



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
2η Εργαστηριακή Άσκηση

Θαρρόπουλος Θεοφάνης

AEM 9914

22 Απριλίου 2022

Περιεχόμενα

1 Θέμα 1	4
1.1 Μαθηματική Ανάλυση	4
1.1.1 Παραμετροποίηση	4
1.1.2 Μέθοδος Κλίσης	5
1.2 Υλοποίηση στο MATLAB	6
1.2.1 Συνάρτηση gradient_descent_dyn	6
1.2.2 Συνάρτηση gradient_descent	6
1.3 Ερώτημα 1	6
1.4 Ερώτημα 2	12
1.5 Σύγχριση	17
2 Θέμα 2	18
2.1 Μαθηματική Ανάλυση	18
2.1.1 Παράλληλη Δομή Μεθόδου Lyapunov (Parallel Configuration)	18
2.1.2 Μεικτή Δομή Μεθόδου Lyapunov (Mixed Method)	19
2.2 Υλοποίηση Στο MATLAB	20
2.2.1 Παράλληλη Δομή Μεθόδου Lyapunov (Parallel Configuration)	20
2.2.1.1 Συνάρτηση lyapunov_par_dyn	20
2.2.1.2 Συνάρτηση lyapunov_par	20
2.2.2 Μεικτή Δομή Μεθόδου Lyapunov (Mixed)	21
2.2.2.1 Συνάρτηση lyapunov_mixed_dyn	21
2.2.2.2 Συνάρτηση lyapunov_mixed	21
2.3 Προσομοίωση Με Αρχικές Τιμές Θορύβου	21
2.3.1 Παράλληλη Δομή Μεθόδου Lyapunov	21
2.3.2 Μεικτή Δομή Μεθόδου Lyapunov	26

2.4 Προσομοίωση Με Διαφορετικές Τιμές Θορύβου	32
2.4.1 Παράλληλη Δομή Μεθόδου Lyapunov	32
2.4.2 Μεικτή Δομή Μεθόδου Lyapunov	36
2.5 Σύγχριση Παράλληλης Και Μεικτής Δομής	39
3 Θέμα 3	40
3.1 Μαθηματική Ανάλυση	40
3.2 Υλοποίηση στο MATLAB	41
3.2.1 Συνάρτηση lyapunov_par_2D_dyn	41
3.2.2 Συνάρτηση lyapunov_par_2D	41
3.3 Προσομοίωση	41
Αναφορές	44

Περίληψη

Στην παρούσα εργαστηριακή άσκηση μελετήθηκε η online εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων ενός δυναμικού συστήματος. Η online εκτίμηση παραμέτρων είναι η συνεχής εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων σε πραγματικό χρόνο, μια τεχνική αναγκαία στα πραγματικά δυναμικά συστήματα, με τη μορφή αναδρομικών αλγορίθμων. Στην συγκεκριμένη άσκηση γίνεται η υλοποίηση και η μελέτη της Μεθόδου Κλίσης, καθώς και της Μεθόδου Lyapunov. Οι δύο μέθοδοι, καθώς και οι απαραίτητες γραφικές παραστάσεις έγιναν στο περιβάλλον του MATLAB [1]. Ο κώδικας για όλα τα αρχεία μπορεί να βρεθεί και στο Github.

1 Θέμα 1

1.1 Μαθηματική Ανάλυση

1.1.1 Παραμετροποίηση

Στο πρώτο Θέμα της άσκησης δόθηκε το σύστημα:

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = 0, \quad x \in \Re \quad (1.1)$$

Όπου x είναι η κατάσταση του συστήματος u είναι η είσοδος και a, b σταθερές αλλά άγνωστες παράμετροι. Δεδομένου ότι το x ταυτίζεται με την έξοδο του συστήματος προκύπτει ότι:

$$x = x \Leftrightarrow \dot{y} = -ay + bu, \quad y(0) = 0, \quad y \in \Re \quad (1.2)$$

Προκειμένου το σύστημα να είναι ευσταθές, και κατ' επέκταση το σύστημα να έχει τη μορφή μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης της μορφής φραγμένης εισόδου - φραγμένης εξόδου, είναι απαραίτητο $a > 0$. Για την γραμμική παραμετροποίηση του συστήματος, θεωρείται ένας συντελεστής $a_m > 0$. Προσθαψαιρώντας τον όρο $a_m x$ από την εξίσωση (1.2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_m x - \alpha_m x - ax + bu \Leftrightarrow \\ \dot{x} + \alpha_m x &= (\alpha_m - a)x + bu \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \mathcal{L}\left\{\dot{x} + \alpha_m x\right\} &= \mathcal{L}\left\{(\alpha_m - a)x + bu\right\} \Rightarrow \\ sx - x(0) + a_m x &= (\alpha_m - a)x + bu \xrightarrow{x(0)=0} \\ x(s + a_m) &= (\alpha_m - a)x + bu \Leftrightarrow \\ x &= \frac{1}{s + a_m} [(\alpha_m - a)x + bu] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Καταλήγωντας στην παραμετροποιημένη μορφή:

$$x = \theta^* \phi \quad (1.4)$$

Όπου

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \alpha_m - a & b \end{bmatrix}^T \quad (1.5)$$

Και

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + a_m} x & \frac{1}{s + a_m} u \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix}^T \quad (1.6)$$

1.1.2 Μέθοδος Κλίσης

Για την Μέθοδο Κλίσης, χρησιμοποιώντας το σύστημα αναγνώρισης

$$\hat{x} = \hat{\theta}^T \phi \quad (1.7)$$

μαζί με την παραμετροποιημένη μορφή (1.4), προκύπτει σφάλμα αναγνώρισης

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} \\ &= \theta^{\star T} \phi - \hat{\theta}^T \phi \\ &= (\theta^{\star T} - \hat{\theta}^T) \phi \\ &= -\tilde{\theta}^T \phi, \quad \tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^{\star} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ορίζεται συνάρτηση σφάλματος:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{((\theta^{\star T} - \hat{\theta}^T) \phi)^2}{2} \quad (1.9)$$

Ως συνάρτηση $K(\hat{\theta})$ επιλέγεται αυτή επειδή όντας κυρτή $\forall \hat{\theta}$, το ελάχιστό της είναι μοναδικό.

Το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σφάλματος (1.9), μέσω της χρήσης της Μεθόδου Κλίσης.

Από την γενική μορφή της μεθόδου:

$$\left. \begin{aligned} \dot{g} &= -\gamma \nabla K \\ \nabla K &= -\left(x - \hat{\theta}^T \phi \right) \phi = -e\phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\tilde{\theta}} = \gamma e\phi \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}}_1 & \dot{\tilde{\theta}}_2 \end{bmatrix}^T = -\gamma e \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix}^T \quad (1.10)$$

Όπου τα ϕ_1 και ϕ_2 είναι από την εξίσωση (1.6).

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματικό Laplace στα ϕ_1 και ϕ_2 προκύπτει:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{s + \alpha_m} x \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{\phi}_1 = -\alpha_m \phi_1 + x, \quad \phi_1(0) = 0 \\ \phi_2 &= \frac{1}{s + \alpha_m} u \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{\phi}_2 = -\alpha_m \phi_2 + u, \quad \phi_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.2 Υλοποίηση στο MATLAB

Για την υλοποίηση της Μεθόδου Κλίσης στο περιβάλλον του MATLAB [1], χρησιμοποιήθηκαν οι δύο συναρτήσεις

- `gradient_descent_dyn(t, odex, a, b, am, gamma, u)`
- `gradient_descent(t, initialconditions, a, b, am, gamma, u)`

1.2.1 Συνάρτηση `gradient_descent_dyn`

Η συνάρτηση αυτή παίρνοντας ως ορίσματα τον χρόνο προσομοίωσης t , τις παραμέτρους a, b, a_m, γ , την είσοδο u και το struct `odex` (Το οποίο περιέχει τα $x, \phi_1, \phi_2, \dot{\theta}_1$ και $\dot{\theta}_2$) επιστρέφει ένα 5×1 πίνακα ονόματι `dynamic`. Το πρώτο στοιχείο του πίνακα είναι η γενική εξίσωση του συστήματος (1.1), το δεύτερο και το τρίτο τα $\dot{\phi}_1$ και $\dot{\phi}_2$ (1.11) και τέταρτο και πέμπτο τα $\dot{\theta}_1$ και $\dot{\theta}_2$ της εξίσωσης (1.10).

1.2.2 Συνάρτηση `gradient_descent`

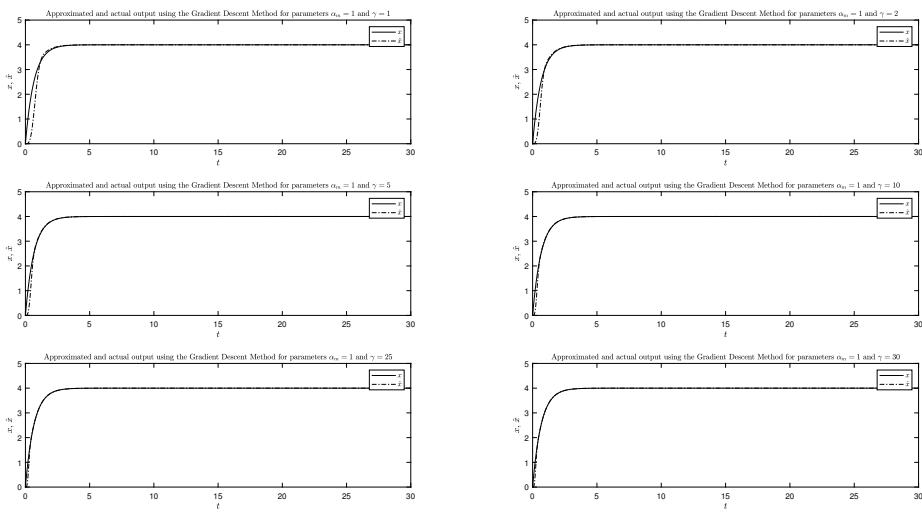
Η συνάρτηση παίρνει ως ορίσματα τον χρόνο προσομοίωσης t , τις αρχικές συνθήκες του συστήματος (και κατ' επέκταση του struct `odex`), τις παραμέτρους a, b, a_m, γ και την είσοδο u . Μέσω της συνάρτησης `ode45` του MATLAB [1], λύνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων από την συνάρτηση `gradient_descent_dyn` (1.2.1). Μετά αυτού, αποθηκεύονται σε ένα struct με όνομα `data` οι τιμές των $x, [\phi_1, \phi_2], [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2], \hat{x}, \hat{a}$ και \hat{b} , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean square error) για την εκτίμηση των x, a και b .

1.3 Ερώτημα 1

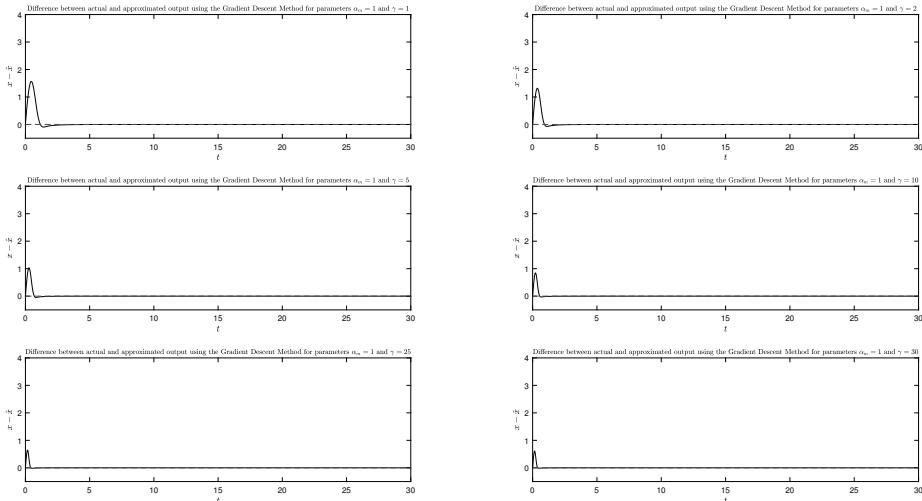
Στο πρώτο ερώτημα ζητείται η εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων σε πραγματικό χρόνο, με βάση τη Μέθοδο Κλίσης, θεωρώντας ότι η είσοδος του συστήματος είναι $u = 3$. Οι χρόνος προσομοίωσης επιλέχθηκε στα 30 δευτερόλεπτα με βήμα μεταξύ δειγματοληψίας τα 0.001 δευτερόλεπτα. Οι αρχικές συνθήκες του συστήματος ήταν μηδενικές, με τις παραμέτρους $a = 1.5$ και $b = 2$. Για τα καλύτερα δυνατά ευρήματα, επιλέχθηκαν διάφορες τιμές για το a_m και το γ .

Στο αρχείο `exer1_1` γίνεται η ίδια προσομοίωση για 8 διαφορετικές τιμές του a_m και 6 διαφορετικές τιμές για το γ και έπειτα γίνονται 48 γραφικές παραστάσεις με όλους του δυνατούς συνδυασμούς των a_m και γ . Όλες οι γραφικές παραστάσεις αποθηκεύονται στον φάκελο `figures\exer1\u3`. Οι γραφικές παραστάσεις της εξόδου βρίσκονται στον φάκελο `xxhat`, οι διαφορά μεταξύ τους στον φάκελο `xdif` και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων \hat{a} και \hat{b} στον φάκελο `ab`. Εντός των φακέλων υπάρχουν δύο ακόμα φάκελοι με ονόματα `sng` και `eps`, για διαφορετικούς τύπους αρχείων.

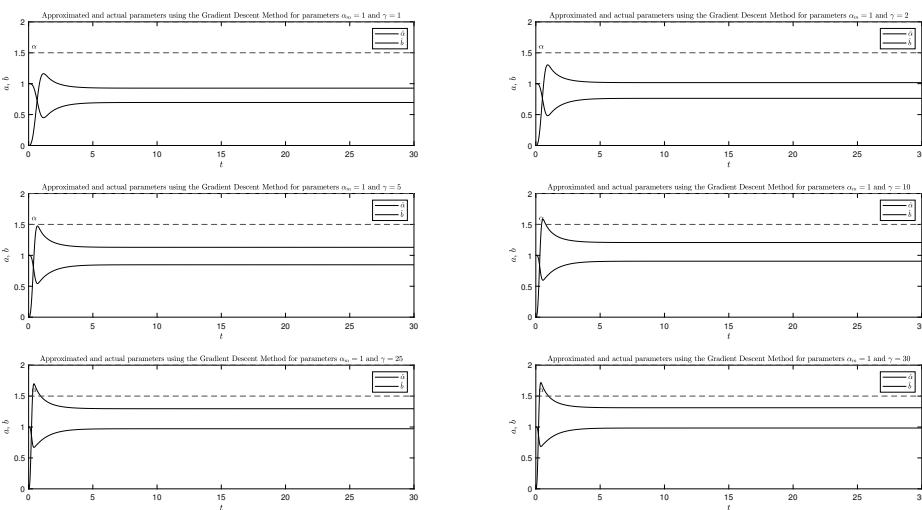
Επειδή η παρουσίαση όλων των γραφικών παραστάσεων θα έπαιρνε πολύ χώρο, παρακάτω βρίσκονται μερικές από αυτές που έχουν τα πιο ενδιαφέροντα ευρήματα.



Σχήμα 1.1: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 1$

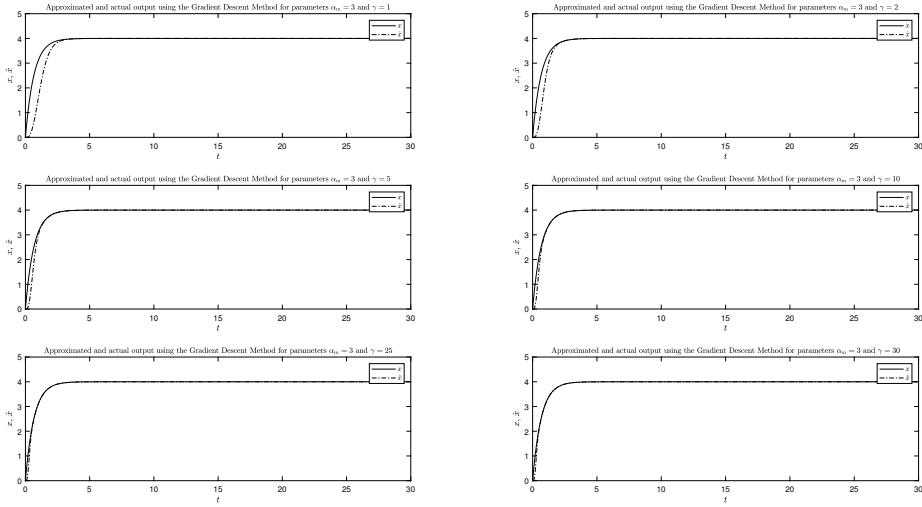


Σχήμα 1.2: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 1$

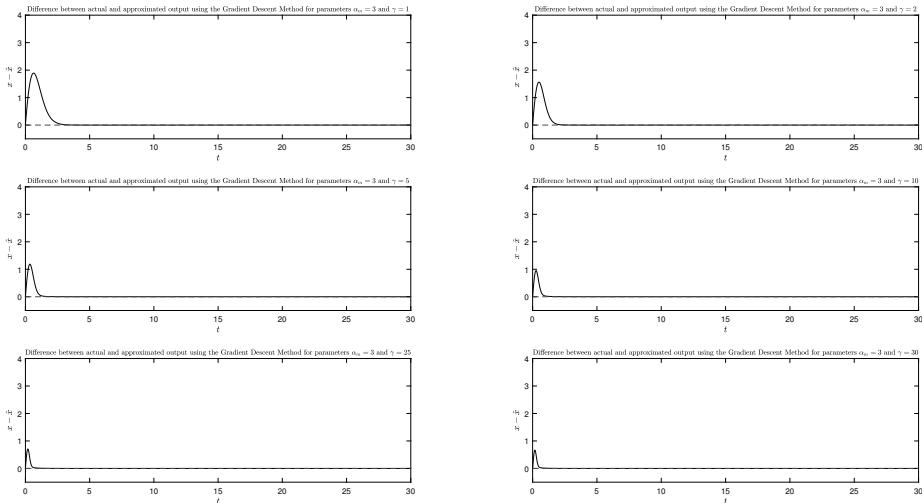


Σχήμα 1.3: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και b για $\alpha_m = 1$

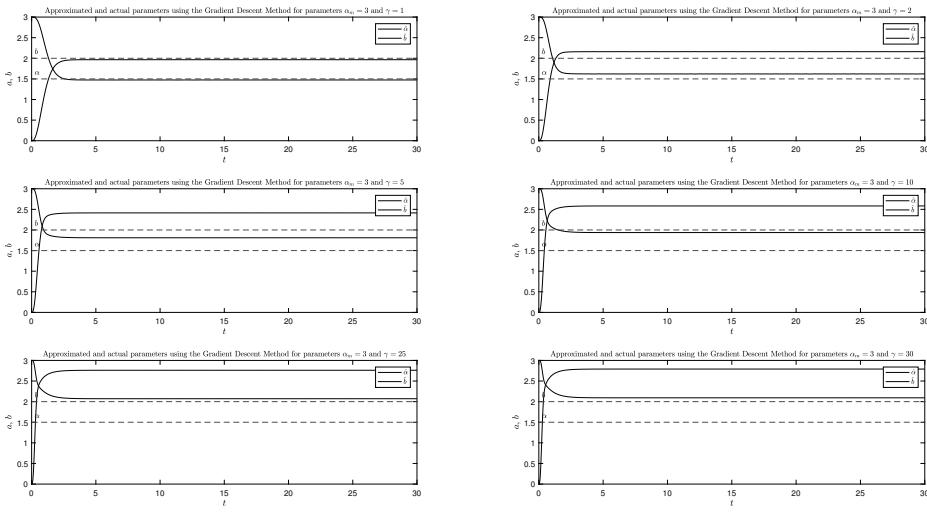
Από τα παραπάνω φαίνεται ότι όσο αυξάνεται η τιμή του γ , τόσο γρηγορότερα συγκλίνει η εκτίμηση της εξόδου \hat{x} προς την πραγματική έξοδο. Ωστόσο, οι τιμές των \hat{x} και \hat{z} δεν φτάνουν ποτέ τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων.



