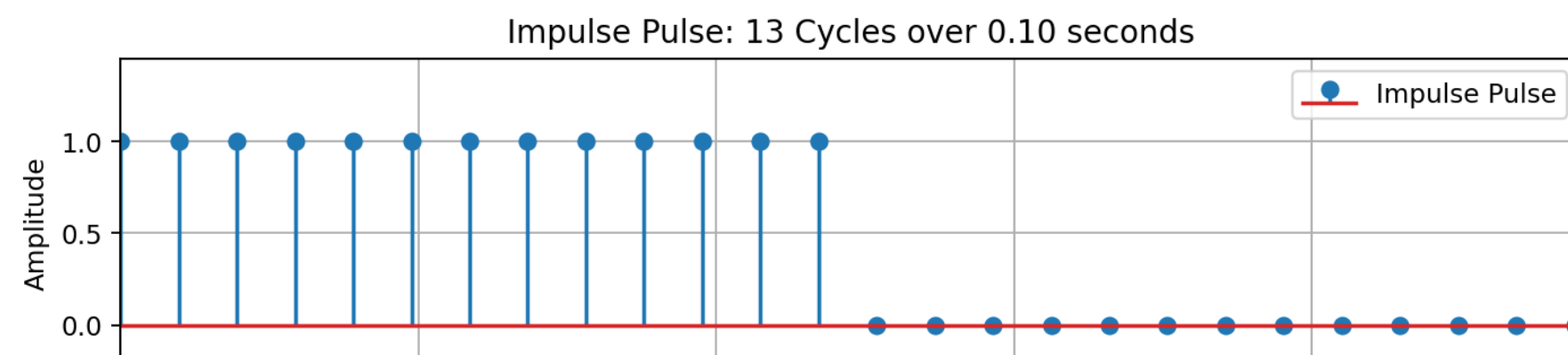
Miền thời gian

Miền tần số

A periodic sinusoidal signal

Fourier transform

Câu hỏi:
Hãy phỏng đoán dạng tần số.



$$\begin{aligned} F(\nu) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt \\ &= \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} A \exp(-i2\pi\nu t) dt = A \text{sinc}(\nu W) \end{aligned}$$

Inverse Fourier transform

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Chuyển đổi Fourier số 1D

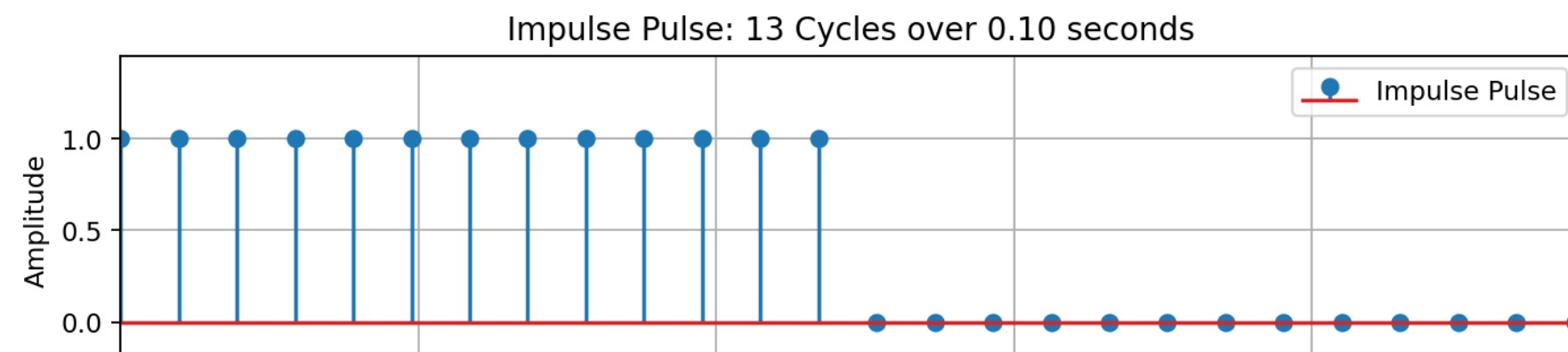
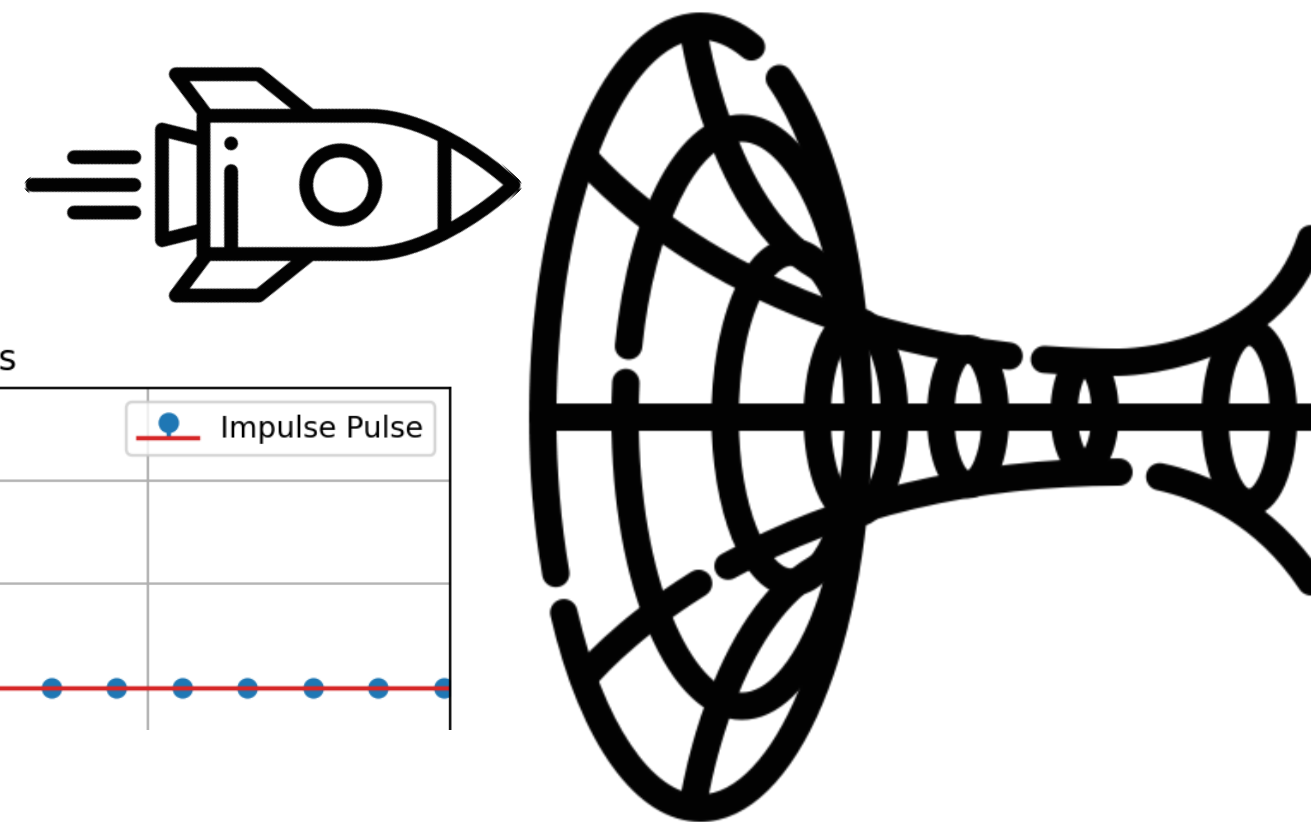
Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn

