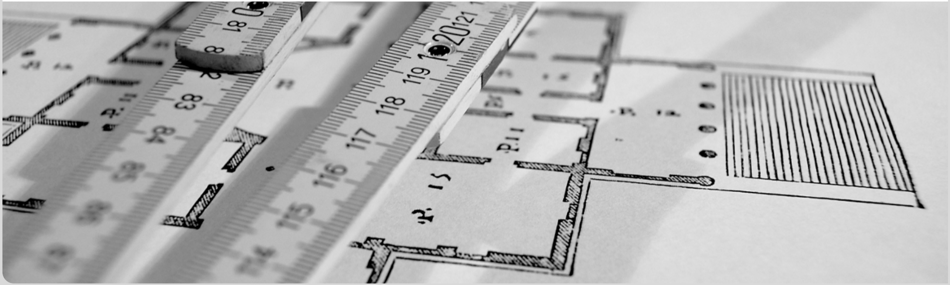
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 36

Termin 8 | 16.12.2016
Thassilo Helmold

KIT – Karlsruher Institut für Technologie



Inhalt

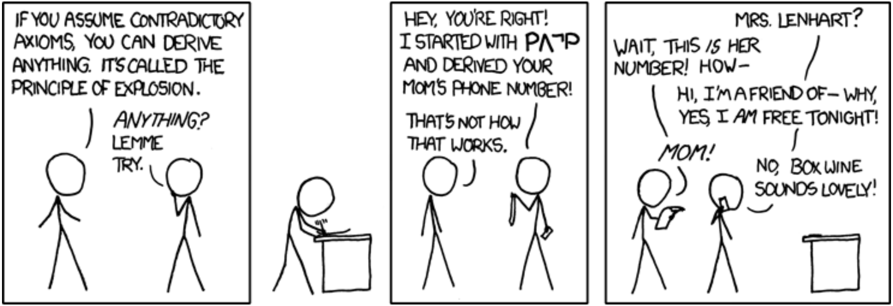


Abbildung: `https://www.xkcd.com/`

In the previous episode of GBI...

Rückblick: Kontextfreie Grammatiken

- Ein Vier-Tupel: $G = (N, T, S, P)$
- Produktionen definieren Ersetzungen eines Nichtterminals mit Wörtern über $N \cup T$
- Wir wenden Produktionen in Ableitungsschritten an: $v \Rightarrow w$, $v \Rightarrow^* w$
- $L(G)$ sind alle aus S ableitbaren Wörter über T (die also nur aus Terminalsymbolen bestehen)

Wahr oder Falsch?

Sei $G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Die Produktion $XY \to a$ ist gültig

Wahr oder Falsch?

Sei $G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Die Produktion $XY \to a$ ist gültig F

Wahr oder Falsch?

Sei $G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Die Produktion $XY \rightarrow a$ ist gültig F
- Die Produktion $a \rightarrow XY$ ist gültig

Wahr oder Falsch?

Sei $G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Die Produktion $XY \to a$ ist gültig F
- Die Produktion $a \to XY$ ist gültig F

Wahr oder Falsch?

Sei $G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Die Produktion $XY \rightarrow a$ ist gültig F
- Die Produktion $a \rightarrow XY$ ist gültig F
- Die Produktion $X \rightarrow XaX$ ist gültig

Wahr oder Falsch?

Sei $G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Die Produktion $XY \rightarrow a$ ist gültig F
- Die Produktion $a \rightarrow XY$ ist gültig F
- Die Produktion $X \rightarrow XaX$ ist gültig W

Wahr oder Falsch?

Sei $G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Die Produktion $XY \rightarrow a$ ist gültig F
- Die Produktion $a \rightarrow XY$ ist gültig F
- Die Produktion $X \rightarrow XaX$ ist gültig W
- Wenn $X \rightarrow w$ eine gültige Produktion ist, dann gilt $X \Rightarrow w$

Wahr oder Falsch?