Σχήμα 1.4: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 3$

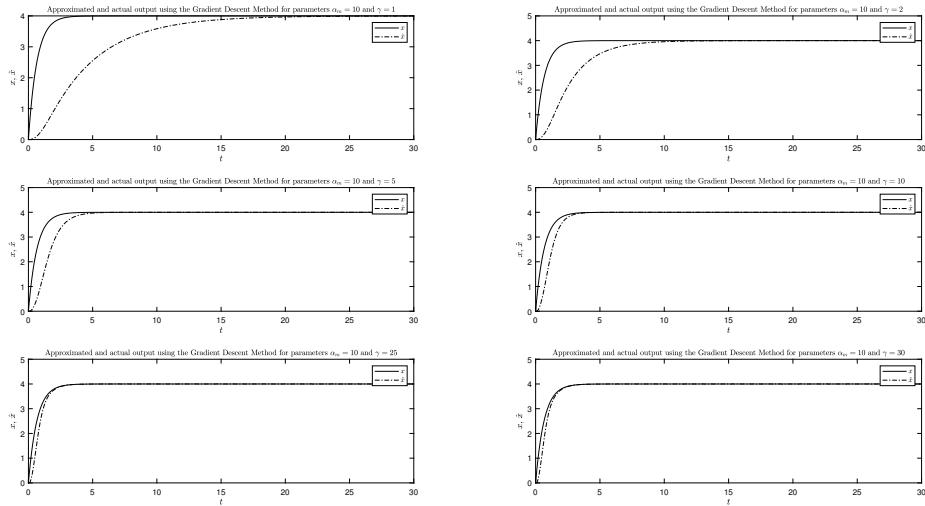


Σχήμα 1.5: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 3$

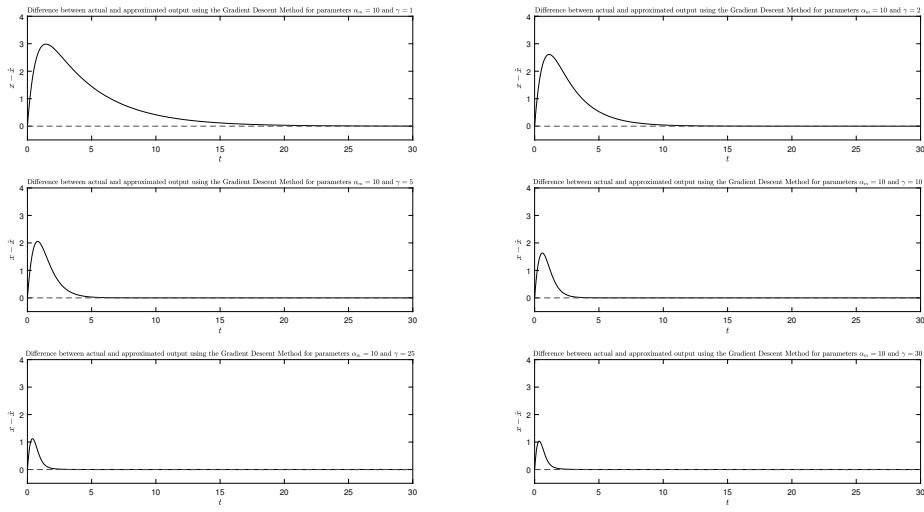


Σχήμα 1.6: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και β για $\alpha_m = 3$

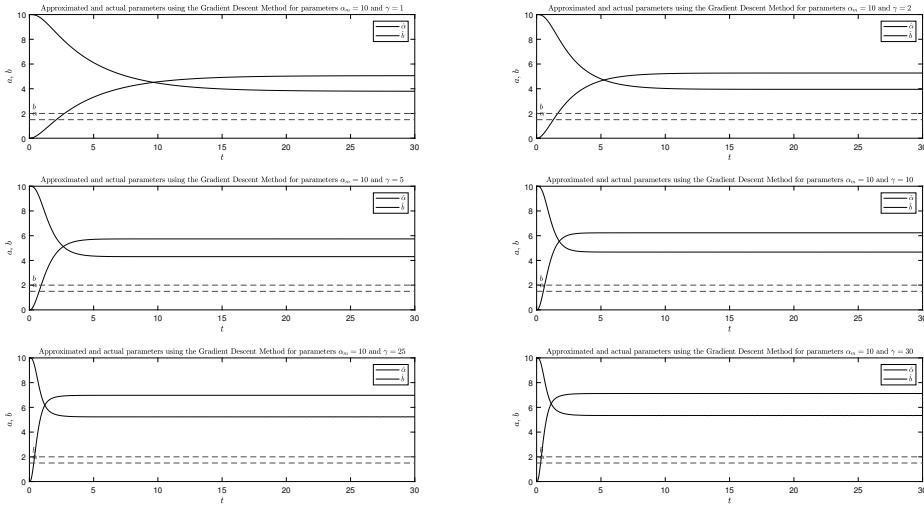
Στην περίπτωση που $\alpha_m = 3$, ακόμα και αν και χρειάζεται ελάχιστα περισσότερο χρόνο για να συγχλίνει η εκτίμηση της εξόδου προς την έξοδο του συστήματος, η εκτίμηση των παραμέτρων είναι πιο ακριβής. Επίσης εδώ φαίνεται πως όσο αυξάνεται η τιμή του γ , οι τιμές των εκτιμήσεων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ αυξάνονται κι αυτές.



Σχήμα 1.7: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εξόδου ται της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 10$

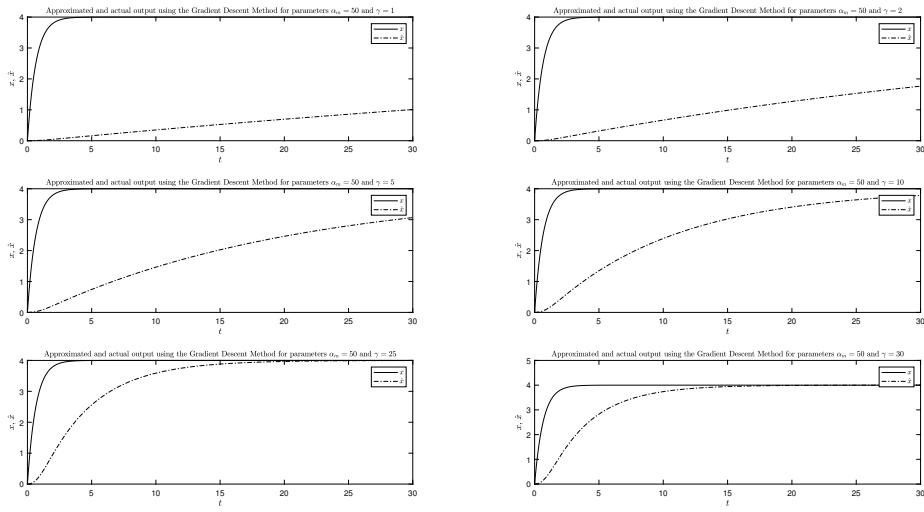


Σχήμα 1.8: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 10$

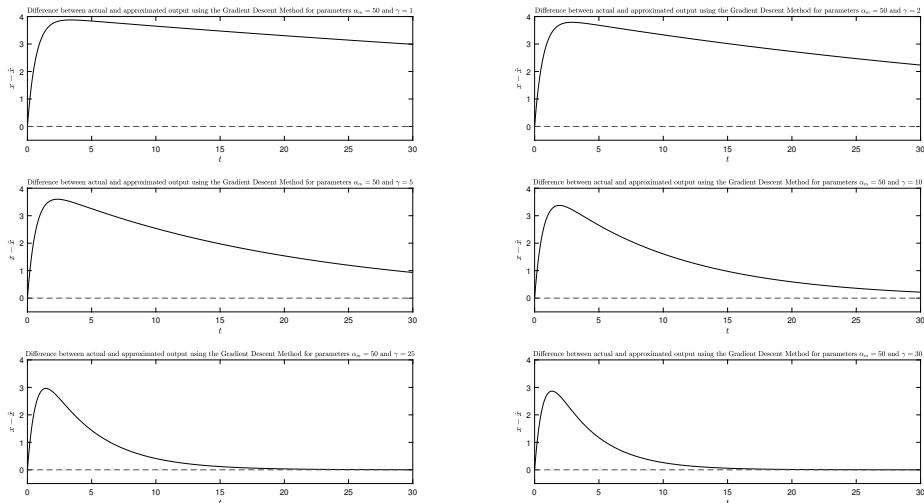


Σχήμα 1.9: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων a και b για $\alpha_m = 10$

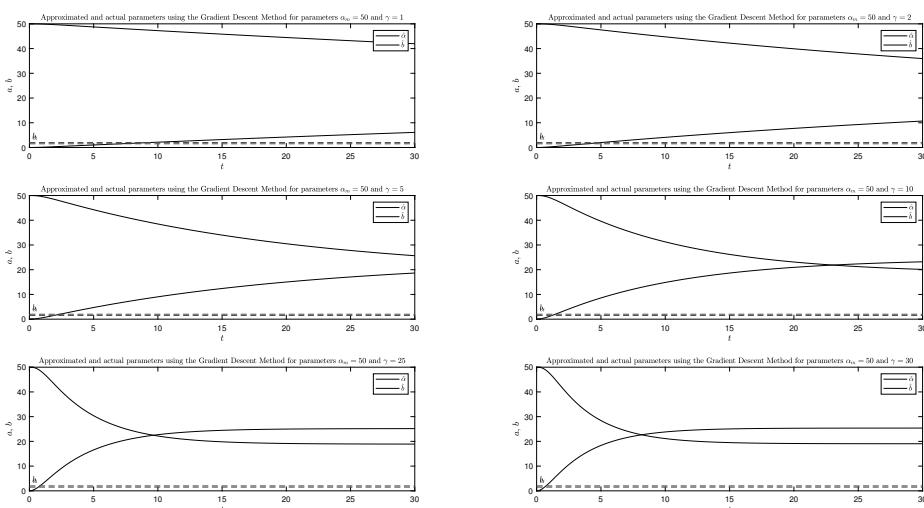
Συγκρίνοντας τα σχήματα (1.8) και (1.2) είναι προφανές πως όσο αυξάνεται η τιμή του α_m , ο απαιτούμενος χρόνος σύγκλισης αυξάνεται. Ακόμα, φαίνεται πως το αρχικό σφάλμα του συστήματος επίσης αυξάνεται. Όπως και πριν, η αύξηση του γ μειώνει τον χρόνο σύγκλισης και το σφάλμα εκτίμησης. Καταλήγοντας, η ορθότερη επιλογή είναι μια μικρότερη τιμή για το α_m , και μια μεγαλύτερη τιμή για το γ , όμως η αύξηση του γ προκαλεί απόκλιση στην εκτίμηση των παραμέτρων a και b . Αποθηκεύοντας και συγκρίνοντας όλες τις τιμές του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, το ελάχιστο mean square error για την εκτίμηση του x εμφανίζεται όταν $\alpha_m = 1$ και $\gamma = 30$, για την εκτίμηση του a όταν $\alpha_m = 3$ και $\gamma = 1$ και για το b όταν $\alpha_m = 3$ και $\gamma = 2$. Πολλαπλασιάζοντας τα σχετικά σφάλματα για κάθε περίπτωση για την επιλογή των α_m και γ για την ελαχιστοποίηση του συνδυασμού των σφαλμάτων, η καλύτερη επιλογή είναι $\alpha_m = 1$ και $\gamma = 30$. Στην περίπτωση που $\alpha = 50$ η διαφορά είναι ακόμα πιο έντονη.



Σχήμα 1.10: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εξόδου ται της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 50$



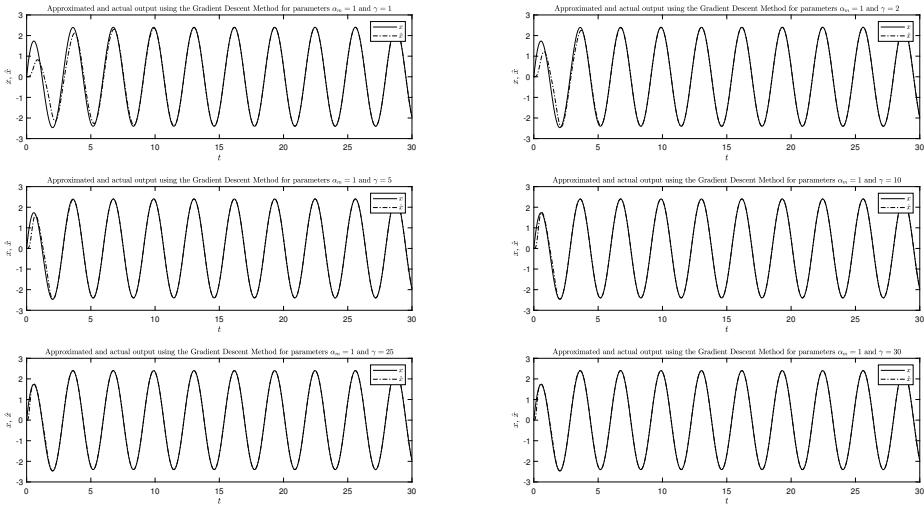
Σχήμα 1.11: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 50$



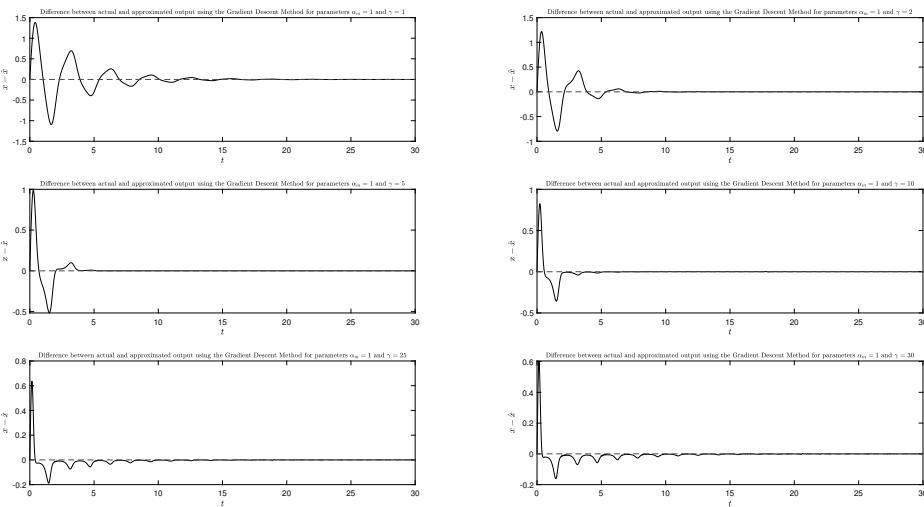
Σχήμα 1.12: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και b για $\alpha_m = 50$

1.4 Ερώτημα 2

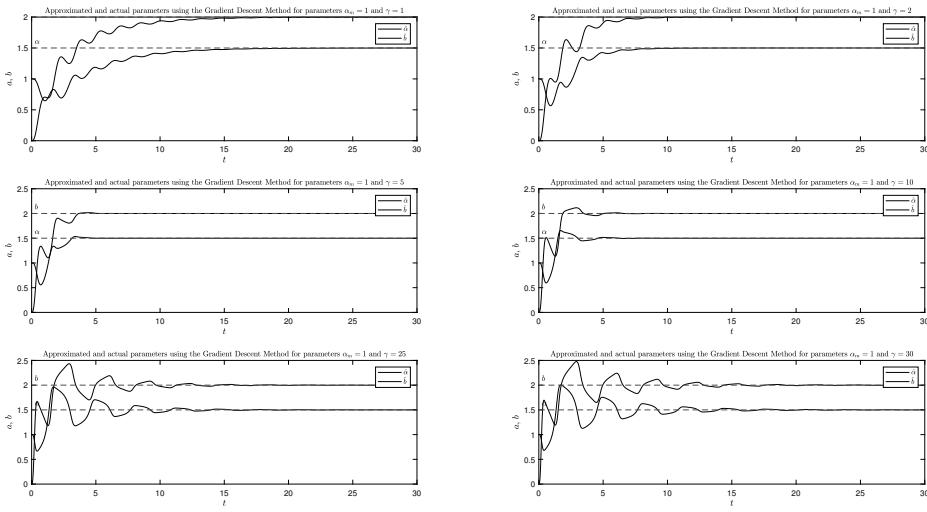
Το δεύτερο ερώτημα είναι το ίδιο με το πρώτο (1.3), με μόνη διαφορά την είσοδο του συστήματος, που στην προκειμένη περίπτωση είναι $u = 3\cos(2t)$. Και σε αυτή την περίπτωση, στο αρχείο exer1_2 έγινε ο ίδιος αριθμός προσομοιώσεων για τις ίδιες τιμές του α_m και του γ . Οι γραφικές παραστάσεις αποθηκεύονται στον φάκελο figures\exer1\ucos. Παρατίθενται μερικές από τις γραφικές παραστάσεις:



