Aula 5: Indução forte

Conteúdo:

- Série de Fibonacci
- Indução forte
- Indução forte generalizada

Sequência de Fibonacci:

É uma sequência de números naturais $\{F_1, F_2, F_3, \dots\}$, denotada por $\{F_n\}$ definida da seguinte forma:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

Ou seja, os termos F_n $n \geq 3$ são calculados recursivamente:

Clicar

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	...
1	1							...

Voltar

Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$F_1^2 = 1^2 = 1$

Voltar

Clicar

$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 =$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 =$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 =$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = 1^2+1^2+2^2+3^2+5^2 = 40 =$

Exemplo 1:

- Mostre que $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$

Exemplo 1:

- Mostre que $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$

Prova:

Seja P(n) : $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Exemplo 1:

- Mostre que $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$

Prova:

Seja $P(n)$: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

(1) Base da indução:

$P(1)$: $F_1^2 = 1 = F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1 = 1$ verdadeira

Exemplo 1:

Mostre que $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$

Prova:

Seja $P(n)$: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

(1) Base da indução:

$P(1)$: $F_1^2 = 1 = F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1 = 1$ verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI):

$P(k)$: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k-1}$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1) \text{ verdadeira}}_{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}}$$

(3) Passo indutivo:

P(k) verdadeira => $\underbrace{\text{P(k + 1) verdadeira}}$

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \bullet F_{k+2}$$

Desenvolvendo:

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 + F_{k+1}^2 \; =$$

(3) Passo indutivo:

P(k) verdadeira => $\underbrace{\text{P(k + 1) verdadeira}}_{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}}$

Desenvolvendo:

$$\underbrace{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2}_{\substack{\| \text{(HI)} \\ F_k \cdot F_{k+1}}} + \underbrace{F_{k+1}^2}_{F_{k+1}^2} =$$

(3) Passo indutivo:

P(k) verdadeira => $\underbrace{\text{P(k + 1) verdadeira}}_{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}}$

Desenvolvendo:

$$\underbrace{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2}_{\overset{(HI)}{=}\ F_k \cdot F_{k+1}} + \underbrace{F_{k+1}^2}_{F_{k+1}^2} =$$

$$F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \underbrace{(F_k + F_{k+1})}_{= F_{k+2}} = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$$

(3) Passo indutivo:

$$P(k)\ \text{verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1)\ \ \text{verdadeira}}_{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}}$$

<u>Desenvolvendo</u>:

$$\underbrace{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2}_{\substack{\| \,(HI) \\ F_k \cdot F_{k+1}}} + \underbrace{F_{k+1}^2}_{F_{k+1}^2} =$$

$$F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}\,\underbrace{(F_k + F_{k+1})}_{\substack{\| \\ F_{k+2}}} = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

Então pelo PIM

$$P(n) : F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \ \text{verdadeira} \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

Indução forte (IF):

Lembremos a formulação do PIM:

- Seja P(n) uma afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se:

(i) P(1) verdadeira e

(ii) P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira, $\forall \ k \in \mathbb{N}$

Então P(n) verdadeira $\forall \ n \in \mathbb{N}$

Indução forte (IF):

Lembremos a formulação do PIM:

- Seja P(n) uma afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se:

(i) P(1) verdadeira e

(ii) P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira, $\forall$ k $\in \mathbb{N}$

Então P(n) verdadeira $\forall$ $n \in \mathbb{N}$

clicar

IF Voltar

cederj

Para aplicarmos a indução forte precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que $P(n)$ verdadeira para $n = 1$

(2) Hipótese de indução forte:

Assumir que $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ são verdadeiras

(3) Passo indutivo:

Mostrar que $P(k + 1)$ verdadeira, assumindo (2)

Exemplo 2:

- Considerando a sequência de Fibonacci $\{F_n\}$, mostre que $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$

Exemplo 2:

- Considerando a sequência de Fibonacci $\{F_n\}$, mostre que $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$

Prova:

Seja $P(n)$: $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

Exemplo 2:

- Considerando a sequência de Fibonacci $\{F_n\}$, mostre que $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$

Prova:

Seja $P(n)$: $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

(1) Base da indução:

$P(1)$: $F_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ verdadeira

(2) Hipótese da indução forte (HIF):

Assuma que P(1), P(2), ... , P(k) são verdadeiras

$$F_i < \left(\frac{7}{4}\right)^i \quad \forall\ i\ ,\ 1 \leq i \leq k$$

(2) Hipótese da indução forte (HIF):

Assuma que P(1), P(2), ... , P(k) são verdadeiras

$$F_i < \left(\frac{7}{4}\right)^i \quad \forall\ i\,,\ 1 \leq i \leq k$$

(3) Passo indutivo:

P(1), P(2), ... , P(k) verdadeiras => P(k + 1) verdadeira

(2) Hipótese da indução forte (HIF):

Assuma que P(1), P(2), ... , P(k) são verdadeiras

$$F_i < \left(\frac{7}{4}\right)^i \quad \forall\ i,\ 1 \leq i \leq k$$

(3) Passo indutivo:

P(1), P(2), ... , P(k) verdadeiras => $\underbrace{\text{P(k + 1)}}_{F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}}$ verdadeira

Desenvolvendo:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

Desenvolvendo:

$$F_{k+1} = \underbrace{F_k}_{\|\,HF} + \underbrace{F_{k-1}}_{\|\,HF}$$

$$F_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k \quad F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

Desenvolvendo:

$$F_{k+1} = \underbrace{F_k}_{\substack{\| \text{HF} \\ F_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k}} + \underbrace{F_{k-1}}_{\substack{\| \text{HF} \\ F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}}} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4}+1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{11}{4}\right)$$