Miền thời gian

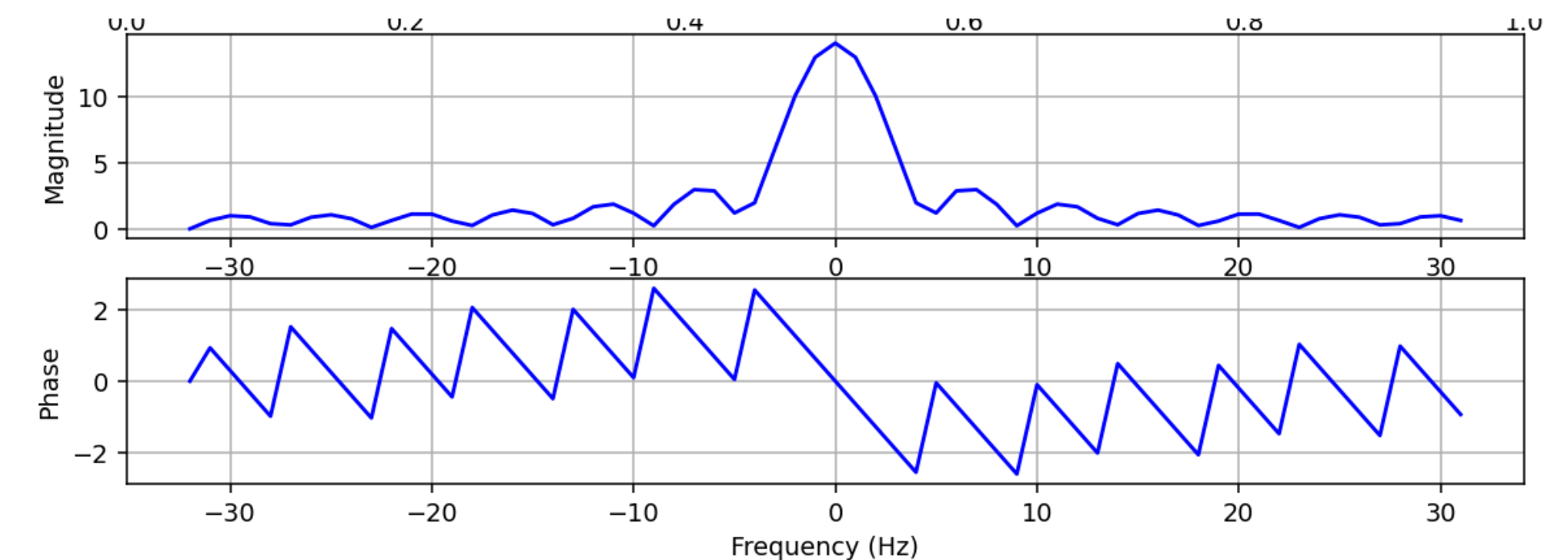
Miền tần số

A periodic sinusoidal signal

Fourier transform



Câu hỏi:
Các bạn có nhận xét gì?

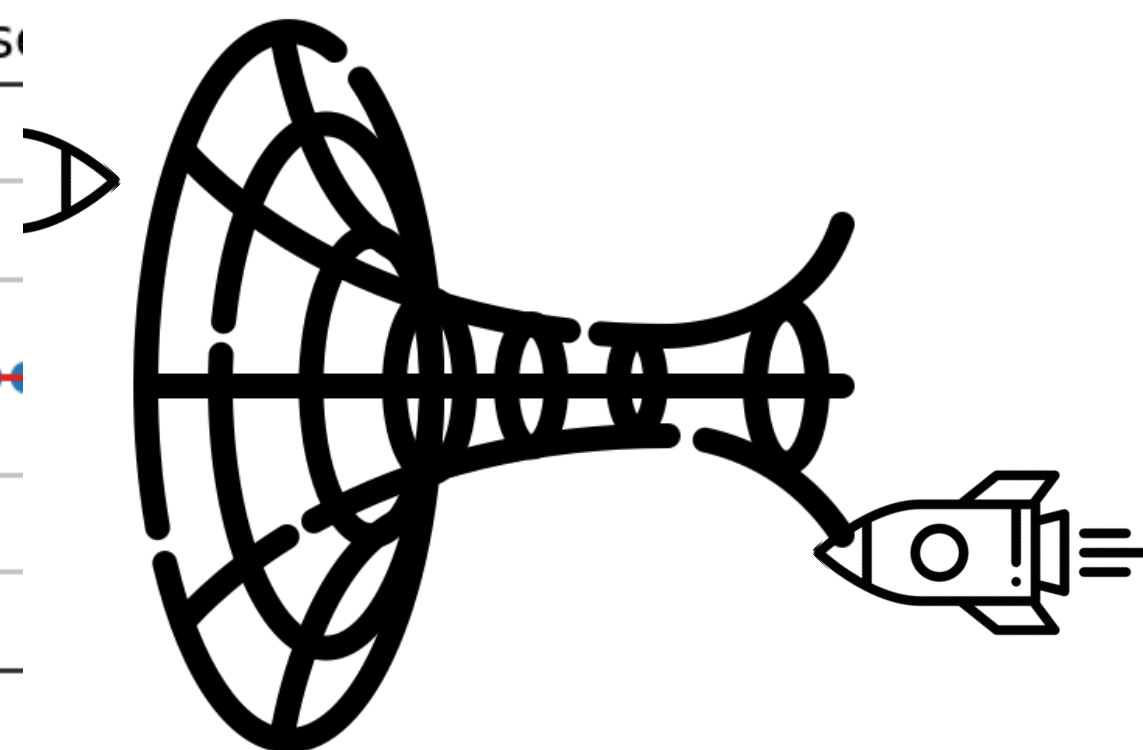
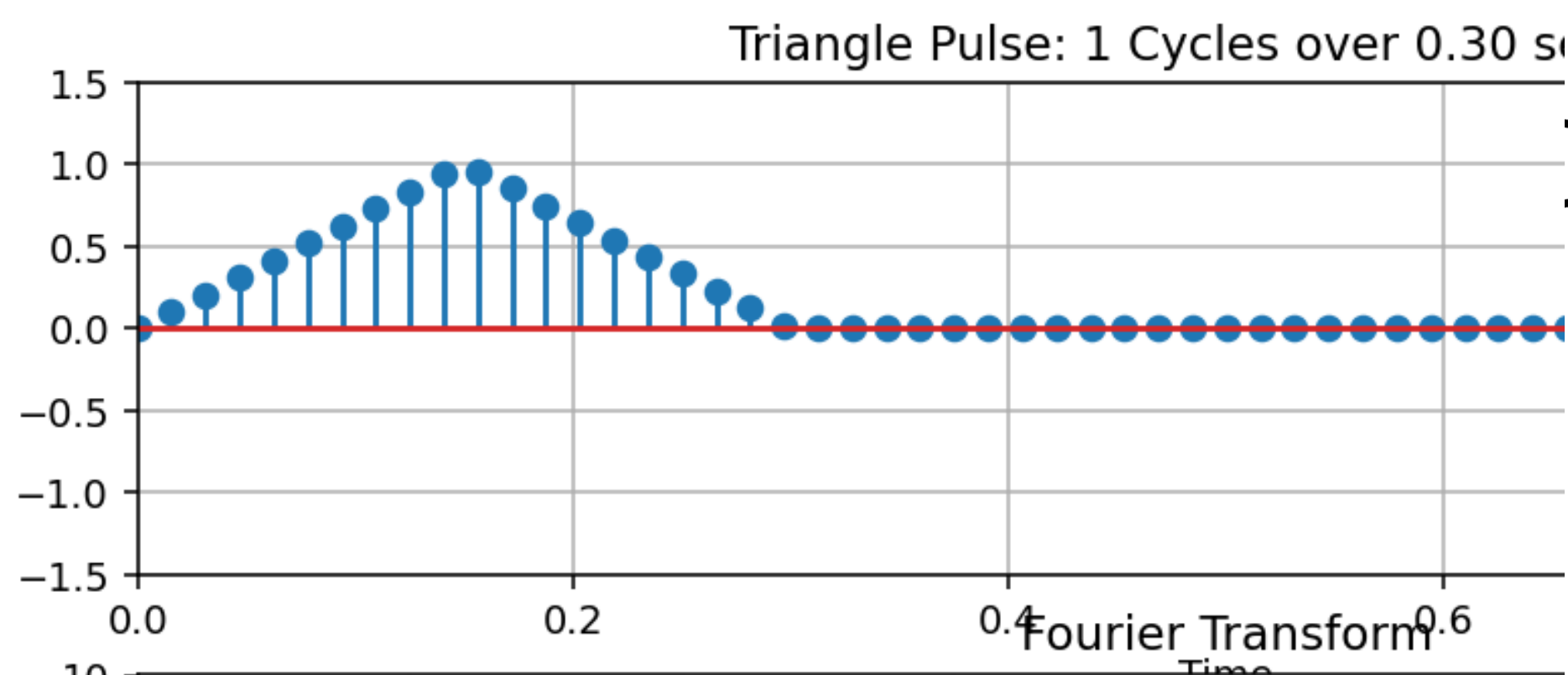


