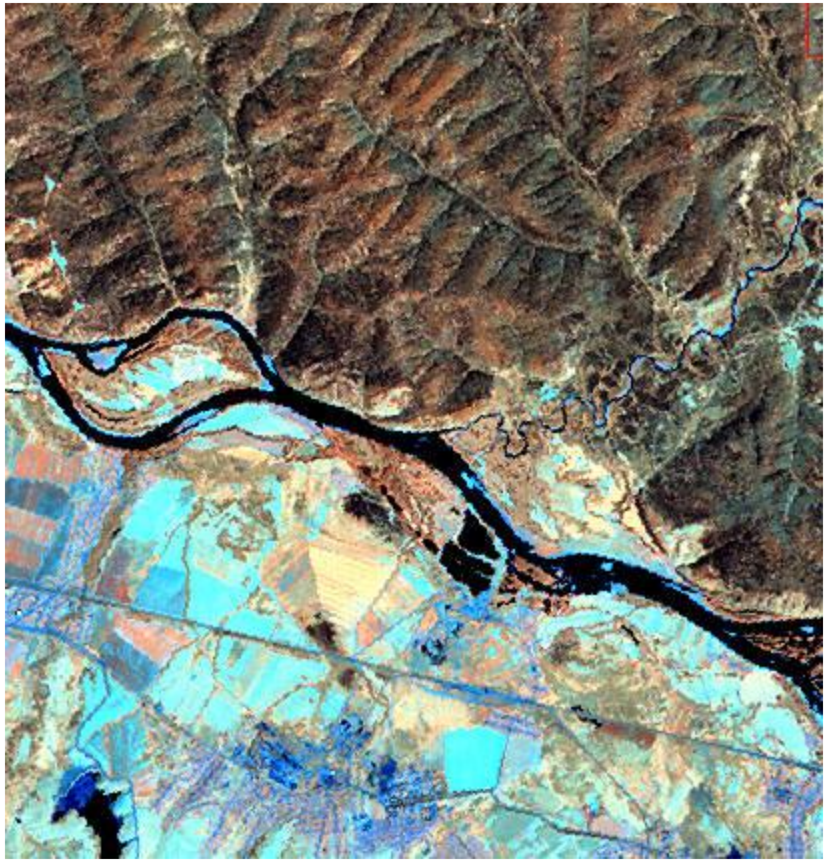
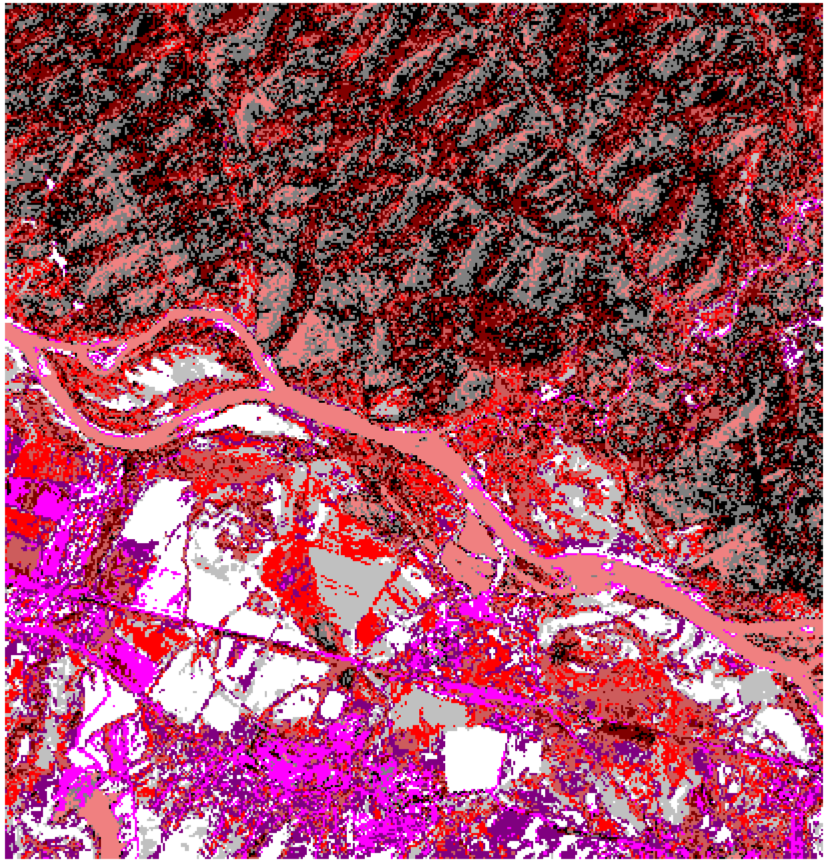
Классификация

Задачи





Правило Байеса

$p(i \mid f)$ — условная вероятность

$$p(i \mid f) = \frac{p(f \mid i)\,p(i)}{p(f)}, \quad p(f) = \sum_i p(f \mid i)\,p(i)$$

i — номер класса

f — вектор признаков (RGB)

Можно предположить что $p(f) = const$

Дискриминантная функция

$p(i \mid f) > p(j \mid f), \forall j \neq i$ — пиксель относится к классу i

или, по-другому

$$D_i(f) > D_j(f), \forall j \neq i$$

$D_i(f)$ — дискриминантная функция

$$D_i(f) = p(f \mid i)p(i) = p(i \mid f)p(f)$$

Свойство: решение не будет меняться при любом монотонном преобразовании

$$D_i(f) = \ln\left[p(f \mid i)p(i)\right] = \ln\left[p(f \mid i)\right] + \ln\left[p(i)\right]$$

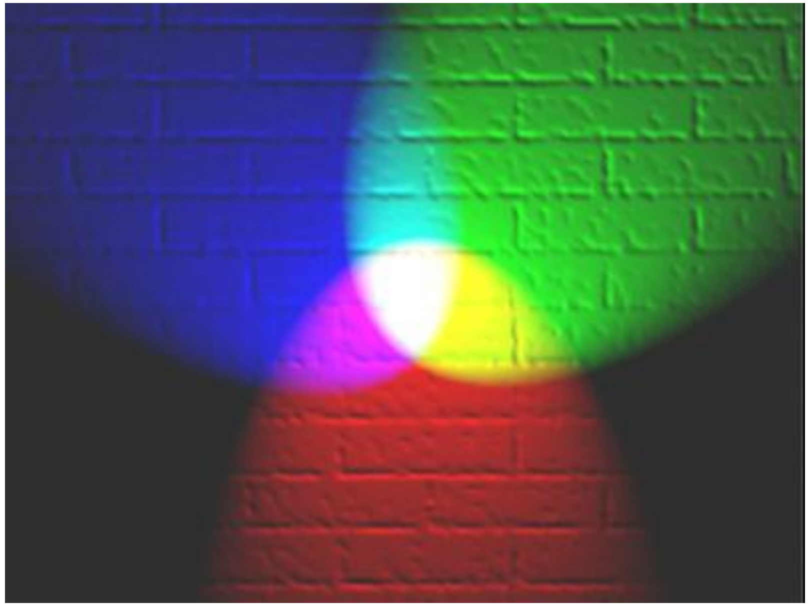
Метод максимального правдоподобия (ММП)