Sei $G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Die Produktion $XY \to a$ ist gültig F
- Die Produktion $a \to XY$ ist gültig F
- Die Produktion $X \to XaX$ ist gültig W
- Wenn $X \to w$ eine gültige Produktion ist, dann gilt $X \Rightarrow w$ W

Wahr oder Falsch?

Sei $G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Die Produktion $XY \rightarrow a$ ist gültig F
- Die Produktion $a \rightarrow XY$ ist gültig F
- Die Produktion $X \rightarrow XaX$ ist gültig W
- Wenn $X \rightarrow w$ eine gültige Produktion ist, dann gilt $X \Rightarrow w$ W
- Wenn $X \Rightarrow w$ gilt, dann ist $X \rightarrow w$ eine Produktion in P

Wahr oder Falsch?

Sei $G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Die Produktion $XY \rightarrow a$ ist gültig F
- Die Produktion $a \rightarrow XY$ ist gültig F
- Die Produktion $X \rightarrow XaX$ ist gültig W
- Wenn $X \rightarrow w$ eine gültige Produktion ist, dann gilt $X \Rightarrow w$ W
- Wenn $X \Rightarrow w$ gilt, dann ist $X \rightarrow w$ eine Produktion in P F
  Sei $P = \{X \rightarrow XX \mid a\}$. Dann gilt $XX \Rightarrow Xa$, aber $XX \rightarrow Xa \notin P$

Zum Aufwärmen: Weihnachtsgebäck

Weihnachten steht vor der Tür, aber Geschenke sind von Jahr zu Jahr teurer geworden! Um den Staatshaushalt des Nordpols zu schonen, hat sich der Weihnachtsmann etwas einfallen lassen: Dieses Jahr bringt er nur den Haushalten Geschenke, bei denen das für ihn bereitgestellte Gebäck seinen speziellen Qualitätsanforderungen genügt.

Dazu hat der Weihnachtsmann drei Gebäckarten (Lebkuchen L, Zimtstern Z, Dominostein D) normiert und eine kontextfreie Grammatik aufgestellt, die gültige Kombinationen beschreibt.

Zum Aufwärmen: Weihnachtsgebäck

$$
\begin{aligned}
G = (&\{S, A, B, X, Y\}, \{L, Z, D\}, S, \{\\
&S \to A \mid B\\
&A \to LLLLLLLLLX, \qquad X \to LX \mid e\\
&B \to ZYZ \mid DYD, \qquad Y \to Z \mid D \mid L\\
&\})
\end{aligned}
$$

1. Welche Kombinationen sind gültig?
2. Der Weihnachtsmann muss auf seine Figur achten. Deswegen möchte er für nächstes Jahr eine neue, kalorienarme Kombination von Gebäck: 3 Folgen mit 42, 17 und 41 x ein Zimtstern oder ein Dominostein. Die einzelnen Folgen sollen durch Lebkuchen getrennt werden.
   Stelle eine Kontextfreie Grammatik dafür auf.

Zum Aufwärmen: Weihnachtsgebäck

$$
\begin{aligned}
&G = (\{S, A, B, X, Y\}, \{L, Z, D\}, S, \{\\
&S \to A \mid B\\
&A \to LLLLLLLLLX, \qquad X \to LX \mid e\\
&B \to ZYZ \mid DYD, \qquad Y \to Z \mid D \mid L\\
&\})
\end{aligned}
$$

Welche Kombinationen sind gültig?

$\{L^n \mid n \geqslant 10\} \cup \{w \mid \text{w ist Palindrom und } |w|_L \leqslant 1\}$

Zum Aufwärmen: Weihnachtsgebäck

Der Weihnachtsmann muss auf seine Figur achten. Deswegen möchte er für nächstes Jahr eine neue, kalorienarme Kombination von Gebäck:
3 Folgen mit 42, 17 und 41 x ein Zimtstern oder ein Dominostein. Die einzelnen Folgen sollen durch Lebkuchen getrennt werden.
Stelle eine Kontextfreie Grammatik dafür auf.

$$
\begin{aligned}
G &= (\{S\} \cup \{F_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 42\}, \{L, Z, D\}, S, P) \\
P &= \{S \to F_{42} L F_{17} L F_{41}\} \\
&\quad \cup \{F_i \to Z F_{i-1}, F_i \to D F_{i-1} \mid 1 \leqslant i \leqslant 42\} \\
&\quad \cup \{F_0 \to \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

Aussagenlogik

- „Es regnet und alle Vögel sind grau."
- atomar: „Es regnet.", „ Alle Vögel sind grau."
- Diese beiden Aussagen lassen sich ihrerseits nicht in weitere Teilaussagen zerlegen!

