Aula 6: Princípios Aditivo e Multiplicativo

Conteúdo:

- Princípios básicos de contagem:
  - Princípio Aditivo
  - Princípio Multiplicativo

Objetivos:

- Desenvolver as idéias e técnicas básicas para problemas de contagem.
- Reduzir um problema grande a vários problemas pequenos, usando os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Importância:

- Os problemas de contagem aparecem naturalmente no nosso dia a dia.
- Muitas vezes estamos apenas interessados em contar os elementos de um determinado conjunto, sem enumerá-los.
- No desenvolvimento de técnicas de contagem que veremos mais adiante, tais como: permutações, combinações, etc, estaremos usando basicamente os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Problemas de contagem:

Exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática (M_1, M_2, M_3, M_4) e três livros distintos de Português (P_1, P_2, P_3), de quantas maneiras podemos selecionar (escolher):

a) Um livro (<u>ou</u> de Matemática <u>ou</u> de Português).

b) Dois livros, sendo <u>um</u> de Matemática <u>e outro</u> de Português.

Exemplo 1 (continuação):

a) **Um livro (<u>ou</u> de Matemática <u>ou</u> de Português)**

O livro de Matemática pode ser escolhido de 4 maneiras:

Exemplo 1 (continuação):

a) Um livro (<u>ou</u> de Matemática <u>ou</u> de Português)

O livro de Matemática pode ser escolhido de 4 maneiras:

livro M_1 ou
livro M_2 ou
livro M_3 ou
livro M_4

Exemplo 1 (continuação):

a) **Um livro (<u>ou</u> de Matemática <u>ou</u> de Português)**

O livro de Matemática pode ser escolhido de 4 maneiras:

livro M_1 ou
livro M_2 ou
livro M_3 ou
livro M_4

O livro de Português pode ser escolhido de 3 maneiras:

Exemplo 1 (continuação):

a) **Um livro (<u>ou</u> de Matemática <u>ou</u> de Português)**

O livro de Matemática pode ser escolhido de 4 maneiras:

livro M_1 ou
livro M_2 ou
livro M_3 ou
livro M_4

O livro de Português pode ser escolhido de 3 maneiras:

livro P_1 ou
livro P_2 ou
livro P_3

Exemplo 1 (continuação):

a) Um livro (ou de Matemática ou de Português)

O livro de Matemática pode ser escolhido de 4 maneiras:

livro M_1 ou
livro M_2 ou
livro M_3 ou
livro M_4

O livro de Português pode ser escolhido de 3 maneiras:

livro P_1 ou
livro P_2 ou
livro P_3

Número de maneiras: $4 + 3 = 7$

Exemplo 1 (continuação):

b) Dois livros, sendo um de Matemática e outro de Português.

Temos dois conjuntos:

$A = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ $B = \{P_1, P_2, P_3\}$

PA

Voltar

cederj

Exemplo 1 (continuação):

b) Dois livros, sendo um de Matemática e outro de Português.

Temos dois conjuntos:

$$A = \{M_1, M_2, M_3, M_4\} \qquad B = \{P_1, P_2, P_3\}$$

clicar

PA

Voltar

Exemplo 1 (continuação):

b) Dois livros, sendo um de Matemática e outro de Português.

Temos dois conjuntos:

$A = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ $B = \{P_1, P_2, P_3\}$

PA

Voltar

Resumindo

a) De quantas maneiras podemos escolher <u>um</u> livro qualquer (ou de Matemática ou de Português)?

Resumindo

a) De quantas maneiras podemos escolher <u>um</u> livro qualquer (ou de Matemática ou de Português)?

Resposta:

Temos 4 maneiras de escolher um livro de Matemática e 3 maneiras de escolher um livro de Português.

Logo temos $4 + 3 = 7$ maneiras de escolher um livro qualquer dentre os de Matemática e Português.

b) De quantas maneiras podemos escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português?

b) De quantas maneiras podemos escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português?