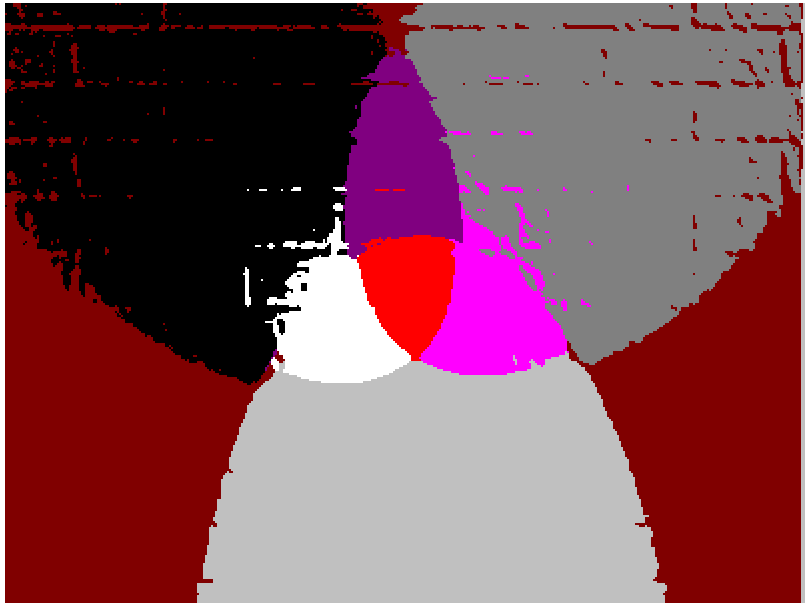
$$\rho_i(f) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det \Sigma_i}} \exp\left[-\frac{1}{2}(f-\mu_i)^T \Sigma_i^{-1}(f-\mu_i)\right]$$

$$D_i(f) = \ln\left[p(i)\right] - \frac{1}{2}\left[k\ln(2\pi) + \ln\left(\det \Sigma_i\right) + (f-\mu_i)^T \Sigma_i^{-1}(f-\mu_i)\right]$$

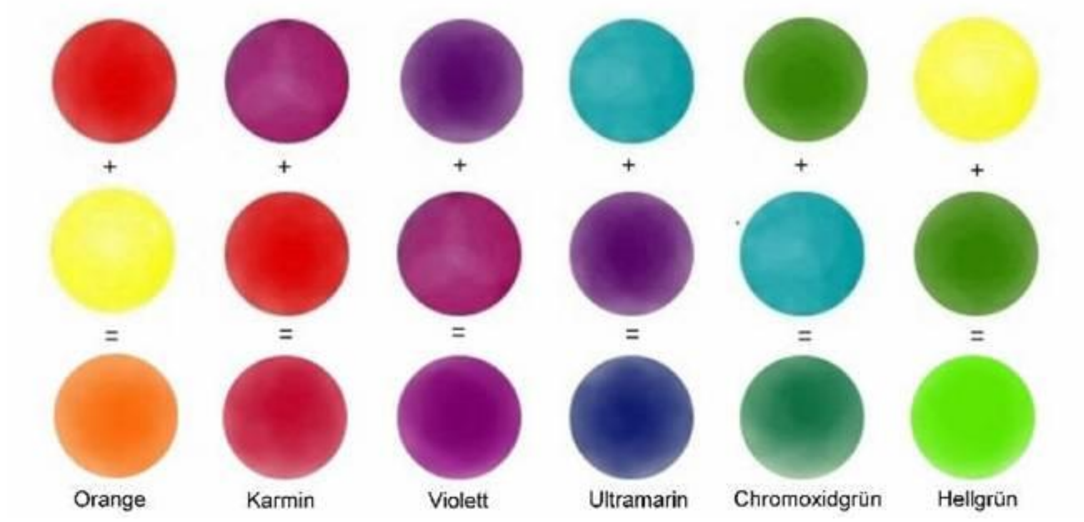
$$D_i(f) = -\ln\left(\det \Sigma_i\right) - (f-\mu_i)^T \Sigma_i^{-1}(f-\mu_i)$$