Σχήμα 1.13: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 1$

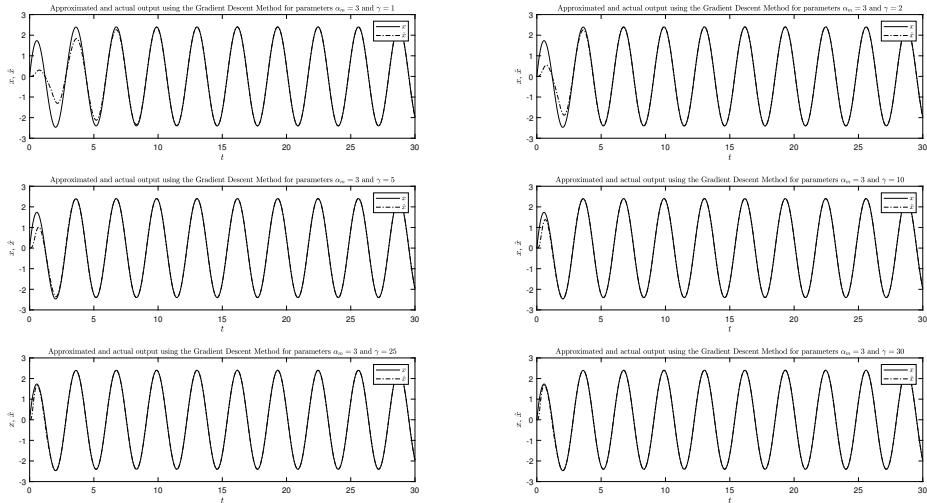


Σχήμα 1.14: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 1$

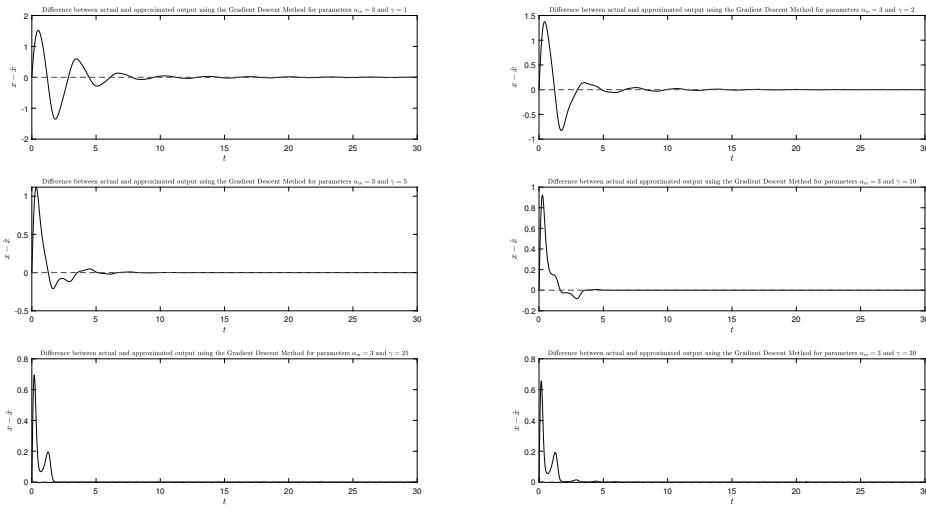


Σχήμα 1.15: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και β για $\alpha_m = 1$

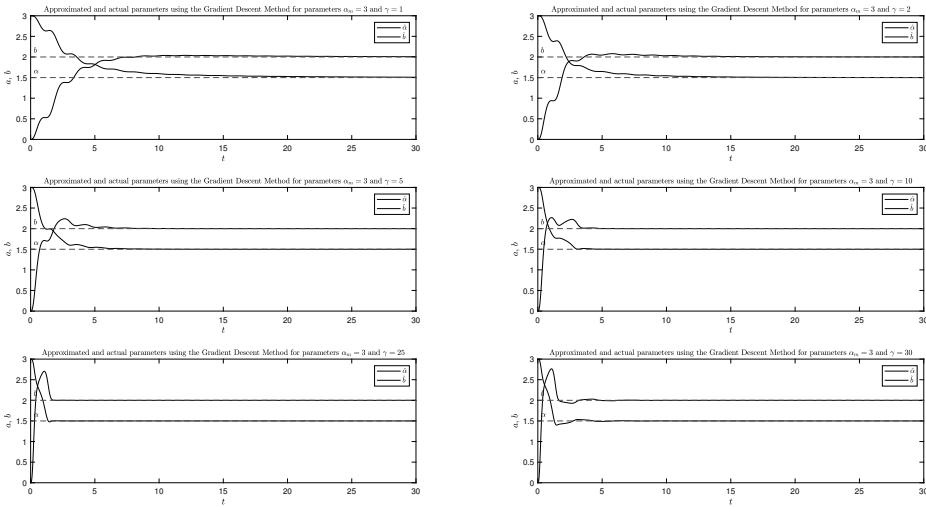
Από τα σχήματα (1.13), (1.14) και (1.15) παρατηρείται ότι σε αντίθεση με την περίπτωση που $u = 3$ (1.3), η αύξηση της τιμής του γ , από ένα σημείο και μετά, αυξάνει τον απαιτούμενο χρόνο σύγκλισης της εκτιμόμενης εξόδου, αλλά ελαττώνει το αρχικό σχετικό σφάλμα εκτίμησης. Επίσης, παρ' όλο που στην προκειμένη περίπτωση, η εκτίμηση των παραμέτρων α και β είναι ακριβέστερη, η αύξηση του γ αρχικά μειώνει τον χρόνο σύγκλισης και έπειτα τον αυξάνει αρκετά.



Σχήμα 1.16: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 3$

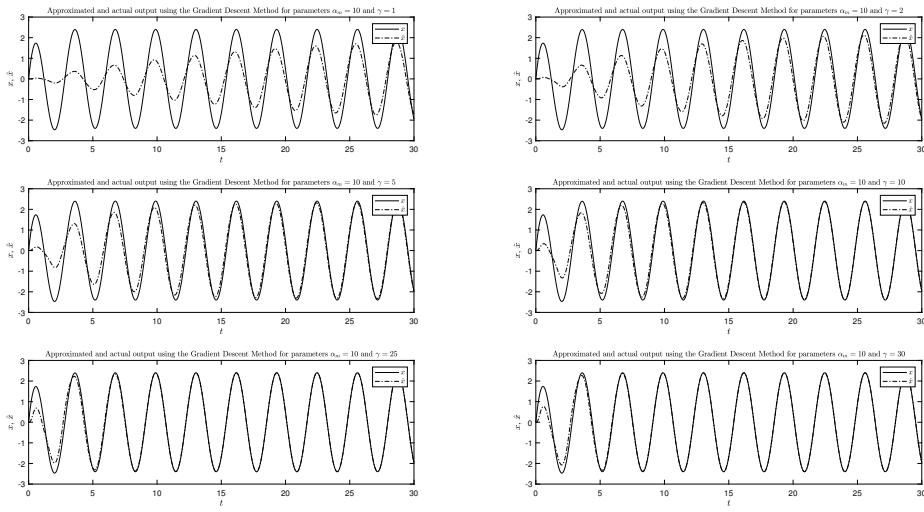


Σχήμα 1.17: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 3$

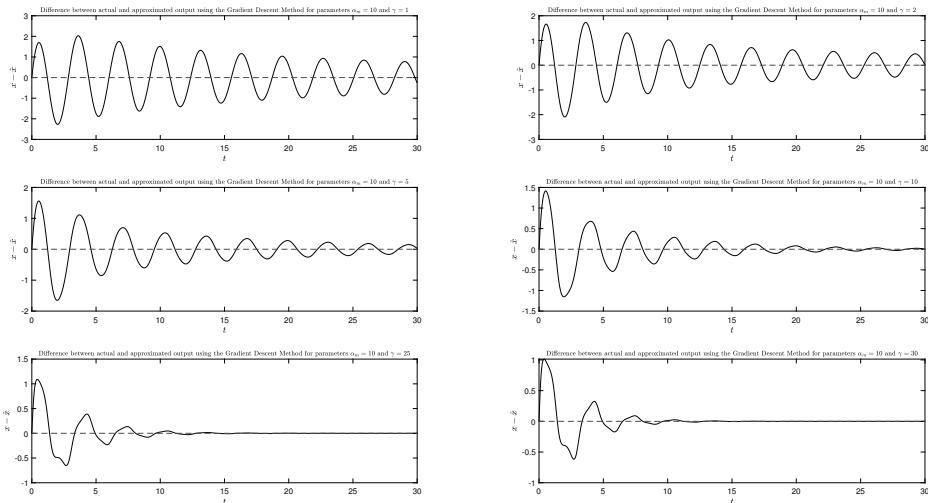


Σχήμα 1.18: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και β για $\alpha_m = 3$

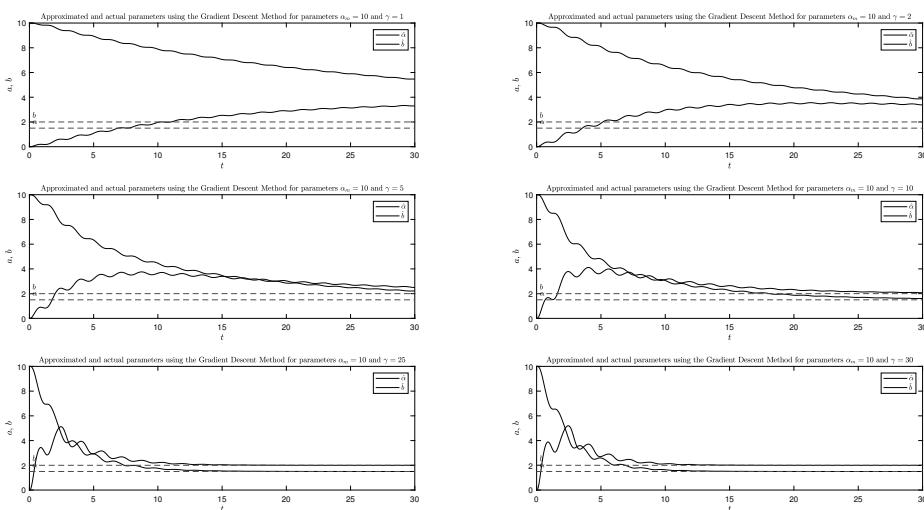
Από τα σχήματα (1.16), (1.17) και (1.18) φαίνεται πως η αύξηση του γ ελαττώνει και το αρχικό σφάλμα εκτίμησης, αλλά και τον χρόνο σύγκλισης της εκτίμησης της εξόδου και των παραμέτρων.



Σχήμα 1.19: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εξόδου ται της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 10$

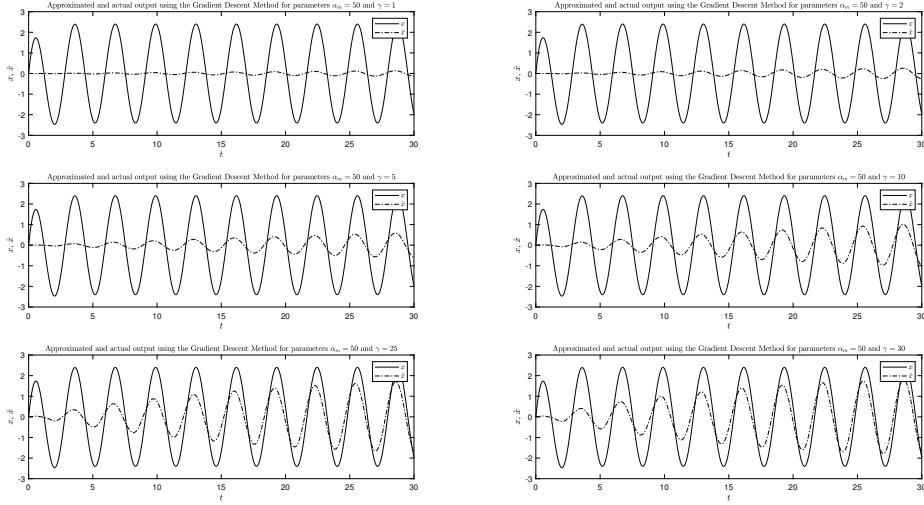


Σχήμα 1.20: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 10$

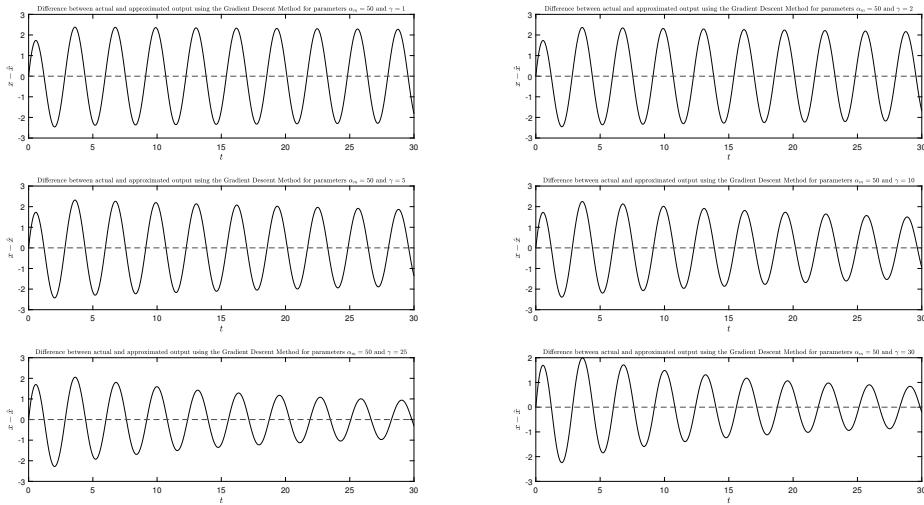


Σχήμα 1.21: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και b για $\alpha_m = 10$

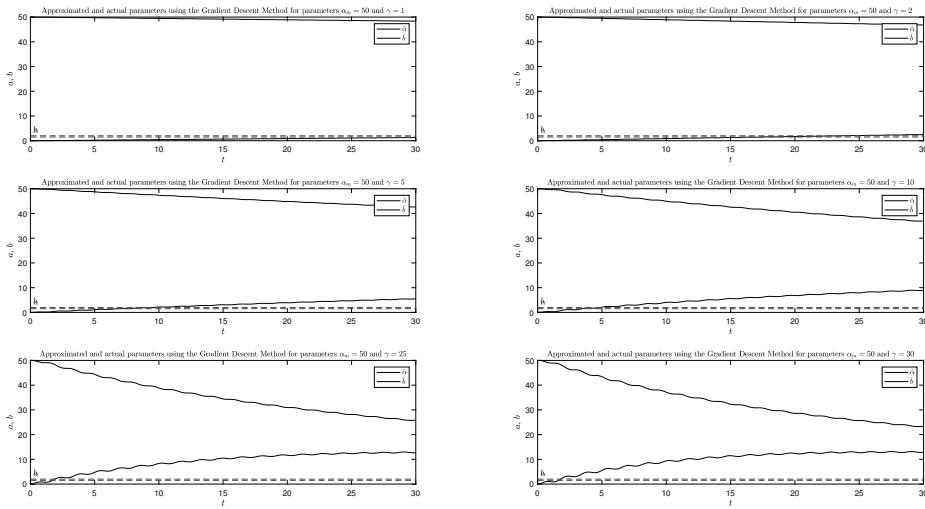
Παρατηρώντας τα σχήματα (1.19), (1.20) και (1.21), διαπιστώνεται πως η αύξηση του α_m αυξάνει το σφάλμα εκτίμησης, αλλά η αύξηση του γ το περιορίζει. Αυτό είναι ακόμα πιο προφανές όταν το α_m είναι ακόμα μεγαλύτερο:



Σχήμα 1.22: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εξόδου των εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 50$



Σχήμα 1.23: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\alpha_m = 50$



Σχήμα 1.24: Θέμα 1 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και β για $\alpha_m = 50$

1.5 Σύγκριση

Πρώτον, είναι προφανές, ότι η έξοδος του συστήματος επηρεάζεται και παίρνει τη μορφή της εισόδου. Από τα ευρήματα για την περίπτωση που η είσοδος είναι σταθερή $u = 3$ (1.3) και ημιτονοειδής $u = 3\cos(2t)$ (1.4) παρατηρείται ότι η σωστή επιλογή των α_m και γ είναι πολύ σημαντική στην ακριβέστερη εκτίμηση της εξόδου και των παραμέτρων α και β . Συγκεκριμένα, οι τιμές του α_m πρέπει να είναι μικρές, ενώ οι τιμές του γ πρέπει να είναι μεγαλύτερες. Ωστόσο, οι καλύτερες τιμές των α_m και γ για την εκτίμηση της εξόδου, δεν συμπίπτουν με αυτές για την εκτίμηση των παραμέτρων, αλλά όσο αφορά το γενικό σφάλμα εκτίμησης του συστήματος (πολλαπλασιασμός των μεμονωμένων σφαλμάτων εκτίμησης), η προτιμότερη επιλογή είναι αυτή που ελαχιστοποεί το σφάλμα εκτίμησης εξόδου, καθώς το σφάλμα εκτίμησης εξόδου έχει την μικρότερη τιμή. Τέλος, στην περίπτωση που $u = 3$, η εκτίμηση των παραμέτρων είναι πιο ανακριβής από ότι στην περίπτωση που $u = 3\cos(2t)$.

2 Θέμα 2

Στο δεύτερο θέμα της εργαστηριακής άσκησης ζητήθηκε να σχεδιαστεί ένας online εκτιμητής παραμέτρων i) παράλληλης δομής ii) μικτής δομής βασισμένος στην Μέθοδο Lyapunov, για το σύστημα 1.1

2.1 Μαθηματική Ανάλυση

Το απλούστερο σύστημα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη Μέθοδο Lyapunov είναι το

$$\dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u, \quad x(0) = 0, \quad \theta_1^* > 0, \quad \theta_2^* \neq 0 \quad (2.1)$$

Για το θ_1^* πρέπει να ισχύει ότι $\theta_1^* > 0$ για την διασφάλιση της ευστάθειας του συστήματος και το θ_2^* πρέπει να είναι διάφορο του μηδενός ώστε η είσοδος να μην είναι μηδενική. Επιπλέον, υποτίθεται ότι $u \in L_\infty$, ώστε σε συνδυασμό με την υπόθεση ότι $\theta_1^* > 0$, η διαφορική εξίσωση (2.1) θα έχει ομοιόμορφα φραγμένη έξοδο $x \in L_\infty$.

