Módulo: Indução matemática

- Princípio da indução matemática
- Indução forte

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Objetivo:

- Aprender uma técnica para provar resultados matemáticos.

Importância:

- É uma técnica poderosa e muito útil usada para provar resultados que envolvem os números naturais.

Objetivo:

- Aprender uma técnica para provar resultados matemáticos.

Importância:

- É uma técnica poderosa e muito útil usada para provar resultados que envolvem os números naturais.

Por exemplo:

Provar que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Aula 4: Princípio da indução matemática

Conteúdo:

- Introdução
- Princípio da indução matemática (PIM)
- Princípio da indução matemática generalizado

Introdução:

- Idéia intuitiva:

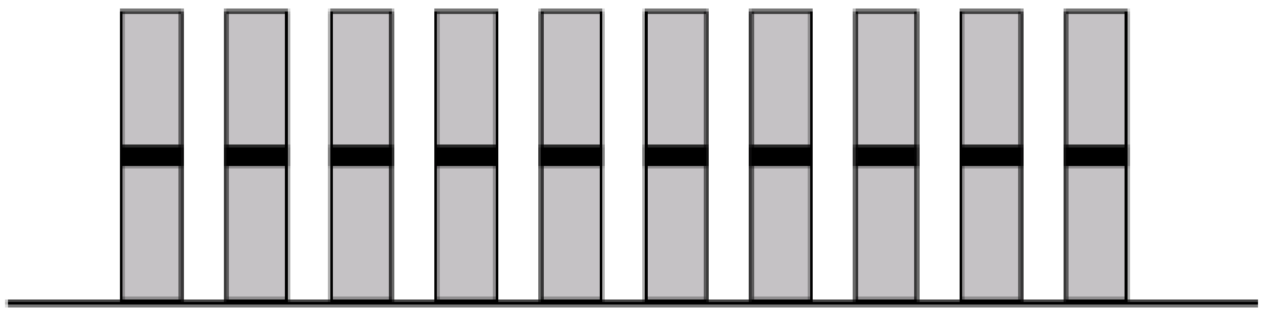
Exemplo 1:

Consideremos uma seqüência de dominós alinhados tal que:

Se um cair ele vai <u>derrubar</u> o seguinte

PIM

Voltar



Introdução:

Idéia intuitiva:

Exemplo 1:

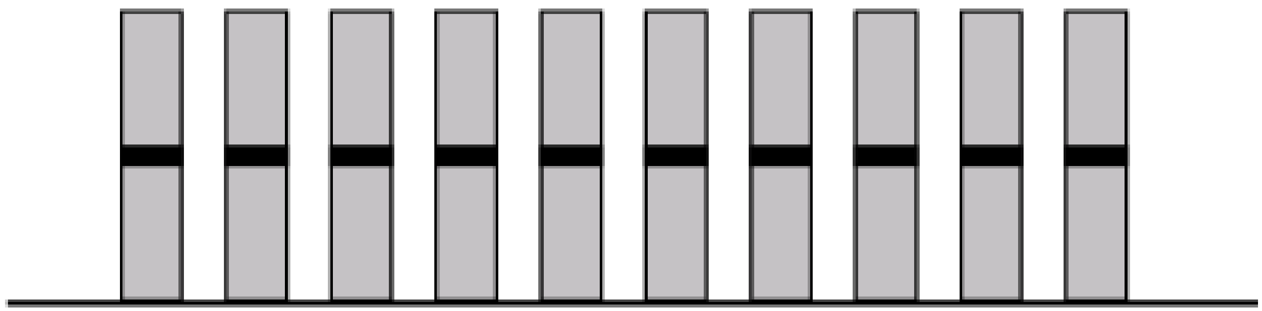
Consideremos uma seqüência de dominós alinhados tal que:

Se um cair ele vai derrubar o seguinte

Clicar

PIM

Voltar



Introdução:

Idéia intuitiva:

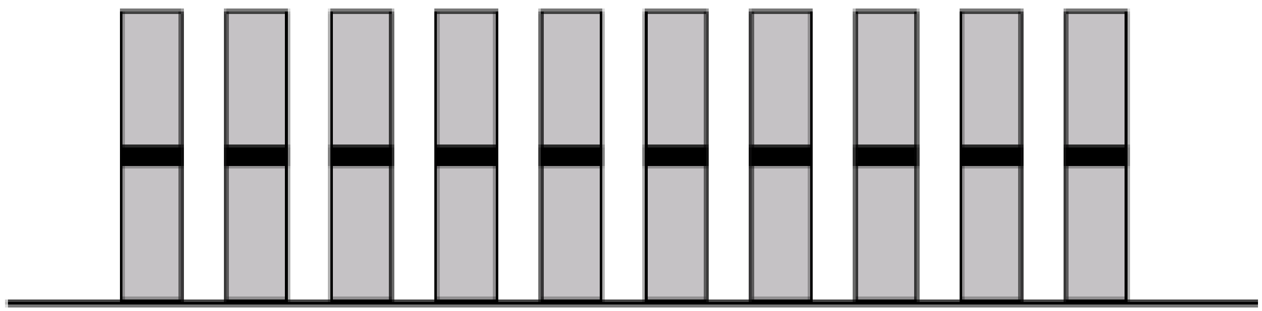
Exemplo 1:

Consideremos uma seqüência de dominós alinhados tal que:

Se um cair ele vai derrubar o seguinte

PIM

Voltar



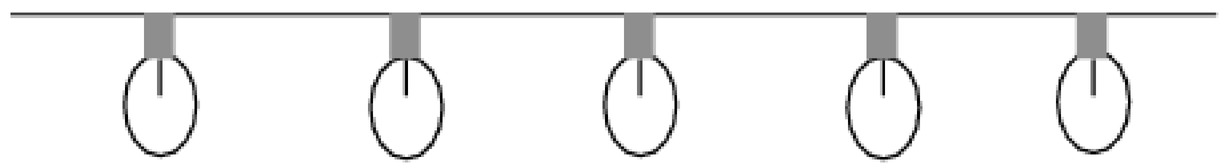
Exemplo 2:

Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

ao acender uma delas acende-se a seguinte

PIM

Voltar



Exemplo 2:

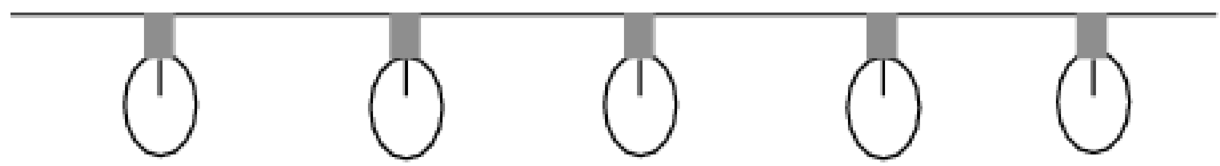
Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

ao acender uma delas acende-se a seguinte

Clicar

PIM

Voltar



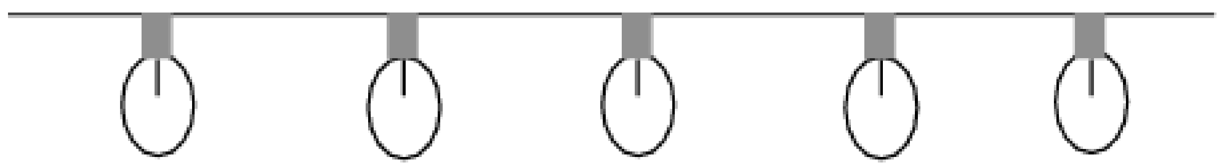
Exemplo 2:

Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

ao acender uma delas acende-se a seguinte

PIM

Voltar



Princípio da indução matemática:

Formalização:

- Seja $P(n)$ uma afirmação, para cad$n \in \mathbb{N}$.

Se : (i) $P(1)$ verdadeira e

(ii) $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdadei$\forall k \in \mathbb{N}$.