Resposta:

Para cada livro de Matemática, temos 3 maneiras de escolher os livros de Português.
Como temos 4 maneiras de escolher os livros de Matemática, teremos $3 \times 4 = 12$ maneiras de escolher um livro de Matemática e outro de Português.

Exemplo 2:

- Maria vai a uma papelaria para comprar lapiseira e borracha. Nessa papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseiras e 5 tipos diferentes de borrachas.

  a) Se o dinheiro de Maria só dá para comprar um item, ou uma lapiseira ou uma borracha, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

Exemplo 2:

- Maria vai a uma papelaria para comprar lapiseira e borracha. Nessa papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseiras e 5 tipos diferentes de borrachas.

a) Se o dinheiro de Maria só dá para comprar um item, ou uma lapiseira ou uma borracha, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

$L = \{L_1, L_2, \ldots, L_7\}$ $\qquad$ $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_5\}$

ou L_1, ou L_2, ou ... ou $L_7 \rightarrow$ 7 maneiras

ou B_1, ou B_2, ou ... ou $B_5 \rightarrow$ 5 maneiras

Exemplo 2:

- Maria vai a uma papelaria para comprar lapiseira e borracha. Nessa papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseiras e 5 tipos diferentes de borrachas.

a) Se o dinheiro de Maria só dá para comprar um item, ou uma lapiseira ou uma borracha, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

$L = \{L_1, L_2, \ldots, L_7\}$ $\qquad$ $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_5\}$

ou L_1, ou L_2, ou ... ou $L_7 \rightarrow$ 7 maneiras

ou B_1, ou B_2, ou ... ou $B_5 \rightarrow$ 5 maneiras

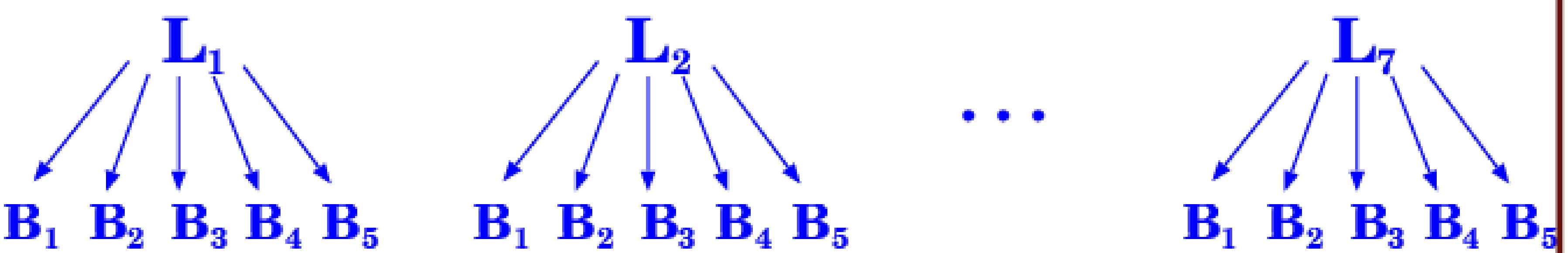
Número de maneiras de escolher um item : $7 + 5 = 12$

Exemplo 2 (continuação):

b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

Exemplo 2 (continuação):