Chuyển đổi Fourier số 1D

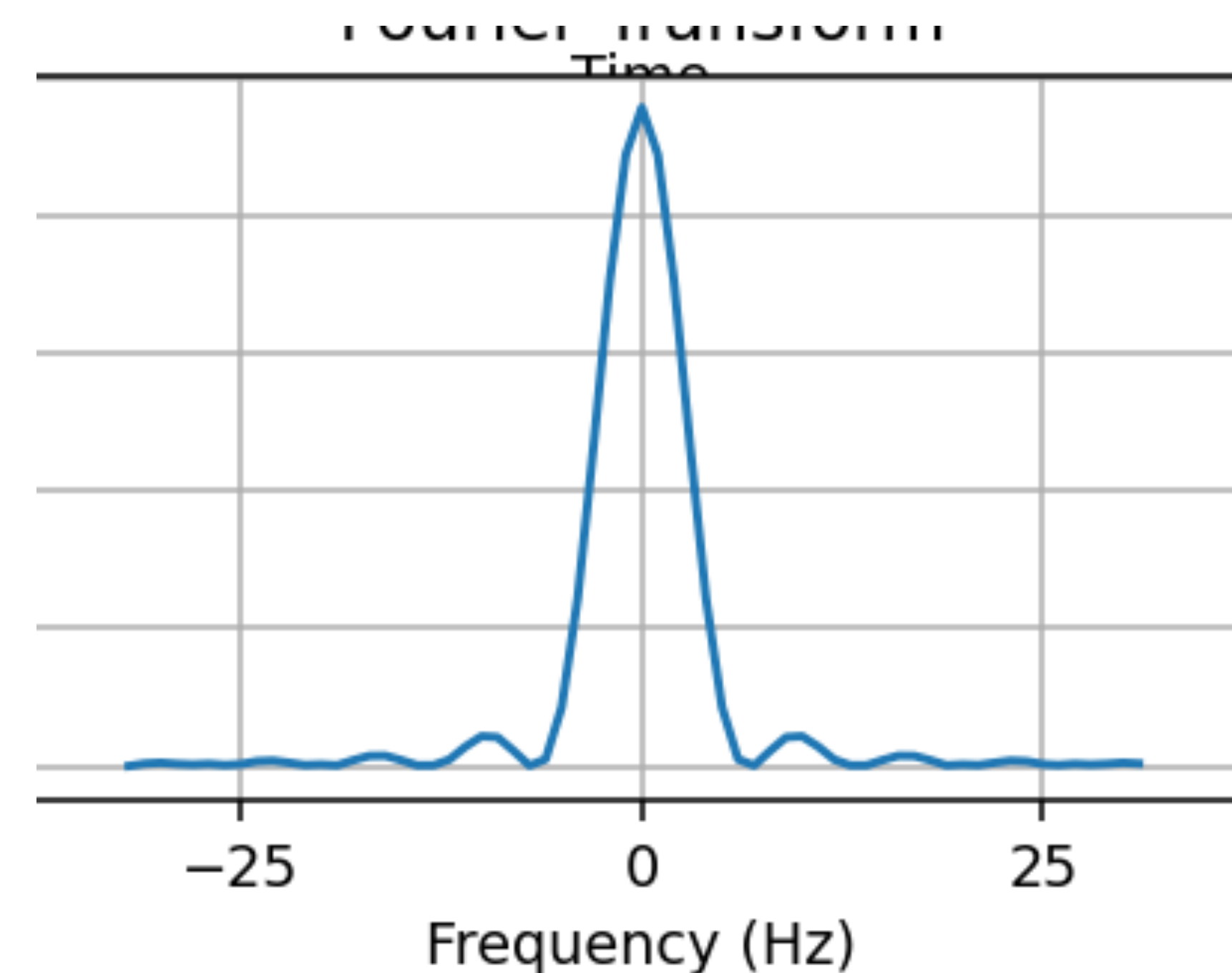
Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn

Miền thời gian

Fourier transform



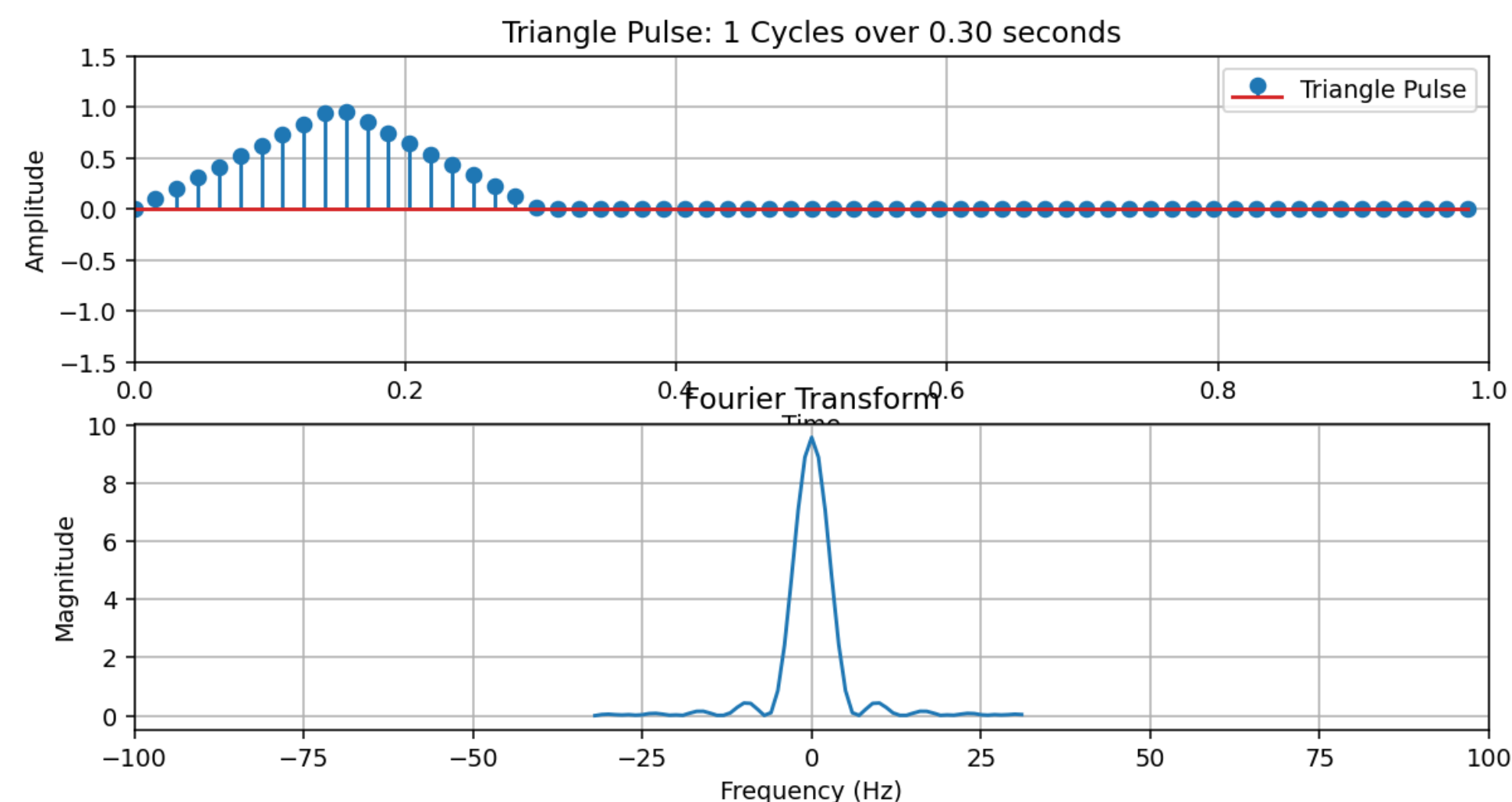
Miền tần số



Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn

- Miền tần số của tín hiệu rời rạc không tuần hoàn luôn là tín hiệu liên tục
- Các tín hiệu được lấy mẫu ở miền thời gian trở thành tín hiệu rời rạc.
- Phổ tần số của chúng là tổng hợp của các phổ của xung lý tưởng ở các thời điểm khác nhau.