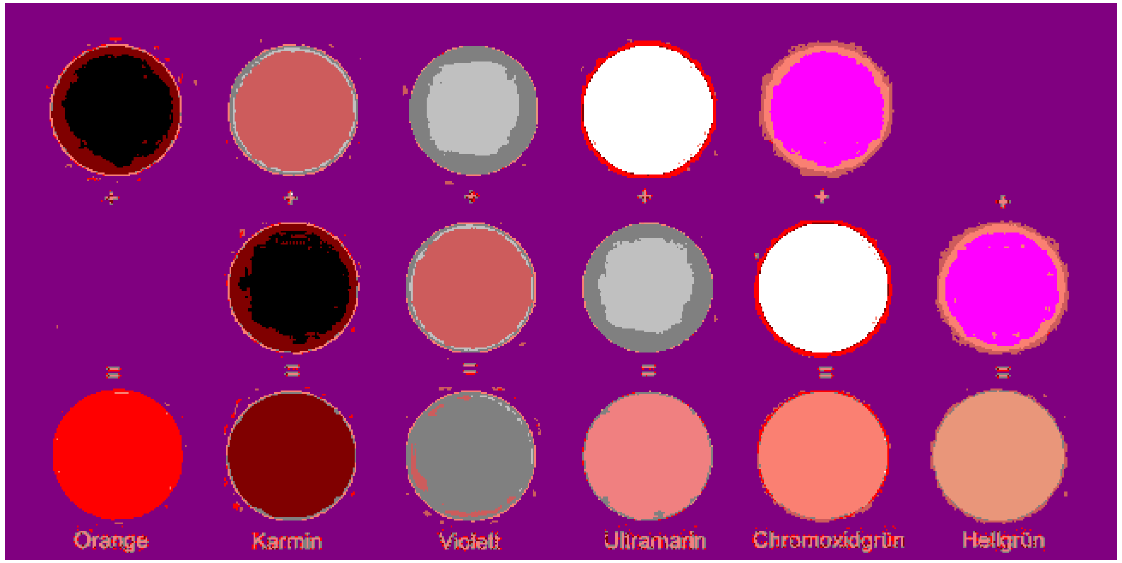
Метод максимального правдоподобия





Метод максимального правдоподобия



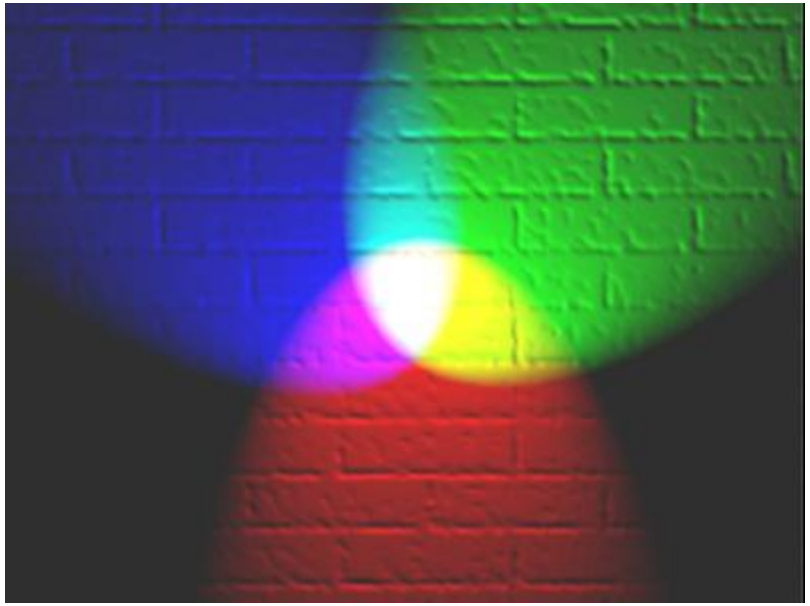


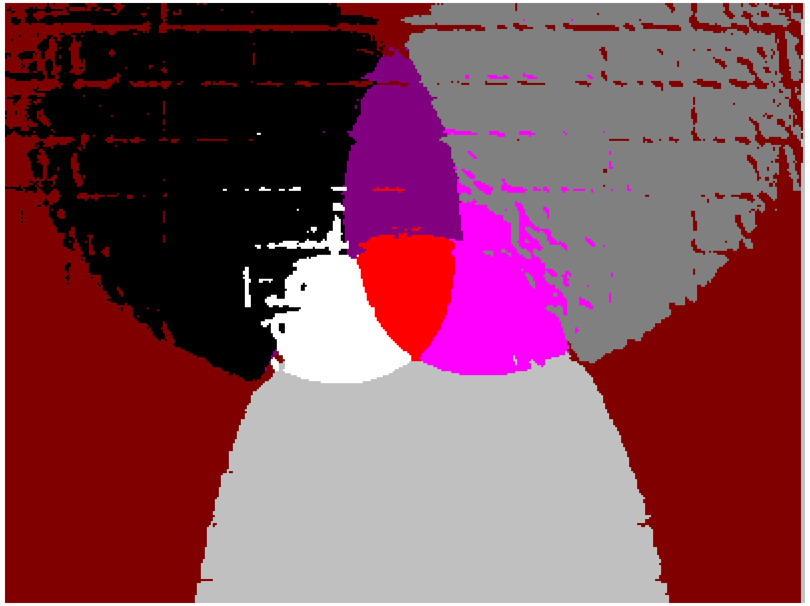
Метод расстояния Махаланобиса

$$D_i(f) = -\ln\left(\det \Sigma_i\right) - (f-\mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (f-\mu_i)$$

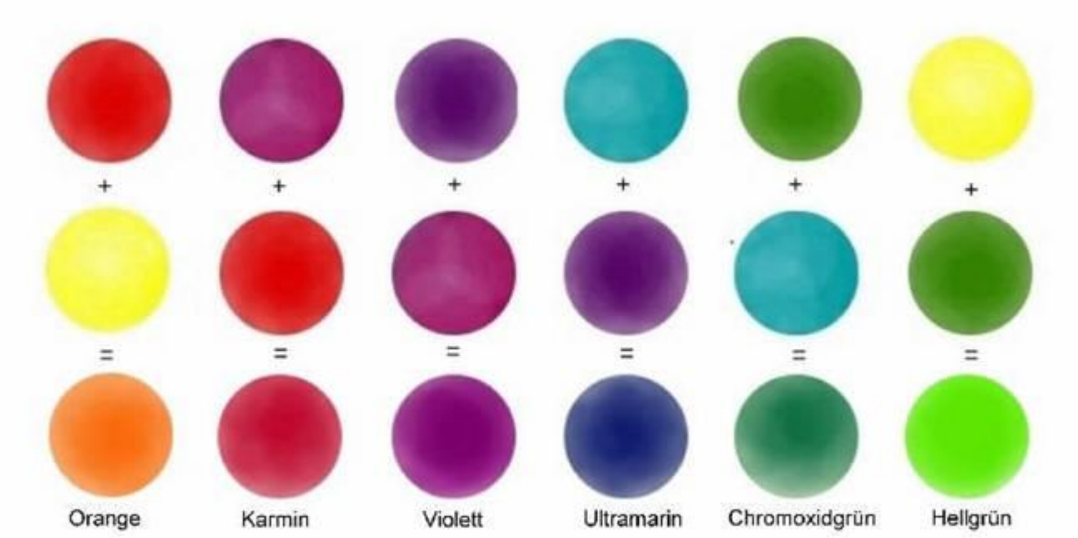
$$\downarrow$$

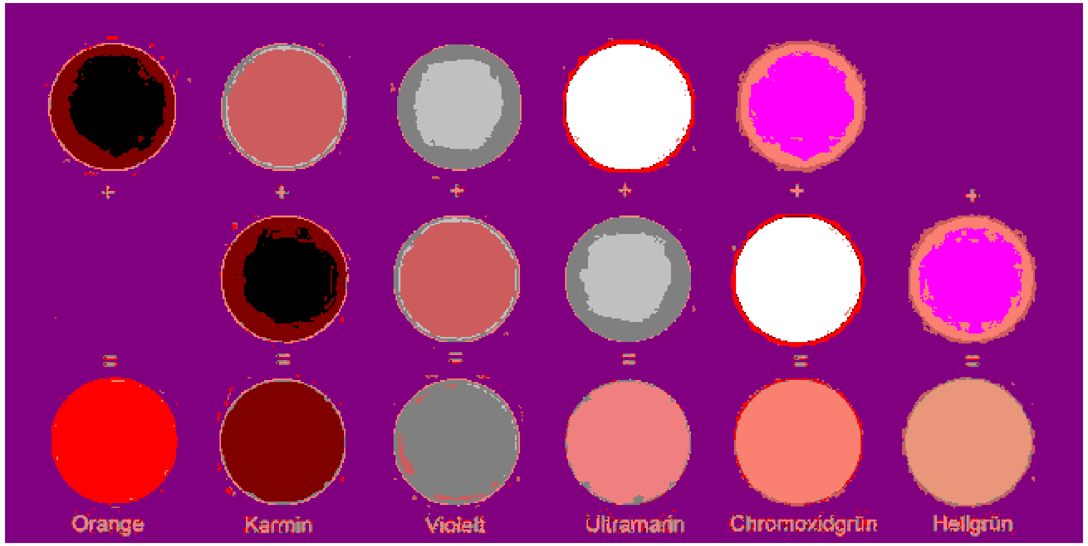
$$D_i(f) = -(f-\mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (f-\mu_i)$$