b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

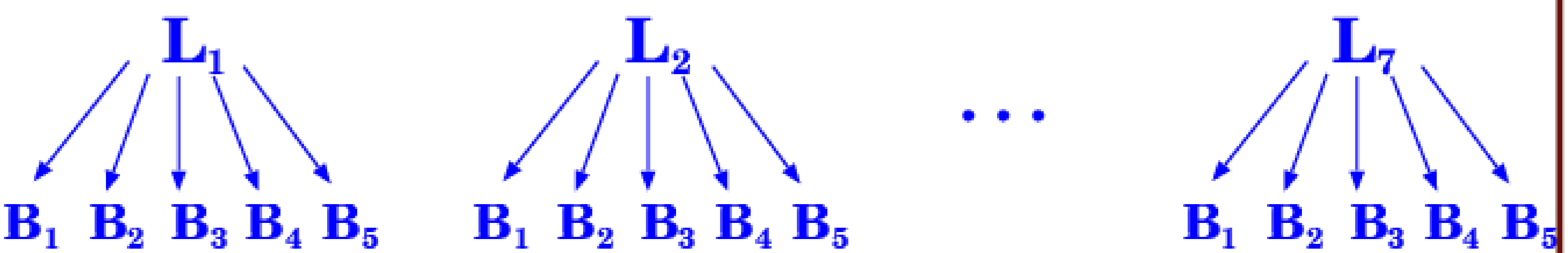


Observe que temos os pares:

$$(L_1, B_1)\ (L_1, B_2)\ \ldots\ (L_1, B_5)\ , \ldots ,(L_7, B_1)\ (L_7, B_2)\ \ldots\ (L_7, B_5)$$

Exemplo 2 (continuação):

b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?



Observe que temos os pares:

$(L_1, B_1)\ (L_1, B_2)\ \ldots\ (L_1, B_5)\ , \ldots ,(L_7, B_1)\ (L_7, B_2)\ \ldots\ (L_7, B_5)$

Número de maneiras de escolher 2 itens, sendo um item uma lapiseira e o outro uma borracha5 +...+ 5 = $5 \times 7 = 35$

Resumindo

a) De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar um item (ou uma lapiseira ou uma borracha)?

Resumindo

a) De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar um item (ou uma lapiseira ou uma borracha)?

Resposta:

Ela tem 7 possibilidades de escolha de lapiseira e 4 possibilidades de escolha de borracha.
Logo Maria tem $7 + 5$ possibilidades diferentes de comprar ou uma lapiseira ou uma borracha.

b) De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar 2 itens: uma lapiseira <u>e</u> uma borracha?

b) De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar 2 itens: uma lapiseira e uma borracha?

Resposta:

Para cada escolha de lapiseira, ela tem 5 escolhas de borracha.
Como ela tem 7 escolhas de lapiseiras diferentes, ela terá 7×5 maneiras diferentes de comprar uma lapiseira e uma borracha.

Introdução ao Princípio Aditivo (PA):

- Princípio Aditivo (para dois conjuntos)

  Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$),

  então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

- Outra notação usual

  $$n(A) = |A|$$

PA

Voltar

Outra interpretação da formulação:

- Sejam A e B eventos mutuamente exclusivos.
  Se um evento A pode ocorrer de m maneiras e outro evento B pode ocorrer de n maneiras, então existem m + n maneiras em que algum desses dois eventos podem ocorrer.

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática e três livros distintos de Português:

  a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer?

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática e três livros distintos de Português:

  a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer?

  Podemos identificar os conjuntos:

  $A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \}$ $B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática e três livros distintos de Português:

  a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer?

  Podemos identificar os conjuntos:

  $A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \}$ $\quad$ $B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

  $A \cap B = \emptyset$ $\quad$ $|A| = n(A) = 4$ $\quad$ $|B| = n(B) = 3$

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática e três livros distintos de Português:

  a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer?

  Podemos identificar os conjuntos:

  $A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \}$ $B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

  $A \cap B = \varnothing$ $|A| = n(A) = 4$ $|B| = n(B) = 3$

  Pelo P. A. temos

  $|A \cup B| = |A| + |B| = 7$ maneiras de escolher um livro qualquer, ou de Matemática ou de Português.

Voltando ao exemplo 2:

- Na papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseira e 5 tipos diferentes de borracha:

a) De quantas maneiras Maria pode comprar um item?

Voltando ao exemplo 2:

- Na papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseira e 5 tipos diferentes de borracha:

a) De quantas maneiras Maria pode comprar um item?