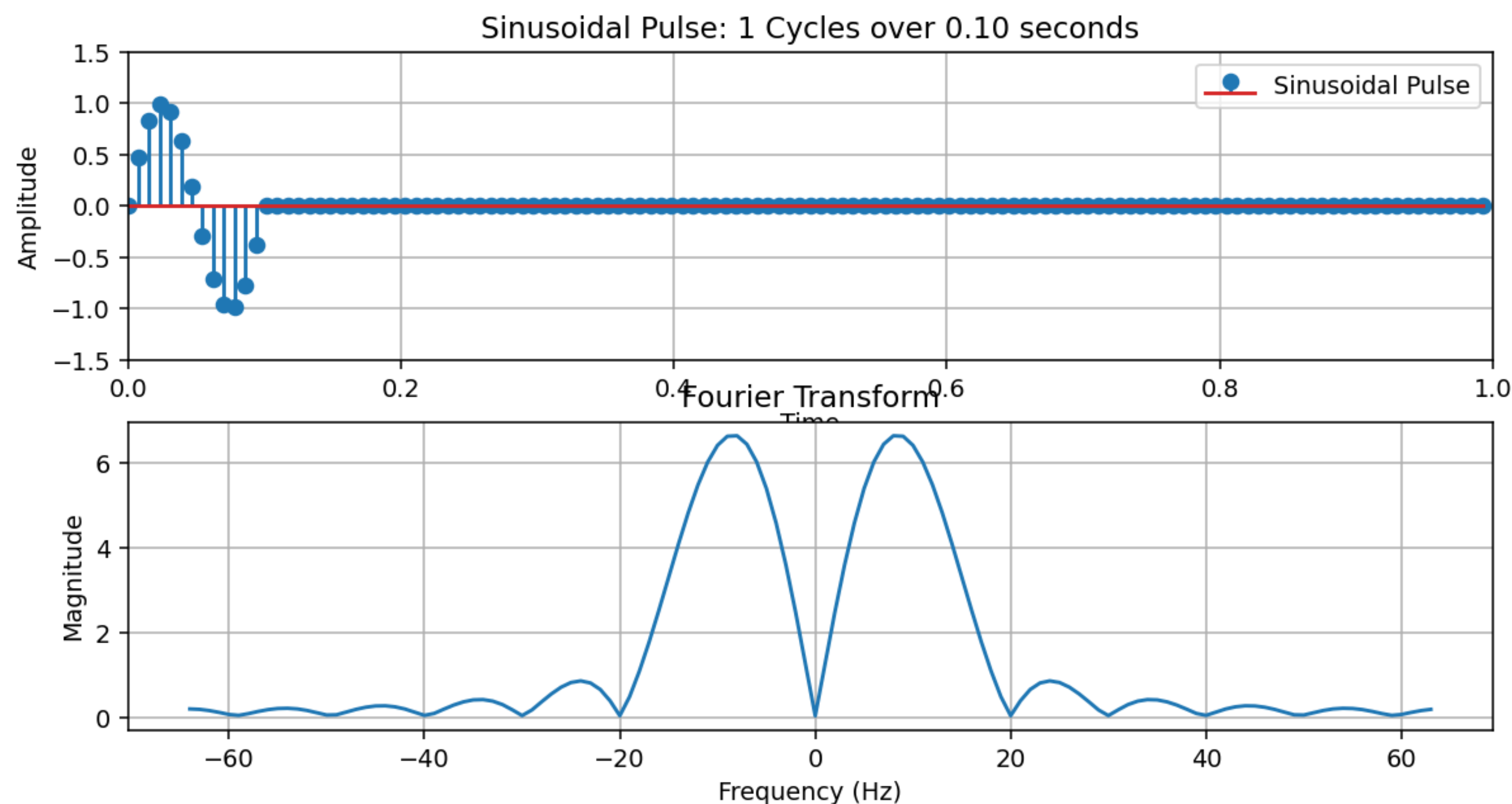


Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn

○ Câu hỏi:

Đến đây, các bạn có thể rút ra được nguyên lý để chuyển đổi Fourier rời rạc là gì?



Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn

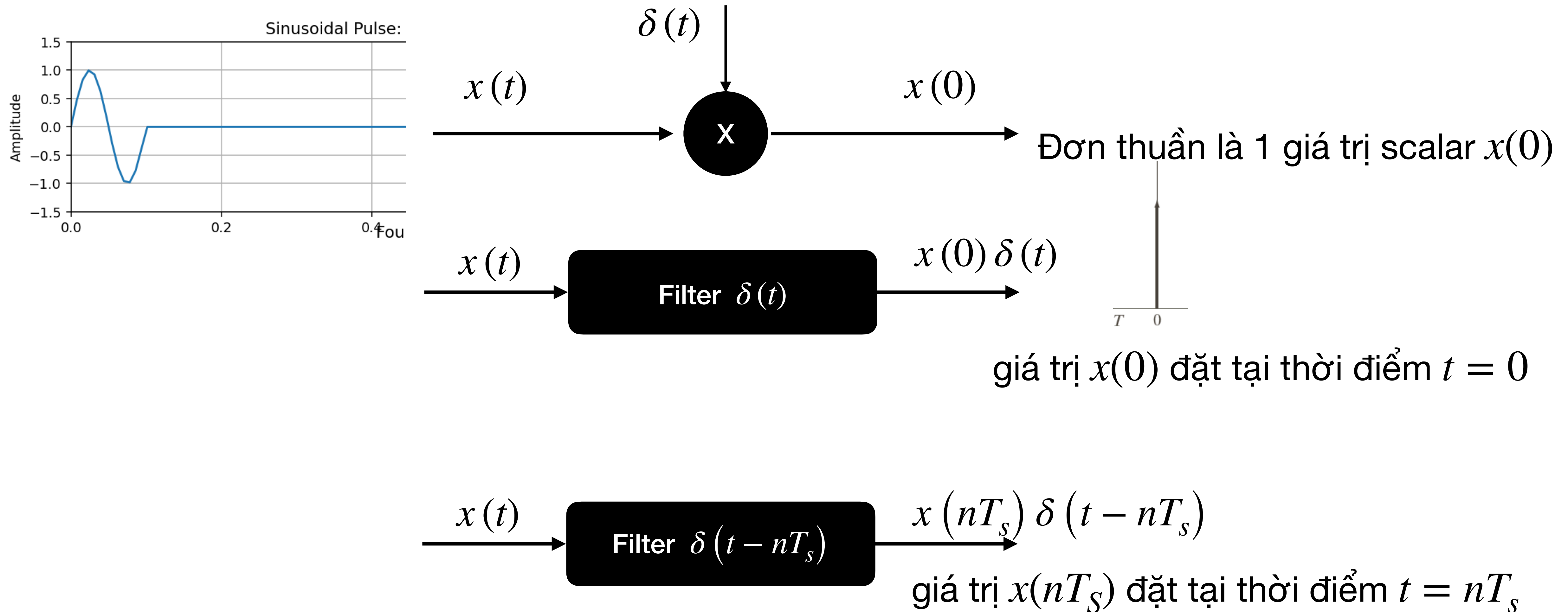
Ở các bài lab trước, chúng ta thực hiện sampling bằng cách lấy giá trị chứa trong các array. Hoàn toàn chưa thực hiện sampling từ tín hiệu liên tục thực tế.

Bản chất của việc sampling là gì?

- a) Phép nhân tín hiệu liên tục với xung $\delta(t)$
- b) Phép chập tín hiệu liên tục với xung $\delta(t)$
- c) Phép nhân tín hiệu liên tục với chuỗi các xung $\delta(t), \delta(t - T_s), \delta(t - 2T_s), \dots$
- d) Phép chập tín hiệu liên tục với chuỗi các xung $\delta(t), \delta(t - T_s), \delta(t - 2T_s), \dots$

