Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 02

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Sejam $U = \{0,1,2,3,4\}$, $A = \{0,4\}$, $B = \{0,1,2,3\}$, $C = \{1,4\}$, $D = \{0,1\}$. Determine os seguintes conjuntos:

   (a) $A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$

(b) $B \cap C = \{1\}$

(c) $A \cap \overline{B} = \{4\}$

(d) $A \cup (B \cap C)$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{0,4\} \cup \{1\} \\ &= \{0,1,4\}. \end{aligned}$$

(e) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= \{0,1,2,3,4\} \cap \{0,1,4\} \\ &= \{0,1,4\} \end{aligned}$$

(f) $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C})$

$$\begin{aligned} (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C}) &= (U - (A \cap B)) \cup (U - (A \cap C)) \\ &= (\{0,1,2,3,4\} - \{0\}) \cup (\{0,1,2,3,4\} - \{4\}) \\ &= \{1,2,3,4\} \cup \{0,1,2,3\} \\ &= \{0,1,2,3,4\} \end{aligned}$$

(g) $A \cup \overline{B} = \{0,4\}$

(h) $A - B = \{4\}$

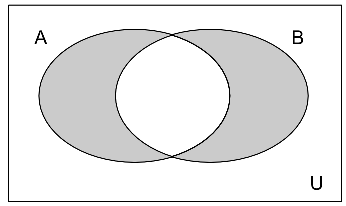
(i) $B - \overline{A} = \{0\}$

(j) $A \cup (B \cap C \cap D)$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C \cap D) &= \{0,4\} \cup \{1\} \\ &= \{0,1,4\} \end{aligned}$$

2. Represente por meio de um diagrama de Venn a diferença simétrica entre dois conjuntos, $A\Delta B$, definida por $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

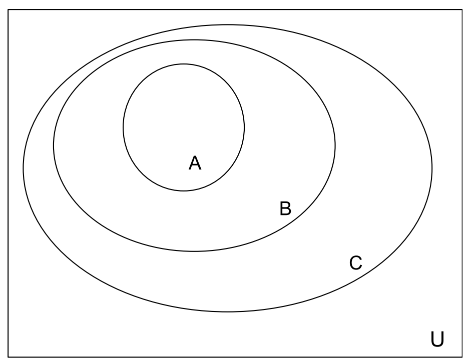
Resposta:



3. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Represente por meio de diagramas de Venn as seguintes situações:

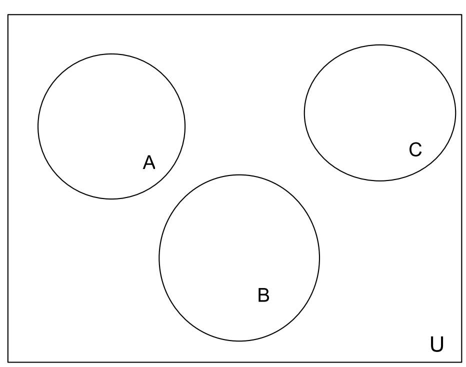
   (i) $A \subset B \subset C$

   ***R*esposta:**



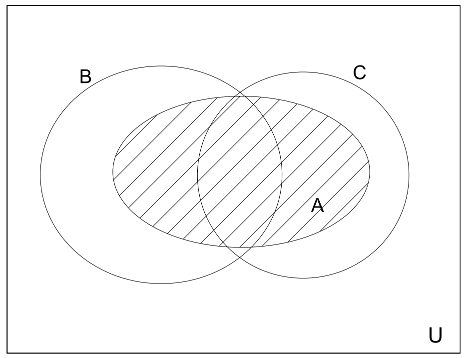
   (ii) $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$