Princípio da indução matemática:

Formalização:

- Seja $P(n)$ uma afirmação, para cad$n \in \mathbb{N}$.

Se : (i) $P(1)$ verdadeira e

(ii) $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdadei$\forall k \in \mathbb{N}$.

Então $P(n)$ verdadeira para tod$n \in \mathbb{N}$.

Para aplicarmos o PIM precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que $P(n)$ verdadeira par $n = 1$

(2) Hipótese de indução:

Assumir que $P(k)$ verdadeira par $k \geq 1$

(3) Passo indutivo:

Mostrar que $P(k+1)$ verdadeira, assumindo (2).

Exemplo 3:

- Mostre que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Exemplo 3:

- Mostre que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Prova:

Seja $P(n) \ : \ 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemplo 3:

- Mostre que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Prova:

Seja $P(n) \; : \; 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(1) Base da indução:

$$P(1) \; : \; 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Exemplo 3:

- Mostre que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Prova:

Seja $P(n) \; : \; 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(1) Base da indução:

$P(1) \; : \; 1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI): Assuma que $P(k)$ é verdadeira, $k \geq 1$:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

(2) Hipótese de indução (HI): Assuma que $P(k)$ é verdadeira, $k \geq 1$:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI): Assuma que $P(k)$ é verdadeira, $k \geq 1$:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1) \text{ verdadeira}}_{1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

(2) Hipótese de indução (HI): Assuma que $P(k)$ é verdadeira, $k \geq 1$:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1) \text{ verdadeira}}_{1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

<u>Desenvolvendo</u>:

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + k}_{\parallel \text{ (HI)}} + (k+1) =$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} =$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} =$$

$$\frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2+k+2k+2}{2} =$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2+k+2k+2}{2} =$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

Então pelo PIM

$$P(n): 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ verdadeira } \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 4:

- Mostre que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$

Prova:

Seja $P(n) \; : \; 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Exemplo 4:

- Mostre que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Prova:

Seja $P(n) \ : \ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(1) Base da indução:

$P(1) \ : \ 1 = 1^2$

Exemplo 4:

- Mostre que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Prova:

Seja $P(n) \; : \; 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(1) Base da indução:

$P(1) \; : \; 1 = 1^2$ verdadeira

Exemplo 4:

- Mostre que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Prova:

Seja $P(n) \ : \ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

(1) Base da indução:

$P(1) \ : \ 1 = 1^2$ verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI):

$P(k) \ : \ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $P(k+1)$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{1+3+\ldots+[2(k+1)-1]=(k+1)^2}$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \quad \text{verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{1+3+\ldots+[2(k+1)-1]=(k+1)^2} \quad \text{verdadeira}$$

Desenvolvendo:

$$\underbrace{1+3+\ldots+(2k-1)}_{\overset{\text{(HI)}}{=}\ k^2} + \underbrace{[2(k+1)-1]}_{=\ 2k+1} =$$

$$k^2 + 2k+1 = (k+1)^2$$

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $\underbrace{P(k+1)}_{1+3+\ldots+[2(k+1)-1]=(k+1)^2}$ verdadeira

Desenvolvendo:

$$\underbrace{1+3+\ldots+(2k-1)}_{\overset{\text{(HI)}}{=}\; k^2} + \underbrace{[2(k+1)-1]}_{=\; 2k+1} =$$

$$k^2 + 2k+1 = (k+1)^2$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeir $\Rightarrow$ $\underbrace{P(k+1)}_{1+3+\ldots+[2(k+1)-1]=(k+1)^2}$ verdadeira

Desenvolvendo:

$$\underbrace{1+3+\ldots+(2k-1)}_{\overset{\text{(HI)}}{=}\ k^2} + \underbrace{[2(k+1)-1]}_{=\ 2k+1} = (k+1)^2$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

Então pelo PIM

$P(n)\ :\ 1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$ verda $\forall n \in \mathbb{N}$

Exemplo 5:

- Mostre que 8 divide $3^{2n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Exemplo 5:

- Mostre que 8 divide $3^{2n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Seja $P(n) \;:\; 8$ divide $3^{2n} - 1$

Exemplo 5:

- Mostre que 8 divide $3^{2n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Seja $P(n) \; : \; 8$ divide $3^{2n} - 1$

ou

$3^{2n} - 1 = 8 \cdot p$ para algum $p \in \mathbb{N}$.