2.1.1 Παράλληλη Δομή Μεθόδου Lyapunov (Parallel Configuration)

Η παράλληλη δομή της Μεθόδου Lyapunov χρησιμοποιεί αποκλειστικά σήματα που παράγονται από το σύστημα αναγνώρισης και περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (2.2)$$

Όπου στην προκειμένη περίπτωση ισχύει ότι $\hat{x}_0 = 0$. Για το σφάλμα ισχύει:

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} \xrightarrow{d/dt} \\ \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= -\theta_1^* x + \theta_2^* u + \underbrace{\hat{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u}_{\hat{x}} \\ &= -\theta_1^* x + +\hat{\theta}_1 \hat{x} - \underbrace{\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2^*\right)}_{\tilde{\theta}_2} u \xrightarrow{\pm \theta_1^* x} \\ \dot{e} &= -\theta_1^* \underbrace{(x - \hat{x})}_{e} + \underbrace{\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1^*\right)}_{\tilde{\theta}_1} \hat{x} - \underbrace{\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2^*\right)}_{\tilde{\theta}_2} u \\ &= -\theta_1^* e + \tilde{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u \end{aligned} \quad (2.3)$$

Επιλέγεται η συνάρτηση Lyapunov:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_2^2 \xrightarrow{d/dt} \\ \dot{V} &= e \dot{e} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 \\ &= -\theta_1^* e^2 + \tilde{\theta}_1 e \hat{x} - \tilde{\theta}_2 e u + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Θέτοντας:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 &= -\tilde{\theta}_1 e \hat{x} \Rightarrow \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x}, \quad \gamma_1 > 0, \quad \hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_{1_0} \\ \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2 &= \tilde{\theta}_2 e u \Rightarrow \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, \quad \gamma_2 > 0, \quad \hat{\theta}_2(0) = \hat{\theta}_{2_0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

H (2.4) γίνεται:

$$\dot{V} = -\theta_1^* e^2 \leq 0 \quad (2.6)$$

Είναι προφανές ότι $V > 0 \forall e, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \in \mathfrak{R}$ και $V = 0$ ανν $\begin{pmatrix} e & \tilde{\theta}_1 & \tilde{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Επιπλέον, η V είναι μη-ακτινικά φραγμένη, που σημαίνει ότι:

$$\lim_{e, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \rightarrow \infty} V = \infty \quad (2.7)$$

Επομένως, επειδή $\dot{V} \leq 0$, $e, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \in L_\infty$. Επιπλέον, επειδή $\dot{V} \leq 0$ και $V \geq 0$, η V είναι φθίνουσα, με αποτέλεσμα

$$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} V = V_\infty \quad (2.8)$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέρη της (2.6) προκύπτει:

$$\theta_1^* \int_0^\infty e^2 d\tau = - \int_0^\infty \dot{V} d\tau = -[V_\infty - V(0)] \quad (2.9)$$

Συνεπώς, $e \in L_2$. Η αρχική υπόθεση ότι $u \in L_\infty$ οδήγησε στο $x \in L_\infty$. Επειδή $e = x - \hat{x} \in L_\infty$, συνεπάγεται ότι $\hat{x} \in L_\infty$. Από την (2.3) συμπεραίνεται ότι $\dot{e} \in L_\infty$, αφού το \dot{e} είναι άθροισμα ομοιόμορφα φραγμένων σημάτων. Με χρήση του Λήμματος Barbalat:

$$\left. \begin{array}{l} e \in L_2 \cap L_\infty \\ \dot{e} \in L_\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (2.10)$$

Επίσης:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\theta}}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\theta}}_2 = 0 \quad (2.11)$$

Ως γινόμενο ομοιόμορφα φραγμένης συνάρτησης με συνάρτηση που έχει όριο στο μηδέν.

2.1.2 Μεικτή Δομή Μεθόδου Lyapunov (Mixed Method)

Το σύστημα πο χρησιμοποιείται για την μεικτή δομή είναι το:

$$\dot{x} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u - \theta_m(x - \hat{x}), \quad x(\hat{0}) = \hat{x}_0 \quad (2.12)$$

Όπου στην προκειμένη περίπτωση ισχύει ότι $\hat{x}_0 = 0$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και στο (2.1.1):

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} \xrightarrow{d/dt} \\ \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= \theta_m \underbrace{(x - \hat{x})}_e + \underbrace{(\hat{\theta}_1 - \theta_1^*)}_\theta x - \underbrace{(\hat{\theta}_2 - \theta_2^*)}_\theta u \\ \dot{e} &= \theta_m e + \tilde{\theta}_1 x - \tilde{\theta}_2 u \end{aligned} \quad (2.13)$$

Επιλέγεται η συνάρτηση Lyapunov:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 \xrightarrow{d/dt} \\ \dot{V} &= e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2 \\ &= -\theta_m e^2 + \tilde{\theta}_1 ex - \tilde{\theta}_2 eu + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Θέτοντας:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 &= -\tilde{\theta}_1 ex \Rightarrow \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 ex, \quad \gamma_1 > 0, \quad \hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_{1_0} \\ \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2 &= \tilde{\theta}_2 eu \Rightarrow \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 eu, \quad \gamma_2 > 0, \quad \hat{\theta}_2(0) = \hat{\theta}_{2_0} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Η (2.14) γίνεται:

$$\dot{V} = -\theta_m e^2 \leq 0 \quad (2.16)$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με την περίπτωση της παράλληλης δομής (2.1.1), βγαίνουν τα ίδια συμπεράσματα και σε αυτή την περίπτωση.

2.2 Υλοποίηση Στο MATLAB

2.2.1 Παράλληλη Δομή Μεθόδου Lyapunov (Parallel Configuration)

Για την υλοποίηση της Παράλληλης Δομής Μεθόδου Lyapunov στο περιβάλλον του MATLAB [1], χρησιμοποιήθηκαν οι συναρτήσεις

- `lyapunov_par_dyn(t, odex, a, b, am, gamma1, gamma2, u, n)`
- `lyapunov_par(t, initialconditions, a, b, gamma1, gamma2 u, n)`

2.2.1.1 Συνάρτηση `lyapunov_par_dyn`

Ακριβώς όπως και η συνάρτηση `gradient_descent_dyn` (1.2.1), η συνάρτηση επιστρέφει ένα 4×1 σύστημα πίνακα με στοιχεία \dot{x} (2.1), τα $\dot{\hat{\theta}}_1$ και $\dot{\hat{\theta}}_2$ (2.5) και το \dot{x} (2.3). Σε αυτή την περίπτωση προστίθεται και ο όρος του θορύβου στο σφάλμα.

2.2.1.2 Συνάρτηση `lyapunov_par`

Αντίστοιχα, όπως η συνάρτηση `gradient_descent` (1.2.2), μέσω της συνάρτησης `ode45` επιστρέφει το struct data που περιέχει τις τιμές των x , $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$, \hat{a} , \hat{b} και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης των x , a και b .

2.2.2 Μεικτή Δομή Μεθόδου Lyapunov (Mixed)

Όπως και για την Παράλληλη Δομή (2.2.1) χρησιμοποιήθηκαν οι αντίστοιχες συναρτήσεις:

- lyapunov_mixed_dyn(t, odex, a, b, am, gamma, u, n)
- lyapunov_mixed(t, initialconditions, a, b, am, gamma, u, n)

2.2.2.1 Συνάρτηση lyapunov_mixed_dyn

Η συγκεκριμένη συνάρτηση δουλεύει ακριβώς όπως και η Συνάρτηση lyapunov_par_dyn (2.2.1.1), με τη διαφορά ότι επιστρέφει τα $\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \right]$ της (2.15) και το \dot{x} της (2.12).

2.2.2.2 Συνάρτηση lyapunov_mixed

Αυτή η συνάρτηση είναι πανομοιότυπη με την lyapunov_par (2.2.1.2).

2.3 Προσομοίωση Με Αρχικές Τιμές Θορύβου

Στο σφάλμα προστίθεται και ο εξωτερικός θόρυβος $n(t)$

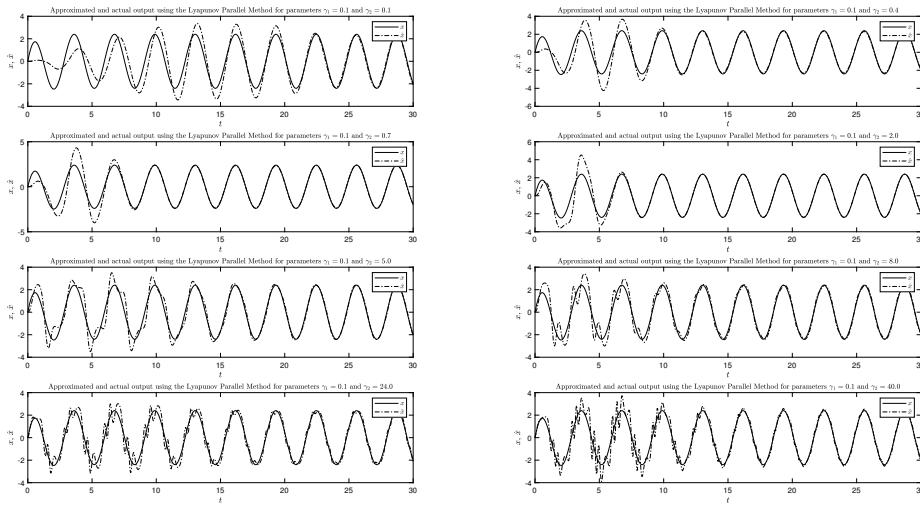
$$e = x - \hat{x} + n(t) \Leftrightarrow e = x - \hat{x} + n_0 \sin(2\pi f t) \quad (2.17)$$

Όπου στην συγκεκριμένη περίπτωση το πλάτος του θορύβου είναι $n_0 = 1.5$ και η συχνότητα $f = 20 \text{ Hz}$.

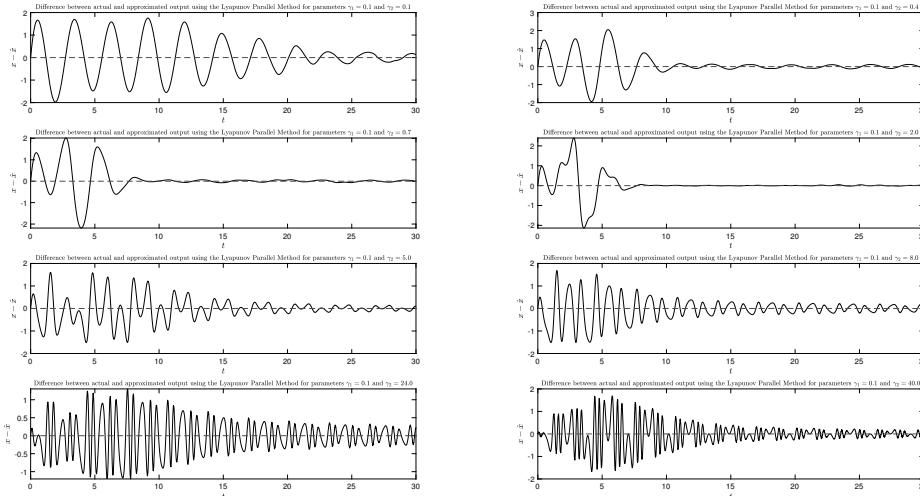
2.3.1 Παράλληλη Δομή Μεθόδου Lyapunov

Όπως και στο Θέμα 1, για την καλύτερη επιλογή των γ_1 και γ_2 , γίνονται 64 προσομοιώσεις, για 8 διαφορετικές τιμές του γ_1 και άλλες 8 του γ_2 . Όλες οι γραφικές παραστάσεις βρίσκονται στον φάκελο lyapunov\lyapunov-mixed\mixed\figures\def-noise\suboptimal. Οι γραφικές παραστάσεις της εξόδου βρίσκονται στον φάκελο xxhat, οι διαφορά μεταξύ τους στον φάκελο xdiff και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων \hat{a} και \hat{b} στον φάκελο ab. Εντός των φακέλων υπάρχουν δύο ακόμα φάκελοι με ονόματα svg και eps, για διαφορετικούς τύπους αρχείων.

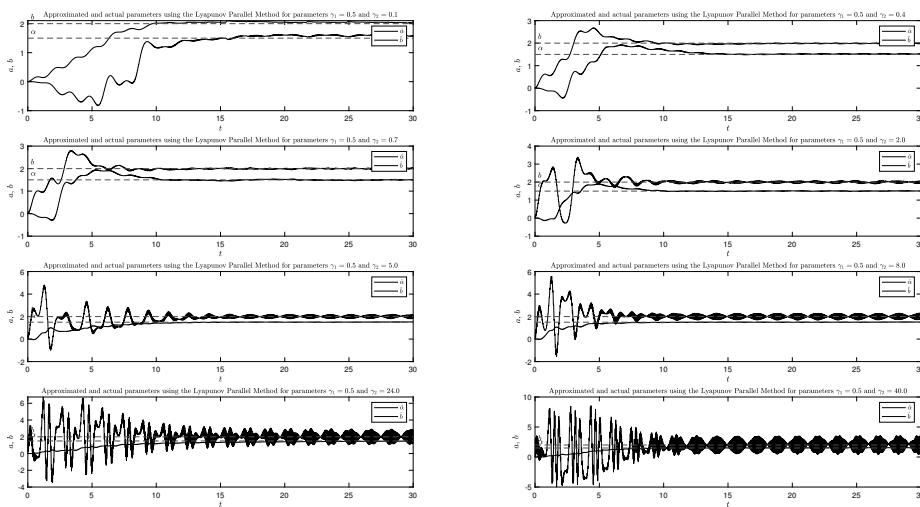
Παρατίθενται μερικές από τις γραφικές παραστάσεις:



Σχήμα 2.1: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 0.1$

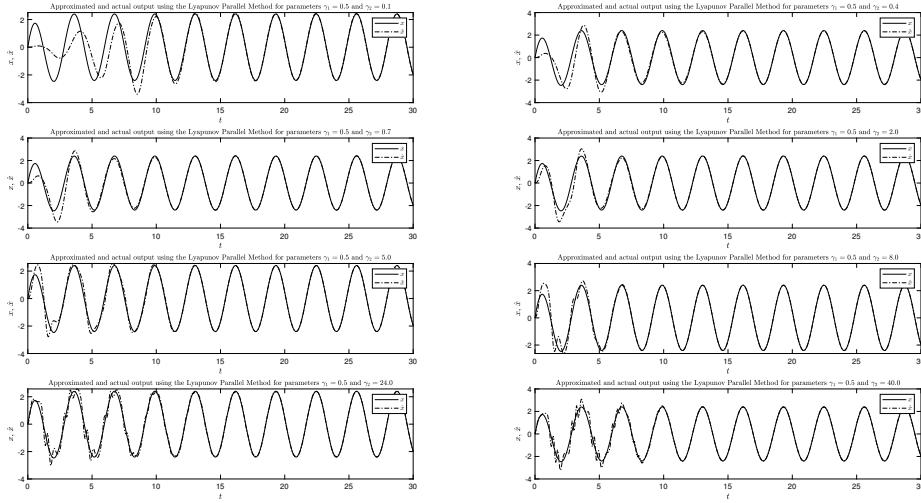


Σχήμα 2.2: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 0.1$

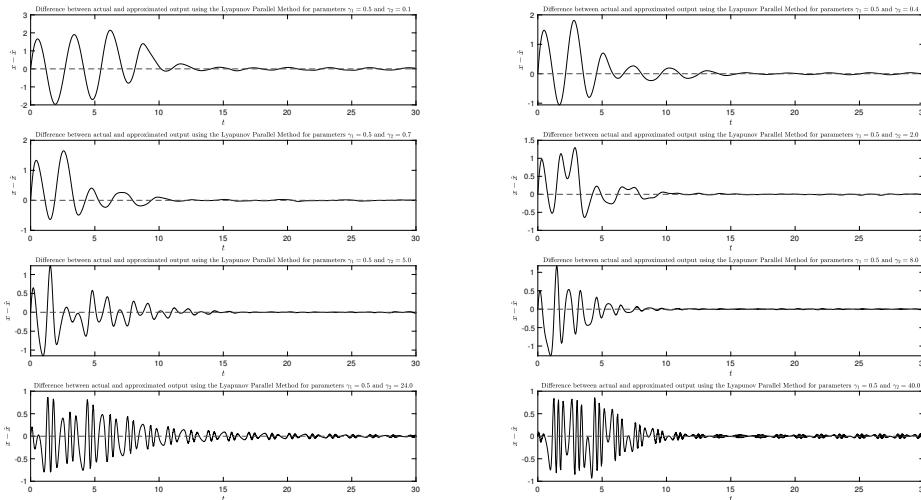


Σχήμα 2.3: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων a και b για $\gamma_1 = 0.1$

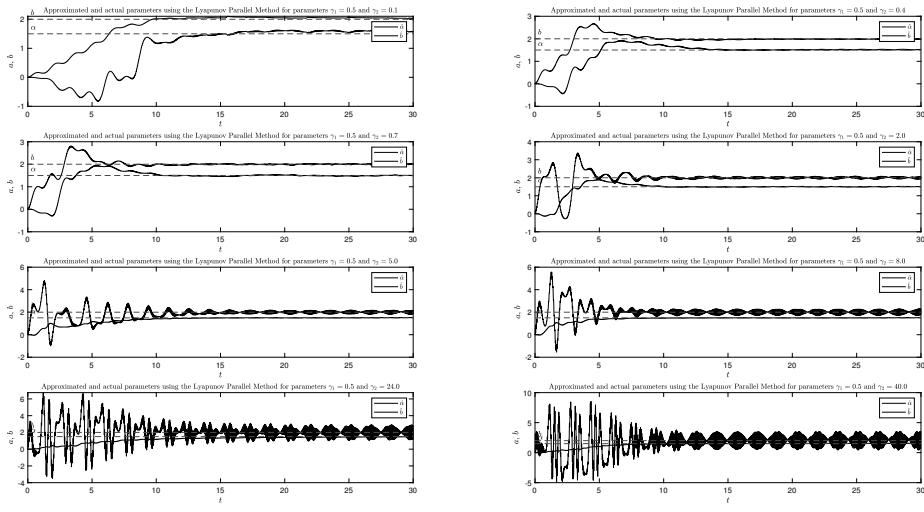
Από τα σχήματα (2.1), (2.3) και (2.2) παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται η τιμή του γ_2 , το πλάτος του σφάλματος ελαττώνεται, αλλά παράλληλα δημιουργούνται μεγαλύτερες ανακρίβειες στην αρχή της προσομοίωσης. Επίσης, όσο αφορά τις εκτιμήσεις των a και b , με την αύξηση του γ_2 , η εκτίμηση ποτέ δε συγχλίνει προς την πραγματική τιμή τους.



