Министерство науки и высшего образования Российской Федерации федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет» (ТПУ)

Инженерная школа информационных технологий и робототехники Направление подготовки <u>09.04.01 Информатика и вычислительная техника</u> Отделение Информационных технологий

Индивидуальное задание по дисциплине «Нейроэволюционные вычисления»

	«неироэволюционные вычисления»				
Γ	Тема работы				
	Реализация алгоритма ESP				

Студент

Группа	ФИО	Подпись	Дата
8BM22	Ткачева С.В.		

Руководитель

Должность	ФИО	Подпись	Дата
Старший	Григорьев Д.С.		
преподаватель ОИТ			

Содержание

1 Реализация алгоритма	3
1.1 Класс Neuron	3
1.2 Класс NeuronSubPopulation	6
1.3 Класс NeuronPopulation	11
1.4 Классы функций активации	14
1.5 Класс Layer	14
1.6 Класс NeuralNetwork	15
1.7 Класс ESPAlgorithm	17
2 Результаты работы программы	22
3 Вывол	23

1 Реализация алгоритма

1.1 Класс Neuron

Класс Neuron реализует логику работы с одним нейроном. Имеются следующие поля:

- 1. input_count количество входов
- 2. output_count количество выходов
- 3. id уникальный идентификатор нейрона
- 4. input_weights вектор входных весов
- 5. output_weights вектор выходных весов
- 6. cumulative_fitness кумулятивная приспособленность нейрона
- 7. avg_fitness средняя приспособленность нейрона, равная отношению кумулятивной приспособленности к количеству попыток, в которых учавствовал данный нейрон
- 8. trials количество попыток, в которых учавствовал данный нейрон В классе имеются следующие методы:
 - 1. __init__ конструктор; параметры:
 - a) input_count количество входов
 - b) output_count количество выходов
 - c) neuron_id уникальный идентификатор нейрона
- 2. init инициализация векторов входных и выходных весов случайными значениями; параметры:
 - a) min_value минимальное случайно сгенерированное число
 - b) max_value максимальное случайно сгенерированное число
 - 3. fit_avg_fitness корректировка средней приспособленности
- 4. mutation мутация векторов весов, используется распределение Коши
- 5. crossover скрещивание двух нейронов, используется одноточечный кроссинговер; в качестве результата возвращаются два новых нейрона; параметры:
 - а) parent1 первый родитель

b) parent2 - второй родитель

Исходный код класса представлен в листинге 1.

Листинг 1. Исходный код класса Neuron.

```
import numpy as np
import random
def crossover_weights(parent1: np.array, parent2: np.array):
    weights count = parent1.shape[0]
    crossover point = random.randrange(weights count)
    child1, child2 = np.zeros(weights_count), np.zeros(weights_count)
    child1[:crossover_point] = parent1[:crossover_point]
    child1[crossover_point:] = parent2[crossover_point:]
    child2[:crossover_point] = parent2[:crossover_point]
    child2[crossover_point:] = parent1[crossover_point:]
    return child1, child2
class Neuron(object):
    def __init__(self,
                 input_count: int,
                 output_count: int,
                 neuron_id: int):
        self.input_count = input_count
        self.output_count = output_count
        self.id = neuron_id
        self.input_weights = None
        self.output_weights = None
        self.cumulative_fitness = 0.0
        self.avg_fitness = 0.0
        self.trials = 0
    def init(self, min_value: float, max_value: float):
        self.input_weights = np.random.uniform(
            low=min_value,
            high=max_value,
```

```
size=self.input_count)
        self.output_weights = np.random.uniform(
            low=min_value,
            high=max_value,
            size=self.output_count)
    def fit avg fitness(self):
        self.avg_fitness = self.cumulative_fitness / self.trials
    def mutation(self):
        self.input_weights += np.random.standard_cauchy(self.input_count) *
0.05
        self.output_weights += np.random.standard_cauchy(self.output_count) *
0.05
    @staticmethod
    def crossover(parent1, parent2):
        input_count = parent1.input_count
        output_count = parent1.output_count
        child1 = Neuron(
            input_count=input_count,
            output_count=output_count,
            neuron_id=parent1.id)
        child2 = Neuron(
            input_count=input_count,
            output_count=output_count,
            neuron_id=parent2.id)
        child1.input_weights, child2.input_weights = crossover_weights(
            parent1=parent1.input_weights,
            parent2=parent2.input_weights)
        child1.output_weights, child2.output_weights = crossover_weights(
            parent1=parent1.output_weights,
            parent2=parent2.output_weights)
        return child1, child2
```