Prädikatenlogik

- In der Prädikatenlogik werden atomare Aussagen hinsichtlich ihrer inneren Struktur untersucht.
- „Alle Vögel sind grau"
- lässt sich in : „Alle Vögel", „sind grau" zerlegen.

Prädikatenlogik: Syntax

Prädikatenlogik: Semantik

Prädikatenlogik: Aufgaben

Aufgabe 1 (15/16, Blatt 7)

Es seien $Const_{PL} = \{\}$, $Var_{PL} = \{x, y, z\}$, $Fun_{PL} = \{\}$ und $Rel_{PL} = \{E, \doteq\}$ mit $\mathrm{ar}(E) = 2$, und es sei F die prädikatenlogische Formel

$$\neg\exists x(E(x, y) \vee \neg\forall z\forall x\forall y(E(x, z) \wedge E(y, z) \rightarrow x \doteq y))$$

Aufgabe 1.0

Ist diese prädikatenlogische Formel syntaktisch korrekt?
Ja

Syntax

Aufbau von prädikatenlogischen Formeln

- **Terme**: Liefern „Werte“; Aus Konstanten, Variablen und Funktionssymbolen zusammengesetzt.
- **Atomare Formeln**: Liefern „Wahrheitswerte“; Aus Termen und Relationssymbolen zusammengesetzt.
- **Prädikatenlogische Formeln**: Verknüpfen und Quantifizieren atomare Formeln; Aus atomaren Formeln und aussagenlogischen Konnektiven sowie Quantoren zusammengesetzt.

Terme - Alphabet

Variablensymbole: Alphabet Var_{PL}

- $\mathtt{x}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$)
- kurz $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$, $\mathtt{z}$

Konstantensymbole: Alphabet $Const_{PL}$

- $\mathtt{c}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$)
- kurz $\mathtt{c}$, $\mathtt{d}$

Funktionsymbole: Alphabet Fun_{PL}

- $\mathtt{f}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$)
- kurz $\mathtt{f}$, $\mathtt{g}$, $\mathtt{h}$
- jedes $\mathtt{f}_i \in Fun_{PL}$ hat *Stelligkeit* $\mathrm{ar}(\mathtt{f}_i) \in \mathbb{N}_+$

$$A_{Ter} = \{(, \mathtt{,},)\} \cup Var_{PL} \cup Const_{PL} \cup Fun_{PL}$$

Terme - Grammatik

Grammatik $(N_{Ter}, A_{Ter}, \mathtt{T}, P_{Ter})$

- m maximale Stelligkeit von Funktions- bzw. Relationssymbolen

$m + 1$ Nichtterminalsymbole

- $N_{Ter} = \{\, \mathtt{T} \,\} \cup \{\, \mathtt{L}_i \mid i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } i \leq m \,\}$

Produktionen

$$\mathtt{L}_{i+1} \to \mathtt{L}_i \,\mathtt{,}\, \mathtt{T} \qquad \text{für jedes } i \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } i < m$$

$$\mathtt{L}_1 \to \mathtt{T}$$

$$\mathtt{T} \to \mathtt{c}_i \qquad \text{für jedes } \mathtt{c}_i \in \mathit{Const}_{PL}$$

$$\mathtt{T} \to \mathtt{x}_i \qquad \text{für jedes } \mathtt{x}_i \in \mathit{Var}_{PL}$$

$$\mathtt{T} \to \mathtt{f}_i\mathtt{(}\mathtt{L}_{\mathrm{ar}(\mathtt{f}_i)}\mathtt{)} \qquad \text{für jedes } \mathtt{f}_i \in \mathit{Fun}_{PL}$$