Identificando os conjuntos:

$L = \{L_1, L_2, \ldots, L_7\}$ $\qquad$ $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_5\}$

$L \cap B = \varnothing$ $\qquad$ $|L| = 7$ $\qquad$ $|B| = 5$

Voltando ao exemplo 2:

- Na papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseira e 5 tipos diferentes de borracha:

a) De quantas maneiras Maria pode comprar um item?

Identificando os conjuntos:

$L = \{L_1, L_2, \ldots, L_7\}$ $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_5\}$

$L \cap B = \varnothing$ $|L| = 7$ $|B| = 5$

Pelo P. A. Maria tem

$|L \cup B| = |L| + |B| = 7 + 5 = 12$ maneiras de escolher ou uma lapiseira ou uma borracha.

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM):

Princípio Multiplicativo (para dois conjuntos)

Se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto com n elementos então o conjunto $A \times B$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM):

Princípio Multiplicativo (para dois conjuntos)

Se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto com n elementos então o conjunto $A \times B$

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

tem $m \times n$ elementos

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM):

Princípio Multiplicativo (para dois conjuntos)

Se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto com n elementos então o conjunto $A \times B$

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

tem $m \times n$ elementos

$$|A \times B| = |A| . |B| = m \times n$$

Outra interpretação da formulação:

- Se um evento A pode ocorrer de m maneiras e um evento B pode ocorrer de n maneiras então o par de eventos, primeiro um e depois o outro, podem ocorrer de $m \times n$ maneiras.

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática e três livros distintos de Português:

b) De quantas maneiras podemos escolher 2 livros sendo um de Matemática e outro de Português?

$A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \}$ $B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

$|A| = 4$ $|B| = 3$

Pelo P. M. temos então

$|A \times B| = |A| \times |B| = 4 \times 3 = 12$ maneiras de escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português.

- O exemplo 2 b) vocês interpretam.

Resposta Voltar

cederj

Exemplo 3:

- Um prédio tem oito portas:

  a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

Exemplo 3:

- Um prédio tem oito portas:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$A = B = \{ P_1, P_2, \ldots , P_8 \} \qquad |A| = 8$$

Exemplo 3:

- Um prédio tem oito portas:

  a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$A = B = \{ P_1, P_2, \ldots , P_8 \} \qquad |A| = 8$$

$$\left.\begin{array}{cccc}
(P_1, P_1), & (P_1, P_2) \ldots & (P_1, P_7), & (P_1, P_8) \\
(P_2, P_1), & (P_2, P_2) \ldots & (P_2, P_7), & (P_2, P_8) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(P_8, P_1), & (P_8, P_2) \ldots & (P_8, P_7), & (P_8, P_8)
\end{array}\right\} 8 \times 8$$

Exemplo 3:

- Um prédio tem oito portas:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$A = B = \{ P_1, P_2, \dots , P_8 \} \qquad |A| = 8$$

$$\left.\begin{array}{c}
(P_1, P_1) , (P_1, P_2) \dots (P_1, P_7) , (P_1, P_8) \\
(P_2, P_1) , (P_2, P_2) \dots (P_2, P_7) , (P_2, P_8) \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
(P_8, P_1) , (P_8, P_2) \dots (P_8, P_7) , (P_8, P_8)
\end{array}\right\} 8 \times 8$$

$$|A \times B| = |A| \times |A| = 8 \times 8 = 64$$

Exemplo 3:

- Um prédio tem oito portas:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$A = B = \{ P_1, P_2, \ldots, P_8 \} \qquad |A| = 8$$

$$\left.\begin{array}{l}
(P_1, P_1), (P_1, P_2) \ldots (P_1, P_7), (P_1, P_8) \\
(P_2, P_1), (P_2, P_2) \ldots (P_2, P_7), (P_2, P_8) \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
(P_8, P_1), (P_8, P_2) \ldots (P_8, P_7), (P_8, P_8)
\end{array}\right\} 8 \times 8$$

$$|A \times B| = |A| \times |A| = 8 \times 8 = 64$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar e sair do prédio de 64 maneiras.

