Rapport #2

Projet du cours
Phase 2

MTH 8408 – Méthodes d'optimisation et contrôle optimal

Travail présenté à Paul Raynaud

Hiver 2024
Département de mathématiques
École Polytechnique de Montréal

Dernière mise à jour : 24 mars 2024 à 23:17:38

Adam **Osmani**	2026348
Nadir **Bettahar**	1986298
Thasaarah **Vasanthakumar**	2089901

Introduction

L'objectif de ce projet est le développement d'un système de gestion de portefeuille basé sur les équations de Markowitz. Ce rapport présentera le système d'équations utilisés, un programme Julia capable de trouver la solution optimale à un tel système, ainsi que les améliorations planifiées pour la prochaine phase.

Équations de Markowitz

L'objectif du modèle de Markowitz est de déterminer quel portfolio est capable de maximiser le retour sur son investissement. Pour cela, le modèle considère non seulement le retour attendu de chaque investissement, mais aussi le risque associé à celui-ci. Puisque les options qui offrent plus de retour sont aussi associées à un risque considérable, il n'est pas suffisant de se limiter à celles-ci. La formulation la plus simple de ce système est tel que suit :

$$\min_x -\sum_j x_j E[R_j] + \mu E\left[\sum_j x_j\left(R_j - E[R_j]\right)\right]^2$$

$$s.t. \sum_j x_j = 1$$

Où R_j représente le retour de l'investissement j sur une période étudiée et x_j est la variable de décision correspondant à la proportion du portefeuille alloué à cet investissement. μ est un paramètre qui déterminera le poids du risque : une haute valeur aura tendance à minimiser le risque en sacrifiant les investissements à variance élevée, alors qu'une faible valeur aura tendance à prendre plus de risques.

En observant ce système, il est clair que le terme $\sum_j x_j E[R_j]$ doit être aussi grand que possible, et que le terme $\mu E\left[\sum_j x_j\left(R_j - E[R_j]\right)\right]^2$ doit être aussi petit que possible. Ce premier terme représente le retour moyen du portefeuille, et le deuxième représente le risque moyen du portefeuille qui est quantifié par la variance du retour.

Le système peut être réécrit de la façon suivante :

$$min - \sum_j r_j x_j + \mu \sum_i \sum_j x_i x_j C_{i,j}$$

$$s.t. \sum_j x_j = 1$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2, \dots, n$$

Où r_j est le retour moyen sur l'investissement j et $C_{i,j}$ la matrice de covariance entre le retour de l'investissement i et j.

Une méthode plus intéressante de calculer r_j peut-être exprimée par la formule suivante :

$$r_j = \exp\left(\frac{\Sigma_{t=1}^{T} p^{T-t} \log R_j(t)}{\Sigma_{t=1}^{T} p^{T-t}}\right)$$

Où T est l'étendue des données donc $R_j(t)$ représente le retour de l'investissement j au moment t correspondant à un point de donnée particulier échantillonné.

Cette équation donne plus de poids sur les valeurs du temps récent pour le calcul du retour.

Présentation des résultats

Nous avons choisi de recueillir des données à l'aide de *YahooFinance* du 9 septembre 2023 au 24 mars 2024. Nous avons créé 3 portefeuilles distincts avec chacun 4 investissements différents pour lesquels 100 données ont été sélectionnés.

Une fonction *riskreturn* dépendant des variables *x, R* et μ, représentant la fonction objective du modèle a été créée. Le calcul de r_j selon la formule précédemment explicitée y est inclus.

Une estimation initiale correspondant à une division équitable des investissements a été mise en place. La variable de décision *x* a été bornée par 0 et 1, car il s'agir de proportions du portefeuille alloué à chaque investissement. De plus, la contrainte forçant la somme des *x* à 1 a également été ajoutée.

Une boucle a été crée pour créer 100 problèmes avec des tolérance de risque variant de 1 à 100, résolus par *Ipopt*, et leur objectif a été stocké dans un vecteur.

Pour afficher les résultats sous forme de graphe, les valeurs du vecteur des objectifs ont été affichés dans le termina de manière à pouvoir les copier et coller dans un nouveau fichier python à partir duquel les graphiques sont affichés à l'aide de la librairie *matplotlib*.