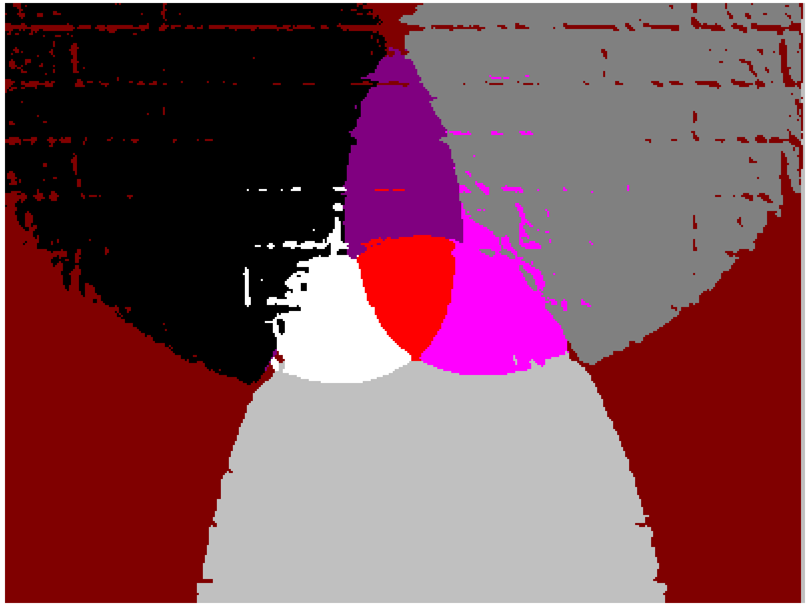


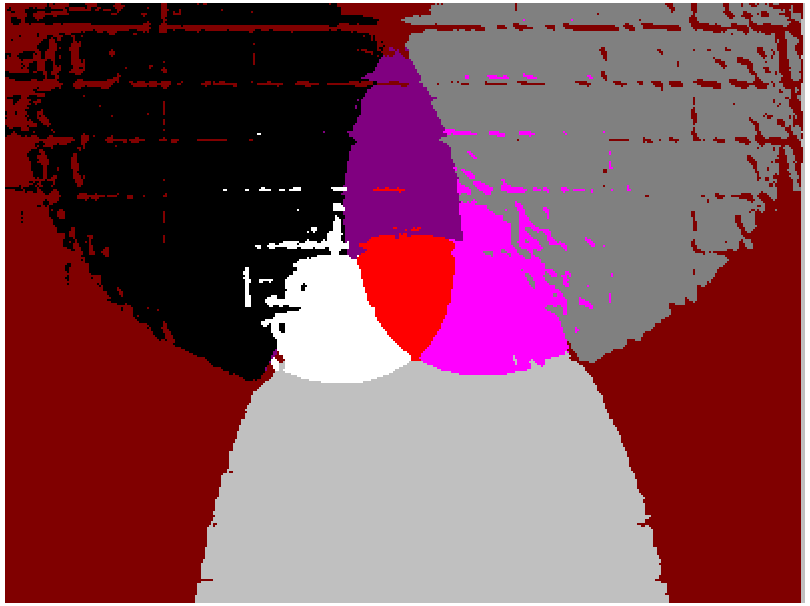
Метод расстояния Махаланобиса



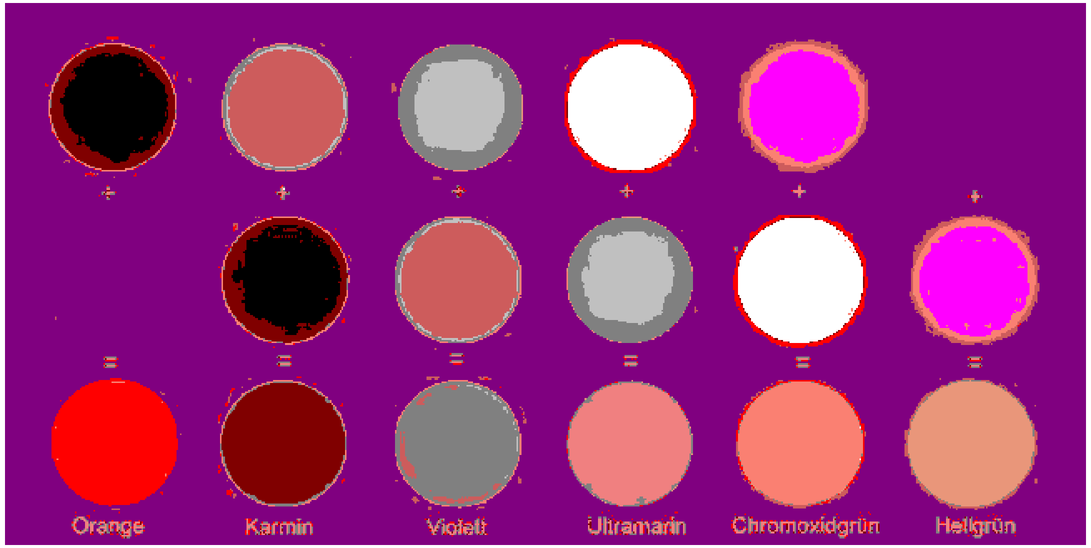


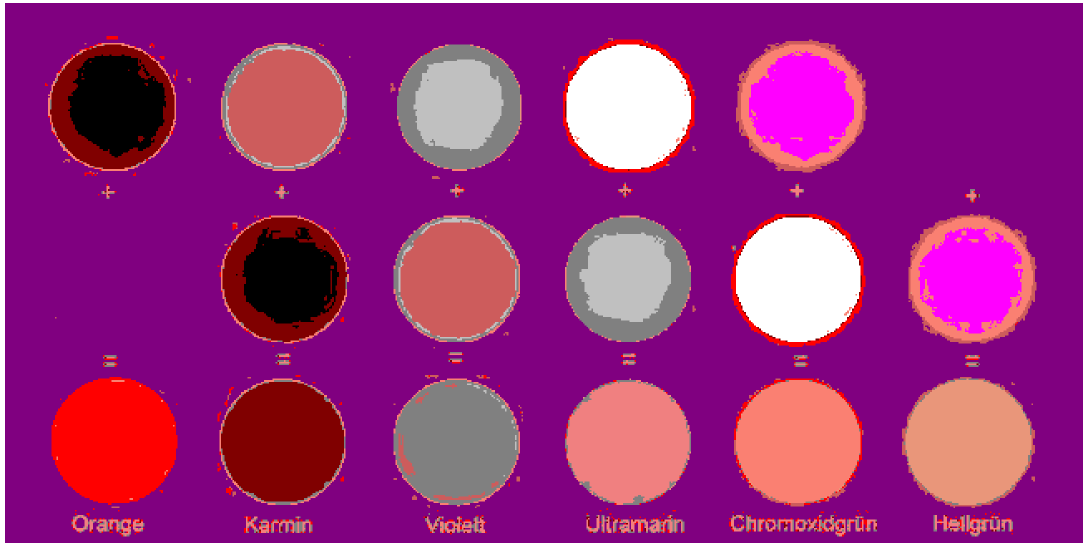
Сравнение ММП и Махаланобиса





Сравнение ММП и Махаланобиса





Метод минимального расстояния

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c \end{pmatrix}$$

$$D_i(f) = -(f - \mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (f - \mu_i)$$