Σχήμα 2.4: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 0.5$

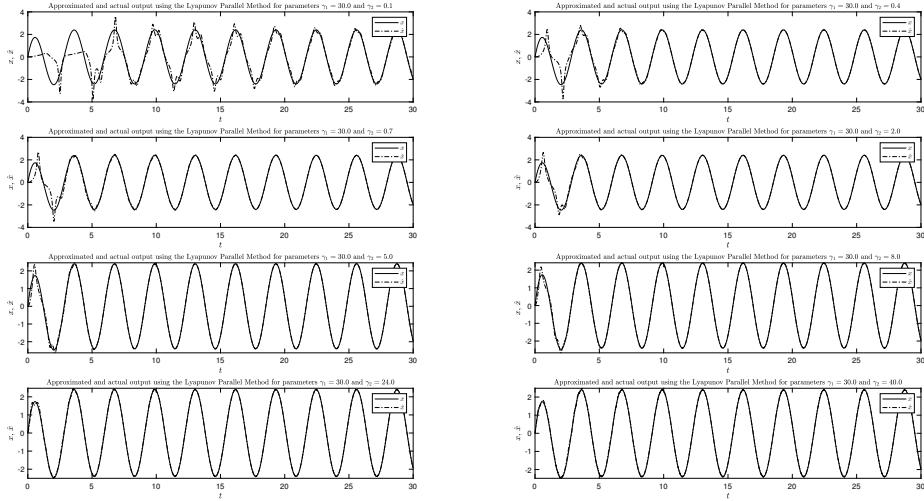


Σχήμα 2.5: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 0.5$

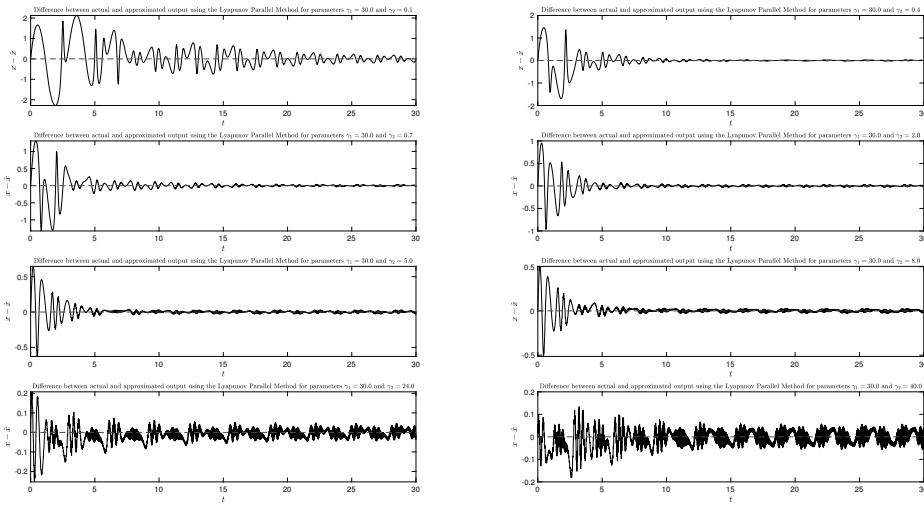


Σχήμα 2.6: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων a και b για $\gamma_1 = 0.5$

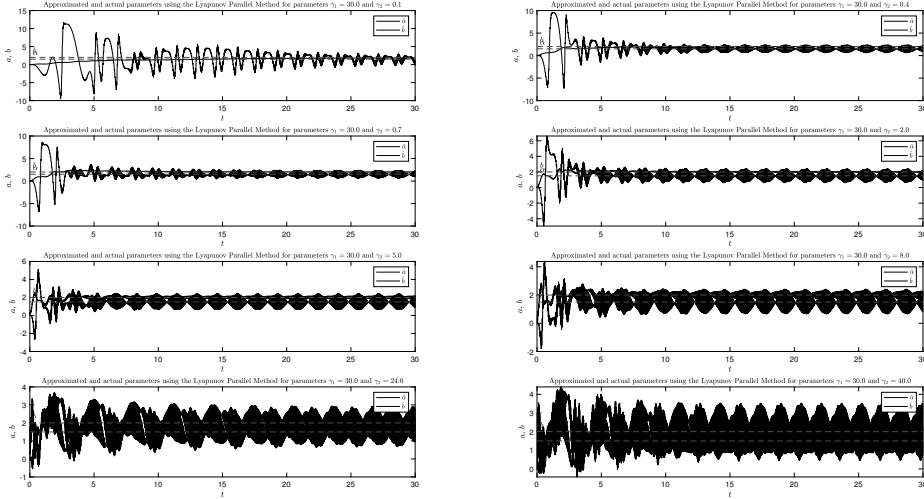
Από τα σχήματα (2.4), (2.6) και (2.5) φαίνεται πως η αύξηση του γ_1 , σε συνδυασμό με την αύξηση του γ_2 , ελαττώνουν το πλάτος του σφάλματος και δημιουργούν ταλαντώσεις στην εκτίμηση των παραμέτρων a και b . Αυτό γίνεται ακόμα πιο προφανές αν αυξηθούν πολύ και το γ_1 και το γ_2 .



Σχήμα 2.7: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 30$



Σχήμα 2.8: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 30$



Σχήμα 2.9: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και β για $\gamma_1 = 30$

Τρέχοντας το πρόγραμμα lyapunov_parallel_def_noise.m, οι καλύτερες επιλογές για τα γ_1 και γ_2 είναι:

	$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}))$	$\min(\text{MSE}(a - \hat{a}))$	$\min(\text{MSE}(b - \hat{b}))$	$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}) \cdot \text{MSE}(a - \hat{a}) \cdot \text{MSE}(b - \hat{b}))$
γ_1	30	1	30	10
γ_2	40	8	5	24

Πίνακας 1: Θέμα 2 - Βέλτιστη Επιλογή Των Συντελεστών Για Ελαχιστοποίηση Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος
 $(n(t) = 1.5\sin(2\pi 20t))$, (Παράλληλη Δομή)

Τρέχοντας μετά το πρόγραμμα lyapunov_parallel_no_noise.m, οι καλύτερες επιλογές των γ_1 και γ_2 είναι οι ίδιες, με διαφορά για την περίπτωση του γενικού σφάλματος, όπου στην περίπτωση που δεν υπάρχει θόρυβος, η καλύτερη επιλογή είναι $\gamma_1 = 30$, $\gamma_2 = 24$. Οι γραφικές παραστάσεις για την περίπτωση που δεν εισάγεται θόρυβος στο σύστημα βρίσκονται στο φάκελο figures\no-noise.

2.3.2 Μεικτή Δομή Μεθόδου Lyapunov

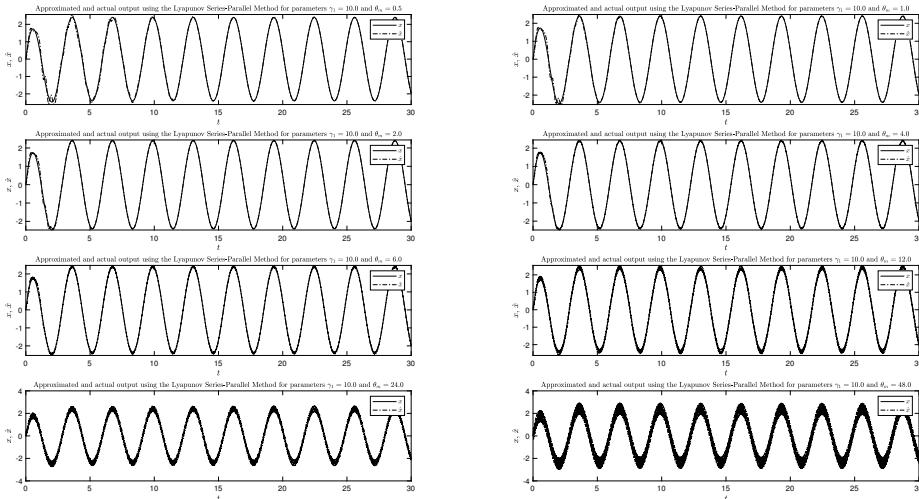
Για να αποφευχθεί περισσότερος χρόνος εκτέλεσης των προγραμάτων, χρησιμοποιήθηκε το αρχείο lyapunov_mixed_find_optimal.m, μέσω του οποίου, για τις ίδιες πιθανές επιλογές των γ_1 και γ_2 , αλλά και με επιλογές για την τιμή του θ_m , συγχρίνονται τα σφάλματα χωρίς θόρυβο.

	$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}))$	$\min(\text{MSE}(a - \hat{a}))$	$\min(\text{MSE}(b - \hat{b}))$	$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}) \cdot \text{MSE}(a - \hat{a}) \cdot \text{MSE}(b - \hat{b}))$
γ_1	30	30	5	30
γ_2	40	40	8	40
θ_m	48	12	4	24

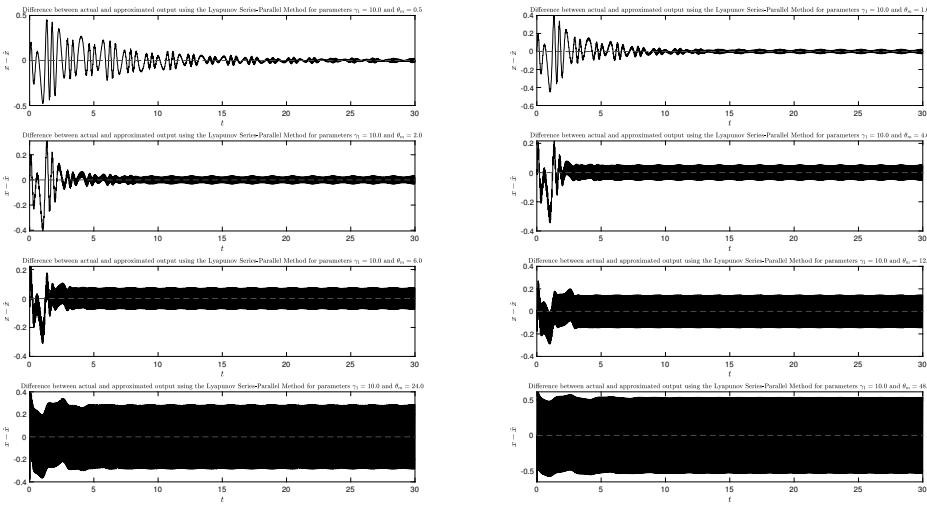
Πίνακας 2: Θέμα 2 - Βέλτιστη Επιλογή Των Συντελεστών Για Ελαχιστοποίηση Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (Χωρίς Θόρυβο), (Μεικτή Δομή)

Αρχικά, σύμφωνα με τα ευρήματα από τον Πίνακα (1), έγινε προσομοίωση για τις τιμές $\gamma_1 = [10 \ 30]$, $\gamma_2 = 24$ και διάφορες τιμές για το θ_m . Όλες οι γραφικές παραστάσεις βρίσκονται στον φάκελο lyapunov\lyapunov-mixed\figures\def-noise\suboptimal. Οι γραφικές παραστάσεις της εξόδου βρίσκονται στον φάκελο xxhat, οι διαφορά μεταξύ τους στον φάκελο xdiff και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων \hat{a} και \hat{b} στον φάκελο ab. Εντός των φακέλων υπάρχουν δύο ακόμα φάκελοι με ονόματα sng και eps, για διαφορετικούς τύπους αρχείων.

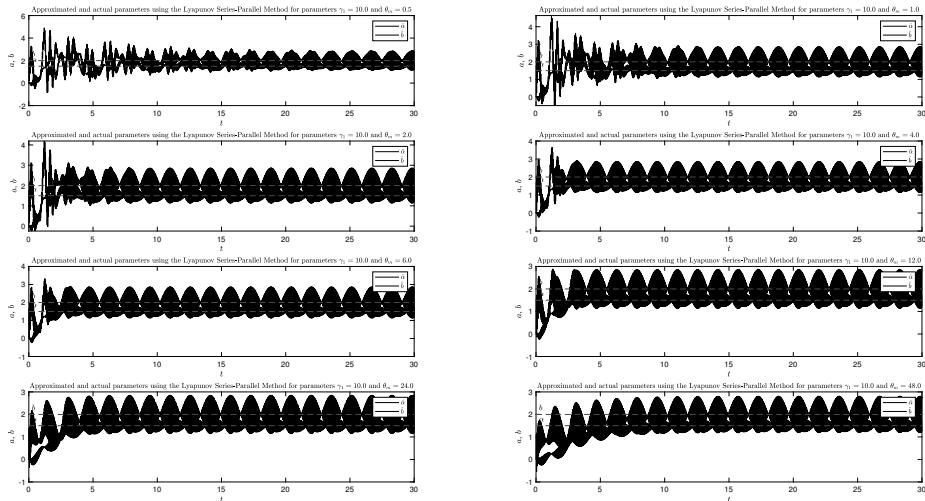
Παρακάτω βρίσκονται οι γραφικές παραστάσεις για κάθε συνδυασμό των γ_1 , γ_2 και θ_m .



Σχήμα 2.10: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 10$

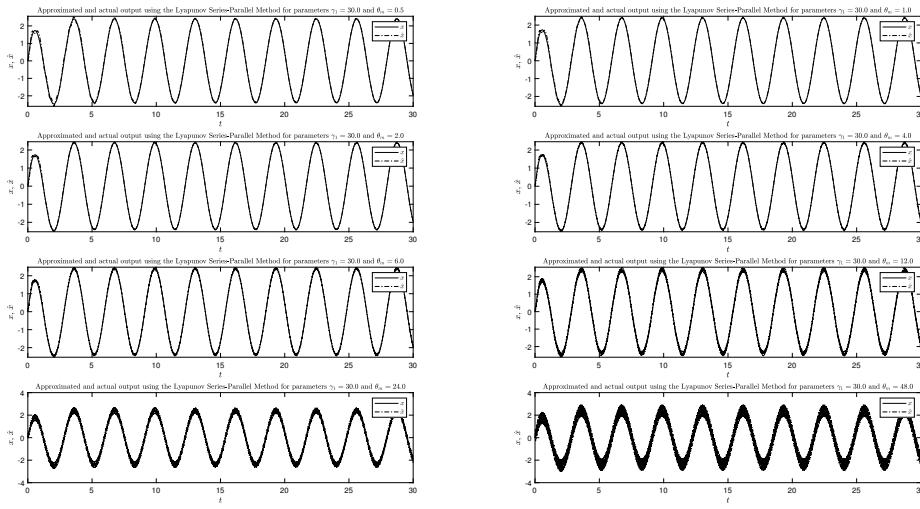


Σχήμα 2.11: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 10$

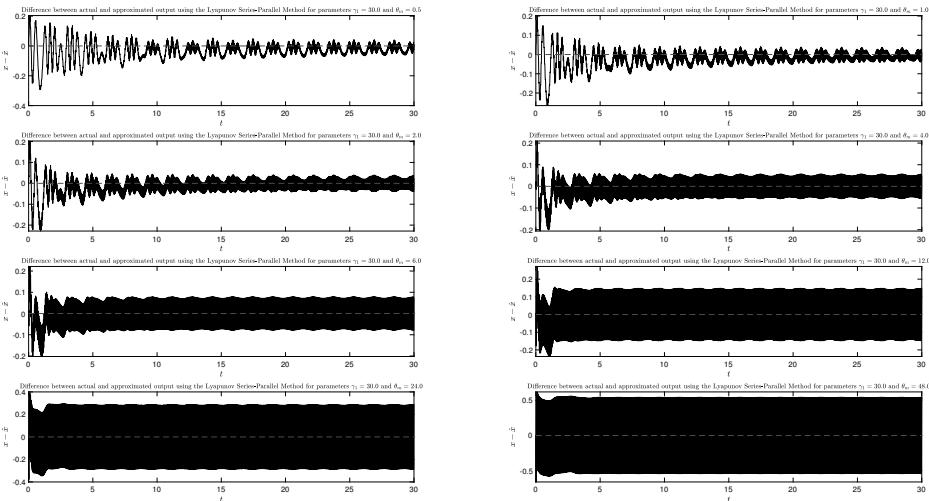


Σχήμα 2.12: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και β για $\gamma_1 = 10$

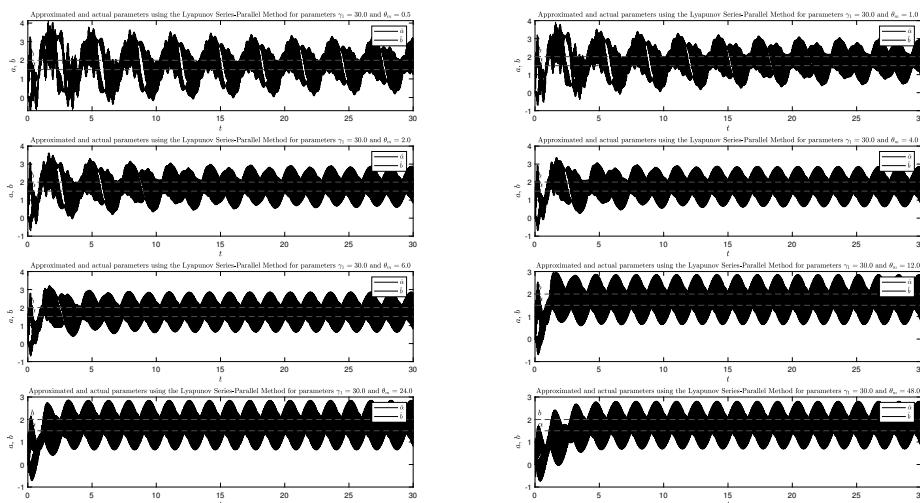
Από τα σχήματα (2.10), (2.12) και (2.11) παρατηρείται ότι με την αύξηση της τιμής του θ_m αρχικά το πλάτος του σφάλματος μειώνεται, αλλά μετά γίνεται μεγαλύτερο. Για την περίπτωση που $\gamma_1 = 30$:



Σχήμα 2.13: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 30$



Σχήμα 2.14: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 30$



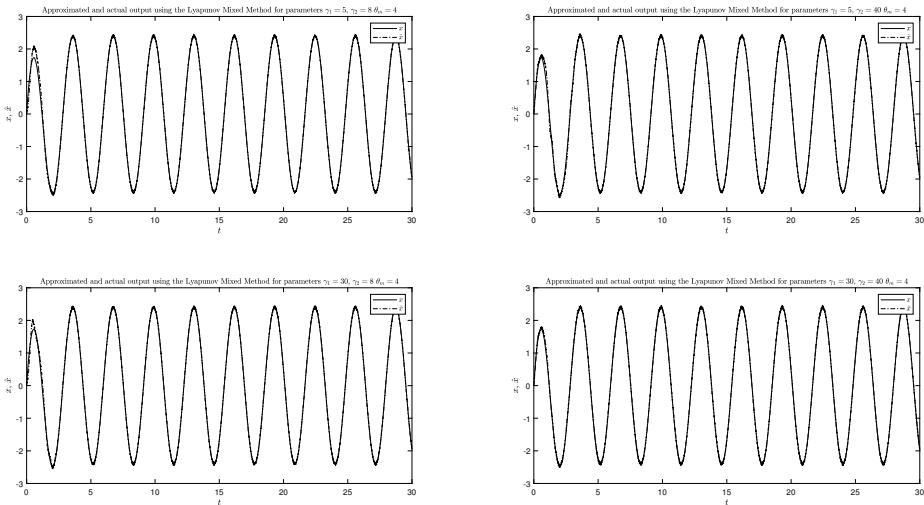
Σχήμα 2.15: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και b για $\gamma_1 = 30$

Τα σχήματα (2.13), (2.15) και (2.14) είναι σχεδόν ίδια με τα (2.10), (2.12) και (2.11). Η διαφορά μεταξύ των τιμών του γ_1 φαίνεται μόνο αν συγκριθούν τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα. Μέσω του lyapunov_mixed_def_noise, οι προτιμότερες τιμές των συντελεστών για την ελαχιστοποίηση των μέσων τετραγωνικών σφαλμάτων είναι για την αρχική προσομοίωση:

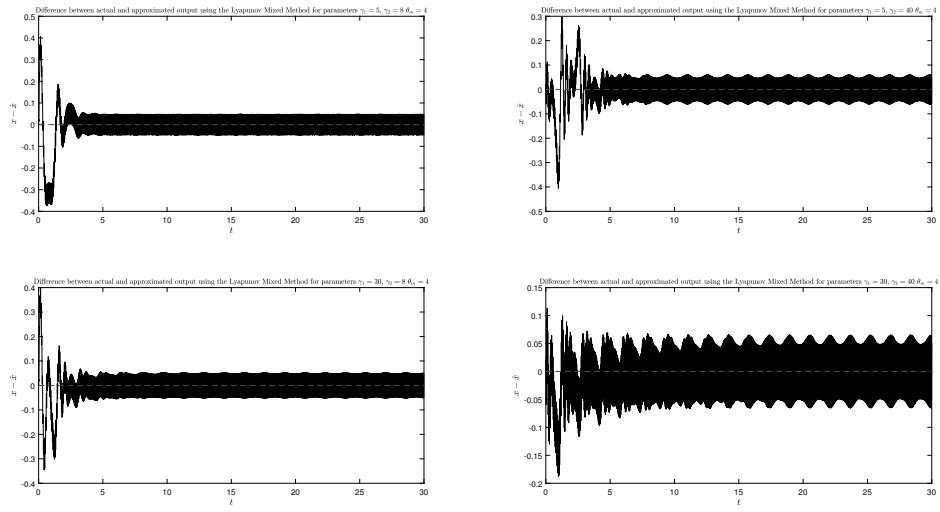
	$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}))$	$\min(\text{MSE}(a - \hat{a}))$	$\min(\text{MSE}(b - \hat{b}))$	$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}) \cdot \text{MSE}(a - \hat{a}) \cdot \text{MSE}(b - \hat{b}))$
γ_1	30	10	30	10
θ_m	2	4	12	4

Πίνακας 3: Θέμα 2 - Βέλτιστη Επιλογή Των Συντελεστών Για Ελαχιστοποίηση Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος
($n(t) = 1.5\sin(2\pi 20t)$), (Μεικτή Δομή)

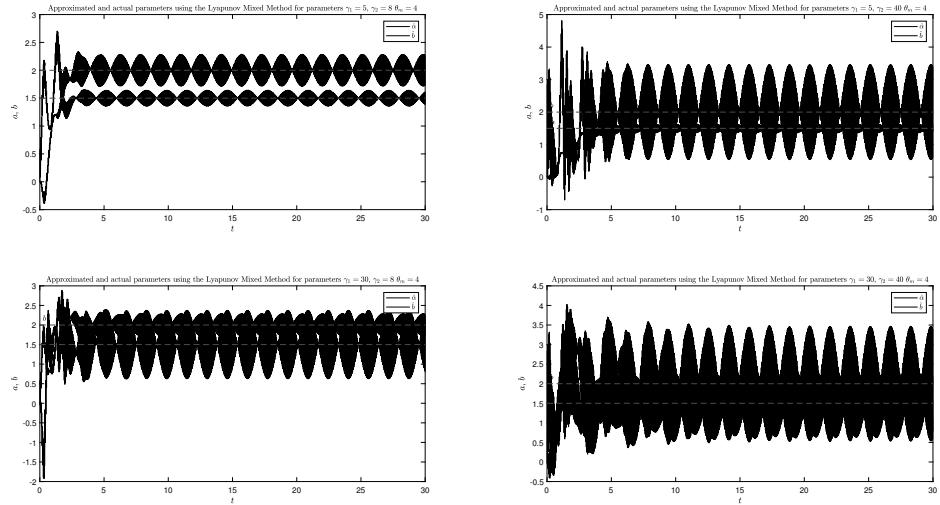
Σύμφωνα με τα ευρήματα του Πίνακα (2), για τις βέλτιστες τιμές των συντελεστών, επαναλήφθηκε η προσομοίωση, οι γραφικές παραστάσεις της οποίας βρίσκονται στον φάκελο figures\def-noise\optimal. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την υλοποίηση των γραφικών παραστάσεων βρίσκεται στο αρχείο lyapunov_mixed_def_noise_optimal.



Σχήμα 2.16: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\theta_m = 4$

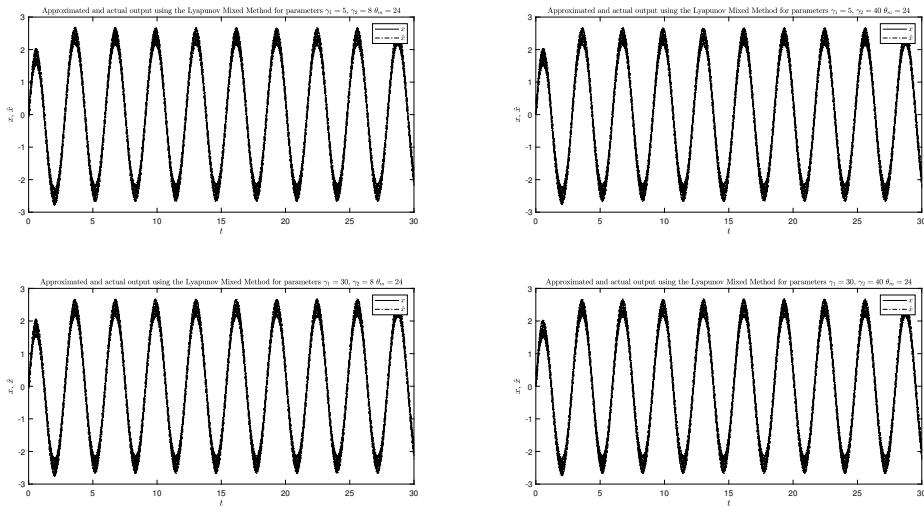


Σχήμα 2.17: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\theta_m = 4$

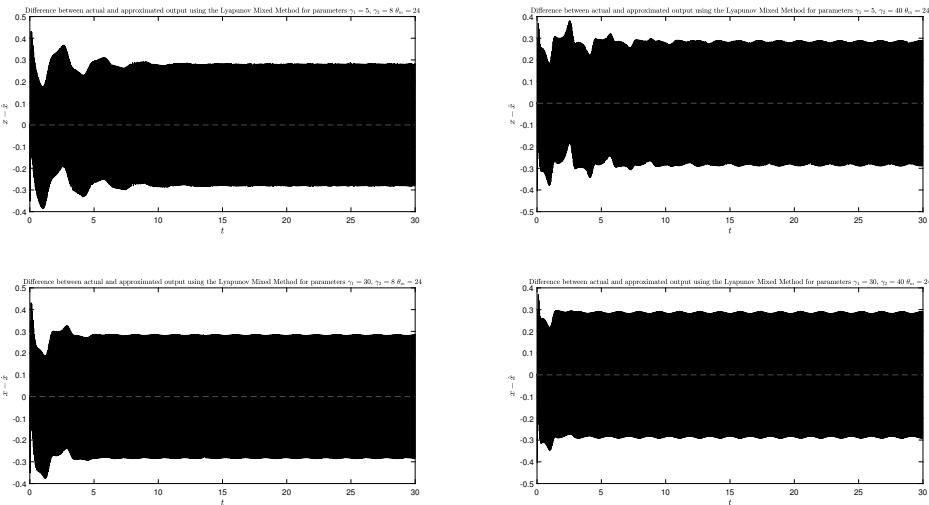


Σχήμα 2.18: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και b για $\theta_m = 4$

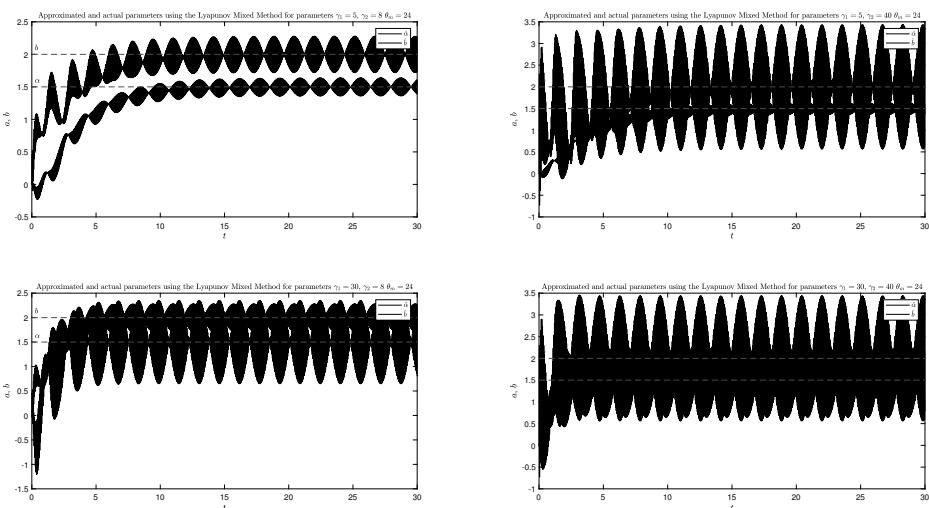
Από τα σχήματα (2.16), (2.17) και (2.18) φαίνεται πως η αύξηση των γ_1 και γ_2 προκαλεί απόχλιση στην εκτίμηση των παραμέτρων α και b , αλλά μειώνει δραματικά το σφάλμα της εξόδου.



Σχήμα 2.19: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\theta_m = 24$



Σχήμα 2.20: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\theta_m = 24$



Σχήμα 2.21: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και b για $\theta_m = 24$

Παρατηρώντας τα σχήματα (2.19), (2.20) και (2.21) και συγκρίνοντάς τα με τα (2.16), (2.17) και (2.18), είναι προφανές πως η αύξηση του θ_m αυξάνει τον χρόνο σύγκλισης της εκτίμησης των παραμέτρων, καθώς και αυξάνει το σφάλμα εκτίμησης της εξόδου. Για τις βέλτιστες τιμές των συντελεστών ισχύει:

	$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}))$	$\min(\text{MSE}(a - \hat{a}))$	$\min(\text{MSE}(b - \hat{b}))$	$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}) \cdot \text{MSE}(a - \hat{a}) \cdot \text{MSE}(b - \hat{b}))$
γ_1	30	5	5	5
γ_2	40	8	8	8
θ_m	4	4	4	4

Πίνακας 4: Θέμα 2 - Βέλτιστη Επιλογή Των Συντελεστών Για Ελαχιστοποίηση Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος
($n(t) = 1.5\sin(2\pi 20t)$), (Μεικτή Δομή)

Συγκρίνοντας τα σφάλματα για την περίπτωση που οι τιμές των γ_1 , γ_2 , θ_m είναι αυτές από τον Πίνακα (4) και για την περίπτωση που οι τιμές είναι αυτές από τον Πίνακα (3):

	Πίνακας 3	Πίνακας 4
$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}))$	$15.673 \cdot 10^{-4}$	$19.342 \cdot 10^{-4}$
$\min(\text{MSE}(a - \hat{a}))$	$7.1882 \cdot 10^{-2}$	$7.0667 \cdot 10^{-2}$
$\min(\text{MSE}(b - \hat{b}))$	$2.2536 \cdot 10^{-1}$	$4.9848 \cdot 10^{-2}$
$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}) \cdot \text{MSE}(a - \hat{a}) \cdot \text{MSE}(b - \hat{b}))$	$4.3758 \cdot 10^{-5}$	$1.6026 \cdot 10^{-5}$

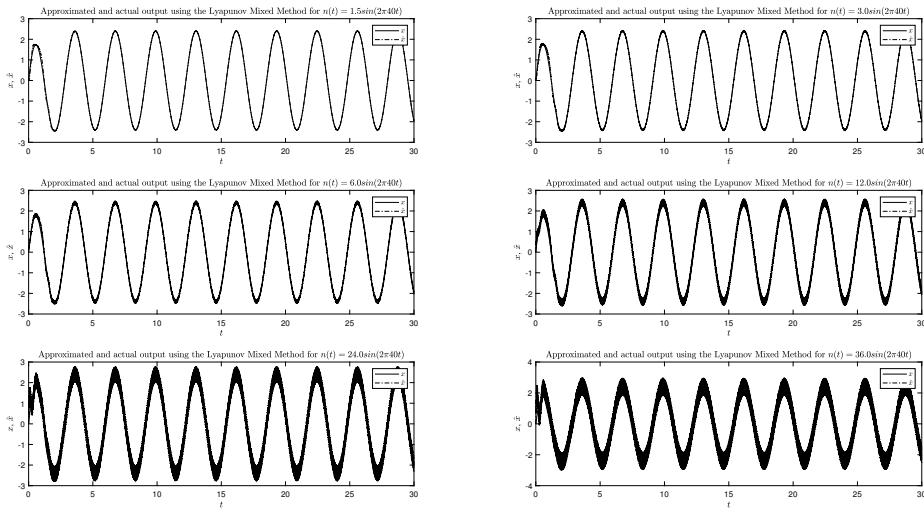
Πίνακας 5: Θέμα 2 - Σύγκριση Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος ($n(t) = 1.5\sin(2\pi 20t)$), (Μεικτή Δομή)

Από τα παραπάνω φαίνεται πως ο θόρυβος επηρεάζει πολύ το σύστημα, καθώς οι προτιμότερες τιμές των συντελεστών χωρίς θόρυβο, δεν είναι απαραίτητα ίδιες με αυτές στην περίπτωση που υπάρχει προσθετικός θόρυβος.

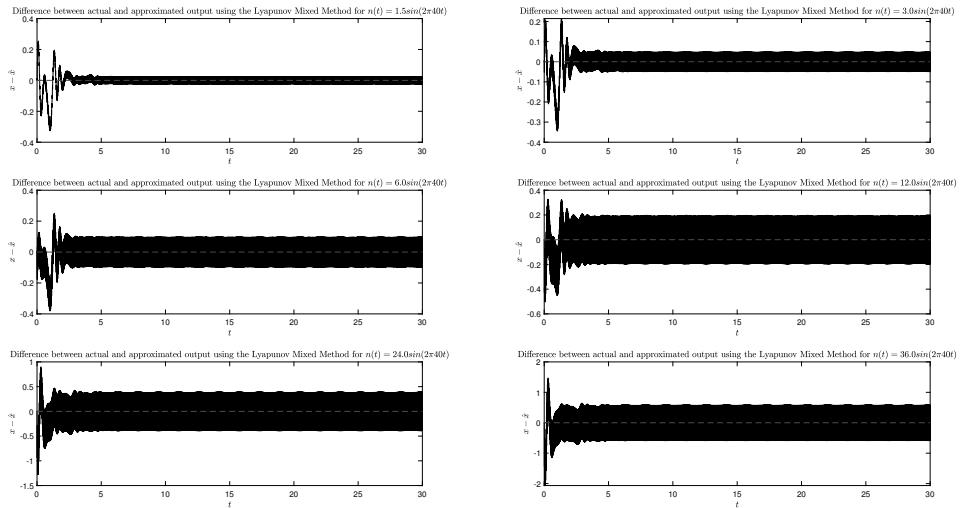
2.4 Προσομοίωση Με Διαφορετικές Τιμές Θορύβου

2.4.1 Παράλληλη Δομή Μεθόδου Lyapunov

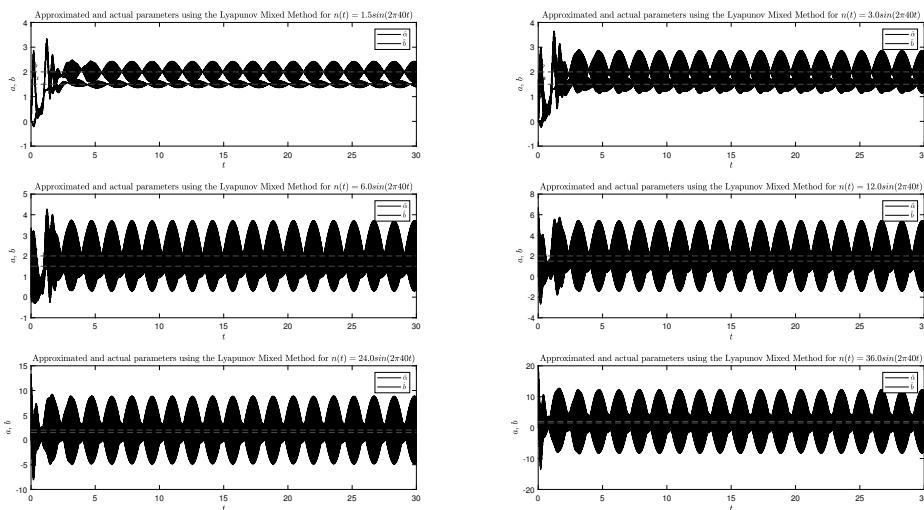
Για $\gamma_1 = 10$ και $\gamma_2 = 24$ και για αυξανόμενες τιμές της συχνότητας και του πλάτους του θορύβου, έγιναν οι γραφικές παραστάσεις στο αρχείο lyapunov_par_more_noise.m. Όλες οι γραφικές παραστάσεις βρίσκονται στον φάκελο lyapunov\lyapunov-parallel\figures\more-noise. Οι γραφικές παραστάσεις της εξόδου βρίσκονται στον φάκελο xxhat, οι διαφορά μεταξύ τους στον φάκελο xdif και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων \hat{a} και \hat{b} στον φάκελο ab. Εντός των φακέλων υπάρχουν δύο ακόμα φάκελοι με ονόματα sng και eps, για διαφορετικούς τύπους αρχείων.