Les résultats sont rendus sous la forme de trois graphiques issus de différents portefeuilles. En effet, il a été appliqué sur des stock d'entreprises plutôt classiques ayant une variation de stock relativement standard ainsi que sur des stocks plus volatiles comme la cryptomonnaie.

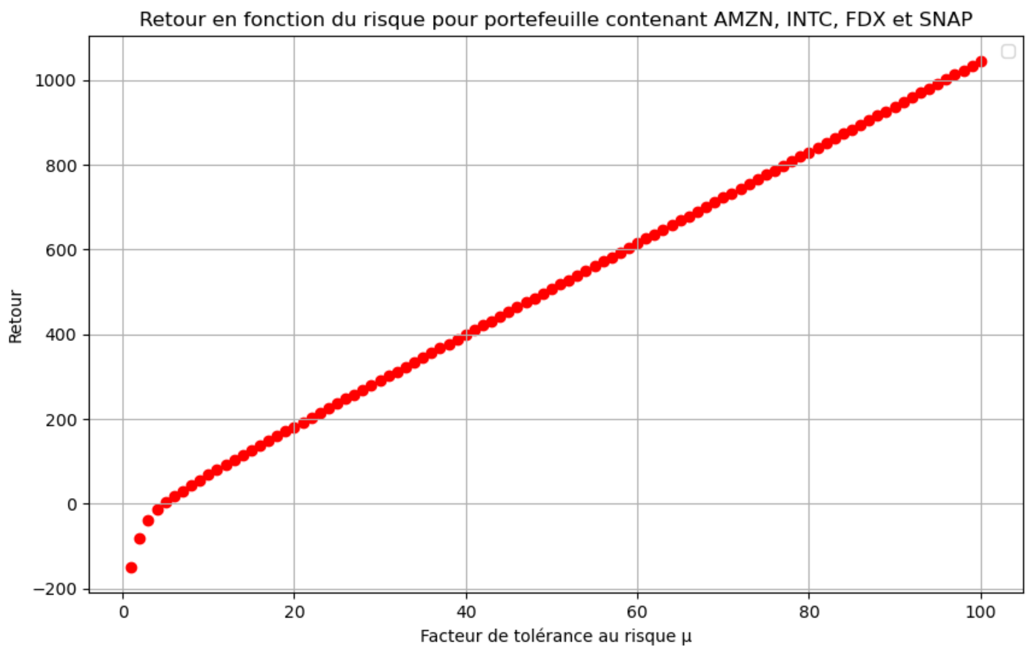

Figure 1. Graphique représentant les résultats du portefeuille 1

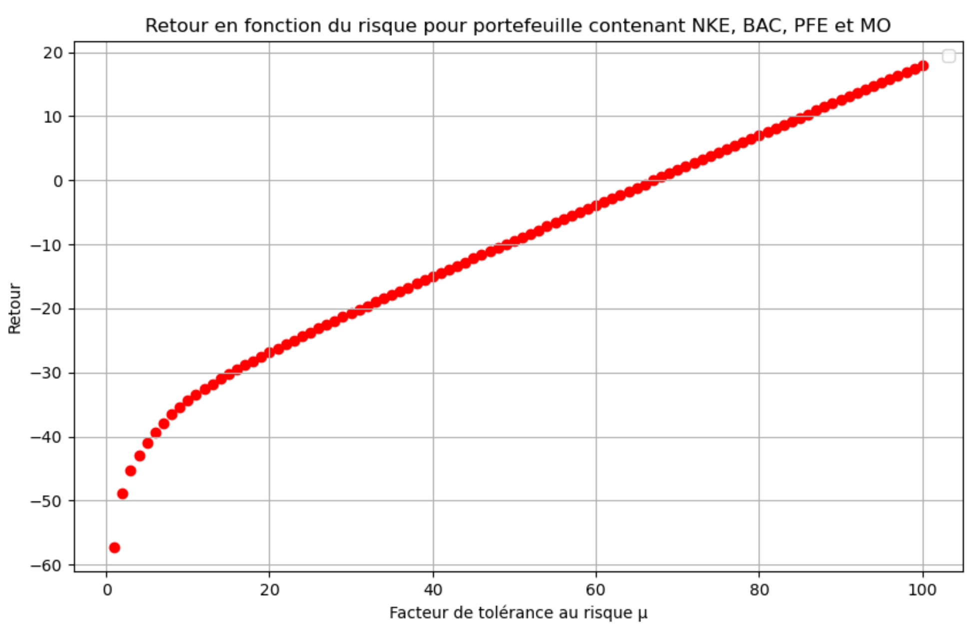

Figure 2. Graphique représentant les résultats du portefeuille 2

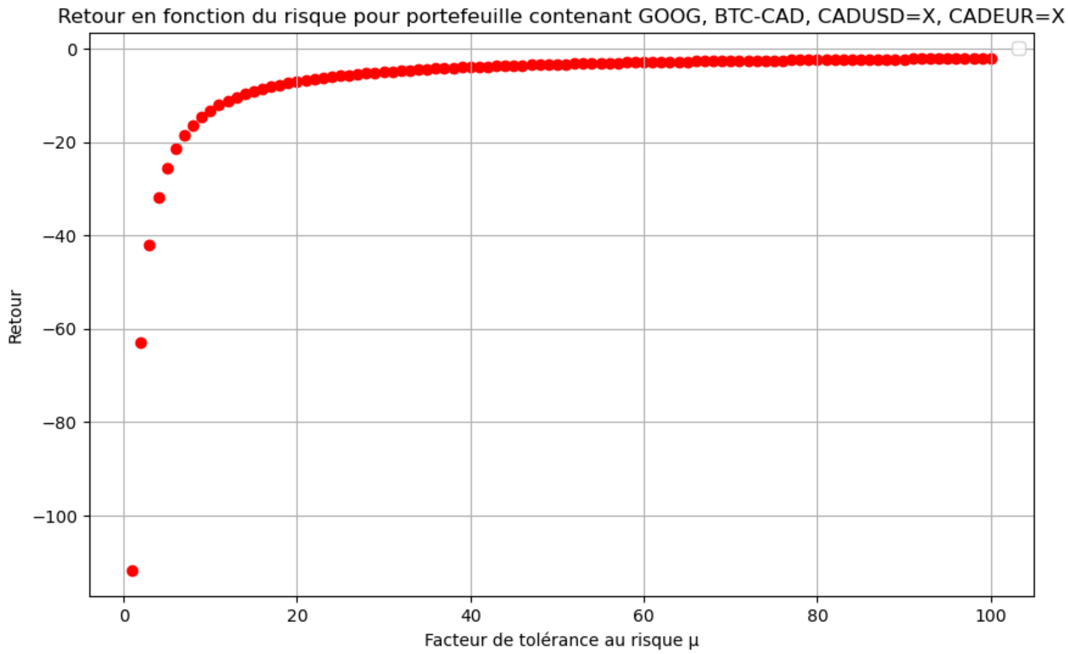

Figure 3. Graphique représentant les résultats du portefeuille 3

Une tendance commune aux 3 portefeuilles et la croissance du retour en fonction du risque. Les portefeuilles 1 et 2 respectivement composés des investissements dans AMZN, INTC, FDX et SNAP, et NKE, BAC, PFE et MO, soient les stocks d'entreprises « standards » ont une croissance qui semble tendre vers la linéarité à partir d'une tolérance de risque assez élevée. Ce seuil se situe autour de μ=5 pour le portefeuille 1 et μ=10 pour le portefeuille 2.

Le portefeuille 3 simule des investissements incluant des stocks plus volatiles comme la cryptomonnaie, soient GOOG, BTC-CAD, CADUSD=X, CADEUR=X. À partir de la figure 3, il est possible de constater que le retour semble rendre vers une limite proche de -2. Ce résultat pourrait être dû au caractère volatile des stocks présent dans ce portefeuille.

Historique des difficultés rencontrés

Pour réaliser cette phase du projet, nous avons fait face à de nombreuses difficultés.

Dans un premier temps, la récupération des données à l'aide *YahooFinance* était problématique du fait que le package n'a pas été proprement entretenue et utilisait une ancienne version de *HTTP*. ce qui causait des erreurs lors de l'utilisation de ses fonctions. Nous avons, à l'aide du professeur pu mettre en place une utilisation fonctionnelle sur une version modifiée de l'environnement sur *YahooFinance*.