1.2 Класс NeuronSubPopulation

Класс NeuronSubPopulation реализует логику работы с подпопуляцией. Имеются следующие поля:

- 1. population массив, храняший нейроны (объекты класса Neuron)
- 2. last_generations_count количество последних поколений, для которых приспособленность лучшей особи не менялась, запускается взрывная мутация
- 3. trials_per_neuron минимальное количество попыток, в которых должен учавствовать нейрон
 - 4. id уникальный идентификатор подпопуляции
- 5. generation счётчик, указывающий на количество поколений текущей подпопуляции
- 6. best_neurons словарь, хранящий список приспособленностей лучших нейронов. Максимальный размер списка равен last_generations_count В классе имеются следующие методы:
- 1. __init__ конструктор. В конструкторе происходит создание подпопуляции нейронов. Параметры:
 - a) population_size количество особей (нейронов) в подпопуляции
- b) input_count количество входов для нейрона (необходим для создания нейрона)
- c) output_count количество выходов для нейрона (необходим для создания нейрона)
- d) last_generations_count количество последних поколений, для которых приспособленность лучшей особи не менялась, запускается взрывная мутация
- e) trials_per_neuron минимальное количество попыток, в которых должен учавствовать нейрон
 - f) subpopulation_id уникальный идентификатор подпопуляции

- 2. init инициализация подпопуляции нейронов. Для каждого нейрона вызывается метод init, в который передаются параметры метода. Параметры:
 - a) min_value минимальное случайно сгенерированное число
 - b) max_value максимальное случайно сгенерированное число
 - 3. get_neuron получение случайного нейрона из подпопуляции
- 4. is_trials_completed метод проверяет, что каждый из нейронов в подпопуляции поучавствовал в оценке работы нейронной сети заданное минимальное количетво раз (trials per neuron)
- 5. reset_trials сброс количества попыток для каждого нейрона в подпопуляции
- 6. fit_avg_fitness корректировка средней приспособленности для каждого нейрона в подпопуляции
- 7. crossover скрещивание нейронов в подпопуляции. Скрещиваются 1/4 часть лучших особей в подпопуляции, потомки добавляются в конец подпопуляции. Для скрещивающихся нейронов вызывается метод crossover класса Neuron
- 8. mutation мутация нижней половины подпопуляции. Вызывается метод mutation класса Neuron
 - 9. get_best_neuron получение лучшего нейрона в подпопуляции
- 10. check_degeneration проверка вырождения подпопуляции. Выбирается лучший нейрон, и его средняя приспособленность добавляется в список приспособленностей лучших нейронов
- 11. burst_mutation взрывная мутация. Происходит создание новой подпопуляции нейронов вокруг входного нейрона. Для инициализации весов нейронов используется распределение Коши в точке, соответствующей весу нейрона. Параметры:
- a) neuron нейрон, вокруг которого генерируется новая подпопуляция

Исходный код класса предсатвлен в листинге 2.