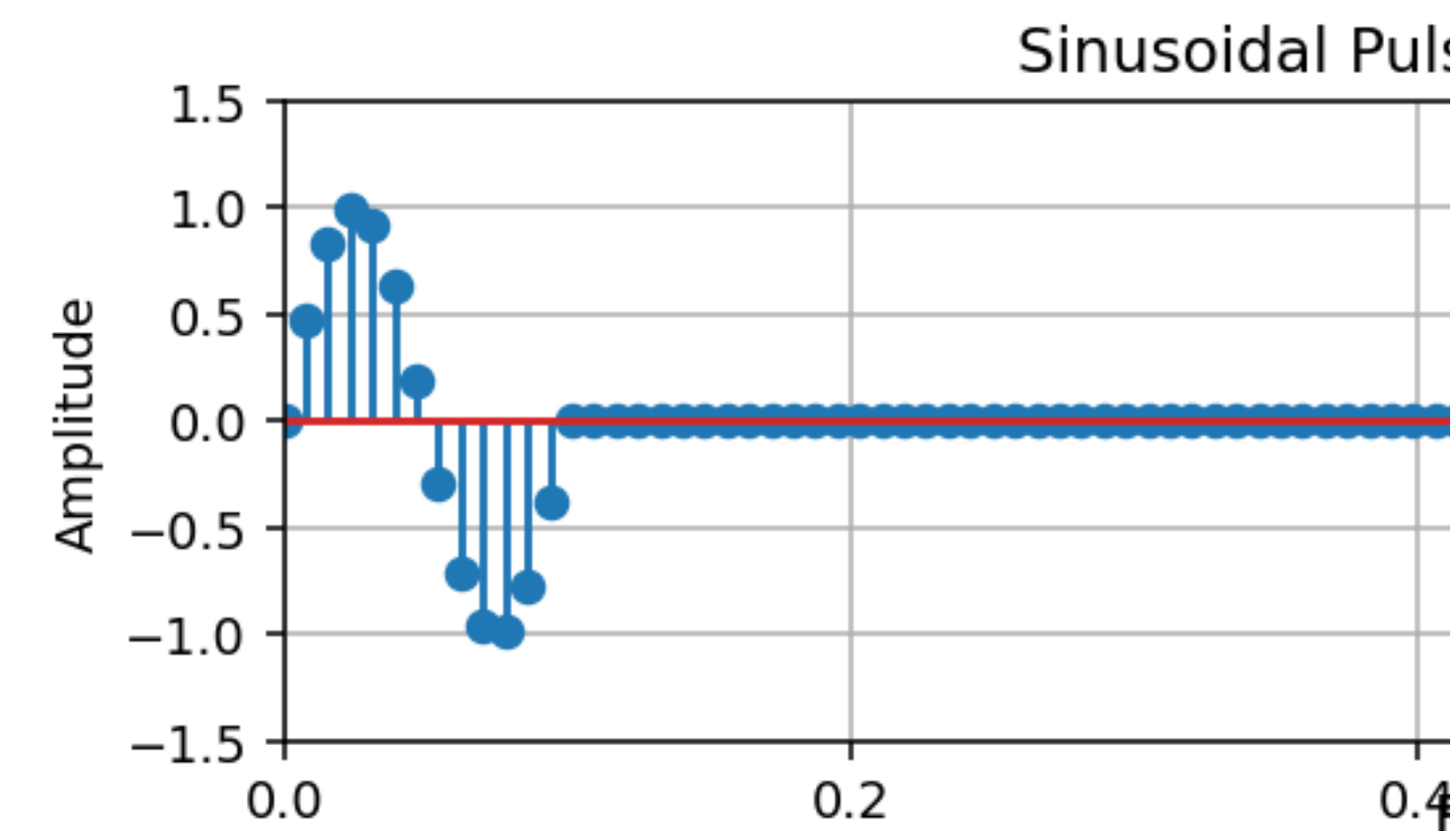
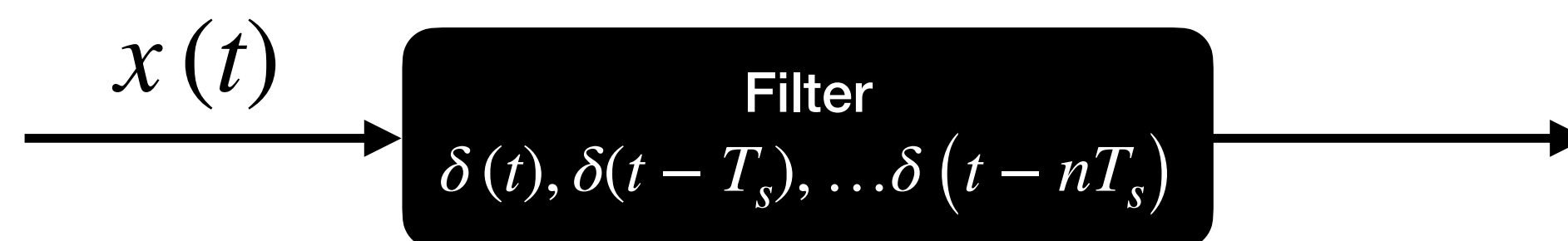
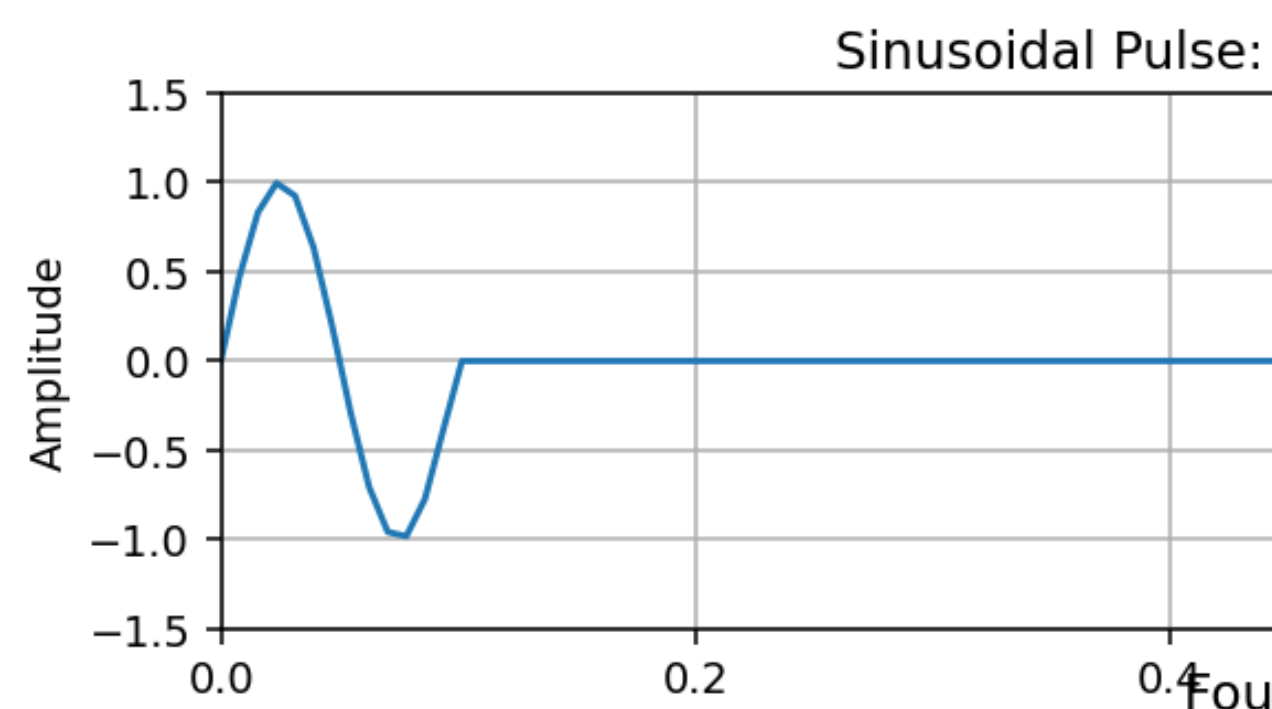
Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn



Chuyển đổi Fourier số 1D và 2D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn



$$x(t) * \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn

Hãy chọn lại đáp án đúng.

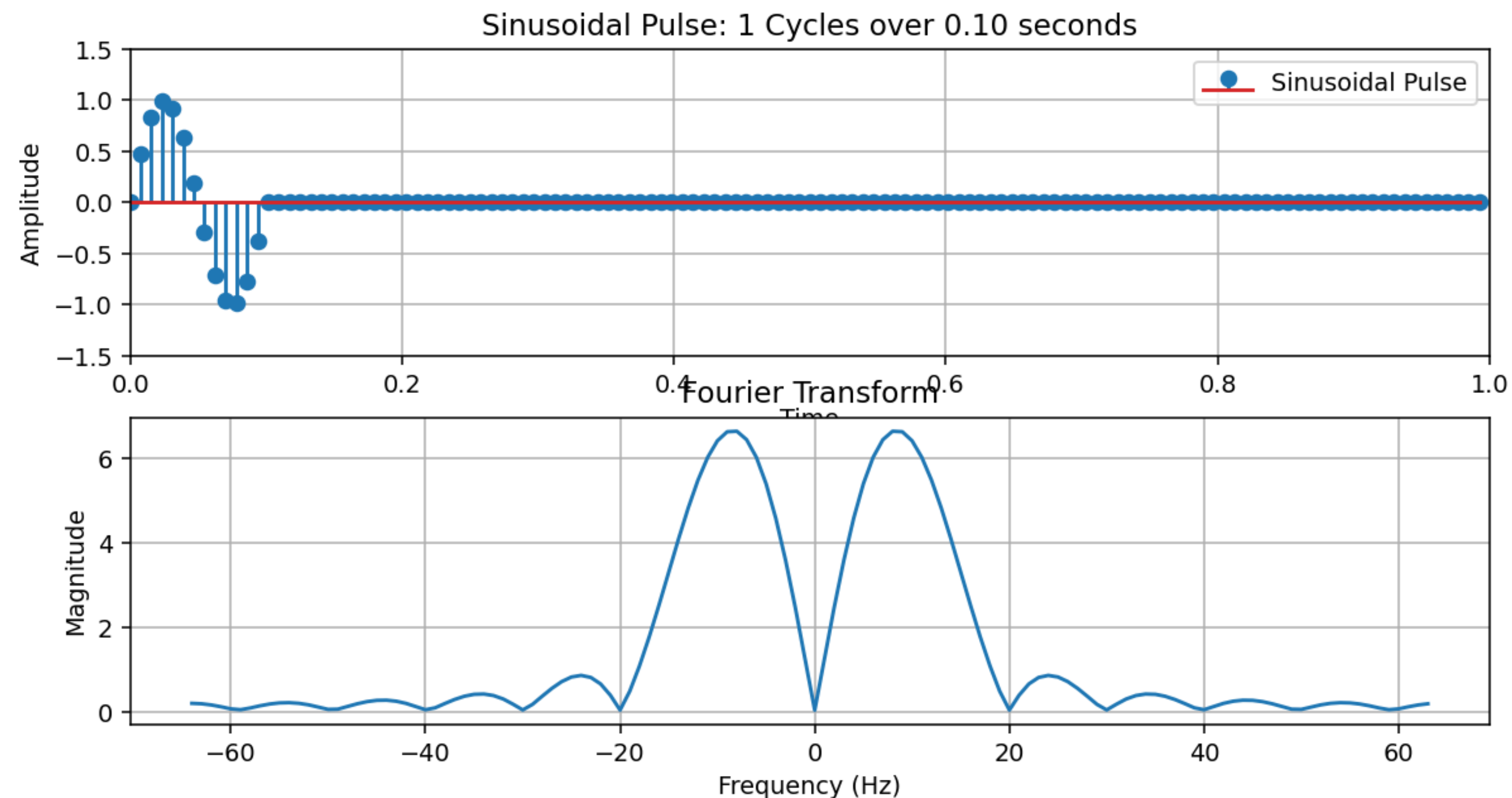
Bản chất của việc sampling là gì?