   ***R*esposta:**



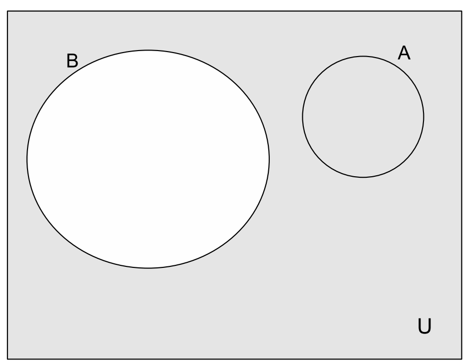
(iii) $A \subseteq B \cup C$

***R*esposta:**



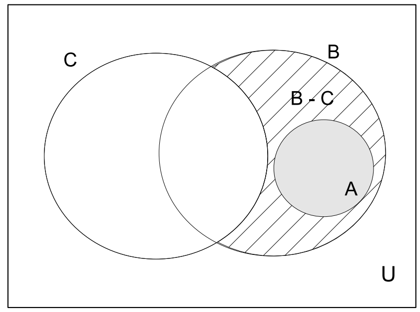
(iv) $A \subseteq \overline{B}$

***R*esposta:**



(v) $A \subseteq B - C$

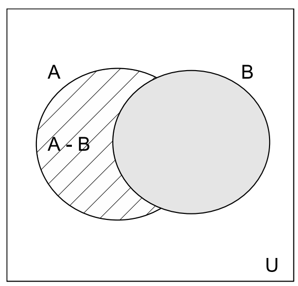
***R*esposta:**

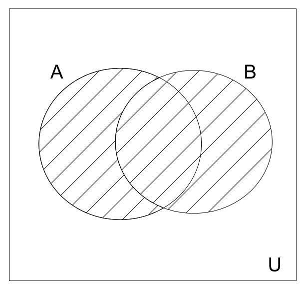


4. Verifique, usando os diagramas de Venn as seguintes igualdades:

   (i) $(A - B) \cup B = A \cup B$

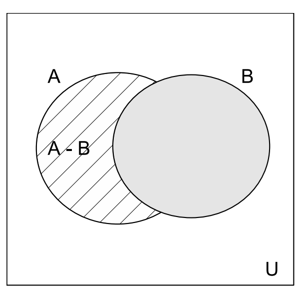
   ***R*esposta:**

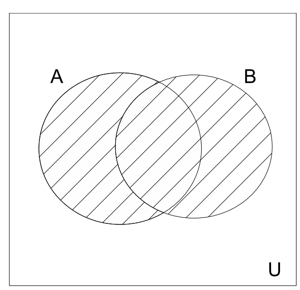




   (ii) $(A - B) \cap B = \emptyset$

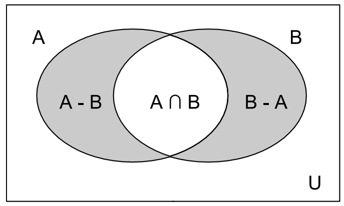
   ***R*esposta:**





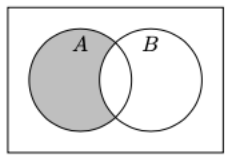
   (iii) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