Листинг 2. Исходный код класса NeuronSubPopulation.

```
import random
import numpy as np
from collections import deque
from .neuron import Neuron
class NeuronSubPopulation(object):
   def __init__(self,
                 population_size: int,
                 input_count: int,
                 output_count: int,
                 last_generations_count: int,
                 trials_per_neuron: int,
                 subpopulation_id: int):
       self.population = []
       for i in range(population_size):
            self.population.append(Neuron(
                input_count=input_count,
                output_count=output_count,
                neuron_id=i))
        self.last_generations_count = last_generations_count
        self.trials_per_neuron = trials_per_neuron
        self.id = subpopulation_id
        self.generation = 0
        self.best_neurons = {}
   def init(self, min_value: float, max_value: float):
       for neuron in self.population:
            neuron.init(
                min value=min value,
                max value=max value)
   def get_neuron(self) -> Neuron:
        return random.choice(self.population)
```

```
def is_trials_completed(self) -> bool:
   trials = [neuron.trials for neuron in self.population]
    return min(trials) >= self.trials_per_neuron
def reset_trials(self):
   for neuron in self.population:
        neuron.trials = 0
def fit_avg_fitness(self):
   for neuron in self.population:
        neuron.fit_avg_fitness()
def crossover(self):
    self.population.sort(key=lambda x: x.avg_fitness)
    selected_neurons_count = int(len(self.population) / 4)
    selected_neurons_count -= selected_neurons_count % 2
   for i in range(0, selected_neurons_count, 2):
        parent1 = self.population[i]
        parent2 = self.population[i + 1]
        child1, child2 = Neuron.crossover(
            parent1=parent1,
            parent2=parent2)
        self.population[-selected_neurons_count + i] = child1
        self.population[-selected_neurons_count + i + 1] = child2
def mutation(self):
    bottom_half = int(len(self.population) / 2)
   for neuron in self.population[bottom_half:]:
        neuron.mutation()
def get_best_neuron(self) -> Neuron:
    self.population.sort(key=lambda x: x.avg_fitness)
   return self.population[0]
def check_degeneration(self):
```

```
best_neuron = self.get_best_neuron()
        if best_neuron.id in self.best_neurons.keys():
            self.best_neurons[best_neuron.id].append(best_neuron.avg_fitness)
        else:
            self.best_neurons[best_neuron.id] =
deque(maxlen=self.last_generations_count)
        clear_best_neurons = False
        for neuron_id, fitness_list in self.best_neurons.items():
            if len(fitness_list) == fitness_list.maxlen:
                if self.population[neuron_id].avg_fitness > min(fitness_list):
                    self.burst_mutation(neuron=best_neuron)
                    clear_best_neurons = True
                    break
        if clear_best_neurons:
            self.best_neurons = {}
    def burst mutation(self, neuron: Neuron):
        print('Взрывная мутация для подпопуляции {0:>3d}. Текущее поколение
{1:>3d}'
              .format(self.id, self.generation))
        input_count = neuron.input_count
        output_count = neuron.output_count
        new_population = []
        for i in range(len(self.population)):
            new_neuron = Neuron(
                input_count=input_count,
                output_count=output_count,
                neuron_id=i)
            new_neuron.input_weights = \
                np.random.standard_cauchy(input_count) * 0.05 +
neuron.input_weights
            new_neuron.output_weights = \
                np.random.standard_cauchy(output_count) * 0.05 +
neuron.output_weights
            new_population.append(new_neuron)
        self.population = new_population
```

1.3 Knacc NeuronPopulation

Класс NeuronPopulation - реализует логику работы с популяцией подпопуляций. Имеются следующие поля:

- 1. population список подпопуляций
- В классе имеются следующие методы:
- 1. __init__ конструктор. В конструкторе происходит создание попдпопуляций. Параметры:
- 1. population_size количество подпопуляций (так же количество нейронов в скрытом слое)
 - 2. subpopulation_size размер подпопуляции
 - 3. input_count количество входов для нейрона
 - 4. output_count количество выходов для нейрона
- 5. last_generations_count количество последних поколений, для которых приспособленность лучшей особи не менялась, запускается взрывная мутация
- 6. trials_per_neuron минимальное количество попыток, в которых должен учавствовать нейрон
- 2. init инициализация подпопуляций нейронов. Для каждой подпопуляции вызывается метод init, в который передаются параметры метода. Параметры:
 - 1. min_value минимальное случайно сгенерированное число
 - 2. max_value максимальное случайно сгенерированное число
- 3. get_neurons метод возвращает список нейронов, при этом из каждой подпопуляции берётся по одному случайному нейрону вызовом метода get neuron класса NeuronSubPopulation
- 4. get_best_neurons метод возвращает список нейронов, при этом из каждой подпопуляции берётся по одному лучшему нейрону вызовом метода get best neuron класса NeuronSubPopulation

- 5. is_trials_completed метод проверяет, что каждый из нейронов во всех подпопуляциях поучавствовал в оценке работы нейронной сети заданное минимальное количетво раз
- 6. reset_trials сброс количества попыток для каждого нейрона во всех подпопуляциях
- 7. fit_avg_fitness корректировка средней приспособленности для всех подпопуляций
 - 8. crossover скрещивание всех подпопуляций
 - 9. mutation мутация всех подпопуляций
- 10. check_degeneration проверка вырождения всех подпопуляций Исходный код класса представлен в листинге 3.

