Условные вероятности. Независимость событий

1. В ящике m белых шаров и n черных. Из ящика выбирают наугад k шаров без возвращения. Какова вероятность, что все k шаров белые?

Решение:

Обозначим за C_m^k – наборы по k шаров из m белых.

Т.к. по условию сказано, «выбирают наугад k шаров без возвращения. Какова вероятность, что все k шаров белые?», то очевидно, что черных шаров не должно быть в этом наборе, поэтому отметим C_n^0 – количество возможных наборов черных шаров в данном случае. Всего наборов из черных и белых шаров по k шаров - C_{m+n}^k.

Получаем,

$$P(\text{все } k \text{ шаров – белые}) = \frac{C_m^k * C_n^0}{C_{m+n}^k} = \frac{C_m^k}{C_{m+n}^k}$$

2. Бросают 3 игральных додекаэдра. Какова вероятность, что на одном из них выпадет 12, если известно, что все выпавшие значения разные?

Решение:

Всего возможно $n^k = 12^3$ общих исходов при бросании трех додекаэдров

Нам нужно, чтобы у нас было а) выпадение одной 12-ть; б) все выпавшие значения разные

Зафиксируем, что на одном из додекаэдров выпало 12.

А – все значения разные

Найдем вероятность события А с учетом, что мы рассматриваем ситуации «фиксирования» значения «12» на каждом из трех додекаэдров:

$$P(A) = \frac{1}{12} * \frac{11}{12} * \frac{10}{12} + \frac{11}{12} * \frac{1}{12} * \frac{10}{12} + \frac{11}{12} * \frac{10}{12} * \frac{1}{12} = 0{,}19$$

3. Бросают 2 игральных додекаэдра. Определим три события:

A — на первом додекаэдре выпало нечетное число,

B — на втором додекаэдре выпало нечетное число,

C — сумма на двух додекаэдрах нечетная.

Являются ли эти события в совокупности/попарно независимыми?

Решение:

Число возможных исходов:

$$n^k = 12^2$$

Вероятность, что на первом додекаэдре выпало нечетное число(на втором – любое из 12-ти):

$$P(A) = \frac{6}{12} * \frac{12}{12} = \frac{72}{144} = \frac{1}{2}$$

Вероятность, что на втором додекаэдре выпало нечетное число(на первом – любое из 12-ти):

$$P(B) = \frac{12}{12} * \frac{6}{12} = \frac{72}{144} = \frac{1}{2}$$

Нечетная сумма получается путем сложения нечетных и четных чисел, следовательно,

вероятность, что сумма на двух додекаэдрах нечетная:

$$P(C) = \frac{72}{144} = \frac{1}{2}$$

Здесь мы учитываем повторение таких ситуации как «2 и 1» и «1 и 2» в вопросе нечетных сумм, т.е. делим 72 на 2; а также учитываем повторение таких же ситуаций в числе возможных исходов и также делим 144 на 2

Теперь определим будут ли эти события в **совокупности/попарно независимыми**:

Независимые в совокупности: $P(A * B * C) = P(A) * P(B) * P(C)$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A * B * C) = 0$$

$$0 \neq \frac{1}{8}$$

Следовательно, условие независимости в совокупности не выполняется.

Попарно независимые:

$$P(A|B) = P(B) <=> P(A * B) = P(A) * P(B) <=> P(B|A) = P(A)$$

$$P(B|C) = P(C) <=> P(B * C) = P(B) * P(C) <=> P(C|B) = P(B)$$

$$P(C|A) = P(A) <=> P(A * C) = P(A) * P(C) <=> P(A|C) = P(C)$$

$$P(A|B) = \frac{1}{2}$$

$$P(B|C) = \frac{1}{2}$$

$$P(C|A) = \frac{1}{2}$$

Условие попарной независимости выполнено

4. Из колоды из 52 карт вынули 1 карту. Независимы ли события А — вынутая карта червовая, В — вынутая карта туз? Аналогичный вопрос для колоды из 54 карт с добавленными джокерами?

Решение:

Найдем вероятность события А. Всего в колоде 13 червовых карт:

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Найдем вероятность события В. Всего в колоде 4 туза:

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Найдем произведение событий(=пересечение) событий А и В, т.е. вынут червовый туз – а такая карта всего одна:

$$P(AB) = \frac{1}{52}$$

Проверим, являются ли события А и В – независимыми:

$$P(AB) = P(A) * P(B)$$

$$\frac{1}{52} = \frac{1}{4} * \frac{1}{13}$$

$$\frac{1}{52} = \frac{1}{52}$$

Таким образом, доказали, что события А и В – независимы.

Теперь рассмотрим ситуацию с добавлением джокеров.

Найдем вероятность события А. Всего в колоде 13 червовых карт:

$$P(A) = \frac{13}{54}$$

Найдем вероятность события В. Всего в колоде 4 туза:

$$P(B) = \frac{4}{54}$$

Найдем произведение событий(=пересечение) событий А и В, т.е. вынут червовый туз – а такая карта всего одна:

$$P(AB) = \frac{1}{54}$$

Проверим, являются ли события A и B – независимыми:

$$P(AB) = P(A) * P(B)$$

$$\frac{1}{54} = \frac{13}{54} * \frac{4}{54}$$

$$\frac{1}{54} \neq \frac{52}{54 * 54}$$

Таким образом, доказали, что события A и B – зависимы в случае наличия в колоде джокера.

