Формула полной вероятности. Формула Байеса.

1. В первом ящике 3 белых шара и 8 черных, во втором — 6 белых и 5 черных. Из первого во второй наудачу переложили один шар. Какова теперь вероятность вынуть из первого ящика черный шар?

Решение:

А — вынули черный шар из первого ящика

Всего в каждом из ящиков 11 шаров

H1 - в первый раз вынули белый шар:

$$P(H1) = \frac{3}{11}$$

$$P(A|H1) = \frac{8}{10}(10 - \text{осталось}, 8 - \text{всего})$$

H2 - в первый раз вынули черный шар:

$$P(H2) = \frac{8}{11}$$

$$P(A|H2) = \frac{7}{10}(10 - \text{осталось}, 7 - \text{всего})$$

Нам нужно получить черный шар при любом из предыдущих возможных вариантов, по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H1) * P(A|H1) + P(H2) * P(A|H2) = \frac{3}{11} * \frac{8}{10} + \frac{8}{11} * \frac{7}{10} = \frac{8}{11}$$

2. Есть 10 симметричных монет, 8 нормальных и 2 бракованных (с двух сторон герб). Наудачу взятая монета подбрасывается 3 раза. Найти вероятность того, что выпадут три герба.

Решение:

A – выпал герб при 1 подбрасывании

B – выпал герб в каждом из трех подбрасываний

H1 – выпадет нормальная монета

H2 – выпадет бракованная монета

Тогда, по формуле полной вероятности:

$$p(A) = p(A|H1) * p(H1) + p(A|H2) * p(H2)$$

$$p(H1) = \frac{8}{10}$$

$$p(H2) = \frac{2}{10}$$

$$p(A|H1) = \frac{1}{2}$$

$$p(A|H1) = 1$$

$$p(A) = \frac{1}{2} * \frac{8}{10} + 1 * \frac{2}{10} = \frac{6}{10} = 0.6$$

Т.к. мы посчитали для одно подбрасывания, а у нас их три, к тому же эти события независимые, следовательно:

$$P(B) = 0.6 * 0.6 * 0.6 = 0.216$$

3. Из 12 билетов 5 выигрышных. Билеты вытягиваются по одному без возвращения. Во второй раз был вытянут выигрышный билет. Какова вероятность того, что и в первый раз был вытянут выигрышный билет?

Решение:

А – во второй раз был вытянут выигрышный билет

Н1 – в первый раз был вытянут выигрышный билет

Н2 – в первый раз был вытянут невыигрышный билет

$$P(H1|A) = \frac{P(H1) * P(A|H1)}{P(H1) * P(A|H1) + P(H2) * P(A|H2)}$$

$$P(H1) = \frac{5}{12}$$

$$P(H2) = \frac{7}{12}$$

$$P(A|H1) = \frac{4}{11}$$

$$P(A|H2) = \frac{5}{11}$$

$$P(H1|A) = \frac{\frac{5}{12} * \frac{4}{11}}{\frac{5}{12} * \frac{4}{11} + \frac{7}{12} * \frac{5}{11}} = \frac{4}{11}$$

4. Три охотника одновременно и независимо стреляют в кабана. Известно, что первый попадает с вероятностью 0.8, второй — 0.4, третий – 0.2. Кабан убит и в нем две пули. Как делить кабана?

Решение:

А – кабан убит и в нем две пули

Н1 – в кабана попал первый, не попали второй и третий; $P(H1) = 0.8 * 0.6 * 0.8 = 0.384$

$$P(A|H1) = 0$$

H2 – в кабана попал второй, не попали первый и третий; $P(H2) = 0.4 * 0.2 * 0.8 = 0.064$

$$P(A|H2) = 0$$

H3 – в кабана попал третий , не попало первый и второй; $P(H3) = 0.2 * 0.2 * 0.6 = 0.024$

$$P(A|H3) = 0$$

H4 – в кабана попали первый и второй, не попал третий; $P(H4) = 0.8 * 0.4 * 0.8 = 0.256$

$$P(A|H4) = 1$$

H5 – в кабана попали второй и третий, не попал первый; $P(H5) = 0.4 * 0.2 * 0.2 = 0.016$

$$P(A|H5) = 1$$

H6 – в кабана попали первый и третий, не попал второй; $P(H6) = 0.8 * 0.2 * 0.6 = 0.096$

$$P(A|H6) = 1$$

H7 – в кабана попали все три охотника; $P(H7) = 0.8 * 0.4 * 0.2 = 0.064$

$$P(A|H7) = 0$$

H8 – в кабана никто не попал; $P(H8) = 0.2 * 0.6 * 0.8 = 0.096$

$$P(A|H8) = 0$$

Проверка: суммирую P(Hi) = 1, выполнено

Требуется найти – $P(H4|A)$, $P(H5|A)$, $P(H6|A)$

$$P(H4|A) = \frac{P(A|H4) * P(H4)}{P(A|H4) * P(H4) + P(A|H5) * P(H5) + P(A|H6) * P(H6)}$$

$$P(H4|A) = \frac{1 * 0.256}{0.256 + 0.016 + 0.096} = \frac{16}{23}$$

$$P(H5|A) = \frac{P(A|H5) * P(H5)}{P(A|H4) * P(H4) + P(A|H5) * P(H5) + P(A|H6) * P(H6)}$$

$$P(H4|A) = \frac{1 * 0.016}{0.256 + 0.016 + 0.096} = \frac{1}{23}$$

$$P(H6|A) = \frac{P(A|H6) * P(H6)}{P(A|H4) * P(H4) + P(A|H5) * P(H5) + P(A|H6) * P(H6)}$$

$$P(H4|A) = \frac{1 * 0.096}{0.256 + 0.016 + 0.096} = \frac{6}{23}$$