Листинг 3. Исходный код класса NeuronPopulation.

```
from typing import List
from .neuron_subpopulation import NeuronSubPopulation
from .neuron import Neuron
class NeuronPopulation(object):
    def __init__(self,
                 population_size: int,
                 subpopulation_size: int,
                 input_count: int,
                 output count: int,
                 last_generations_count: int,
                 trials per neuron: int):
        self.population = []
       for i in range(population_size):
            self.population.append(NeuronSubPopulation(
                population_size=subpopulation_size,
                input_count=input_count,
                output count=output count,
                last_generations_count=last_generations_count,
                trials_per_neuron=trials_per_neuron,
                subpopulation_id=i))
```

```
def init(self, min_value: float, max_value: float):
       for i in range(len(self.population)):
            self.population[i].init(
                min_value=min_value,
                max_value=max_value)
   def get_neurons(self) -> List[Neuron]:
        return list(map(lambda x: x.get_neuron(), self.population))
   def get_best_neurons(self) -> List[Neuron]:
        return list(map(lambda x: x.get_best_neuron(), self.population))
   def is_trials_completed(self) -> bool:
       trials = [subpopulation.is_trials_completed() for subpopulation in
self.population]
        return not (False in trials)
   def reset_trials(self):
       for subpopulation in self.population:
            subpopulation.reset_trials()
   def fit_avg_fitness(self):
       for subpopulation in self.population:
            subpopulation.fit_avg_fitness()
   def crossover(self):
       for subpopulation in self.population:
            subpopulation.crossover()
   def mutation(self):
       for subpopulation in self.population:
            subpopulation.mutation()
    def check_degeneration(self):
```

```
for subpopulation in self.population:
    subpopulation.check_degeneration()
```

1.4 Классы функций активации

Базовым классом для всех функций активации является класс AbstractActivationFunction, представляющий интерфейс для работы с функциями активации. В данном классе имеется метод forward, который принимает на вход питру-массив (вектор), применяет к каждому элементу функцию активации и возвращает питру-массив. Дочерние классы должны реализовать данный метод.

Имеется реализация сигмоидальной функции активации в классе Sigmoid. Исходный код классов представлен в листинге 4.

Листинг 4. Исходный код классов функции активации.

```
import numpy as np

class AbstractActivationFunction(object):
    def __init__(self):
        pass

def forward(self, input_data: np.array) -> np.array:
        raise NotImplementedError()

class Sigmoid(AbstractActivationFunction):
    def __init__(self):
        pass

def forward(self, input_data: np.array) -> np.array:
        return 1.0 / (1.0 + np.exp(-input_data))
```

1.5 Класс Layer

Класс Layer реализует логику работы со слоем нейронной сети. Имеются следующие поля:

- 1. weights матрица весов слоя
- 2. activation функция активации (объект класса AbstractActivationFunction)

В классе имеются следующие методы:

- 1. __init__ конструктор, параметры:
 - а) weights матрица весов
 - b) activation функция активации
- 2. forward прямой проход по слою. Матрица весов умножатеся на вектор-столбец входных данных, к каждому элементу полученного вектор-стобца применяется функция активации. Параметры:
- a) input_data вектор входных данныхИсходный код класса представлен в листинге 5.

Листинг 5. Исходный код класса Layer.

1.6 Класс NeuralNetwork

Класс NeuralNetwork реализует логику работы с нейронной сетью. Имеются следующие поля:

1. input_weights - матрица весов скрытого слоя

- 2. output_weights матрица весов выходного слоя
- 3. layers список, содержащий слои нейронной сети (объекты класса Layer)

В классе имеются следующие методы:

- 1. __init__ конструктор. Происходит инициализация весов нейронной сети и создание скрытого и выходного слоёв сети. Параметры:
- a) hidden_neurons список нейронов, из которых будут созданы скрытый и выходной слои сети
- 2. forward прямой проход по сети. Последовательно выполняется прямой проход по слоям сети с помощью метода forward класса Layer. Параметры:
- a) input_data вектор входных данныхИсходный код класса представлен в листинге 6.