$$\downarrow$$

$$D_i(f) = -(f - \mu_i)^T (f - \mu_i) = -\mathrm{dist}\left(f, \mu_i\right)$$

Диаграмма Вороного

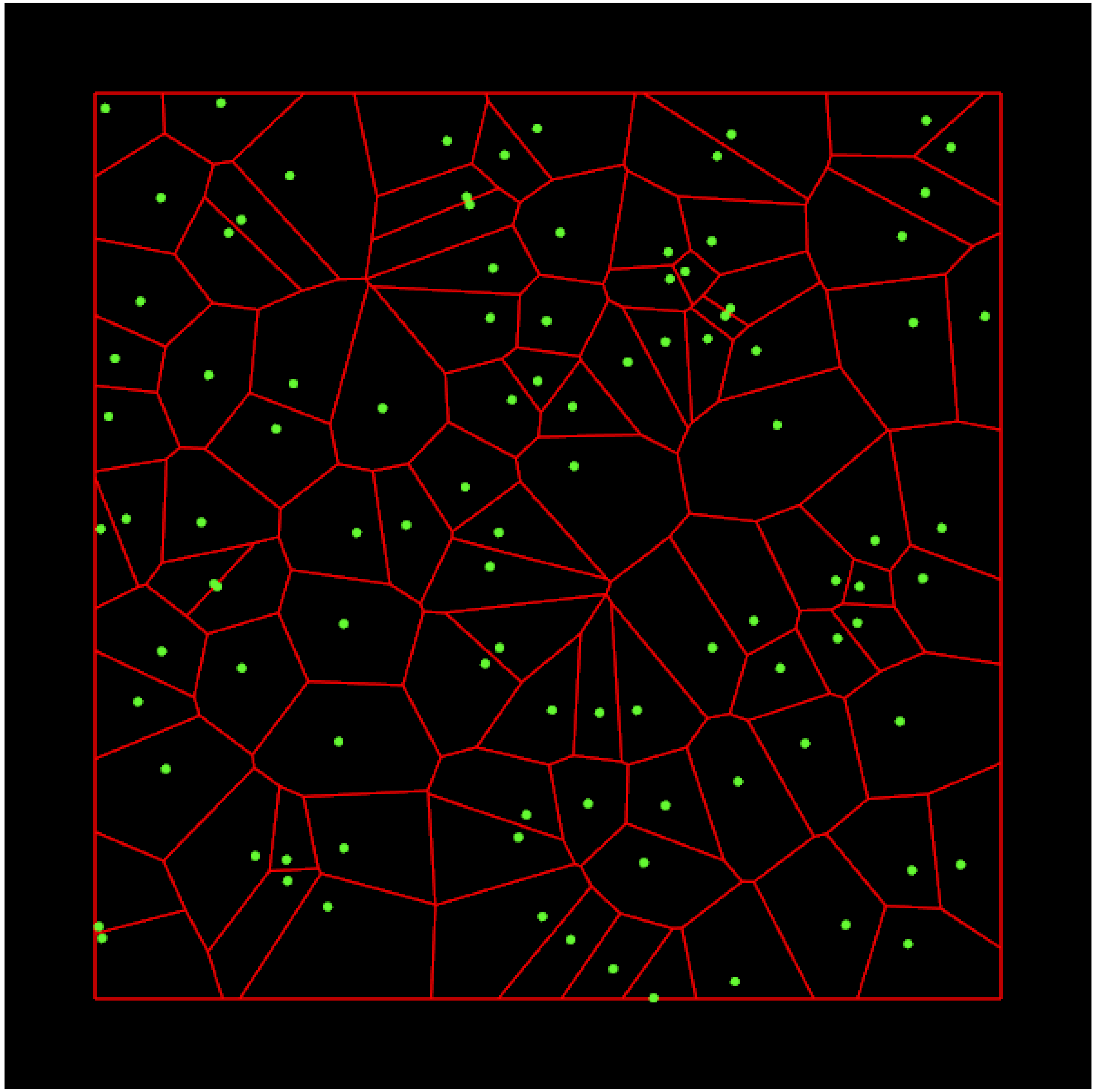
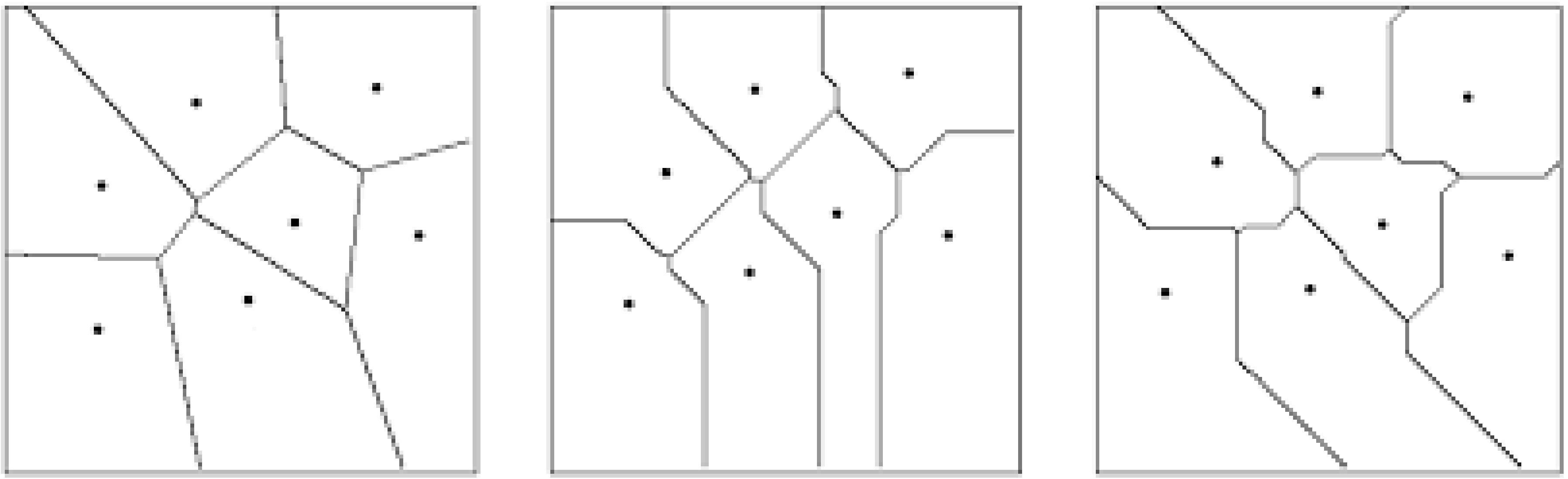