Σχήμα 2.22: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $f = 40Hz$

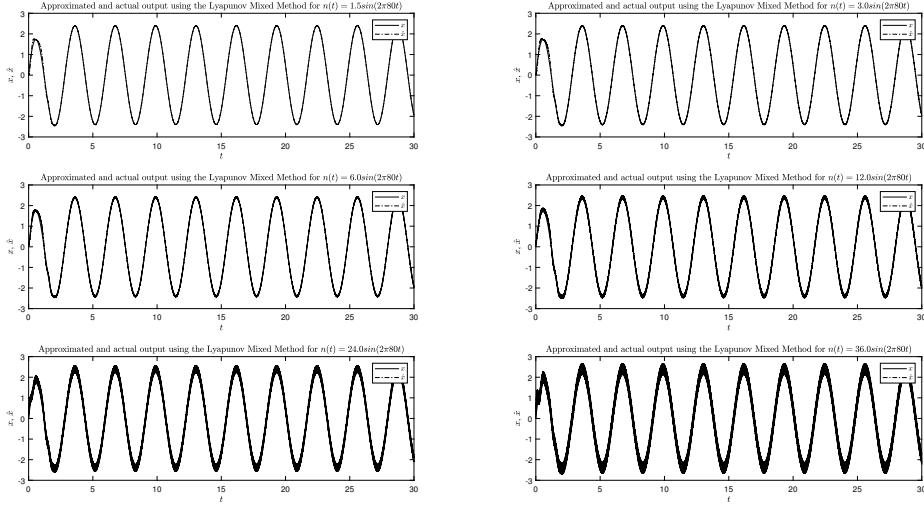


Σχήμα 2.23: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $f = 40Hz$

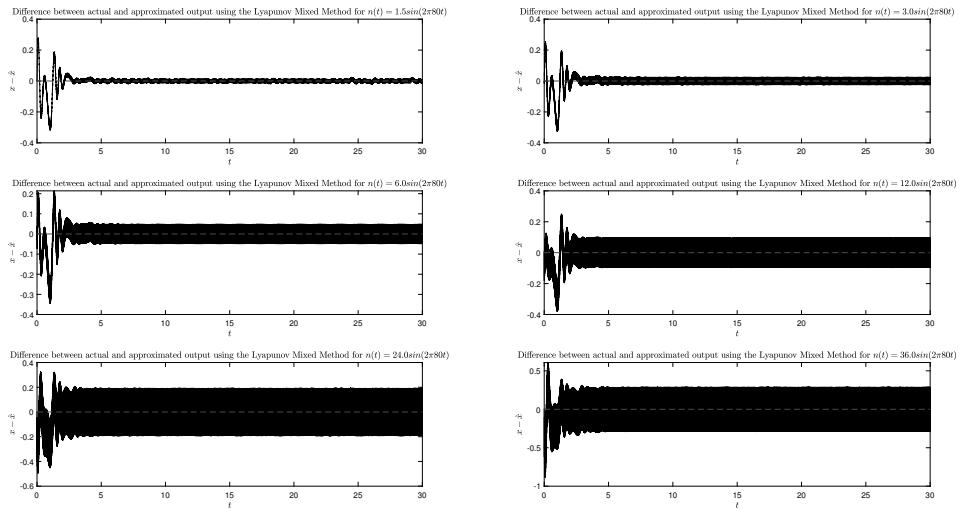


Σχήμα 2.24: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων a και b για $f = 40Hz$

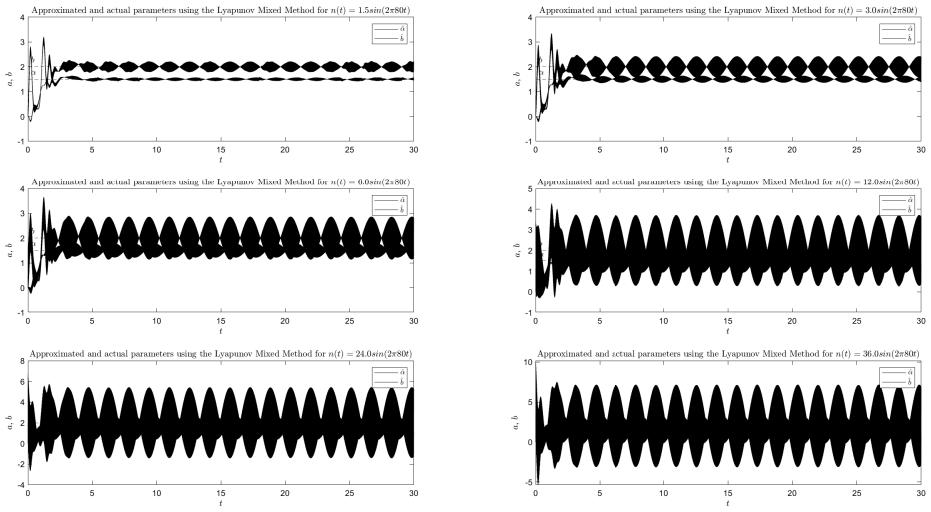
Από τα σχήματα (2.22), (2.24) και (2.23) φαίνεται ότι όσο αυξάνεται το πλάτος, τόσο μεγαλώνει το σφάλμα, κάτι που ήταν αναμενόμενο, γιατί ο θόρυβος είναι προσθετικός στο σφάλμα.



Σχήμα 2.25: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $f = 80Hz$



Σχήμα 2.26: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $f = 80Hz$

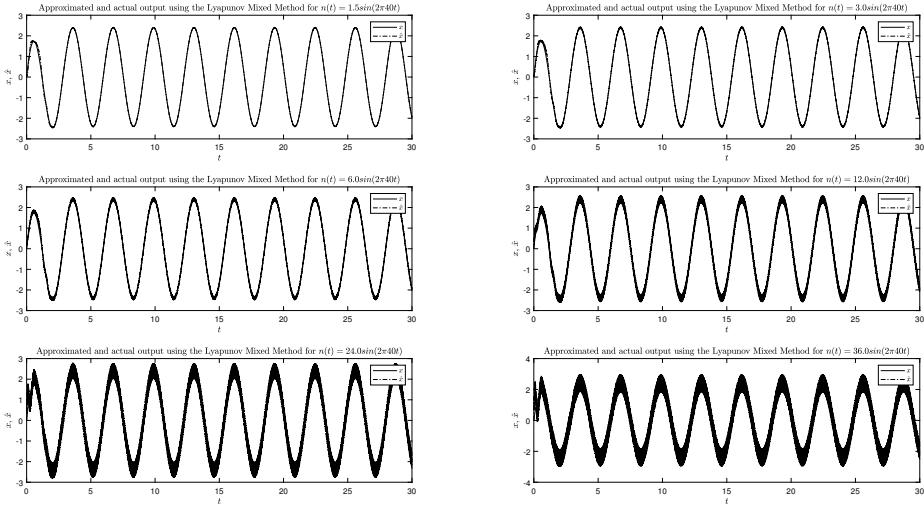


Σχήμα 2.27: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και b για $f = 80Hz$

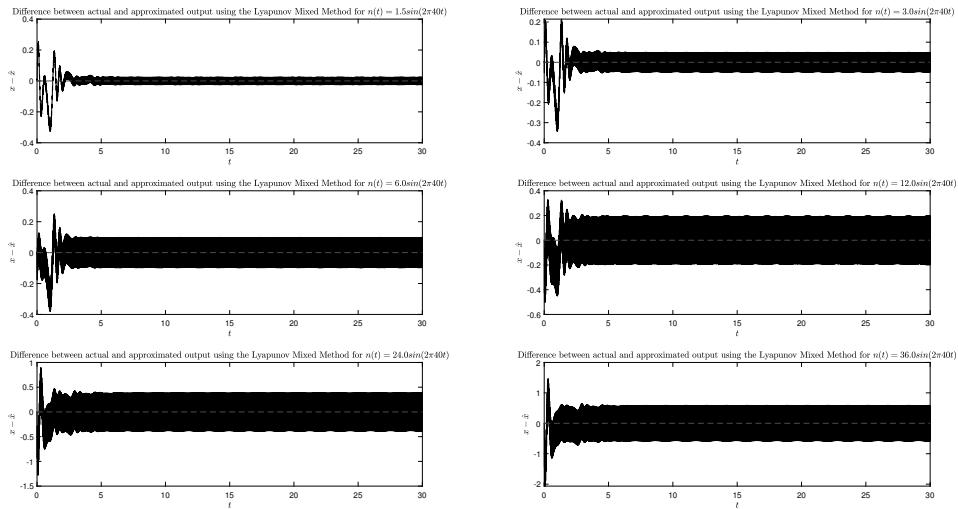
Μέσω των σχημάτων (2.25), (2.27) και (2.26) παρατηρείται ότι η αύξηση της συχνότητας του θορύβου προκαλεί μείωση του σφάλματος. Αυτό συμβαίνει επειδή στον ίδιο χρόνο προσομοίωσης, η τιμή του θορύβου μηδενίζεται περισσότερες φορές, αφού ολοκληρώνονται περισσότερες περίοδοι. Το ίδιο ισχύει και για την περίπτωση της Μεικτής Δομής (2.1.2).

2.4.2 Μεικτή Δομή Μεθόδου Lyapunov

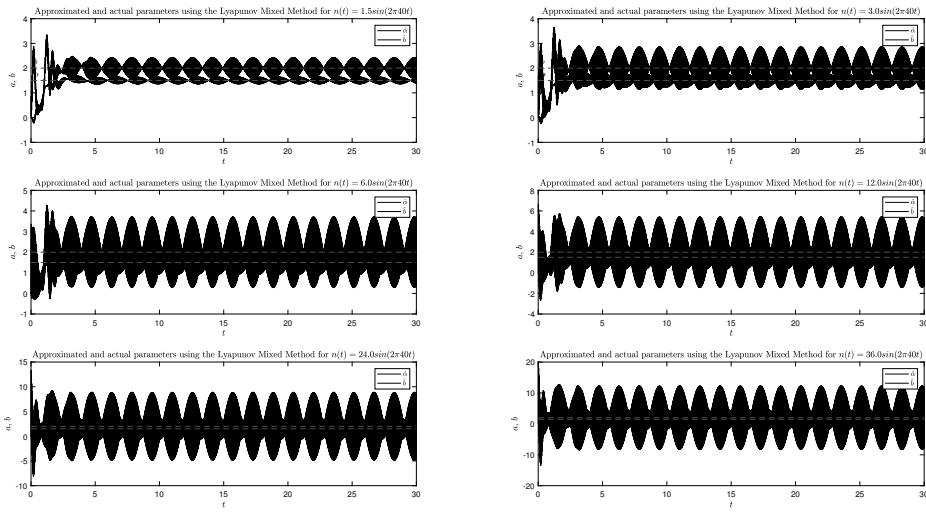
Για $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 24$ και $\theta_m = 4$, για αυξανόμενες τιμές της συχνότητας και του πλάτους του θορύβου, έγιναν οι γραφικές παραστάσεις στο αρχείο lyapunov_mixed_more_noise.m. Όλες οι γραφικές παραστάσεις βρίσκονται στον φάκελο lyapunov\lyapunov-parallel\figures\more-noise\suboptimal. Οι γραφικές παραστάσεις της εξόδου βρίσκονται στον φάκελο xxhat, οι διαφορά μεταξύ τους στον φάκελο xdif και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων \hat{a} και \hat{b} στον φάκελο ab. Εντός των φακέλων υπάρχουν δύο ακόμα φάκελοι με ονόματα svg και eps, για διαφορετικούς τύπους αρχείων.



Σχήμα 2.28: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $f = 40Hz$

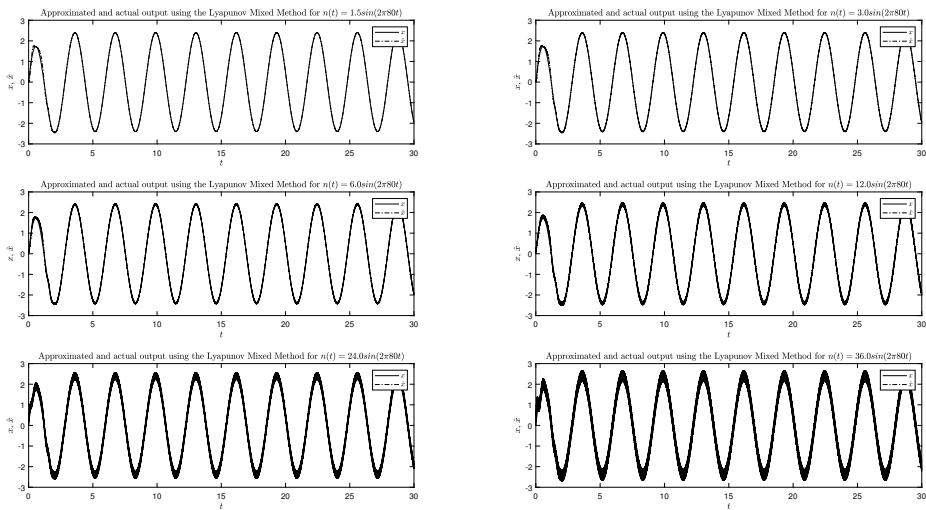


Σχήμα 2.29: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $f = 40Hz$

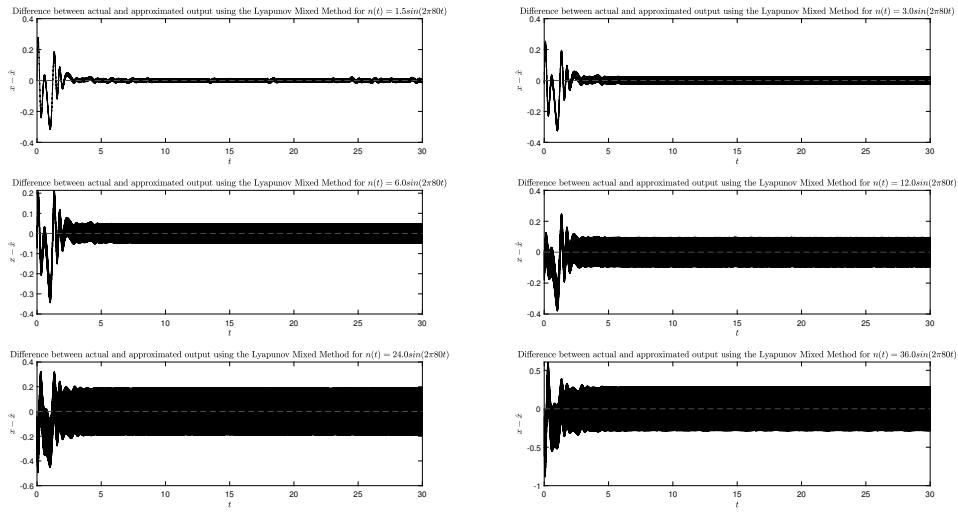


Σχήμα 2.30: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και β για $f = 40Hz$

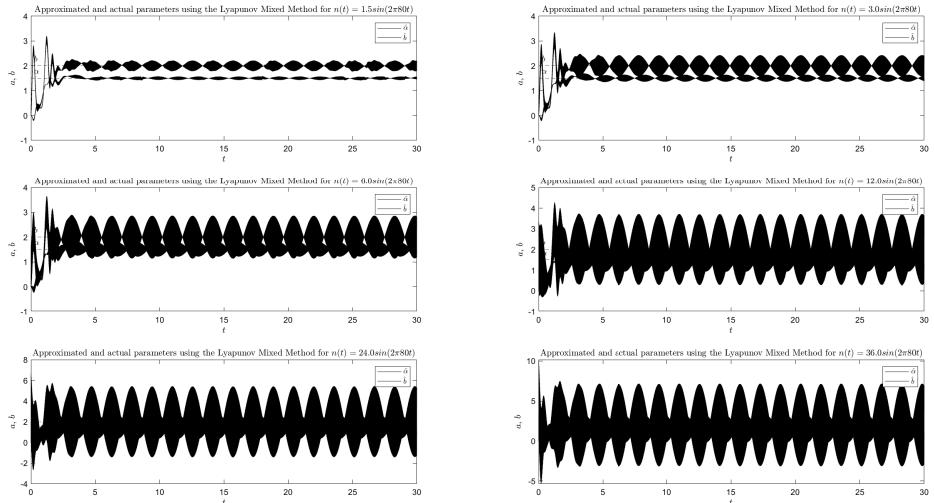
Όπως και στην περίπτωση της Παράλληλης Δομής (2.1.1), η αύξηση του πλάτους του σήματος του θορύβου, αυξάνει το σφάλμα, ενώ παράλληλα η αύξηση της συχνότητας το μειώνει.



Σχήμα 2.31: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $f = 80Hz$



Σχήμα 2.32: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $f = 80Hz$



Σχήμα 2.33: Θέμα 2 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των παραμέτρων α και β για $f = 80Hz$

Συγχρίνοντας τα (2.30) και (2.33) στην περίπτωση $n_0 = 1.5$, φαίνεται ότι η αύξηση της συχνότητας του σήματος του θορύβου έχει ως αποτέλεσμα να μειώνεται το πλάτος των ταλαντώσεων που κάνει η προσέγγιση των τιμών α και b .

2.5 Σύγκριση Παράλληλης Και Μεικτής Δομής

Για την σύγκριση των δομών, συγχρίθηκαν τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα προσέγγισης των παραμέτρων α και b , καθώς και της εξόδου x , υπό τις ίδιες συνθήκες.

- Για την περίπτωση που $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 24$ και $\theta_m = 4$ (για την Μεικτή Δομή) και ο θόρυβος είναι μεταβαλλόμενος ισχύουν:

	Παράλληλη Δομή	Μεικτή Δομή
$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}))$	$29.944 \cdot 10^{-4}$	$15.665 \cdot 10^{-4}$
$\max(\text{MSE}(x - \hat{x}))$	1.8049	0.79985
$\min(\text{MSE}(a - \hat{a}))$	$5.7764 \cdot 10^{-2}$	$5.4394 \cdot 10^{-2}$
$\max(\text{MSE}(a - \hat{a}))$	66632	11.9756
$\min(\text{MSE}(b - \hat{b}))$	$11.898 \cdot 10^{-1}$	$7.6437 \cdot 10^{-2}$
$\max(\text{MSE}(b - \hat{b}))$	15199	110.7877
$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}) \cdot \text{MSE}(a - \hat{a}) \cdot \text{MSE}(b - \hat{b}))$	$2.8106 \cdot 10^{-5}$	$6.5724 \cdot 10^{-6}$
$\max(\text{MSE}(x - \hat{x}) \cdot \text{MSE}(a - \hat{a}) \cdot \text{MSE}(b - \hat{b}))$	$1.828 \cdot 10^{10}$	1061.1972

Σύγκριση Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος Παράλληλης Και Μεικτής Δομής Lyapunov Για Μεταβαλλόμενο Θόρυβο

Η διαφορά των τιμών των σφαλμάτων για τις διαφορετικές δομές είναι τεράστια. Η Μεικτή Δομή (2.1.2) είναι πολύ πιο ακριβής από την Παράλληλη (2.1.1) σε αυτή την περίπτωση, ίσως επειδή χρησιμοποιεί και σήματα από το πραγματικό σύστημα.

- Για την περίπτωση που ο θόρυβος είναι ο αρχικός $n(t) = 1.5\sin(40\pi t)$, για μεταβαλλόμενο γ_1 , γ_2 και θ_m (μέσω του αρχείου lyapunov_mixed_find_optimal.m εισάγοντας τον θόρυβο), ισχύουν:

	Παράλληλη Δομή	Μεικτή Δομή
$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}))$	$15.751 \cdot 10^{-4}$	$13.869 \cdot 10^{-4}$
$\max(\text{MSE}(x - \hat{x}))$	0.71389	1.6958
$\min(\text{MSE}(a - \hat{a}))$	$5.9713 \cdot 10^{-2}$	$6.3833 \cdot 10^{-2}$
$\max(\text{MSE}(a - \hat{a}))$	8.4263	53.3037
$\min(\text{MSE}(b - \hat{b}))$	$3.8385 \cdot 10^{-2}$	$3.7713 \cdot 10^{-2}$
$\max(\text{MSE}(b - \hat{b}))$	13.7173	38.6241
$\min(\text{MSE}(x - \hat{x}) \cdot \text{MSE}(a - \hat{a}) \cdot \text{MSE}(b - \hat{b}))$	$6.7631 \cdot 10^{-5}$	$1.6026 \cdot 10^{-5}$
$\max(\text{MSE}(x - \hat{x}) \cdot \text{MSE}(a - \hat{a}) \cdot \text{MSE}(b - \hat{b}))$	2.1095	113.244

Σύγκριση Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος Παράλληλης Και Μεικτής Δομής Lyapunov Για Μεταβαλλόμενα γ_1 , γ_2 , θ_m

Στην προκειμένη περίπτωση, ενώ για τις βέλτιστες επιλογές των παραμέτρων, τα σφάλματα είναι μικρότερα στην Μεικτή Δομή, για τις χειρίστες επιλογές είναι πολύ χειρότερα από αυτά της Παράλληλης Δομής. Καταλήγοντας, η Μεικτή Δομή είναι προτυπότερη, αν η επιλογή των γ_1, γ_2 και θ_m είναι η καλύτερη. Μια παρατήρηση είναι ότι το συνδυασμένο τετραγωνικό σφάλμα της Μεικτής Δομής (2.1.2) ελαχιστοποιείται για $\gamma_1 = 5, \gamma_2 = 8, \theta_m = 4$. Συμπεραίνοντας, σε αντίθεση με την περίπτωση της Παράλληλης Δομής (2.1.1), η βέλτιστη επιλογή των συντελεστών γ_1, γ_2 δεν είναι απαραίτητα η μέγιστη δυνατή τιμή τους.