Листинг 6. Исходный код класса NeuralNetwork.

```
from typing import List
import numpy as np
from .layer import Layer
from .neuron import Neuron
from .activations import Sigmoid
class NeuralNetwork(object):
    def __init__(self,
                 hidden_neurons: List[Neuron]):
        input_count = hidden_neurons[0].input_count
        output_count = hidden_neurons[0].output_count
        self.input_weights = np.zeros((len(hidden_neurons), input_count))
        output_weights = np.zeros((len(hidden_neurons), output_count))
        for i in range(len(hidden_neurons)):
            self.input_weights[i] = hidden_neurons[i].input_weights
            output_weights[i] = hidden_neurons[i].output_weights
        self.output_weights = np.zeros((output_count, len(hidden_neurons)))
        for i in range(output_count):
```

```
self.output_weights[i] = output_weights[:, i]
self.layers = []
self.layers.append(Layer(
    weights=self.input_weights,
    activation=Sigmoid()))
self.layers.append(Layer(
    weights=self.output_weights,
    activation=Sigmoid()))

def forward(self, input_data: np.array) -> np.array:
    output = input_data
    for layer in self.layers:
        output = layer.forward(output)
    return output
```

1.7 Класс ESPAlgorithm

Класс ESPAlgorithm реализует логику работы с алгоритмом ESP. Имеются следующие поля:

- 1. population популяция подпопуляций
- 2. best_nn лучшая нейронная сеть
- 3. best_nn_fitness приспособленность лучшей нейронной сети

В классе имеются следующие методы:

- 1. __init__ конструктор. Происходит создание популяции подпопуляций. Параметры:
 - a) hidden_layer_size количество нейронов в скрытом слое
 - b) population_size размер каждой из подпопуляции
 - c) input_count количество входов для нейрона
 - d) output_count количество выходов для нейрона
- e) last_generations_count количество последних поколений, для которых приспособленность лучшей особи не менялась, запускается взрывная мутация

- f) trials_per_neuron минимальное количество попыток, в которых должен учавствовать нейрон
 - 2. init инициализация популяции подпопуляций, параметры:
 - a) min_value минимальное случайно сгенерированное число
 - b) max_value максимальное случайно сгенерированное число
 - 3. train тренировка нейронных сетей, параметры:
 - a) generations_count количество поколений
 - b) x_train массив входных данных
 - c) y_train массив выходных данных
 - 4. update_best_nn обновление лучшей нейронной сети
- 5. check_fitness проверка приспособленностей нейронных сетей, параметры:
 - a) x_train массив входных данных
 - b) y_train массив выходных данных

Рассмотрим подробнее работу алгоритма (метод train). Запускается цикл согласно количеству поколений (generations count). В цикле вызывается метод check fitness. В методе check fitness запускается цикл, который выполняется до тех пор, пока каждый нейрон в каждой из подпопуляций не поучаствует в нейронной сети. Для данной проверки используется метод работе is trials completed класса NeuronPopulation. В цикле происходит выборка нейронов - случайно, по одному из каждой подпопуляции. Выбранные нейроны будут участвовать в работе нейронной сети, поэтому для них увеличивается счётчик количества попыток. Из выбранных нейронов создаётся нейронная сеть (объект NeuralNetwork). Для данной нейронной сети делается прямой проход по каждому набору входных данных (вызов вспомогательного метода forward train). Для каждого набора данных вычисляется среднеквадратичная ошибка и возвращается среднее значение ошибок. Данное среднее значение будет являться кумулятивной приспособленностью выбранных нейронов. После того, как каждый нейрон поучавствует в работе нейронной сети, метод check fitness завершает свою работу, возвращая количество попыток, которое потребовалось для того, чтобы каждый нейрон поучавствовал в работе сети. Получив значение приспособленности, происходит кумулятивной обновление средней приспособленности вызовом метода fit avg fitness класса NeuronPopulation. Затем делается проверка на вырождение подпопуляций вызовом метода check_degeneration класса NeuronPopulation. Далее, ДЛЯ каждой ИЗ подпопуляций делается скрещивание вызовом метода crossover класса NeuronPopulation. Далее, для каждой из подпопуляций делается мутация вызовом метода mutation класса NeuronPopulation. В конце итерации происходит сброс счётчика попыток у каждого из нейронов. Данные шаги выполняются заданное количество раз.

Исходный код класса представлен в листинге 7.