5. Из колоды 36 карт последовательно вынимают 3 карты. Какова вероятность вытащить туз, король, даму (в такой последовательности)?

Решение:

Всего в колоде 4 туза, найдем вероятность того, что первым вытащили туз:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Всего в колоде 4 короля, найдем вероятность того, что вторым вытащили короля:

$$P(B) = \frac{4}{35}$$

Всего в колоде 4 дамы, найдем вероятность того, что третьим вытащили даму:

$$P(C) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$$

Вероятность, что будут вытащены туз, король, дама:

$$P(\text{туз,король,дама}) = \frac{1}{9} * \frac{4}{35} * \frac{2}{17}$$

6. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания каждым стрелком. При каждом выстреле вероятность попадания для первого стрелка равна 0.2, для второго стрелка равна 0.3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

Решение:

Условие задачи «Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.» можно читать как «Найти вероятность того, что первый стрелок поразит мишень первым».

Скажем, что событие A – первый стрелок поразит мишень первым.

Вероятность, что

1. Первый попадет с первого выстрела: 0.2
2. Первый попадет со второго выстрела: 0.8 * 0.7 * 0.2 (читаем как первый не попал с первого раза, второй не попал, первый попал со второго раза) = 0.2 * 0.56

3. Первый попадет с третьего выстрела: 0.8 * 0.7 * 0.8 * 0.7 * 0.2 = 0.2 * 0.56^2

.... Первый попадет с N-го раза: 0.2 * 0.56^{N-1}

Таким образом, получаем вероятность, что первый стрелок сделает больше выстрелов = поразит мишень первым:

$$P(\mathrm{A}) = 0.2 + 0.2 * 0.56 + 0.2 * 0.56^2 + ... + 0.2 * 0.56^{N-1}$$

Получили убывающую геометрическую прогрессию, ее сумма и будет нашей вероятностью

$$S = b_1 * \frac{1}{1-q}$$

$$S = 0.2 * \frac{1}{1-0.56} = 0.45$$

Итого: $P(\mathrm{A}) = 0.45$

7. Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть непринятой, если она содержит 5% бракованных деталей?

Решение:

А– партия будет принята (не найдется ни одной бракованной детали), данное событие – наступление событий Ai одновременно

Вероятность, что первая деталь не брак: $P(A1) = \frac{95}{100}$

Вероятность, что вторая деталь не брак: $P(A2) = \frac{94}{99}$

Вероятность, что первая деталь не брак: $P(A3) = \frac{93}{98}$

Вероятность, что вторая деталь не брак: $P(A4) = \frac{92}{97}$

Вероятность, что вторая деталь не брак: $P(A5) = \frac{91}{96}$

$$P(A) = P(A1 * A2 * A3 * A4 * A5) = 0.7$$

8. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при трех выстрелах равна 0.875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Решение:

Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при трех выстрелах равна 0.875, следовательно, вероятность непопадания в мишень при трех выстрелах = 0.125.

Т.к. три выстрела – это независимые события, следовательно, вероятность непопадания в мишень при одном выстреле = 0.5.

Тогда вероятность попадания в мишень при одном выстреле 1-0.5=0.5

9. Для того, чтобы разрушить мост, нужно попадание не менее а) одной б) двух бомб. Независимо сбросили три бомбы с вероятностью попадания 0.1, 0.3, 0.4. Какова вероятность, что мост разрушен?

Решение:

А) Не менее одной

Чтобы мост рухнул, необходимо, чтобы хотя бы одна бомба попала, а можно 2, а можно три – это не так важно. Противоположное событие этому – это событие «ни одна не попадет».

А – событие, что мост будет разрушен, т.е. хотя бы одна бомба попадет

$\overline{A}$ – событие, что мост не будет разрушен, т.е. ни одна бомба не попадет

$$P(\overline{A}) = (1 - 0.1)\,(1 - 0.3)\,(1 - 0.4) = 0.9 * 0.7 * 0.6 = 0.378$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.378 = 0.622$$

Б) Не менее двух

Считаем вероятности:

В – событие, что мост будет разрушен не менее двумя бомбами

В1 - первая и вторая попала, третья – нет:

$$P(B1) = 0.1 * 0.3 * 0.6 = 0.018$$

В2 - первая и третья попала, вторая – нет:

$$P(B1) = 0.1 * 0.7 * 0.4 = 0.028$$

В3 - вторая и третья попала, первая – нет:

$$P(B3) = 0.9 * 0.3 * 0.4 = 0.108$$

В4 – все бомбы попали:

$$P(B4) = 0.1 * 0.3 * 0.4 = 0.012$$

$$P(B) = P(B1) + P(B2) + P(B3) + P(B4) = 0.166$$