Par la suite, lors de l'implémentation du modèle défini précédemment, des difficultés ont été rencontrées par rapport à l'interprétation de certains éléments le composant. Entre autres, nous avons eu de la difficulté à comprendre ce que représente $C_{i,j}$ à partir des descriptions fournies dans le livre de référence : une matrice de covariance spécifique à une paire d'investissement ou un élément donné d'une matrice de covariance globale des investissements. Éventuellement, en analysant la taille de chaque élément de la fonction objective, nous avons constaté que $C_{i,j}$ doit être un scalaire pour que la formule soit cohérente, ce qui indique qu'il s'agit d'un élément de la matrice. Quelques soucis ont aussi été rencontré lors l'implémentation du calcul du retour moyen des investissements, car le message d'erreur affiché ne nous permettait pas le comprendre l'erreur. Une exécution en mode « debug » a été nécessaire pour comprendre que le code était mal adapté au format des données brutes recueillies de *YahooFinance*.

La génération des résultats a été faite sur python. Cela est dû au fait que nous rencontrions une erreur dans la construction de FFMPEG qui est nécessaire pour l'utilisation de Plots sur Julia, cette erreur n'a pas réussi à être réglée malgré les ajustements sur les packages de l'environnement, donc l'utilisation de python a permis de générer les graphes en contournant le problème pour l'instant.

Enfin, pour la résolution et l'optimisation du portefeuilles, l'implémentations de différents solveurs a été difficile, car les méthodes étudiées en cours jusqu'à présent ne sont majoritairement pas applicables aux problèmes contraints. Le seul qui a pour le moment été implémenter avec succès est le IPOPT dont le champ d'application inclut les problèmes contraints.

Concrétisation du projet

Pour la dernière partie du projet, l'objectif principal est de diversifier les types de solveurs utilisés pour la résolution du modèle de Markowitz afin de comparer et confronter les résultats obtenus à l'aide du solveur IPOPT. Nous aimerions appliqués la méthode de pénalité quadratique ainsi que le solveur OSQP.

Nous aimerions aussi effectuer quelques recherches supplémentaires en étudiant des résultats obtenus sur des modèles de Markowitz établies afin de mieux analyser nos données puisque l'interprétation de nos résultats est assez actuellement assez floue. La tendance recherchée est correctement établie, toutefois, l'ordre de grandeur et la nature de nos valeurs pourrait être mis à jour.

De plus, lorsque le modèle sera proprement établi et valider, nous aimerions essayer de l'adapter à des variantes non linéaires du modèle de Markowitz. Notamment, le modèle d'optimisation de portefeuille avec des fonctions d'utilité non linéaires dont le modèle mathématique est représenté par :

Maximiser:

$$\max_{\mathbf{x}} E[U(W)] = E\left[\frac{(W_0+\sum_{i=1}^{N} x_i(R_i-1))^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]$$

Sous les contraintes :

- Budget total investi :
  $\sum_{i=1}^{N} x_i = W_0,$
- Non-négativité des investissements :
  $x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, N,$

Où :

- W_0 est la richesse initiale de l'investisseur,
- x_i est la partie de la richesse investie dans l'actif i,
- R_i est le rendement de l'actif i,
- N est le nombre d'actifs dans le portefeuille,
- γ est le paramètre d'aversion au risque de l'investisseur.

Enfin, nous aimerions travailler sur la réalisation d'une interface utilisateur car la forme utilisée actuellement est peu intuitive.

Étapes	Date
Étudier d'autres solveurs	31-03-24
Recherches sur les résultats de modèles de Markowitz	03-04-24
Adapter au modèle non-linéaire	10-04-24
Créer une interface utilisateur	16-04-24

Conclusion

En conclusion le modèle de Markowitz est un outil important pour l'optimisation du portefeuille. Tel que présenté dans ce rapport, il est possible de programmer ce modèle dans un langage de programmation comme Julia pour trouver une répartition d'investissements optimale. Dans la prochaine phase de ce projet, différentes méthodes d'optimisation seront comparées pour déterminer celle qui est la mieux adaptée pour ce problème.