Exemplo 3 (continuação):

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

Observe: Se usarmos a porta P_1 para entrar, ela não pode ser usada para sair.

Exemplo 3 (continuação):

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

Observe: Se usarmos a porta P_1 para entrar, ela não pode ser usada para sair.

$$\left.\begin{array}{l}(P_1, P_2)\ ,\ (P_1, P_3)\ \ldots\ (P_1, P_7)\ ,\ (P_1, P_8)\\ (P_2, P_1)\ ,\ (P_2, P_3)\ \ldots\ (P_2, P_7)\ ,\ (P_2, P_8)\\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\ (P_8, P_1)\ ,\ (P_8, P_2)\ \ldots\ (P_8, P_6)\ ,\ (P_8, P_7)\end{array}\right\}\ 8 \times 7$$

Exemplo 3 (continuação):

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

Observe: Se usarmos a porta P_1 para entrar, ela não pode ser usada para sair.

$$\left.\begin{array}{l}
(P_1, P_2)\,,\,(P_1, P_3)\,\ldots\,(P_1, P_7)\,,\,(P_1, P_8)\\
(P_2, P_1)\,,\,(P_2, P_3)\,\ldots\,(P_2, P_7)\,,\,(P_2, P_8)\\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
(P_8, P_1)\,,\,(P_8, P_2)\,\ldots\,(P_8, P_6)\,,\,(P_8, P_7)
\end{array}\right\} 8 \times 7$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente de 56 maneiras.

Exemplo 3 (continuação):

Formalização:

$$A = \{ P_1, P_2, \ldots , P_8 \} \;,\; |A| = 8$$

$$D = \{ (P_1, P_1) , \ldots , (P_8, P_8) \} \;,\; |D| = 8$$

$$C = A \times A - D$$

Exemplo 3 (continuação):

Formalização:

$A = \{ P_1, P_2, \ldots , P_8 \}$, $|A| = 8$

$D = \{ (P_1, P_1) , \ldots , (P_8, P_8) \}$, $|D| = 8$

$C = A \times A - D$

$|C| = |A \times A| - |D|$ (Princípio Aditivo)

Exemplo 3 (continuação):

Formalização:

$A = \{ P_1, P_2, \ldots , P_8 \}$, $|A| = 8$

$D = \{ (P_1, P_1) , \ldots , (P_8, P_8) \}$, $|D| = 8$

$C = A \times A - D$

$|C| = |A \times A| - |D|$ (Princípio Aditivo)

$|C| = |A| \,.\, |A| - |D|$ (Princípio Multiplicativo)

$= 8 \times 8 - 8 = 8\,(8 - 1) = 8 \,.\, 7$

Exemplo 3 (continuação):

Interpretação:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

maneiras de entrar - 8

maneiras de sair - 8

=> $8 \times 8 = 64$

Exemplo 3 (continuação):

Interpretação:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

maneiras de entrar - 8
maneiras de sair - 8

=> $8 \times 8 = 64$

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

maneiras de entrar - 8
maneiras de sair - 7

=> $8 \times 7 = 56$

Exemplo 4:

- Numa sala estão reunidos cinco homens, seis mulheres e quatro crianças.

  De quantas maneiras podemos selecionar:

  a) uma pessoa?

  b) um homem, uma mulher e uma criança?