(1) Base da indução:

$$P(1) \ : \ 3^{2\cdot 1} - 1 = 9 - 1 = 8 \cdot 1 \quad (p = 1)$$

(1) Base da indução:

$P(1) \; : \; 3^{2\cdot 1} - 1 = 9 - 1 = 8 \cdot 1 \quad (p = 1)$ verdadeira

(1) Base da indução:

$P(1)$: $3^{2\cdot 1} - 1 = 9 - 1 = 8 \cdot 1 \quad (p = 1)$ verdadeira

(2) Hipótese de indução:

$P(k)$ verdadeira,

$3^{2k} - 1 = 8 \cdot p$ para algı $p \in \mathbb{N}$.

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $P(k+1)$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{3^{2(k+1)} - 1 = 8 \cdot p} \text{ verdadeira}$$

para algu$p \in \mathbb{N}$.

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \quad \text{verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{3^{2(k+1)}-1=8\cdot p} \quad \text{verdadeira}$$

para algu$p \in \mathbb{N}$.

Desenvolvendo:

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k} \cdot 3^2 - 1 = 3^{2k}(8+1) - 1 =$$

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $\underbrace{P(k+1)}_{3^{2(k+1)}-1=8\cdot p}$ verdadeira

para algu $p \in \mathbb{N}$.

<u>Desenvolvendo</u>:

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k} \cdot 3^2 - 1 = 3^{2k}(8+1) - 1 =$$

$$= 3^{2k} \cdot 8 + 3^{2k} - 1 = \underbrace{3^{2k} \cdot 8}_{\substack{\parallel \\ 3^{2k} \cdot 8}} + \underbrace{3^{2k} - 1}_{\substack{\parallel \text{(HI)} \\ 8 \cdot p}}$$

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k} \cdot 8 + 8 \cdot p = \underbrace{8 \cdot (3^{2k} + p)}_{\in \mathbb{N}} \qquad (p = 3^{2k} + p)$$

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k} \cdot 8 + 8 \cdot p = \underbrace{8 \cdot (3^{2k} + p)}_{\in \mathbb{N}} \qquad (p = 3^{2k} + p)$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k} \cdot 8 + 8 \cdot p = \underbrace{8 \cdot (3^{2k} + p)}_{\in \mathbb{N}} \qquad (p = 3^{2k} + p)$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

Então pelo PIM

$P(n)$: 8 divic$3^{2n} - 1$ verdade$\forall n \in \mathbb{N}$

Princípio da indução matemática generalizado:

- Princípio da indução matemática generalizado
  - Lembremos a formulação do PIM:

Seja $P(n)$ uma afirmação, para cada inteiro positivo n.

Se:

(i) $P(1)$ verdadeira e

(ii) $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdade $\forall k \in \mathbb{N}$.

Então $P(n)$ verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

PIM Voltar

Para aplicarmos o PIM generalizado precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que $P(n)$ verdadeira pa $n = n_0$

(2) Hipótese de indução:

Assumir que $P(k)$ verdadeira pa $k \geq n_0$

(3) Passo indutivo:

Mostrar que $P(k+1)$ verdadeira, assumindo a hipótese de indução (2)

Exemplo 6:

- Mostre que $n^2 > 3n \quad \forall n \geq 4, \quad n \in \mathbb{N}.$

Exemplo 6:

- Mostre que $n^2 > 3n \quad \forall n \geq 4, \quad n \in \mathbb{N}.$

Prova:

Seja $P(n) \;:\; n^2 > 3n, \quad n \geq 4$

(1) Base da indução:

$$P(4) \;:\; 16 > 3 \cdot 4 = 12$$

Exemplo 6:

- Mostre que $n^2 > 3n \quad \forall n \geq 4, \quad n \in \mathbb{N}.$

Prova:

Seja $P(n) \ : \ n^2 > 3n, \quad n \geq 4$

(1) Base da indução:

$P(4) \ : \ 16 > 3 \cdot 4 = 12$ verdadeira

Exemplo 6:

- Mostre que $n^2 > 3n \quad \forall n \geq 4, \quad n \in \mathbb{N}.$

Prova:

Seja $P(n) \ : \ n^2 > 3n, \quad n \geq 4$

(1) Base da indução:

$P(4) \ : \ 16 > 3 \cdot 4 = 12$ verdadeira

(2) Hipótese de indução:

$P(k) \ : \ k^2 > 3k, \quad k \geq 4$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $P(k+1)$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{(k+1)^2 > 3(k+1)}$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $\underbrace{P(k+1)}_{}$ verdadeira

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 > 3(k+1)$$

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $\underbrace{P(k+1)}_{k^2+2k+1 \,=\, (k+1)^2 \,>\, 3(k+1)}$ verdadeira

Desenvolvendo:

$P(k) \; : \; k^2 > 3k$ verdadeira para $k \geq 4$

$$k^2 + (2k+1) > 3k + (2k+1)$$

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $\underbrace{P(k+1)}_{k^2+2k+1 \,=\, (k+1)^2 > 3(k+1)}$ verdadeira

Desenvolvendo:

$P(k)\ :\ k^2 > 3k$ verdadeira para $k \geq 4$

$$k^2 + (2k+1) > 3k + (2k+1) \overset{(k\geq 4)}{\geq} 3k + 8 + 1 = 3k + 9$$

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $\underbrace{P(k+1)}_{k^2+2k+1 \,=\, (k+1)^2 \,>\, 3(k+1)}$ verdadeira

<u>Desenvolvendo</u>:

$P(k) \; : \; k^2 > 3k$ verdadeira para $k \geq 4$

$$\underbrace{k^2 + (2k+1)}_{(k+1)^2} > 3k + (2k+1) \overset{(k \geq 4)}{\geq} 3k + 8 + 1 = 3k + 9$$

$$(k+1)^2 > 3k + 9 = 3(k+3) > 3(k+1)$$

(3) Passo indutivo:

$P(k)$ verdadeira $\Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{k^2+2k+1 = (k+1)^2 > 3(k+1)}$ verdadeira

<u>Desenvolvendo</u>:

$P(k) : k^2 > 3k$ verdadeira para $k \geq 4$

$$\underbrace{k^2 + (2k+1)}_{(k+1)^2} > 3k + (2k+1) \overset{(k \geq 4)}{\geq} 3k + 8 + 1 = 3k + 9$$

$$(k+1)^2 > 3k + 9 = 3(k+3) > 3(k+1)$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

Então pelo PIM generalizado

$P(n) : n^2 > 3n$ verdade $\forall n \geq 4$

- Verifique que:

$P(n)\ :\ n^2 > 3n$ não é verdadeira pa$n = 1, 2, 3$

$$\left.\begin{array}{l} P(1)\ :\ 1^2 > 3 \cdot 1 \\ \\ P(2)\ :\ 2^2 > 3 \cdot 2 \\ \\ P(3)\ :\ 3^2 > 3 \cdot 3 \end{array}\right\}$$ não são verdadeiras

Resumo:

Princípio PIM generalizado

- Estrutura
  - Base de indução: $P(n)$ verdadeira $n = n_0$
  - Hipótese de indução: $P(k)$ verdadeira $\forall k \geq n_0$
  - Passo indutivo: $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $P(k+1)$ verdadeira
- Em particular

$n_0 = 1$: PIM

Exercícios:

Prove usando indução matemática

(i) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{(n-1)} = 2^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n-1) = \dfrac{n(1+3n)}{2}$

(iv) $(1+1)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = n+1$

(v) 2 divide $n^2 + n$