- a) Phép nhân tín hiệu liên tục với xung $\delta(t)$
- b) Phép chập tín hiệu liên tục với xung $\delta(t)$
- c) Phép nhân tín hiệu liên tục với chuỗi các xung $\delta(t), \delta(t - T_s), \delta(t - 2T_s), \dots$
- d) Phép chập tín hiệu liên tục với chuỗi các xung $\delta(t), \delta(t - T_s), \delta(t - 2T_s), \dots$

Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn

- Câu hỏi: Hãy trả lời lại câu hỏi này
các bạn có thể rút ra được nguyên lý để chuyển đổi Fourier rời rạc là gì?



Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + không tuần hoàn

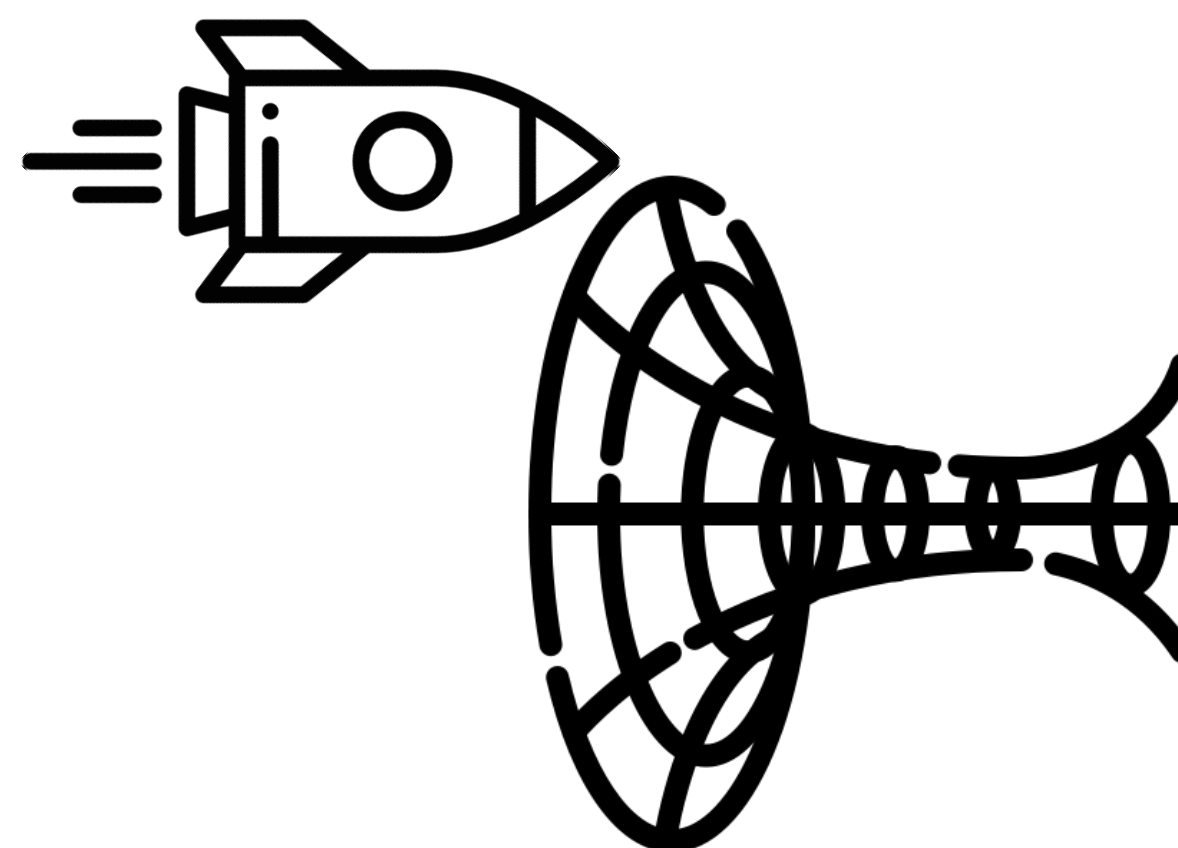
Fourier transform

$$\delta(t)$$

$$\delta(t - T_s)$$

$$\delta(t - nT_s)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$



$$\Delta_0(v) = 1$$

$$\Delta_1(v) = 1 \times e^{-i2\pi v T_s}$$

$$\Delta_n(v) = 1 \times e^{-i2\pi n v T_s}$$



Chuyển đổi Fourier số 1D

Biểu thức chuyển đổi cho tín hiệu rời rạc

- **Discrete Fourier Transform (DFT)**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}$$