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

$H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \}$

$M = \{ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \}$

$C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$

$H \cap M = \varnothing \quad H \cap C = \varnothing \quad M \cap C = \varnothing$

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

$H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \}$

$M = \{ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \}$

$C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$

$H \cap M = \varnothing \qquad H \cap C = \varnothing \qquad M \cap C = \varnothing$

$|H| = 5 \qquad |M| = 6 \qquad |C| = 4$

$|H \cup M \cup C| = |H| \cup |M| \cup |C| = 5 + 6 + 4 = 15$

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

$H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \}$

$M = \{ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \}$

$C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$

$H \cap M = \varnothing \quad H \cap C = \varnothing \quad M \cap C = \varnothing$

$|H| = 5 \quad |M| = 6 \quad |C| = 4$

$|H \cup M \cup C| = |H| \cup |M| \cup |C| = 5 + 6 + 4 = 15$

$H \cup M \cup C = \{ h_1, h_2, \ldots, h_5, m_1, m_2, \ldots, m_6, c_1, \ldots, c_4 \}$

Exemplo 4 (continuação):

b) De quantas maneiras podemos selecionar um homem, uma mulher e uma criança?

$$H \times M \times C = \{ (h, m, c) \mid h \in H, \ m \in M, \ c \in C \}$$

Exemplo 4 (continuação):

b) De quantas maneiras podemos selecionar um homem, uma mulher e uma criança?

$$H \times M \times C = \{ (h, m, c) \mid h \in H, \; m \in M, \; c \in C \}$$

$$\begin{aligned} H \times M \times C = \{ & (h_1, m_1, c_1), (h_1, m_2, c_1), (h_1, m_3, c_1), \\ & (h_1, m_4, c_1), (h_1, m_5, c_1), (h_1, m_6, c_1), \\ & (h_1, mb_1, c_2), (h_1, m_1, c_3), (h_1, m_1, c_4), \ldots \; \} \end{aligned}$$

Exemplo 4 (continuação):

b) De quantas maneiras podemos selecionar um homem, uma mulher e uma criança?

$$H \times M \times C = \{ (h, m, c) \mid h \in H,\ m \in M,\ c \in C \}$$

$$\begin{aligned} H \times M \times C = \{ & (h_1, m_1, c_1), (h_1, m_2, c_1), (h_1, m_3, c_1), \\ & (h_1, m_4, c_1), (h_1, m_5, c_1), (h_1, m_6, c_1), \\ & (h_1, mb_1, c_2), (h_1, m_1, c_3), (h_1, m_1, c_4), \ldots \} \end{aligned}$$

Observação:

$$|H \times M \times C| = |H| \times |M| \times |C| = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

Extensão do Princípio Aditivo:

- Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A_i \cap A_j = \varnothing \qquad i \neq j)$$

e $|A_1| = m_1$, $|A_2| = m_2$, ... , $|A_n| = m_n$

Extensão do Princípio Aditivo:

- Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A_i \cap A_j = \emptyset \qquad i \neq j)$$

e $|A_1| = m_1$, $|A_2| = m_2$, ..., $|A_n| = m_n$

então o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

possui $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ elementos

Extensão do Princípio Aditivo:

- Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A_i \cap A_j = \varnothing \qquad i \neq j)$$

e $|A_1| = m_1 \,,\ |A_2| = m_2 \,, \dots ,\ |A_n| = m_n$

então o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

possui $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ elementos

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Outra interpretação da formulação:

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente exclusivos. Se cada evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras então existem $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ maneiras em que algum desses n eventos podem ocorrer.

Extensão do Princípio Multiplicativo:

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos tais que

$$|A_1| = m_1 , |A_2| = m_2 , \ldots , |A_n| = m_n$$

Extensão do Princípio Multiplicativo:

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos tais que

$$|A_1| = m_1 , |A_2| = m_2 , \ldots , |A_n| = m_n$$

então o conjunto $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

possui $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$

Extensão do Princípio Multiplicativo:

- Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos tais que

$$|A_1| = m_1\ ,\ |A_2| = m_2\ ,\ \dots\ ,\ |A_n| = m_n$$

então o conjunto $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

possui $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n| = \prod_{i=1}^{n} m_i$$

Outra interpretação da formulação:

- Se temos n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, onde cada evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras então existem $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$ maneiras em que esses n eventos podem ocorrer sucessivamente.