Диаграмма Вороного для разных метрик

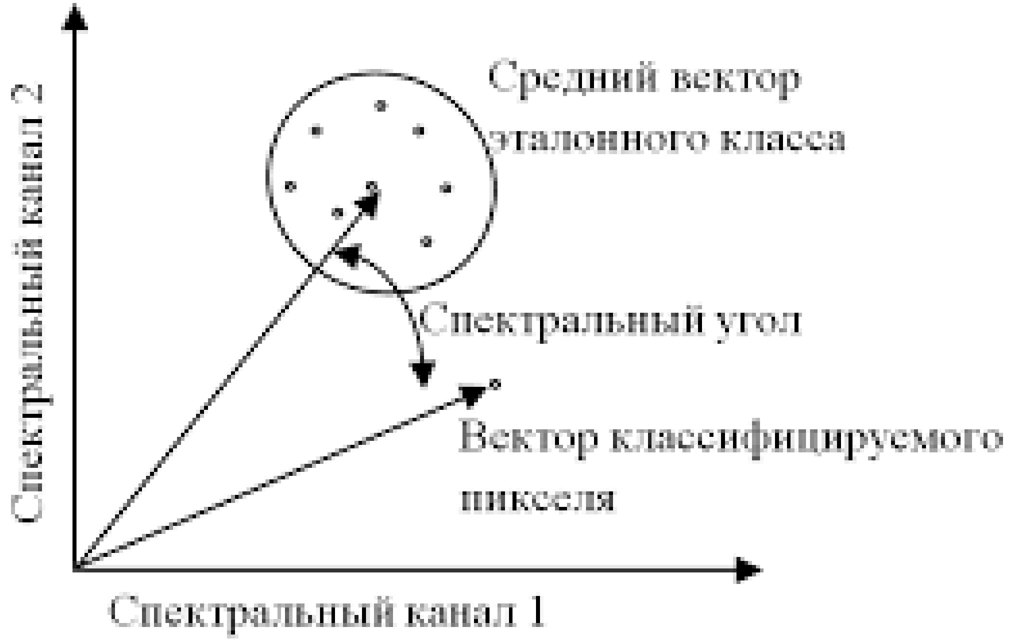


$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_i (x_i-y_i)^2}$$ — Евклидово расстояние

$$\rho(x,y)=\sum_i |x_i-y_i|$$ — Расстояние городских кварталов (манхэттенское расстояние)

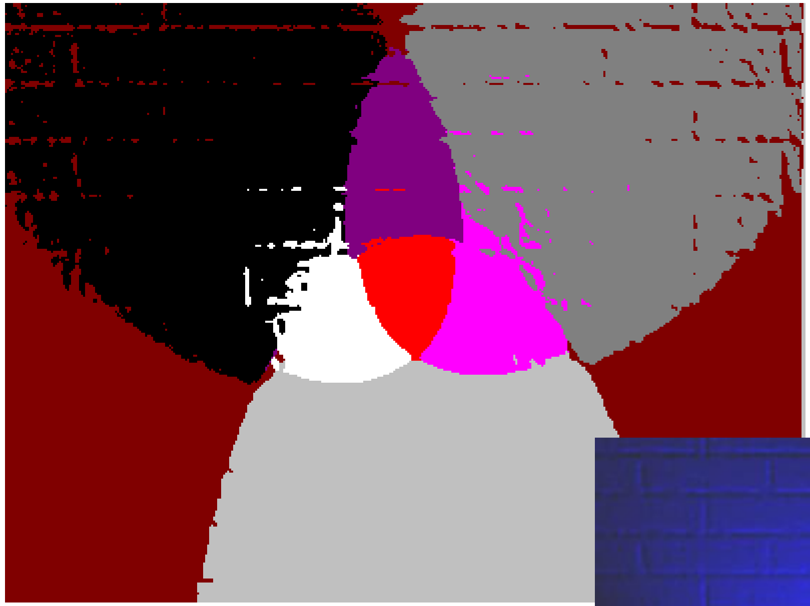
$$\rho(x,y)=\max_i |x_i-y_i|$$ — Расстояние Чебышёва

Метод спектрального угла

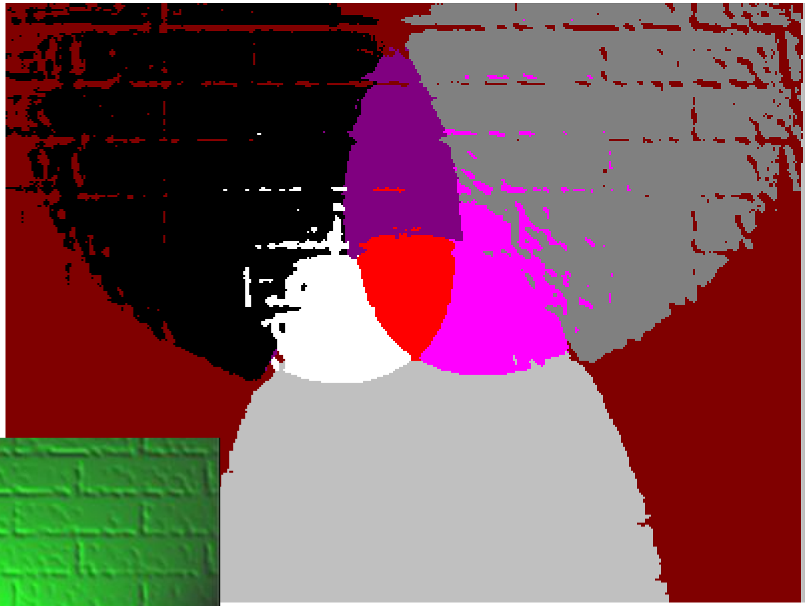


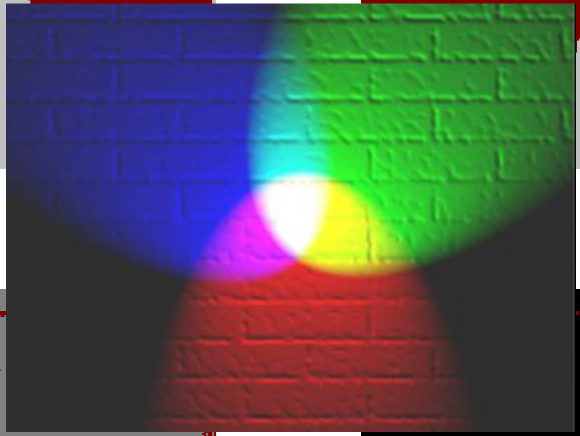
$$D_i(f) = \cos[f \wedge \mu_i] = \frac{(f, \mu_i)}{\|f\|\|\mu_i\|} \sim \left(f, \frac{\mu}{\|\mu_i\|}\right)$$