- **Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT)**

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$$

Chuyển đổi Fourier số 1D

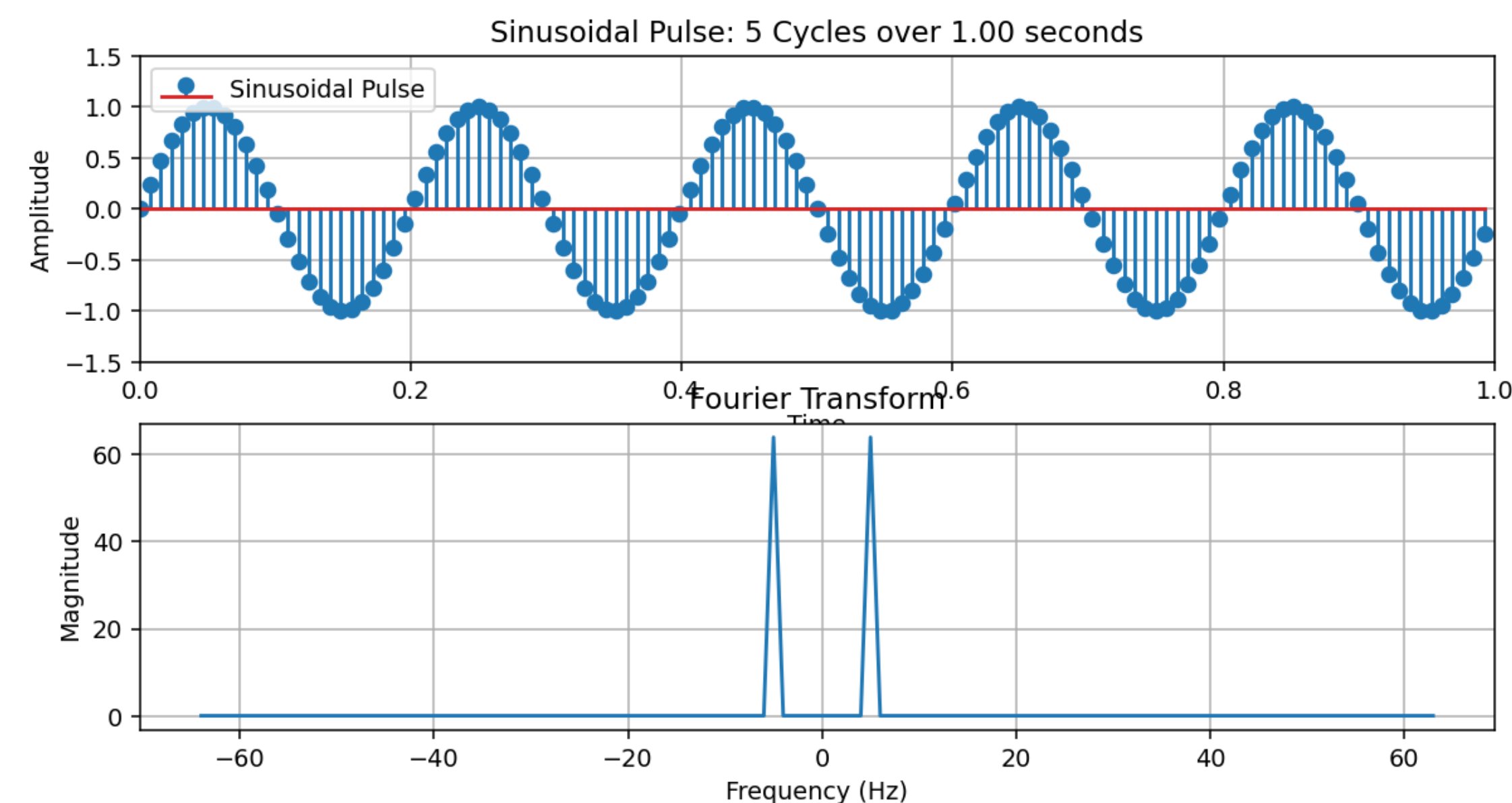
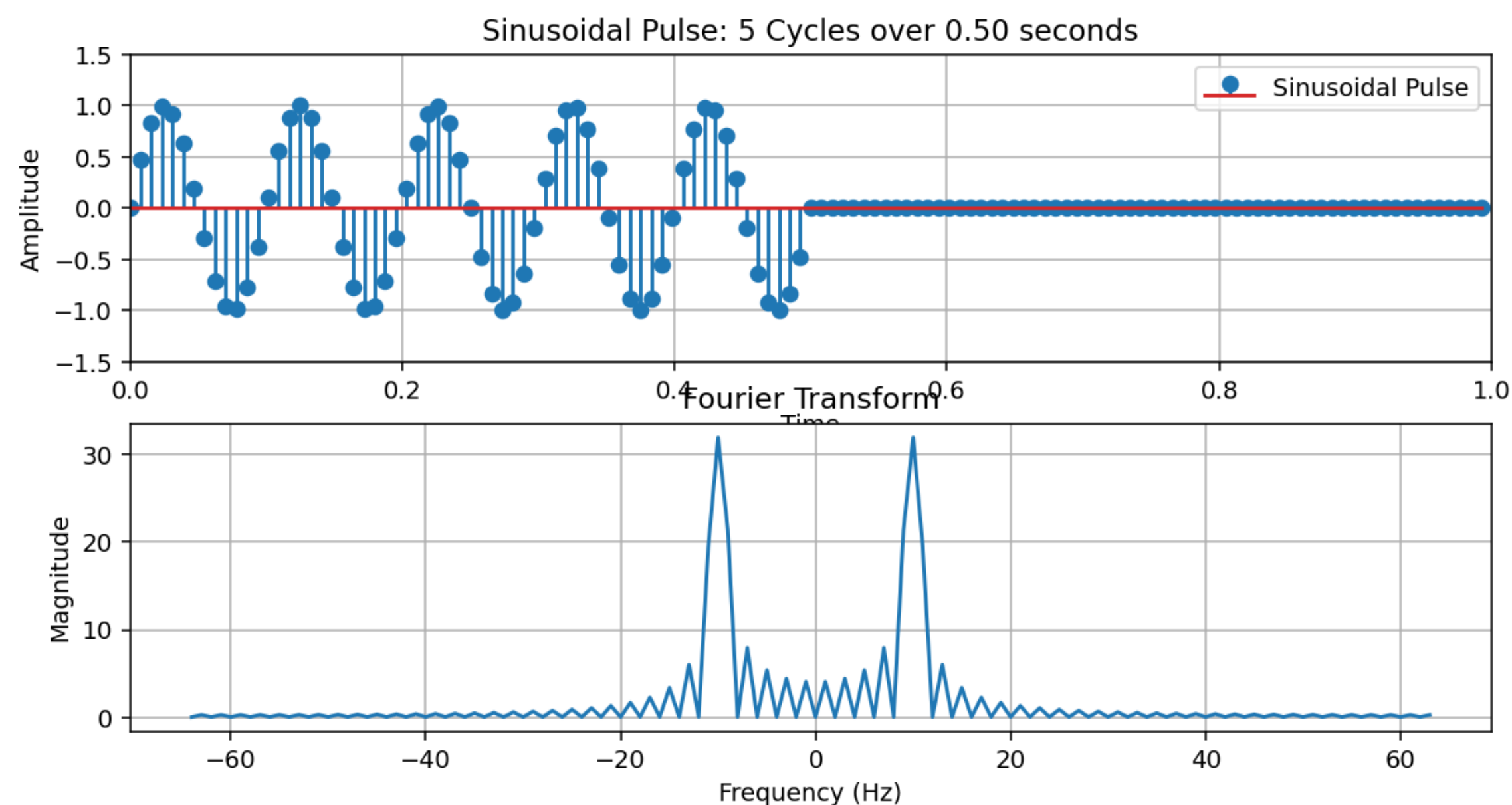
Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + tuần hoàn

Làm sao có thể Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + tuần hoàn

Chuyển đổi Fourier số 1D

Chuyển đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc + tuần hoàn

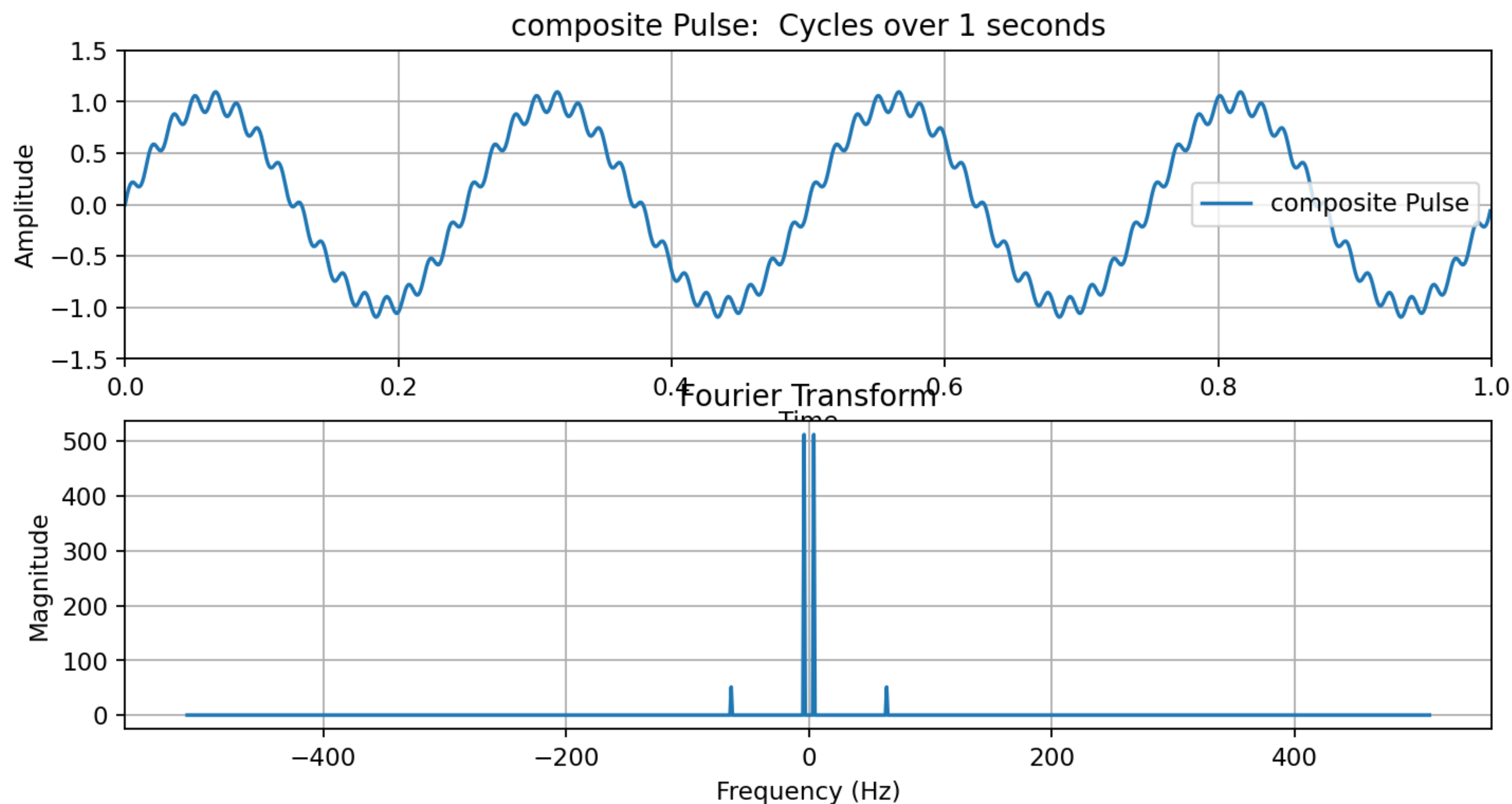
Hãy nhận xét 2 kết quả này. Và rút ra nguyên tắc để tìm phổ của tín hiệu tuần hoàn rời rạc bằng phép FFT