Exemplo 5:

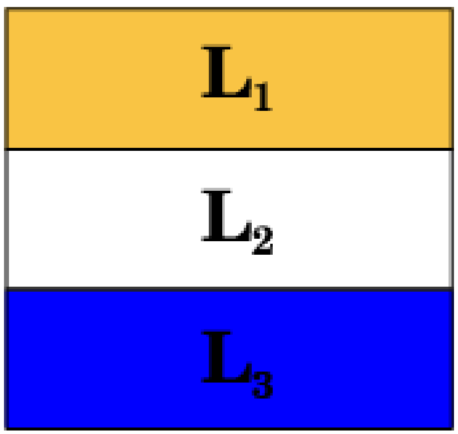
- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

  De quantos modos podemos colorir esta bandeira?

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

  De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



→ L_1 pode ser colorida de 3 modos

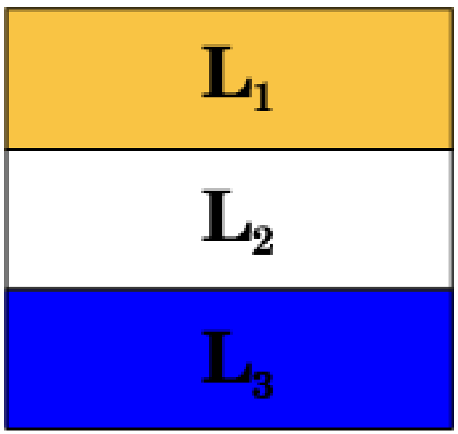
→ L_2 pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em L_1 não pode ser usada em L_2)

→ L_3 pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em L_2 não pode ser usada em L_3)

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

  De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



→ L_1 pode ser colorida de 3 modos

→ L_2 pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em L_1 não pode ser usada em L_2)

→ L_3 pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em L_2 não pode ser usada em L_3)

Logo pelo PM temos $3 \times 2 \times 2$ modos de colorir esta bandeira.

Exemplo 6:

- Um teste de matemática consta de 20 perguntas para serem classificadas como Verdadeira ou Falsa.

  Quantos são os possíveis gabaritos para este teste?

Exemplo 6:

- Um teste de matemática consta de 20 perguntas para serem classificadas como Verdadeira ou Falsa.

  Quantos são os possíveis gabaritos para este teste?

  Resposta:

  Cada pergunta tem duas possibilidades de resposta: Verdadeiro ou Falso

  $$\begin{array}{ll} P_1 & - \ 2 \text{ possibilidades} \\ P_2 & - \ 2 \text{ possibilidades} \\ \vdots & \qquad \vdots \\ P_{20} & - \ 2 \text{ possibilidades} \end{array}$$

Exemplo 6:

- Um teste de matemática consta de 20 perguntas para serem classificadas como Verdadeira ou Falsa.

  Quantos são os possíveis gabaritos para este teste?

  Resposta:

  Cada pergunta tem duas possibilidades de resposta: Verdadeiro ou Falso

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \ - \ 2 \text{ possibilidades} \\ P_2 \ - \ 2 \text{ possibilidades} \\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ P_{20} - 2 \text{ possibilidades} \end{array}\right\}$$

Logo pelo PM temos

$2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{20}$ gabaritos

Exemplo 7:

- Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados?

Exemplo 7:

- Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados?

Para formar números naturais de três algarismos, podemos considerar que temos três posições a serem preenchidas:

$\underline{P_1}$ $\underline{P_2}$ $\underline{P_3}$

Exemplo 7:

- Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados?

