Испытания Бернулли

1. Вы встретились с шахматистом равной с Вами силы (ничейные результаты исключены). Что более вероятно: выиграть более одного раза в 4 партиях или более двух раз в 6 партиях?

Решение:

Найдем вероятности событий, используя ф. Бернулли:

A – выиграть более одного раза в 4 партиях ($\overline{A}$ – выиграть 0 из 4 или выиграть 1 раз из 4)

B – выиграть более двух раз в 6 партиях ($\overline{B}$ – выиграть 0 из 6 или выиграть 1 раз из 6 или выиграть 2 раза из 6)

События проигрыша или выигрыша - равновероятные, поэтому $p = q = 0.5$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(C_4^0 0.5^0 0.5^{4-0}\right) - \left(C_4^1 0.5^1 0.5^{4-1}\right) = 1 - \left(\frac{4!}{0!\,(4-0)\,!}\,0.5^1 0.5^4\right) - \left(\frac{4!}{1!\,(4-1)\,!}\,0.5^1 0.5^3\right) = 0.6875$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(C_6^0 0.5^0 0.5^{6-0}\right) - \left(C_6^1 0.5^1 0.5^{6-1}\right) - \left(C_6^2 0.5^2 0.5^{6-2}\right)$$
$$= 1 - \left(\frac{6!}{0!\,(6-0)\,!}0.5^0 0.5^6\right) - \left(\frac{6!}{1!\,(6-1)\,!}0.5^1 0.5^5\right) - \left(\frac{6!}{2!\,(6-2)\,!}0.5^2 0.5^4\right) = 0.6566$$

Итого, более вероятно выиграть более одного раза в 4 партиях, чем более двух раз в шести партиях

2. В кошельке лежат 8 монет достоинством 5 копеек и 2 монеты достоинством 3 копейки. Наудачу выбирается монета и бросается 5 раз. Какова вероятность того, что в сумме будет 15 очков, если герб принимается за 0 очков?

Решение:

A – монета 5 копеек => $P(A) = \frac{8}{10}$

B – монета 3 копеек => $P(B) = \frac{2}{10}$

C – сумма = 15 очков

По формуле полной вероятности:

$$P(C) = P(A) * P(C|A) + P(B) * P(C|B)$$

Вероятность получить 15 очков монетами по 5 копеек:

$$P(C|A) = C_5^3 0.5^3 0.5^{5-3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)\,!}\,0.5^3 0.5^2 = 0.3125$$

Вероятность получить 15 очков монетами по 3 копеек:

$$P(C|B) = C_5^5 0.5^5 0.5^{5-5} = \frac{5!}{5!\,(5-5)\,!}\,0.5^5 0.5^0 = 0.03125$$

$$P(C) = P(A) * P(C|A) + P(B) * P(C|B) = \frac{8}{10} * 0.3125 + \frac{2}{10} * 0.03125 = 0.25625$$

3. Два баскетболиста делают по три броска в корзину. Вероятность попадания у первого 0.6, у второго 0.7. Найти вероятность того, что у обоих будет равное количество попаданий.

Решение:

S – у обоих будет равное количество попаданий

A1 – первый забьет ни разу => $P(A1) = C_3^0 * 0.6^0 * 0.4^{3-0} = 0.064$

A2 – второй забьет ни разу => $P(A2) = C_3^0 * 0.7^0 * 0.3^{3-0} = 0.027$

B1 – первый забьет один раз => $P(B1) = C_3^1 * 0.6^1 * 0.4^{3-1} = 0.288$

B2 – второй забьет один раз => $P(B2) = C_3^1 * 0.7^1 * 0.3^{3-1} = 0.189$

C1 – первый забьет второй раз => $P(\text{C}1) = C_3^2 * 0.6^2 * 0.4^{3-2} = 0.432$

C2 – второй забьет второй раз => $P(\text{C}2) = C_3^2 * 0.7^2 * 0.3^{3-2} = 0.441$

D1 – первый забьет три раза => $P(D1) = C_3^3 * 0.6^3 * 0.4^{3-3} = 0.216$

D2 – второй забьет три раза => $P(D2) = C_3^3 * 0.7^3 * 0.3^{3-3} = 0.343$

$$P(S) = P(A1) * P(A2) + P(B1) * P(B2) + P(C1) * P(C2) + P(D1) * P(D2)$$
$$= 0.001728 + 0.054432 + 0.190512 + 0.074088 = 0.32076$$

4. Партия изделий содержит 1% брака. Каков должен быть объем контрольной выборки, чтобы вероятность обнаружить в ней хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0.95?

Решение:

A – хотя бы одно бракованное изделие

$\overline{A}$ – нет бракованных изделий

Партия изделий содержит 1% брака => партия изделий содержит 0.99 не брака

Обозначим за n – объем контрольной выборки, следовательно, $P\left(\overline{A}\right) = 0.99^n$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \geq 0.95$$

$$1 - 0.99^n \geq 0.95$$

$$0.05 \leq 0.99^n$$

$$n \geq \frac{ln(0.05)}{ln(0.99)}$$

$$n \approx 299$$