Chuyển đổi Fourier số 1D

Lọc tín hiệu dựa trên miền tần số

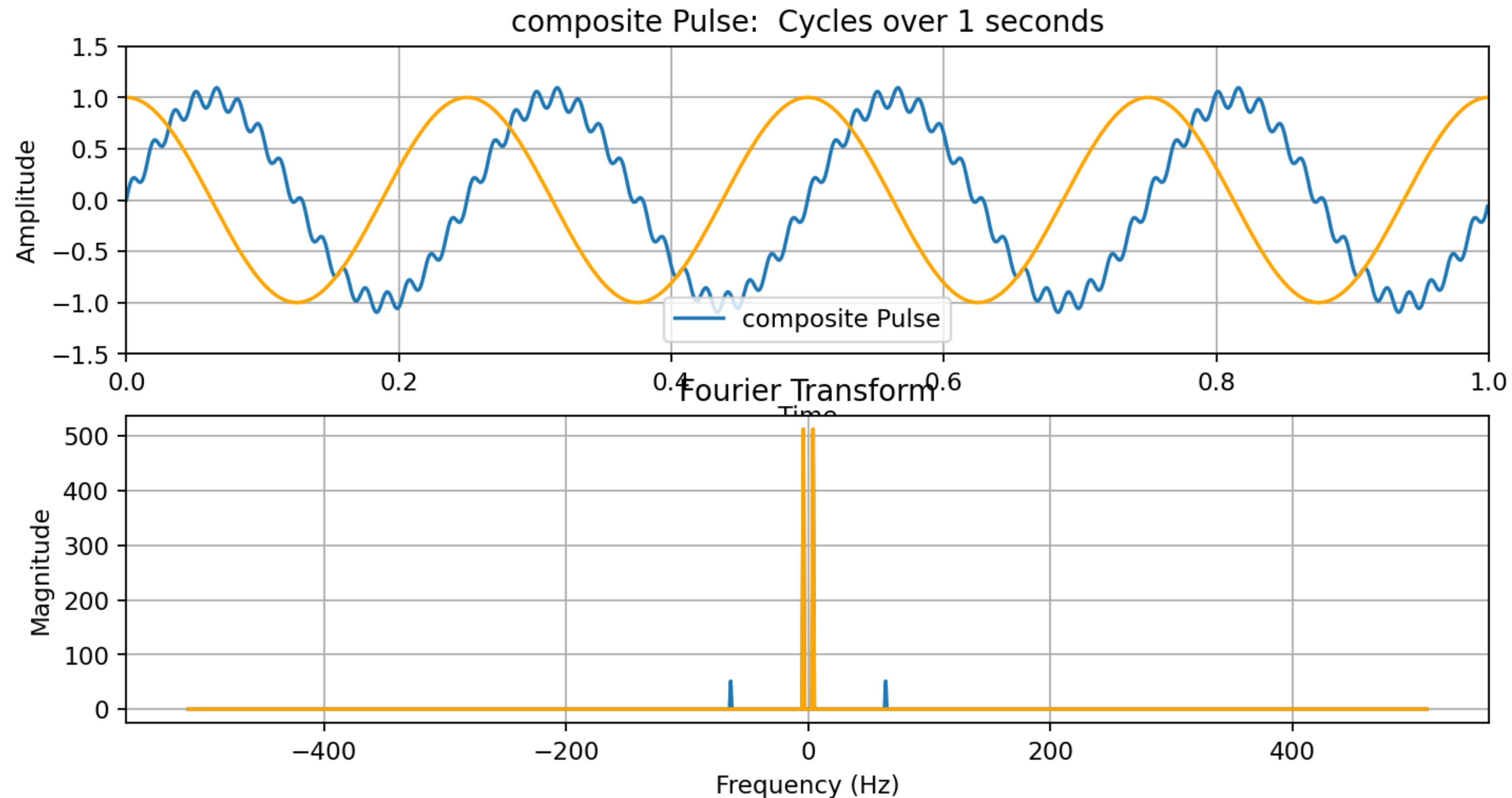
Bạn hãy đề xuất loại bỏ các tín hiệu nhiễu gây lên sóng sin chính



Chuyển đổi Fourier số 1D

Lọc tín hiệu dựa trên miền tần số

Bạn hãy đề xuất loại bỏ các tín hiệu nhiễu gây lên sóng sin chính



Chuyển đổi Fourier số 1D

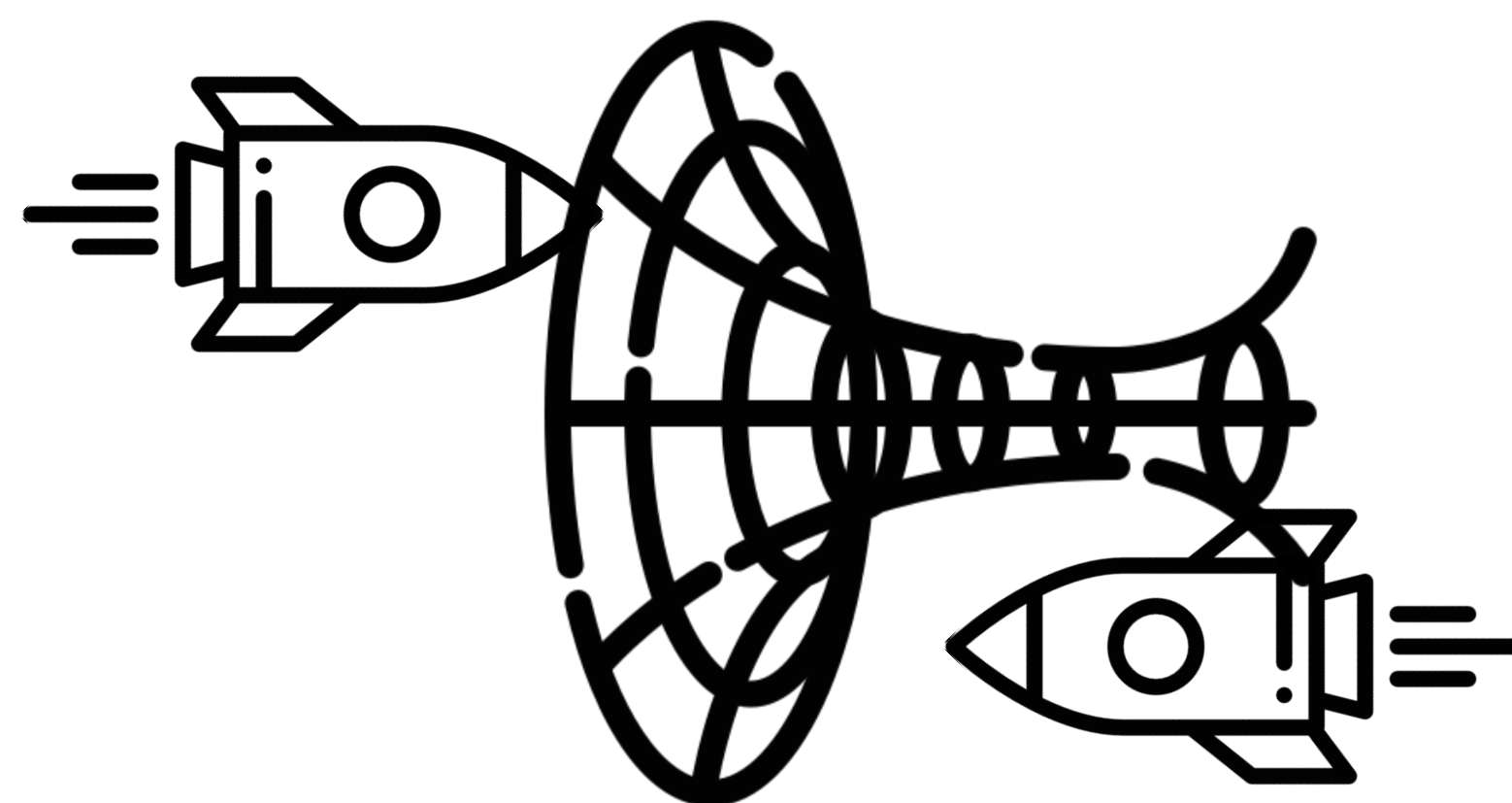
Tóm tắt chuyển đổi Fourier 1 chiều

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}$$

- *time* t
- *Real number* \mathbb{R}

- $\sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$

- Rời rạc + không tuần hoàn
- Rời rạc + tuần hoàn



$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$$

- *frequency* ν
- *Complex number* \mathbb{C}
- chồng chập về biên độ + pha của phổ xung Dirac
- Liên tục không tuần hoàn
- Hội tụ về rời rạc

Quiz và LAB

Quiz và LAB: Chuyển đổi Fourier số 1D

Nội dung

- Quiz: kiểm tra các kiến thức cơ bản về chuyển đổi Fourier
- Lab:
 - Thực hành căn bản về chuyển đổi Fourier của tín hiệu
 - Oversampling và phổ tín hiệu
 - Thực hiện lọc tín hiệu bằng Fourier: bộ lọc thông thấp, thông cao, thông dải
 - Lọc tín hiệu nhiễu bằng phương pháp chặn ngưỡng.
 - Tìm đạo hàm của tín hiệu bằng phương pháp Fourier.