Desenvolvendo:

$$F_{k+1} = \underbrace{F_k}_{\substack{\| HF \\ F_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k}} + \underbrace{F_{k-1}}_{\substack{\| HF \\ F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}}} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4}+1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{11}{4}\right)$$

Observe que $\quad \frac{11}{4} < 3 < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$

$$F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\frac{11}{4} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

Desenvolvendo:

$$F_{k+1} = \underbrace{F_k}_{\overset{\|}{\text{HF}}} + \underbrace{F_{k-1}}_{\overset{\|}{\text{HF}}} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4}+1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{11}{4}\right)$$

$$F_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k \qquad F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

Observe que $\frac{11}{4} < 3 < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$

$$F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\frac{11}{4} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

Então pelo IF $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

Indução forte generalizada:

Lembremos a formulação da IF:

- Seja P(n) uma afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se:

(i) P(1) verdadeira e

(ii) P(1), P(2), ... , P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira

Então P(n) verdadeira $\forall \; n \in \mathbb{N}$.

Indução forte generalizada:

Lembremos a formulação da IF:

- Seja P(n) uma afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se:

(i) P(1) verdadeira e

(ii) P(1), P(2), ... , P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira

Então P(n) verdadeira $\forall \; n \in \mathbb{N}$.

clicar

IFG Voltar

Para aplicarmos a IF generalizada precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que $P(n)$ verdadeira para $n = n_0$

(2) Hipótese de indução:

Assumir que $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(k)$ são verdadeiras $(\forall\ k \geq n_0)$

(3) Passo indutivo:

Mostrar que $P(k + 1)$ verdadeira, assumindo a hipótese de indução (2)

Exemplo 3:

- Mostre que todo inteiro maior do que 1 é primo ou produto de primos.

  (Obs: primo é um inteiro maior do que 1, que só é divisível por 1 e por ele mesmo. Exemplos: 2, 3, 5, 7 são primos)

Exemplo 3:

- Mostre que todo inteiro maior do que 1 é primo ou produto de primos.

  (Obs: primo é um inteiro maior do que 1, que só é divisível por 1 e por ele mesmo. Exemplos: 2, 3, 5, 7 são primos)

Prova:

Seja $P(n)$: n é primo ou produto de primos.

Exemplo 3:

- Mostre que todo inteiro maior do que 1 é primo ou produto de primos.

  (Obs: primo é um inteiro maior do que 1, que só é divisível por 1 e por ele mesmo. Exemplos: 2, 3, 5, 7 são primos)

  Prova:

  Seja $P(n)$: n é primo ou produto de primos.

  (1) Base da indução:

  $P(2)$: 2 é primo verdadeira

(2) Hipótese de indução forte:

$P(i)$ é verdadeira para $2 \leq i \leq k$

Assuma que:

i é primo ou produto de primos, $2 \leq i \leq k$

(2) Hipótese de indução forte:

$P(i)$ é verdadeira para $2 \leq i \leq k$

Assuma que:

i é primo ou produto de primos, $2 \leq i \leq k$

(3) Passo indutivo:

$P(i)$ verdadeira $2 \leq i \leq k \Rightarrow P(k+1)$ verdadeira

(2) Hipótese de indução forte:

P(i) é verdadeira para $2 \le i \le k$

Assuma que:

i é primo ou produto de primos, $2 \le i \le k$

(3) Passo indutivo:

$$P(i) \text{ verdadeira } 2 \le i \le k \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{\substack{\parallel \\ k+1 \text{ é primo ou produto de primos}}} \text{ verdadeira}$$

Desenvolvendo:

Temos duas possibilidades mutuamente exclusivas

(i) $k + 1$ é primo

(ii) $k + 1$ não é primo

Se (i) acontece então $P(k + 1)$ é verdadeira

Caso contrário (ii) acontece, então $k + 1$ não é primo

$k + 1$ não é primo

Então $k + 1$ pode ser escrito como:

$$k + 1 = a \cdot b \quad \text{onde} \quad 1 < a < k + 1$$
$$1 < b < k + 1$$

$k + 1$ não é primo

Então $k + 1$ pode ser escrito como:

$$k + 1 = a \cdot b \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} 1 < a < k + 1 \\ 1 < b < k + 1 \end{array}$$

Usando agora a <u>hipótese de indução forte</u> temos que:

$P(a)$ e $P(b)$ são verdadeiras $\quad \begin{array}{l} 1 < a \leq k \\ 1 < b \leq k \end{array}$

ou seja, a é primo ou produto de primos e

b é primo ou produto de primos

ou seja, a é primo ou produto de primos e

b é primo ou produto de primos

Logo $k + 1 = a \,.\, b$ é produto de primos

Logo $P(k + 1)$ é verdadeira

ou seja, a é primo ou produto de primos e

b é primo ou produto de primos

Logo $k + 1 = a \cdot b$ é produto de primos

Logo $P(k + 1)$ é verdadeira

Então pelo princípio da indução forte generalizada

$P(n) : n$ é primo ou produto de primos $\forall \;\; n \in \mathbb{N} \quad n > 1$

Resumo:

Conceitos:

- Sequência de Fibonacci
- Indução forte generalizada
- Estrutura

  - Base de indução: P(n) verdadeira $n = n_0$
  - Hipótese de indução:

  P(n_0), (n_0+1), ..., P(k) verdadeira => P(k + 1) verdadeira

- Em particular

  $n_0 = 1$: Indução forte

Exercícios:

(1) Seja $\{a_n\}$ a sequência definida por:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5$$

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \quad n \geq 3$$

Mostre que usando a indução forte $a_n = 2^n + (-1)^n \; \forall \; n \geq 2$

(2) Seja $\{F_n\}$ a sequência de Fibonacci.

Mostre usando a indução forte que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$$