Atomare Formeln

Relationsymbole: Alphabet Rel_{PL}

- $\doteq$ immer dabei
- $\mathtt{R}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$)
- kurz als $\mathtt{R}$, $\mathtt{S}$
- jedes $\mathtt{R}_i \in Rel_{PL}$ hat *Stelligkeit* $\text{ar}(\mathtt{R}_i) \in \mathbb{N}_+$

$$A_{Rel} = A_{Ter} \cup Rel_{PL}$$

Grammatik $(N_{Rel}, A_{Rel}, \mathtt{A}, P_{Rel})$

- m maximale Stelligkeit von Funktions- bzw. Relationssymbolen
- $N_{Ter} = \{\,\mathtt{A}, \mathtt{T}\,\} \cup \{\,\mathtt{L}_i \mid i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } i \leq m\,\}$
- $P_{Rel} = P_{Ter} \cup \{\mathtt{A} \to \mathtt{R}_i(\mathtt{L}_{\text{ar}(\mathtt{R}_i)}) \mid \text{ für jedes } \mathtt{R}_i \in Rel_{PL}\}$
  $\cup \{\,\mathtt{A} \to \mathtt{T} \doteq \mathtt{T}\,\}$.

Atomare Formeln - Beispiel

bei geeigneter Wahl von Var_{PL}, $Const_{PL}$, Fun_{PL} sowie

- $Rel_{PL} = \{\mathtt{R}, \mathtt{S}\}$
- mit $\mathrm{ar}(\mathtt{R}) = 3$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{S}) = 1$

ableitbar

- $\mathtt{g(x)} \doteq \mathtt{f(x,g(z))}$
- $\mathtt{S(c)}$
- $\mathtt{R(y,c,g(x))}$

syntaktisch falsch

$\mathtt{x} \doteq \mathtt{y} \doteq \mathtt{z}$	$\mathtt{R} \doteq \mathtt{f}$	$\mathtt{S(x)} \doteq \mathtt{S(x)}$
$\mathtt{R(x,y)}$	$\mathtt{f(S(x))}$	$\mathtt{R(S(x),x,x)}$
$\mathtt{(S(S))(x)}$	$\mathtt{R)x,y(gRf()}$	$\mathtt{x} \rightarrow \mathtt{R(zx} \vee \mathtt{y}$

Prädikatenlogische Formeln

$A_{For} = A_{Rel} \cup \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists \}$

- $\forall$ *Allquantor*
- $\exists$ *Existenzquantor*

Grammatik $(N_{For}, A_{For}, \mathtt{F}, P_{For})$

- $N_{For} = \{ \mathtt{F} \} \cup N_{Rel}$
- $P_{For} = P_{Rel} \cup \{ \mathtt{F} \rightarrow \mathtt{A} \}$

$$\begin{aligned} &\cup \{ \mathtt{F} \rightarrow (\neg \mathtt{F}),\ \mathtt{F} \rightarrow (\mathtt{F} \wedge \mathtt{F}) \} \\ &\cup \{ \mathtt{F} \rightarrow (\mathtt{F} \vee \mathtt{F}),\ \mathtt{F} \rightarrow (\mathtt{F} \rightarrow \mathtt{F}) \} \\ &\cup \{ \mathtt{F} \rightarrow (\forall \mathtt{x}_i\, \mathtt{F}) \mid \mathtt{x}_i \in Var_{PL} \} \\ &\cup \{ \mathtt{F} \rightarrow (\exists \mathtt{x}_i\, \mathtt{F}) \mid \mathtt{x}_i \in Var_{PL} \} \end{aligned}$$

Klammereinsparungsregeln wie in Aussagenlogik

- zusätzlich: Quantoren binden noch stärker als alle andere

Quiz

Welche der folgenden Zeichenketten sind korrekt gebildete Formeln?