   ***R*esposta:**

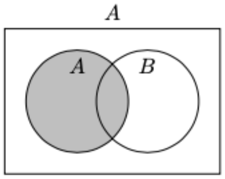


(iv) $A - B = A \cap \overline{B}$

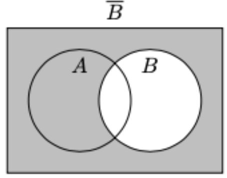
***R*esposta:**



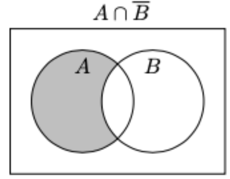
A



$\overline{B}$

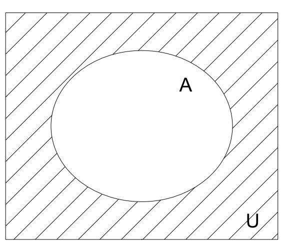


$A \cap \overline{B}$

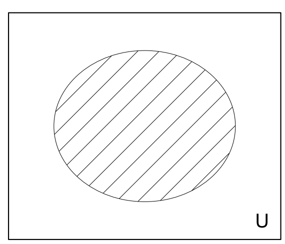


(v) $(\overline{\overline{A}}) = A$

***R*esposta:**



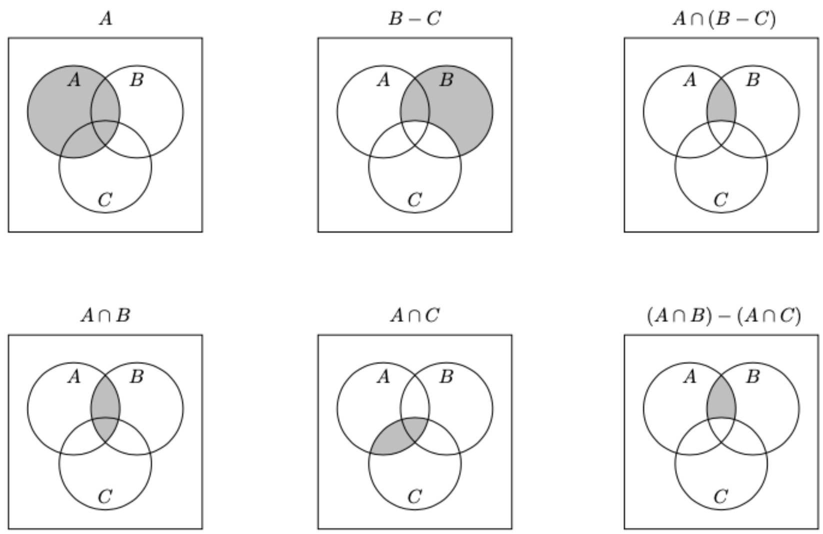
$\overline{A}$



$\overline{\overline{A}}$

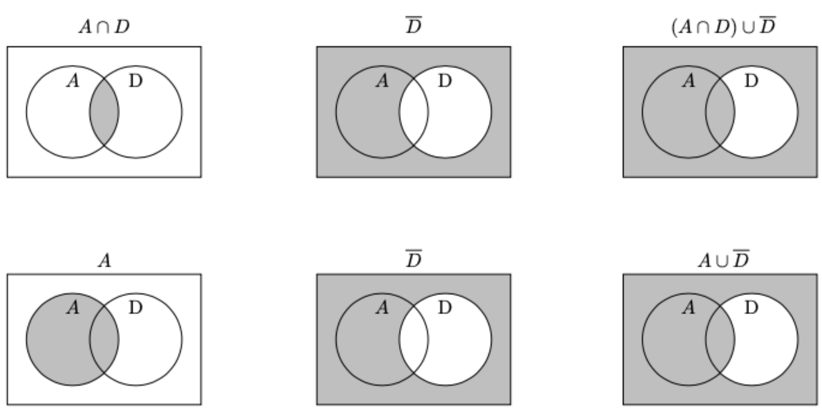
(vi) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

***R*esposta:**



(vii) $(A \cap D) \cup \overline{D} = A \cup \overline{D}$

***R*esposta:**



5. Mostre que $A \subseteq B$ e $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$.

   ***R*esposta:** Seja $x \in A$. Como$A \subseteq B$ e $A \subseteq C$, então $x \in B$ e $x \in C$. Logo, $x \in B \cap C$ e conseqüentemente $A \subseteq B \cap C$.

6. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

   ***R*esposta:** Primeiro provaremos que $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$.

   Seja $x \in A$. Como $A \subseteq B$, então $x \in B$. Se $x \in A - B$, então $x \in A$ e $x \notin B$. No entanto, todo elemento de A é também elemento de B, logo $A - B = \emptyset$.

   Provaremos agora que $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.

   Como $A - B = \emptyset$, não existe x tal que $x \in A$ e $x \notin B$. Logo, todo elemento de A é elemento de B e conseqüentemente $A \subseteq B$.

7. Mostre que $A - B \subseteq A$

   ***R*esposta:** $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Portanto, se $x \in A - B$, então $x \in A$.

8. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

   ***R*esposta:** $(\Rightarrow)$ Como $A \subseteq B$, se $x \in A$ então $x \in B$. Logo, se $x \notin B$, então $x \notin A$.

   $(\Leftarrow)$ $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ significa que se $x \in \overline{B}$, então $x \in \overline{A}$. Equivalentemente, se $x \notin B$, então $x \notin A$. Logo, não existe $x \in A$ tal que $x \notin B$. Portanto $A \subseteq B$.

9. Dados os conjuntos $C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é múltiplo de } 2\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é múltiplo de } 3\}$, $E = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é múltiplo de } 6\ \}$, verifique que $C \cap D = E$.