Листинг 7. Исходный код класса ESPAlgorithm.

```
from typing import List
import numpy as np
from statistics import mean
import time
from .neuron_population import NeuronPopulation
from .neural network import NeuralNetwork
from .neuron import Neuron
from .utils import mse
def forward_train(neural_network: NeuralNetwork,
                  x_train: np.array,
                  y_train: np.array) -> float:
    dataset_size = x_train.shape[0]
    errors = []
    for i in range(dataset_size):
        output = neural_network.forward(input_data=x_train[i])
        error = mse(y_true=y_train[i], y_pred=output)
        errors.append(error)
    return np.array(errors).mean()
```

```
def increment_trials(neurons: List[Neuron]):
    for neuron in neurons:
        neuron.trials += 1
class ESPAlgorithm(object):
    def __init__(self,
                 hidden_layer_size: int,
                 population_size: int,
                 input_count: int,
                 output_count: int,
                 last_generations_count: int,
                 trials_per_neuron: int):
        self.population = NeuronPopulation(
            population_size=hidden_layer_size,
            subpopulation_size=population_size,
            input_count=input_count,
            output_count=output_count,
            last_generations_count=last_generations_count,
            trials_per_neuron=trials_per_neuron)
        self.best nn = None
        self.best_nn_fitness = 0.0
    def init(self, min_value: float, max_value: float):
        self.population.init(
            min_value=min_value,
            max_value=max_value)
    def train(self,
              generations_count: int,
              x_train: np.array,
              y_train: np.array):
        result = []
        for generation in range(generations_count):
            start_time = time.time()
```

```
trials_count = self.check_fitness(
                x_train=x_train,
                y_train=y_train)
            self.population.fit_avg_fitness()
            if self.update_best_nn():
                result.append((generation, self.best_nn_fitness))
            self.population.check_degeneration()
            self.population.crossover()
            self.population.mutation()
            full_time = time.time() - start_time
            print('Поколение \{0:>5d\}, Количество попыток \{1:>3d\}, '
                  'Приспособленность лучшего нейрона {2:2.6f}, Время выполнения
{3:3.3f} s'
                  .format(generation, trials_count, self.best_nn_fitness,
full_time))
            self.population.reset_trials()
        return result
    def update_best_nn(self):
        best_neurons = self.population.get_best_neurons()
        best_nn = NeuralNetwork(
            hidden_neurons=best_neurons)
        best_nn_fitness = mean([neuron.avg_fitness for neuron in best_neurons])
        if self.best_nn is None or best_nn_fitness < self.best_nn_fitness:</pre>
            self.best_nn = best_nn
            self.best_nn_fitness = best_nn_fitness
            return True
        return False
    def check_fitness(self,
                      x_train: np.array,
                      y_train: np.array) -> int:
        trials_count = 0
        while not self.population.is_trials_completed():
            selected_neurons = self.population.get_neurons()
            increment_trials(selected_neurons)
```

```
neural_network = NeuralNetwork(
    hidden_neurons=selected_neurons)
error = forward_train(
    neural_network=neural_network,
        x_train=x_train,
        y_train=y_train)
for neuron in selected_neurons:
    neuron.cumulative_fitness += error
    trials_count += 1
return trials_count
```

2 Результаты работы программы

Для тестирования работы алгоритма применяется датасет cancer1. Параметры алгоритма следующие:

- 1. количество нейронов в скрытом слое: 10
- 2. количество нейронов в подпопуляции: 15
- 3. количество последних поколений, для которых приспособленность лучшей особи не менялась, запускается взрывная мутация: 2
- 4. минимальное количество попыток, в которых должен учавствовать нейрон: 2
- 5. количество поколений: 5000

Алгоритм инициализируется значениями от -1 до 1.

Результат представлен на рисунке 1.

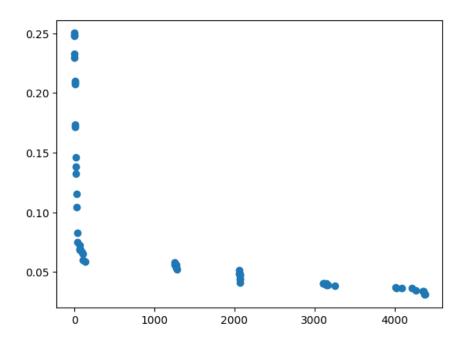


Рисунок 1. Результаты работы программы.

На данном рисунке представлено изменение среднеквадратичной ошибки лучшей нейронной сети в процессе работы сети. За 5000 поколений среднеквадратичная ошибка уменьшилась до значения 0.031031. Таким образом алгоритм обучается, однако имеет низкую производительность. Просчёт одного поколения занимает около двух секунд.

3 Вывод

В результате выполнения индивидуального задания был реализован нейроэволюционный алгоритм ESP. Были проанализированы результаты и показано, что алгоритм решает задачу.