p, q einstellige Prädikatszeichen

c, d Konstantensymbole

r zweistellige Prädikatszeichen

x, y, z Variablen

1. $\forall x(\forall y(\forall z(r(x,y) \wedge r(y,z) \rightarrow r(x,z))))$
2. $\forall x q(x) \wedge \exists x \neg q(x)$
3. $\forall x(\forall y(p(x) \wedge q(y) \rightarrow \exists r(r(x,y))))$
4. $\exists z(c(z))$
5. $\forall x p(c) \wedge \forall y \exists y q(y)$
6. $p(c) \wedge p(d) \rightarrow p(r(c,d))$

Erklärung

Quiz

Welche der folgenden Zeichenketten sind korrekt gebildete Formeln?

p, q einstellige Prädikatszeichen

c, d Konstantensymbole

r zweistellige Prädikatszeichen

x, y, z Variablen

1 $\forall x(\forall y(\forall z(r(x,y) \wedge r(y,z) \rightarrow r(x,z))))$ *ja*

2 $\forall x q(x) \wedge \exists x \neg q(x)$

3 $\forall x(\forall y(p(x) \wedge q(y) \rightarrow \exists r(r(x,y))))$

4 $\exists z(c(z))$

5 $\forall x p(c) \wedge \forall y \exists y q(y)$

6 $p(c) \wedge p(d) \rightarrow p(r(c,d))$

Erklärung

Quiz

Welche der folgenden Zeichenketten sind korrekt gebildete Formeln?

p, q einstellige Prädikatszeichen r zweistellige Prädikatszeichen
c, d Konstantensymbole x, y, z Variablen

1 $\forall x(\forall y(\forall z(r(x,y) \wedge r(y,z) \rightarrow r(x,z))))$ *ja*
2 $\forall x q(x) \wedge \exists x \neg q(x)$ *ja*
3 $\forall x(\forall y(p(x) \wedge q(y) \rightarrow \exists r(r(x,y))))$
4 $\exists z(c(z))$
5 $\forall x p(c) \wedge \forall y \exists y q(y)$
6 $p(c) \wedge p(d) \rightarrow p(r(c,d))$

Erklärung

Quiz

Welche der folgenden Zeichenketten sind korrekt gebildete Formeln?

p, q einstellige Prädikatszeichen r zweistellige Prädikatszeichen
c, d Konstantensymbole x, y, z Variablen

1	$\forall x(\forall y(\forall z(r(x,y) \wedge r(y,z) \rightarrow r(x,z))))$	*ja*
2	$\forall x q(x) \wedge \exists x \neg q(x)$	*ja*
3	$\forall x(\forall y(p(x) \wedge q(y) \rightarrow \exists r(r(x,y))))$	*nein*
4	$\exists z(c(z))$	
5	$\forall x p(c) \wedge \forall y \exists y q(y)$	
6	$p(c) \wedge p(d) \rightarrow p(r(c,d))$	

Erklärung

Relationen können nicht quantifiziert werden

Quiz

Welche der folgenden Zeichenketten sind korrekt gebildete Formeln?

p, q einstellige Prädikatszeichen $\quad$ r zweistellige Prädikatszeichen
c, d Konstantensymbole $\quad$ x, y, z Variablen

1	$\forall x(\forall y(\forall z(r(x, y) \land r(y, z) \to r(x, z))))$	*ja*
2	$\forall x q(x) \land \exists x \neg q(x)$	*ja*
3	$\forall x(\forall y(p(x) \land q(y) \to \exists r(r(x, y))))$	*nein*
4	$\exists z(c(z))$	*nein*
5	$\forall x p(c) \land \forall y \exists y q(y)$	
6	$p(c) \land p(d) \to p(r(c, d))$	

Erklärung

c ist kein Relationszeichen

Quiz

Welche der folgenden Zeichenketten sind korrekt gebildete Formeln?