   ***R*esposta:** Decompondo 6 em fatores primos obtemos que $6 = 2.3$, portanto se um número n é múltiplo de 6, então n é múltiplo de 2 e 3, isto significa que $E \subseteq C \cap D$. Analogamente, se n é múltiplo de 2 e 3 então n é múltiplo de 6, isto é $D \cap C \subseteq E$. Concluímos portanto que $C \cap D = E$.

10. Considere $A = \{x \in \mathbb{N} | 5 \leq x^2 \leq 300\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq 3x - 2 \leq 30\}$. Calcule:

    ***R*esposta:** A e B representam os conjuntos: $A = \{3, 4, 5, ..., 17\}$ e $B = \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

    (i) $A \cup B = \{1, 2, 3, ..., 16, 17\}$

    (ii) $A \cap B = \{3, 4, ..., 10\}$

    (iii) $A - B = \{11, 12, ..., 17\}$

    (iv) $B - A = \{1, 2\}$

    (v) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 18\}$

    (vi) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 2$ ou $x \geq 18\}$

11. Dado $C = \{2, -1, 5\}$, considere o conjunto universo sendo o conjunto de partes de C, $U = P(C)$. Calcule:

    (i) $\overline{A}$ $\qquad$ (ii) $A \cap B$

    para $A = \{\{2, -1\}, \{2\}\}$, $B = \{\{5\}, \{2, -1, 5\}, \{-1, 2\}\}$.

    ***R*esposta:** $U = P(C) = \{\emptyset, \{2\}, \{-1\}, \{5\}, \{2, -1\}, \{2, 5\}, \{-1, 5\}, \{2, -1, 5\}\}$.

    (i) $\overline{A} = \{\emptyset, \{-1\}, \{5\}, \{2, 5\}, \{-1, 5\}, \{2, -1, 5\}\}$.

    (ii) $A \cap B = \{\{2, \text{-}1\}\}$.

12. Use a propriedade distributiva da interseção em relação a união de conjuntos para provar que $(A \cap D) \cup \overline{D} = A \cup \overline{D}$

    ***R*esposta:**

$$
\begin{array}{lcl}
(A \cap D) \cup \overline{D} & = & \\
\text{(propriedade distributiva)} & = & (A \cup \overline{D}) \cap (D \cup \overline{D}) \\
 & = & A \cup \overline{D}
\end{array}
$$

13. Prove que $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

***R*esposta:**

$$
\begin{array}{lcl}
A - (B - C) & = & \\
\text{(prop. da diferença)} & = & A \cap \overline{(B \cap \overline{C})} \\
\text{(Lei de Morgan)} & = & A \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) \\
 & = & A \cap (\overline{B} \cup C) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A - B) \cup (A \cap C)
\end{array}
$$

14. Mostre as seguintes igualdades:

(i) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

***R*esposta:** Seja U o universo onde estão os conjuntos A e B:

$$
\begin{array}{lcl}
(A - B) \cup (B - A) & = & \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & (A \cup (B \cap \overline{A})) \cap (\overline{B} \cup (B \cap \overline{A})) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
\text{(Lei de Morgan)} & = & (A \cup B) \cap U \cap U \cap \overline{(A \cap B)} \\
 & = & (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A \cup B) - (A \cap B)
\end{array}
$$

(ii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

***R*esposta:**

$$
\begin{array}{lcl}
(A \cap B) - (A \cap C) & = & \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\
\text{(Lei de Morgan)} & = & (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & ((A \cap B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
\text{(prop. comutativa e associativa)} & = & ((A \cap \overline{A}) \cap B) \cup (A \cap (B \cap \overline{C})) \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (\emptyset \cap B) \cup (A \cap (B - C)) \\
 & = & A \cap (B - C)
\end{array}
$$

15. Dados os seguintes conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x \leq 7\}$ Verifique que:

(i) $A = B$

***R*esposta:** $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(ii) $\overline{A} \neq \overline{B}$

***R*esposta:** $\overline{A} = \{..., -3, -2, -1, 8, 9, ...\}$ e $\overline{B} = \{8, 9, 10, ...\}$.