ММП

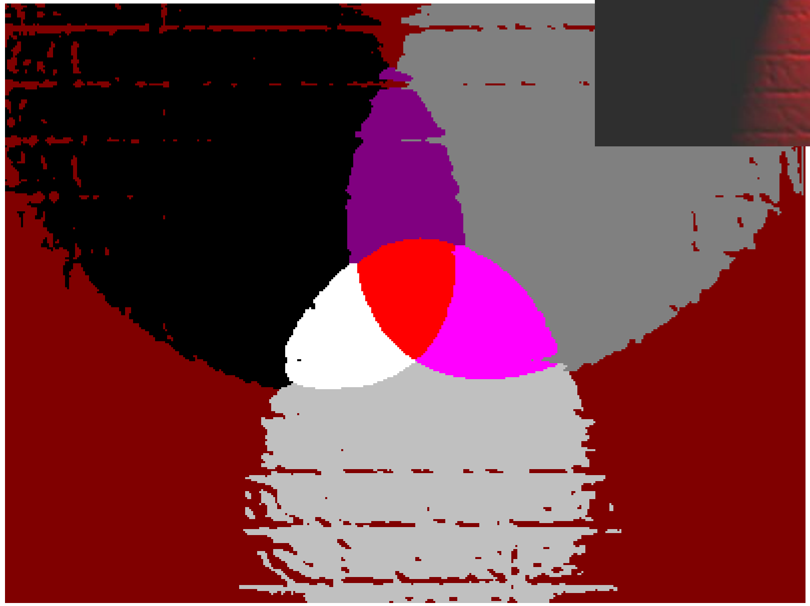


Махаланобис

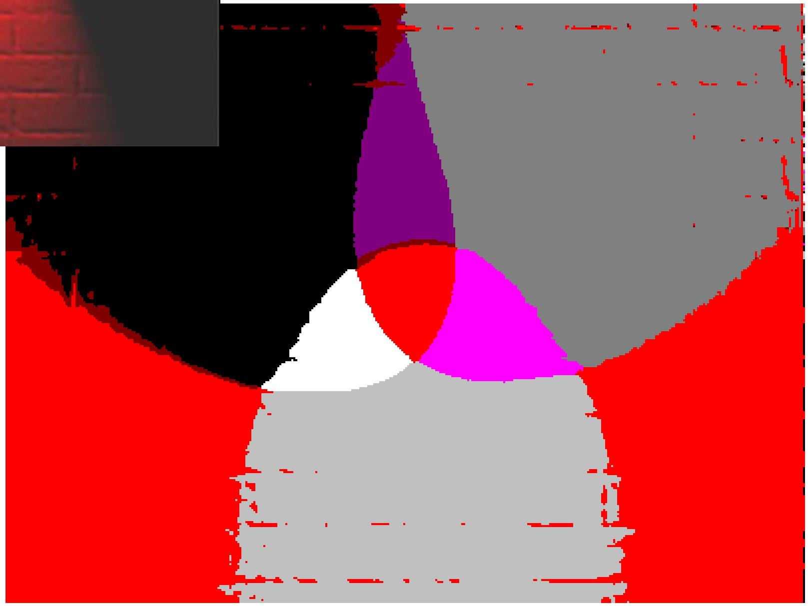




ММР



Спектральный угол



Метод k-средних

$$V = \sum_{i=1}^{k} \sum_{f \in S_i} \mathrm{dist}(f, \mu_i)^2 \to \min$$

$\mu_i^{(0)}$ — задается

$S_i^{(n)}:$ $\quad D_i(f) = -\mathrm{dist}(f, \mu_i^{(n)})$ — выполняем классификацию

$\mu_i^{(n+1)} = \frac{1}{\left|S_i^{(n)}\right|} \sum_{f \in S_i^{(n)}} f$ — обновляем центры кластеров

$\mu_i^{(n)} = \mu_i^{(n+1)}$ — условие завершения

Метод k-средних

Недостатки:

1) Не гарантируется достижение глобального минимума суммарного квадратичного отклонения V, а только одного из локальных минимумов.

2) Результат зависит от выбора исходных центров кластеров, их оптимальный выбор неизвестен.

3) Число кластеров надо знать заранее.

Решение: алгоритм ISODATA

Матрица ковариации

$f^k = \left(f_1^k, f_2^k, \ldots, f_m^k\right)^{\mathrm{T}}, k = 1, \ldots, N$ — выборка

$\mu = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f^k$ — выборочное математическое ожидание

$\Sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} \left(f^k - \mu\right)\left(f^k - \mu\right)^{\mathrm{T}}$ — выборочная матрица ковариации

Матрица ковариации

Матрица ковариации симметричная, следовательно все собственные значения (СЗ) действительные, а собственные вектора (СВ) ортогональны.

$\Sigma = U \Lambda U^{\mathrm{T}}$ — спектральное разложение матрицы

$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ — собственные значения

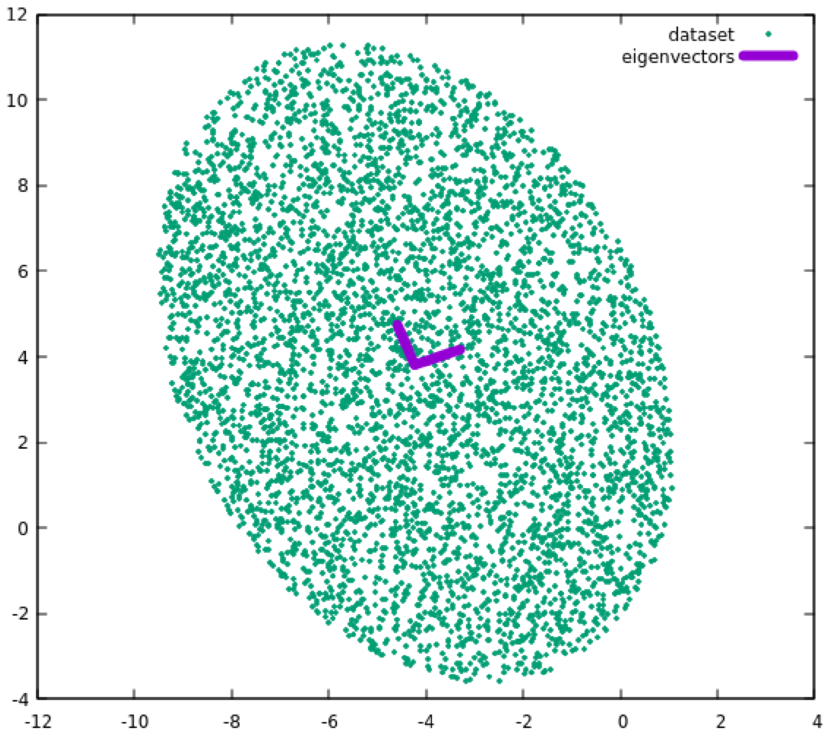
$U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — собственные вектора

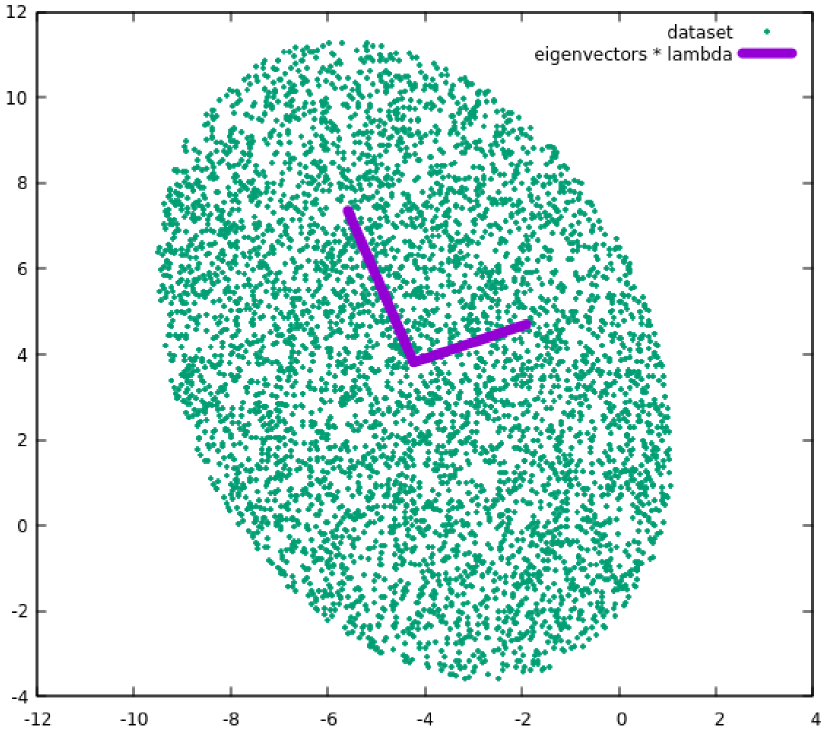
$u_1\sqrt{|\lambda_1|}, u_2\sqrt{|\lambda_2|}, \ldots, u_m\sqrt{|\lambda_m|}$ — ортогональный базис связанный с выборкой