p, q einstellige Prädikatszeichen r zweistellige Prädikatszeichen

c, d Konstantensymbole x, y, z Variablen

1	$\forall x(\forall y(\forall z(r(x,y) \wedge r(y,z) \to r(x,z))))$	*ja*
2	$\forall x q(x) \wedge \exists x \neg q(x)$	*ja*
3	$\forall x(\forall y(p(x) \wedge q(y) \to \exists r(r(x,y))))$	*nein*
4	$\exists z(c(z))$	*nein*
5	$\forall x p(c) \wedge \forall y \exists y q(y)$	*ja*
6	$p(c) \wedge p(d) \to p(r(c,d))$	

Erklärung

Quiz

Welche der folgenden Zeichenketten sind korrekt gebildete Formeln?

p, q einstellige Prädikatszeichen
r zweistellige Prädikatszeichen
c, d Konstantensymbole
x, y, z Variablen

1	$\forall x(\forall y(\forall z(r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z))))$	*ja*
2	$\forall x q(x) \wedge \exists x \neg q(x)$	*ja*
3	$\forall x(\forall y(p(x) \wedge q(y) \rightarrow \exists r(r(x, y))))$	*nein*
4	$\exists z(c(z))$	*nein*
5	$\forall x p(c) \wedge \forall y \exists y q(y)$	*ja*
6	$p(c) \wedge p(d) \rightarrow p(r(c, d))$	*nein*

Erklärung

Term erwartet, atomare Formel gefunden.

Freie und gebundene Variablenvorkommen

$$F = \neg\exists x(E(x, y) \vee \neg\forall z\forall x\forall y(E(x, z) \wedge E(y, z) \rightarrow x \doteq y))$$

Aufgabe 1.1

Welche Variablenvorkommen sind frei (fv) und welche gebunden (bv)?
Ist die Formel geschlossen?

Lösung

Nur die Variable $\text{fv}(F) = \{y\}$ kommt frei in F vor.
Genau die Variablen $\text{bv}(F) = \{x, y, z\}$ kommen gebunden in F vor.
Da $\text{fv}(F) \neq \emptyset$ ist F nicht geschlossen.

Substitutionen

Substitution: Abbildung $\sigma : Var_{PL} \to L_{Ter}$

falls σ durch Menge S der Paare $S = \{ \mathtt{x}_{i_j} / \sigma(\mathtt{x}_{i_j}) \mid 1 \leq j \leq k \}$
eindeutig bestimmt
also insbesondere S rechtseindeutig
schreibe $\sigma_S = \sigma_{\{ \mathtt{x}_{i_j} / \sigma(\mathtt{x}_{i_j}) \mid 1 \leq j \leq k \}}$.

Beispiel: $\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c}, \mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}$ Abbildung mit

$$\sigma(\mathtt{x}) = \mathtt{c}$$
$$\sigma(\mathtt{y}) = \mathtt{f(x)}$$
$$\sigma(z) = z \text{ für jedes } z \notin \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$$

Substitutionen

Ersetzt werden nur **freie Variablenvorkommen**!
Gebundene Vorkommen, also Variablen im Wirkungsbereich eines Quantors, werden **nicht** ersetzt.

Beispiel $\quad G = \mathtt{S(x)} \wedge \forall \mathtt{x}\ \mathtt{R(x,y)}.$

für jedes σ ist

$$\begin{aligned}\sigma(G) &= \sigma(\mathtt{S(x)} \wedge \forall \mathtt{x}\ \mathtt{R(x,y)}) \\ &= \sigma(\mathtt{S(x)}) \wedge \sigma(\forall \mathtt{x}\ \mathtt{R(x,y)}) \\ &= \mathtt{S}(\sigma(\mathtt{x})) \wedge \forall \mathtt{x}\ \sigma_{-\mathtt{x}}(\mathtt{R(x,y)}) \\ &= \mathtt{S}(\sigma(\mathtt{x})) \wedge \forall \mathtt{x}\ \mathtt{R}(\sigma_{-\mathtt{x}}(\mathtt{x}), \sigma_{-\mathtt{x}}(\mathtt{y}))\end{aligned}$$