Para formar números naturais de três algarismos, podemos considerar que temos três posições a serem preenchidas:

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3} \quad \begin{cases} P_1 \text{ - posição das centenas} \\ P_2 \text{ - posição das dezenas} \\ P_3 \text{ - posição das unidades} \end{cases}$$

Exemplo 7 (continuação):

- Exemplo de um número formado

  $\underline{\ 3\ }\ \ \underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 5\ }$

Exemplo 7 (continuação):

- Exemplo de um número formado

$\underline{\;3\;}\;\underline{\;6\;}\;\underline{\;5\;}$

$\underline{P_1}$	$\underline{P_2}$	$\underline{P_3}$
$\downarrow$ 1º	$\downarrow$ 2º	$\downarrow$ 3º
6 possibilidades	5 possibilidades	4 possibilidades

Exemplo 7 (continuação):

- Exemplo de um número formado

$$\underline{\;3\;}\;\underline{\;6\;}\;\underline{\;5\;}$$

$$\underset{\substack{\downarrow 1^{\circ} \\ 6 \\ \text{possibilidades}}}{\underline{P_1}} \qquad \underset{\substack{\downarrow 2^{\circ} \\ 5 \\ \text{possibilidades}}}{\underline{P_2}} \qquad \underset{\substack{\downarrow 3^{\circ} \\ 4 \\ \text{possibilidades}}}{\underline{P_3}}$$

Logo pelo PM temos $6 \times 5 \times 4 = 120$ números naturais de três algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Exemplo 8:

- Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Exemplo 8:

- Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

  Observação: Estamos considerando agora os algarismos 0, 1, 2, ... , 9.

Exemplo 8:

- Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

  Observação: Estamos considerando agora os algarismos 0, 1, 2, ... , 9.

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_1 temos 9 possibilidades (estamos excluindo o zero)

Na posição P_2 temos 9 possibilidades (diferente do anterior)

Na posição P_3 temos 8 possibilidades (diferente dos dois anteriores)

Exemplo 8:

- Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Observação: Estamos considerando agora os algarismos 0, 1, 2, ... , 9.

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_1 temos 9 possibilidades (estamos excluindo o zero)

Na posição P_2 temos 9 possibilidades (diferente do anterior)

Na posição P_3 temos 8 possibilidades (diferente dos dois anteriores)

Logo pelo PM temos $9 \times 9 \times 8$ números naturais de três algarismos distintos.

Exemplo 8 (continuação):

- E se neste exemplo em vez de começarmos analisando a posição P_1, começassemos pela P_3 ?

Exemplo 8 (continuação):

- E se neste exemplo em vez de começarmos analisando a posição P_1, começassemos pela P_3 ?

$$\underset{\underline{P_1}}{3^o} \qquad \underset{\underline{P_2}}{2^o} \qquad \underset{\underline{P_3}}{1^o}$$

Exemplo 8 (continuação):

- E se neste exemplo em vez de começarmos analisando a posição P_1, começássemos pela P_3 ?

$$\underset{\underline{P_1}}{3^o} \quad \underset{\underline{P_2}}{2^o} \quad \underset{\underline{P_3}}{1^o}$$

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades (diferente do anterior)

Na posição P_1 temos $\begin{cases} 8 \text{ (se o algarismo zero já tiver sido usado)} \\ \text{ou} \\ 7 \text{ (caso contrário)} \end{cases}$

Exemplo 8 (continuação):

- Quebramos o problema em dois:

1º) Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

Exemplo 8 (continuação):

- Quebramos o problema em dois:

1°) Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_1 temos 8 possibilidades

Exemplo 8 (continuação):

- Quebramos o problema em dois:

1°) Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_1 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $10 \times 9 \times 8 = 720$ números de três algarismos distintos onde o zero pode estar na posição P_1

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_1 temos 1 possibilidade

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_3 temos 8 possibilidades

2°) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

$$\underline{\;P_1\;} \quad \underline{\;P_2\;} \quad \underline{\;P_3\;}$$

Na posição P_1 temos 1 possibilidade

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_3 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos que tem apenas o zero na posição P_1

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_1 temos 1 possibilidade

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_3 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos que tem apenas o zero na posição P_1

Temos então $720 - 72 = 648$ números naturais de três algarismos distintos.

Resumo:

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos

Princípio Aditivo

Se $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ e

$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ então

$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$

Princípio Multiplicativo

Se $B = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ então

$|B| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|$

cederj