3 Θέμα 3

Στο τρίτο θέμα δόθηκε το σύστημα:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_B u, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Όπου x οι καταστάσεις, $u = 7.5\cos(3t) + 10\cos(2t)$ η είσοδος του συστήματος και A, B σταθεροί, αλλά άγνωστοι πίνακες. Ζητείται η σχεδίαση ενός online εκτιμητή παράλληλης δομής, βασισμένο στη Μέθοδο Lyapunov.

3.1 Μαθηματική Ανάλυση

Το μοντέλο στην προκειμένη περίπτωση έχει τη μορφή:

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \hat{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}}_{\hat{B}} u \quad (3.2)$$

Για το σφάλμα ισχύει:

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} \xrightarrow{d/dt} \\ \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + Bu - \underbrace{\hat{A}\hat{x} - \hat{B}u}_{\dot{\hat{x}}} \xrightarrow{\pm A\hat{x}} \\ &= A\underbrace{(x - \hat{x})}_e - \underbrace{\left(\hat{A} - A\right)}_{\tilde{A}} \hat{x} - \underbrace{\left(\hat{B} - B\right)}_{\tilde{B}} u \end{aligned} \quad (3.3)$$

Επιλέγεται η συνάρτηση Lyapunov:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{A}^T \tilde{A} + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{B}^T \tilde{B} \xrightarrow{d/dt} \\ \dot{V} &= e^T Ae - \tilde{A}^T e\hat{x}^T - \tilde{B}^T eu^T + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{A}^T \dot{\hat{A}} + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{B}^T \dot{\hat{B}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Θέτοντας:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1} \tilde{A}^T \dot{\hat{A}} &= -\tilde{A}^T e\hat{x}^T \Rightarrow \dot{\hat{A}} = \gamma_1 e\hat{x}^T \\ \frac{1}{\gamma_2} \tilde{B}^T \dot{\hat{B}} &= -\tilde{B}^T eu^T \Rightarrow \dot{\hat{B}} = \gamma_2 eu \end{aligned} \quad (3.5)$$

H (3.3) γίνεται:

$$\dot{V} = e^T A e \leq 0 \quad (3.6)$$

3.2 Υλοποίηση στο MATLAB

Για την υλοποίηση του εκτιμητή στο περιβάλλον του MATLAB [1] χρησιμοποιήθηκαν οι συναρτήσεις

- lyapunov_par_2D_dyn(t, odex, A, B, gamma1, gamma2, u)
- lyapunov_par_2D(t, initialconditions, A, B, gamma1, gamma2, u)

3.2.1 Συνάρτηση lyapunov_par_2D_dyn

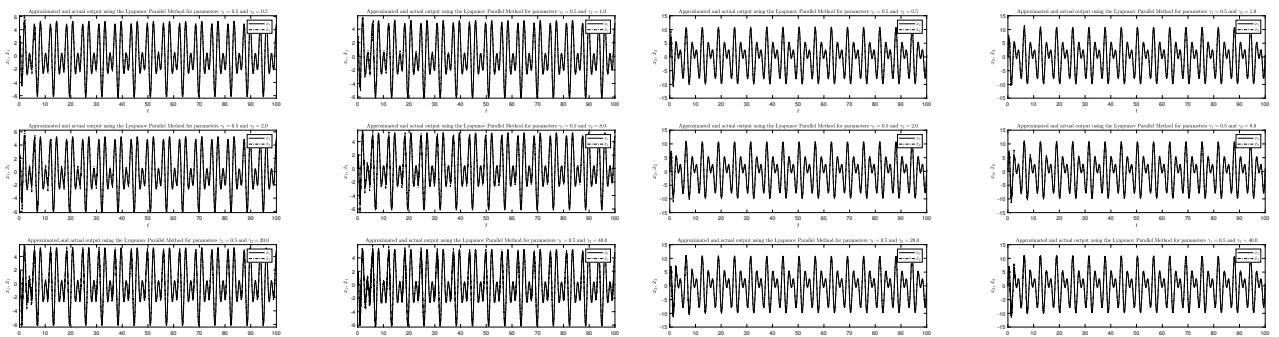
Παρόμοια με την συνάρτηση lyapunov_par_dyn (2.2.1.1), η συνάρτηση επιστρέφει έναν 10×1 σύστημα διαφορικών εξισώσεων, με τα \dot{x} (3.1), $\dot{\hat{x}}$ (3.2), και τα $\dot{\hat{A}}$, $\dot{\hat{B}}$ (3.5).

3.2.2 Συνάρτηση lyapunov_par_2D

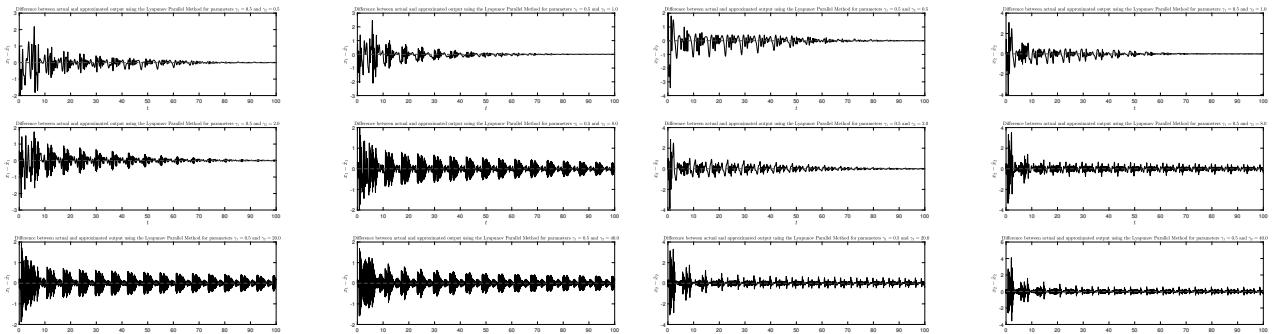
Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο με τις gradient_descent (1.2.2) και lyapunov_par (2.2.1.2), μέσω της ode45 λύνεται το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της lyapunov_par_dyn (2.2.1.1), επιστρέφοντας ένα struct με όνομα data που περιέχει την έξοδο x , την εκτίμησή της \hat{x} , την εκτίμηση των πινάκων A και B , καθώς και τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα της εκτίμησης αυτών. Δυστυχώς, λόγω χρόνου, δεν ήταν δυνατή η εύρεση ενός γενικού μέσου τετραγωνικού σφάλματος, και κατ' επέκταση η μελέτη και η σύγκριση αυτών για διάφορες τιμές των συντελεστών γ_1 και γ_2 .

3.3 Προσομοίωση

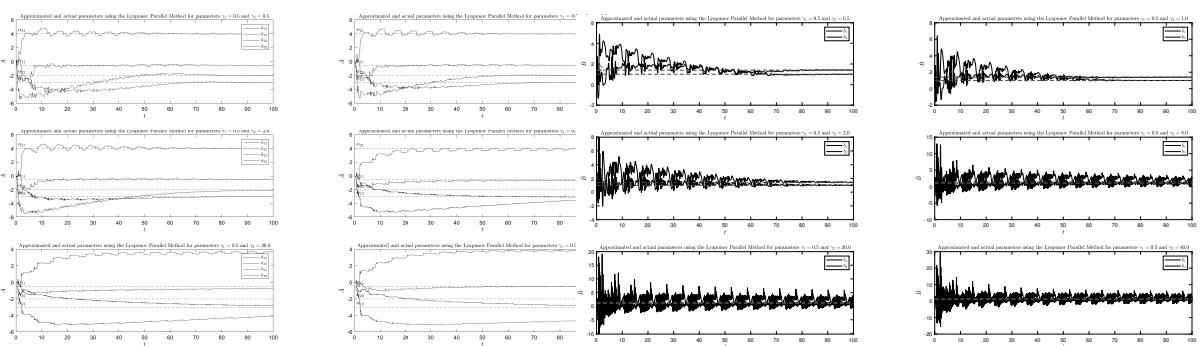
Η προσομοίωση έγινε για 6 πιθανές τιμές του γ_1 και άλλες 6 πιθανές τιμές του γ_2 . Παρατίθενται μερικές από αυτές.



Σχήμα 3.1: Θέμα 3 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου για $\gamma_1 = 0.5$

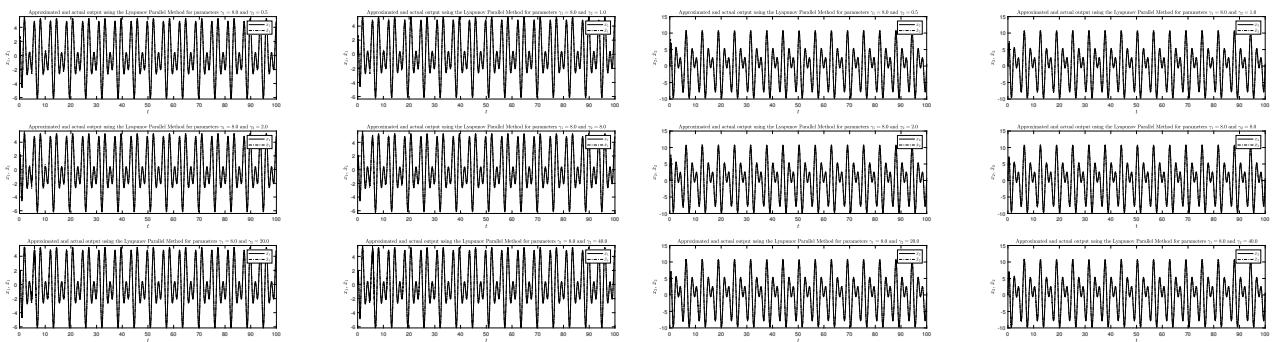


Σχήμα 3.2: Θέμα 3 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 0.5$

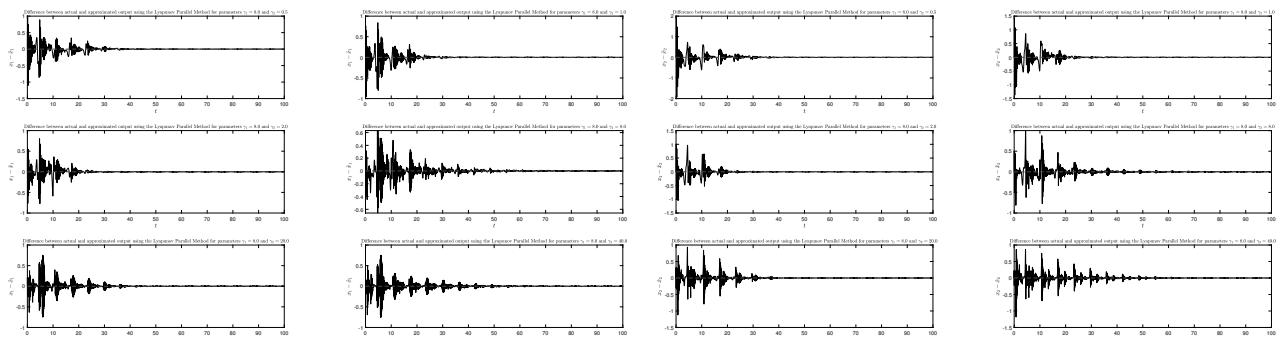


Σχήμα 3.3: Θέμα 3 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των πινάκων A και B για $\gamma_1 = 0.5$

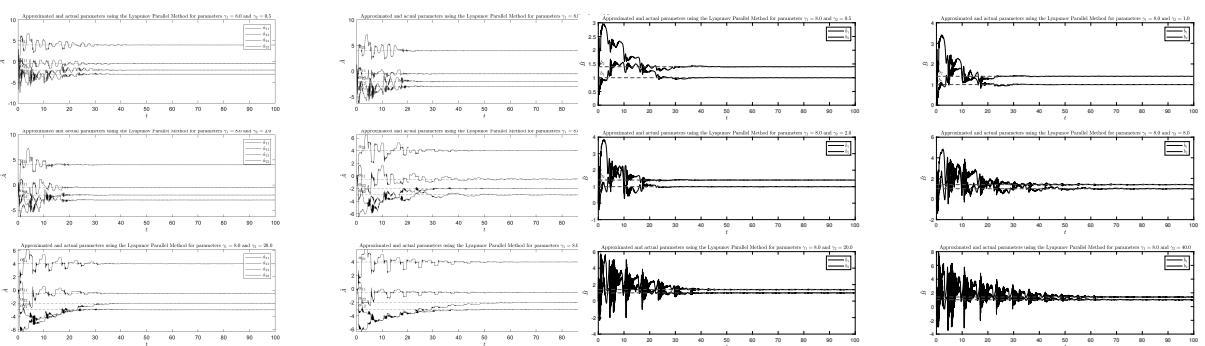
Όπως και στο Θέμα 2, φαίνεται πως η αύξηση της τιμής του γ_2 ελαττώνει το αρχικό σφάλμα, αλλά σε αυτή την περίπτωση, η αλλαγή δεν είναι τόσο έντονη. Η αύξηση του γ_2 επίσης αυξάνει το σφάλμα, καθώς και τον χρόνο σύγκλισης της εκτίμησης των πινάκων A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ και B = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$



Σχήμα 3.4: Θέμα 3 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου για $\gamma_1 = 8$

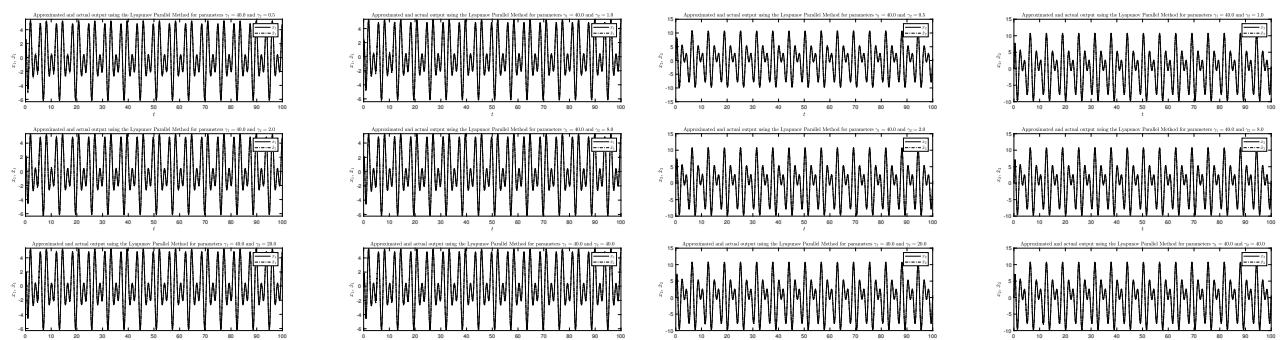


Σχήμα 3.5: Θέμα 3 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 8$

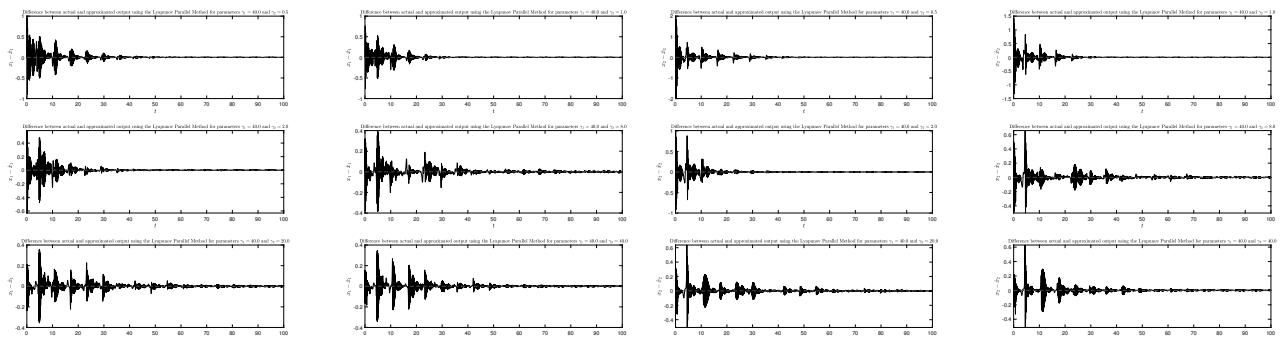


Σχήμα 3.6: Θέμα 3 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των πινάκων A και B για $\gamma_1 = 8$

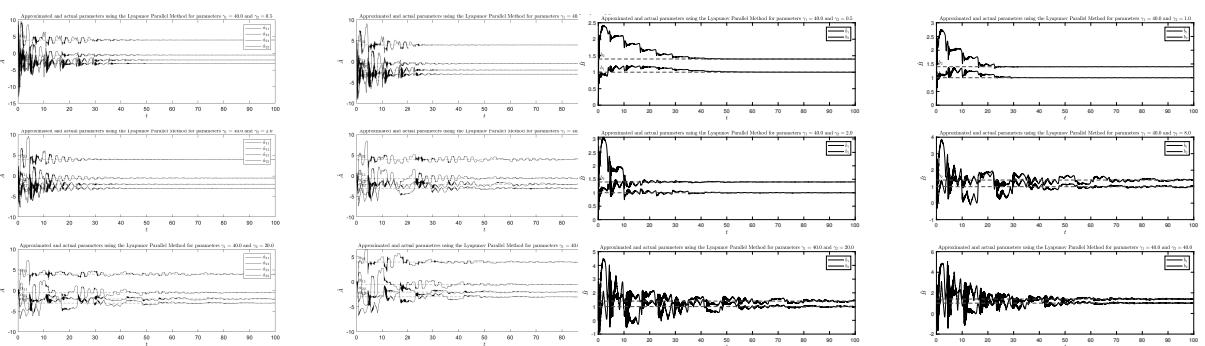
Από τα παραπάνω φαίνεται πως σε αντίθεση με το Θέμα 2, η αύξηση του γ_1 όχι μόνο ελαττώνει το σφάλμα εκτίμησης της εξόδου, αλλά και το σφάλμα εκτίμησης των A , B και τον απαιτούμενο χρόνο σύγκλισης της εκτίμησής τους.



Σχήμα 3.7: Θέμα 3 - Γραφική παράσταση της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου για $\gamma_1 = 40$



Σχήμα 3.8: Θέμα 3 - Γραφική παράσταση της διαφοράς της εξόδου και της εκτίμησης της εξόδου του συστήματος για $\gamma_1 = 40$



Σχήμα 3.9: Θέμα 3 - Γραφική παράσταση της εκτίμησης των πινάκων A και B για $\gamma_1 = 40$

Αναφορές

[1] MATLAB version 9.8.0.1323502 (R2020a), 2020.