konkret z. B. $\sigma = \sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}$, also $\sigma_{-\mathtt{x}} = \sigma_{\{\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}$

also

$$\begin{aligned}\sigma(G) &= \mathtt{S}(\sigma(\mathtt{x})) \wedge \forall \mathtt{x}\ \mathtt{R}(\sigma_{-\mathtt{x}}(\mathtt{x}), \sigma_{-\mathtt{x}}(\mathtt{y})) \\ &= \mathtt{S}(\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{x})) \wedge \forall \mathtt{x}\ \mathtt{R}(\sigma_{\{\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{x}), \sigma_{\{\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{y})) \\ &= \mathtt{S(c)} \wedge \forall \mathtt{x}\ \mathtt{R(x,f(x))}\end{aligned}$$

Substitutionen: Kollisionsfreiheit

Bei einer **kollisionsfreien** Substitution werden keine Variablen „aus Versehen“ gebunden.

Ersetzen wir eine freie Variable x durch einen Term, in dem die Variable y frei vorkommt, so darf sich x nicht im Wirkungsbereich eines Quantors über y befinden.

Beispiel

$L = \forall \mathrm{x}(\mathrm{x} \wedge \mathrm{y})$
Kollisionsfrei: $\sigma_{\{\mathrm{y}/\mathrm{z}\}}$
Nicht kollisionsfrei: $\sigma_{\{\mathrm{y}/\mathrm{x}\}}$

Substitutionen

$$F = \neg\exists x(E(x,y) \vee \neg\forall z\forall x\forall y(E(x,z) \wedge E(y,z) \rightarrow x \doteq y))$$

Aufgabe 1.2

Geben sie eine Substitution σ an, die *nicht* kollisionsfrei für F ist.

Die Substitution $\sigma_{\{(y/x)\}}$ leistet das Gewünschte.

Prädikatenlogik: Syntax

Prädikatenlogik: Semantik

Prädikatenlogik: Aufgaben

Interpretation

Alphabete $Const_{PL}$, Fun_{PL} und Rel_{PL} gegeben

Interpretation (D, I)

- nichtleere Menge D, das *Universum*
- $I(\mathtt{c}_i) \in D$ für $\mathtt{c}_i \in Const_{PL}$
- $I(\mathtt{f}_i) : D^{\mathrm{ar}(\mathtt{f}_i)} \to D$ für $\mathtt{f}_i \in Fun_{PL}$
- $I(\mathtt{R}_i) \subseteq D^{\mathrm{ar}(\mathtt{R}_i)}$ für $\mathtt{R}_i \in Rel_{PL}$

Beispiel

- $D = \mathbb{N}_0$
- $I(\mathtt{c}) = 0$
- $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 2$ und $I(\mathtt{f}) : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0 : (x, y) \mapsto x + y$
- $\mathrm{ar}(\mathtt{R}) = 2$ und $I(\mathtt{R}) = \{(x, y) \mid x \leq y\} \subseteq \mathbb{N}_0^2$

Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

- z. B. $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$

Aufgabe 1 (15/16, Blatt 7)

$$\neg\exists x(E(x,y) \vee \neg\forall z\forall x\forall y(E(x,z) \wedge E(y,z) \rightarrow x \doteq y))$$

Aufgabe 1.3

Geben Sie eine Interpretation (D_1, I_1) und eine Variablenbelegung β_1 so an, dass $val_{D_1,I_1,\beta_1}(F) = \mathbf{W}$ gilt.

Aufgabe 1.4

Geben Sie eine Interpretation (D_2, I_2) und eine Variablenbelegung β_2 so an, dass $val_{D_2,I_2,\beta_2}(F) = \mathbf{F}$ gilt.

Aufgabe 1 (15/16, Blatt 7)

$$\neg\exists x(E(x,y) \vee \neg\forall z\forall x\forall y(E(x,z) \wedge E(y,z) \rightarrow x \doteq y))$$

Aufgabe 1.3

Geben Sie eine Interpretation (D_1, I_1) und eine Variablenbelegung β_1 so an, dass $val_{D_1,I_1,\beta_1}(F) = \mathbf{W}$ gilt.