Пример

$$\mu = \begin{pmatrix} -4.23 \\ 3.81 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 7.24 & -2.73 \\ -2.73 & 13.33 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0.93 & -0.36 \\ 0.36 & 0.93 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 6.19 \\ \lambda_2 = 14.38 \end{matrix}$$





Область, включающая выборку

$$\Omega = \left\{ f = \left(f_1, f_2, \dots, f_m \right)^{\mathrm{T}} \middle| f = f^c + \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=i+1}^{m} R_{\varphi_{i,j}} \cdot S \cdot x, x \in E \right\}$$

E — единичный шар или куб с центром в начале координат и длиной стороны 2.

S — диагональная матрица масштабирования.

$R_{\varphi_{i,j}}$ — матрица поворота

f^c — центр области

Вычисление углов

$U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — нормированные СВ.

$$V = U,$$

$$\text{for } i = 1, \ldots, m:$$

$$\quad \text{for } j = (i+1), \ldots, m:$$

$$\qquad \varphi_{i,j} = \arctan\left(\frac{v_{i,j}}{v_{i,i}}\right),$$

$$\qquad V = VR_{\varphi_{i,j}},$$

Масштабные коэффициенты и центр

$$S = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{2}\left(d^{max} - d^{min}\right)\right\}$$

$$f^{c} = \mu + \frac{1}{2}U\left(d^{min} + d^{max}\right)$$

$$d^{min} = \min_{k}\left[U^{-1}\left(f^{k} - \mu\right)\right]$$

$$d^{max} = \max_{k}\left[U^{-1}\left(f^{k} - \mu\right)\right]$$

Корректирующий коэффициент для масштабных коэффициентов в случае с эллипсом

$$\eta = \max_{k}\left\|S^{-1}U^{-1}\left(f^{k} - f^{c}\right)\right\|$$

Пример

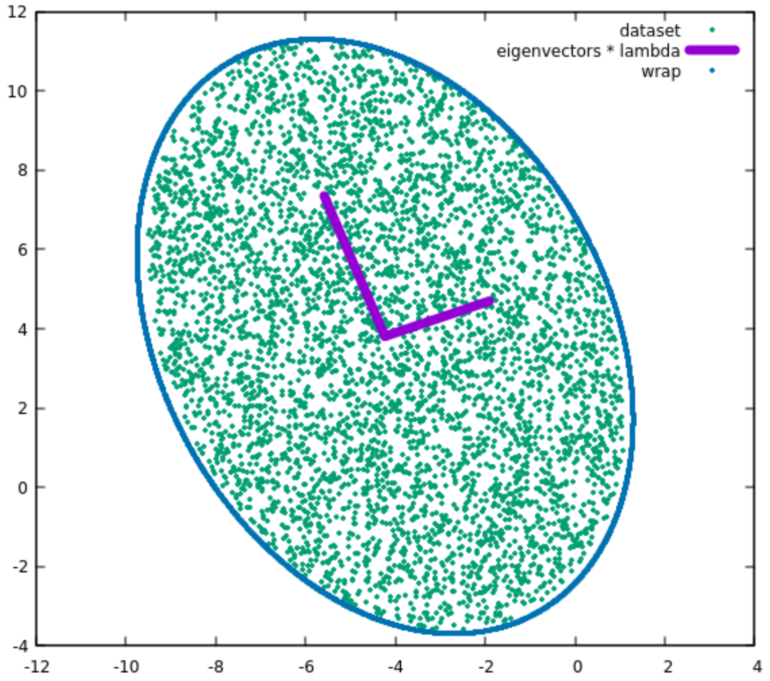
$$\mu = \begin{pmatrix} -4.23 \\ 3.81 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 7.24 & -2.73 \\ -2.73 & 13.33 \end{pmatrix}$$

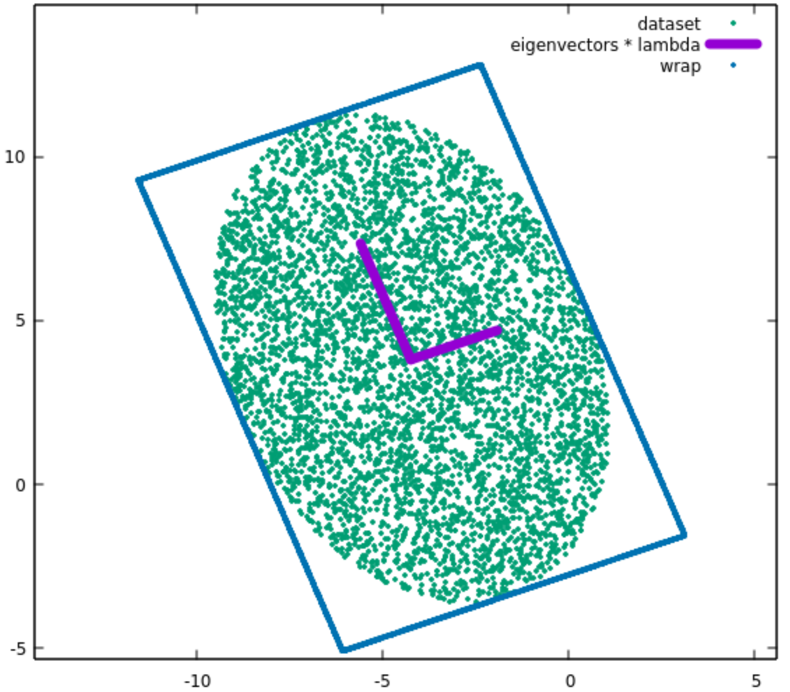
$$U = \begin{pmatrix} 0.93 & -0.36 \\ 0.36 & 0.93 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 6.19, \quad \lambda_2 = 14.38$$

$$\varphi_{1,2} = 20.94^\circ, \ f^c = \begin{pmatrix} -4.23 \\ 3.81 \end{pmatrix}$$

Эллипс $S = \begin{pmatrix} 5.11 & 0 \\ 0 & 7.79 \end{pmatrix}$

Прямоугольник $S = \begin{pmatrix} 4.93 & 0 \\ 0 & 7.69 \end{pmatrix}$





Классификация