Die Interpretation $(D_1, I_1) = (\{0, 1\}, <)$ und die Variablenbelegung $\beta_1 \colon Var_{PL} \to D, v \mapsto 0$, leisten das Gewünschte.

Aufgabe 1.4

Geben Sie eine Interpretation (D_2, I_2) und eine Variablenbelegung β_2 so an, dass $val_{D_2,I_2,\beta_2}(F) = \mathbf{F}$ gilt.

Die Interpretation $(D_2, I_2) = (\{0, 1\}, <)$ und die Variablenbelegung $\beta_2 \colon Var_{PL} \to D, v \mapsto 1$, leisten das Gewünschte.

Prädikatenlogik: Syntax

Prädikatenlogik: Semantik

Prädikatenlogik: Aufgaben

Prädikatenlogische Formeln aufstellen

Vgl. Übung WS 15/16

Aufgabe 2 (15/16, Blatt 7)

Aufgabe

Formulieren Sie die folgenden Aussagen als Formeln in Prädikatenlogik:

1. Nicht alle Vögel können fliegen.
2. Wenn es irgendjemand kann, dann kann es Donald Ervin Knuth.
3. John liebt jeden, der sich nicht selbst liebt.

Aufgabe 2 (15/16, Blatt 7)

Aufgabe

Formulieren Sie die folgenden Aussagen als Formeln in Prädikatenlogik:

1. Nicht alle Vögel können fliegen.
2. Wenn es irgendjemand kann, dann kann es Donald Ervin Knuth.
3. John liebt jeden, der sich nicht selbst liebt.

Lösung

1. $$\exists x(\mathtt{Vogel}(x) \land \neg \mathtt{flugfaehig}(x))$$
2. $$\exists x(\mathtt{kann\_es}(x)) \rightarrow \mathtt{kann\_es}(\mathtt{knuth})$$
3. $$\forall x(\neg \mathtt{liebt}(x, x) \rightarrow \mathtt{liebt}(\mathtt{John}, x))$$

Weitere Aufgaben

Siehe Übung WS 15/16

Was ihr nun wissen solltet

- Wie Prädikatenlogische Formeln aufgebaut sind...
- ... und was sie bedeuten.

Was nächstes Mal kommt

- Alles Korrekt? - Beweise mit dem Hoare-Kalkül

Vergesst nicht: Nächste Woche findet noch ein Tutorium statt!

Für alle die nicht kommen:
Frohe Weihnachten und einen guten Start in das neue Jahr!

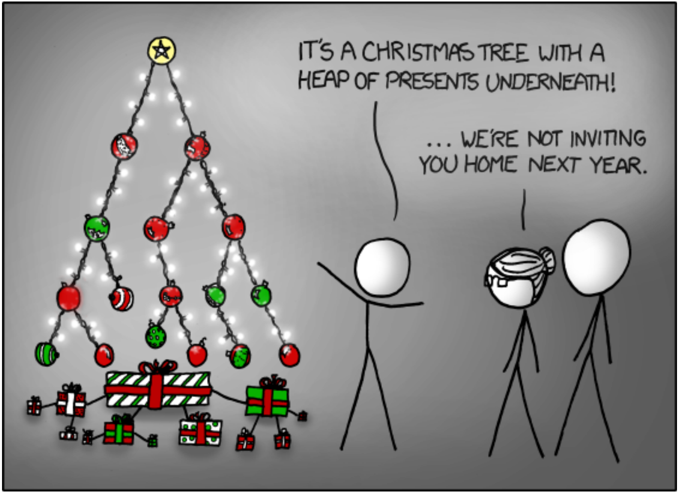


Abbildung: https://www.xkcd.com/835

Credits

Vorgänger dieses Foliensatzes wurden erstellt von:

Thassilo Helmold
Philipp Basler
Nils Braun
Dominik Doerner
Ou Yue