EE-254: Controle Preditivo

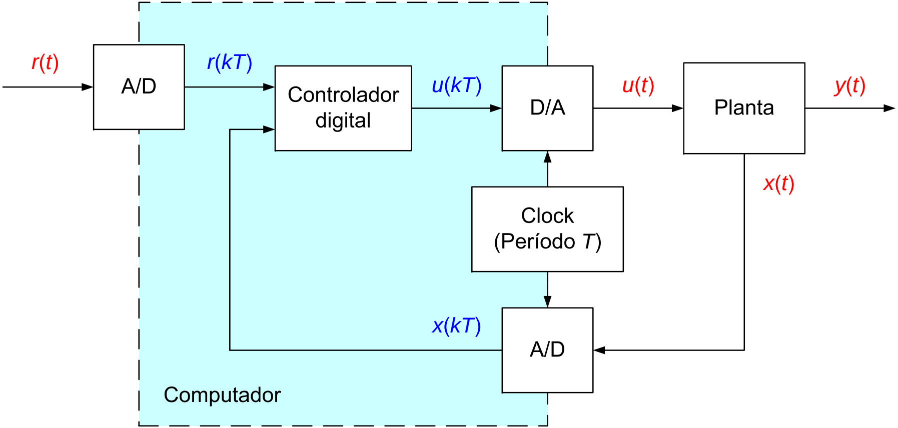
Semana 4 (Parte 1/7)

Recapitulando:

Tópicos abordados nas Semanas 1 a 3

Semana 1	Semana 2	Semana 3
O que é Controle Preditivo ?	Controle em malha fechada usando computador	Controle Ótimo: Regulador Linear Quadrático
Modelos no espaço de estados	Linearização e discretização do modelo de projeto	Estabilidade: Método Direto de Lyapunov
Determinação de valores de equilíbrio	Realimentação de estado	Sintonia: Ajuste dos pesos da função de custo
Análise da resposta em malha aberta	Estabilidade a tempo discreto	
Estabilidade	Alocação de polos Controlabilidade	

Recapitulando: Arquitetura considerada



Sinais a tempo contínuo

Sinais a tempo discreto (sequências numéricas)

Recapitulando: Controle por realimentação de estado

Seja a seguinte equação de estado (omitindo o período de amostragem T):

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

e a lei de controle

$$u(k) = -K\left[x(k) - \bar{x}\right] + \bar{u}$$

com $\bar{u}$, $\bar{x}$ satisfazendo a relação de equilíbrio

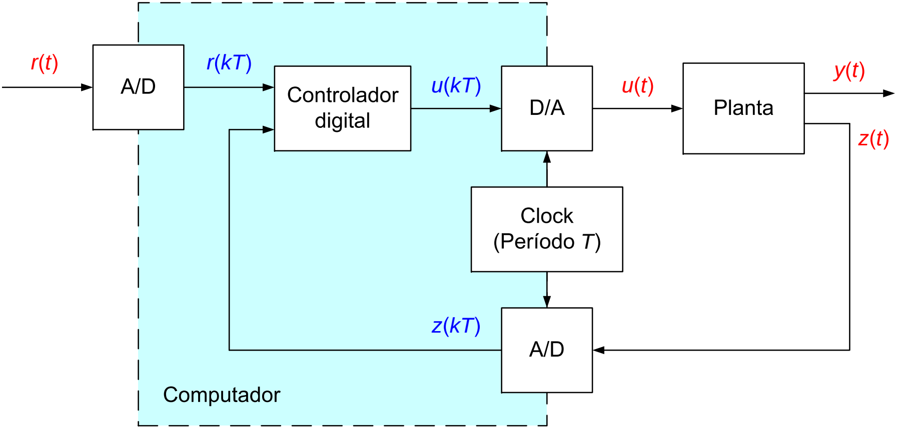
$$(A - I)\bar{x} + B\bar{u} = 0$$

Tem-se que a dinâmica do erro de regulação $e(k) = x(k) - \bar{x}$ é dada por

$$e(k+1) = (A - BK)e(k)$$

Se $(A - BK)$ for Schur, o erro convergirá para zero.

Problema: O que fazer se os estados não forem medidos ?



$$z(t) \in \mathbb{R}^m \rightarrow \text{Vetor de variáveis medidas}$$

Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4
O que é Controle Preditivo ?	Controle em malha fechada usando computador	Controle Ótimo: Regulador Linear Quadrático	Observador de estados Observabilidade
Modelos no espaço de estados	Linearização e discretização do modelo de projeto	Estabilidade: Método Direto de Lyapunov	Ação integral: Estimativa de perturbações
Determinação de valores de equilíbrio	Realimentação de estado	Sintonia: Ajuste dos pesos da função de custo	
Análise da resposta em malha aberta	Estabilidade a tempo discreto		
Estabilidade	Alocação de polos Controlabilidade		

Observador de estados

Problema considerado

Seja o seguinte modelo a tempo discreto, compreendendo a equação de estado e a equação de medida:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$z(k) = Hx(k)$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$, $z(k) \in \mathbb{R}^m$ e matrizes A, B, H de dimensões apropriadas.

Problema: Dados os valores de

$$u(0), u(1), \ldots, u(k-1)$$

$$z(0), z(1), \ldots, z(k)$$

obter uma estimativa para o estado $x(k)$.

Determinação do estado inicial

Conceitualmente, o problema equivale à determinação do estado inicial $x(0)$, que pode ser realizada por meio da solução de um sistema de equações.

Inicialmente, lembremos que

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\ x(2) &= A^2 x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\ &\vdots \\ x(n-1) &= A^{n-1} x(0) + A^{n-2} Bu(0) + \cdots + Bu(n-2) \end{aligned}$$

Tendo em vista a equação de medida $z(k) = Hx(k)$, pode-se escrever

$$
\begin{aligned}
z(0) &= Hx(0) \\
z(1) &= HAx(0) + HBu(0) \\
z(2) &= HA^2x(0) + HABu(0) + HBu(1) \\
&\vdots \\
z(n-1) &= HA^{n-1}x(0) + HA^{n-2}Bu(0) + \cdots + HBu(n-2)
\end{aligned}
$$

ou, em forma matricial:

$$
\begin{bmatrix} z(0) \\ z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 0_m \\ HBu(0) \\ HABu(0) + CBu(1) \\ \vdots \\ HA^{n-2}Bu(0) + \cdots + HBu(n-2) \end{bmatrix}
$$

com 0_m denotando uma coluna de m zeros.

Empregando a notação

$$P_o = \begin{bmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times n}$$

$$h = \begin{bmatrix} z(0) \\ z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_m \\ HBu(0) \\ HABu(0) + CBu(1) \\ \vdots \\ HA^{n-2}Bu(0) + \cdots + HBu(n-2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}$$

o sistema de equações é reescrito na forma

$$P_o x(0) = h$$

$$P_o x(0) = h \,, \;\; P_o \in \mathbb{R}^{mn \times n}$$

Trata-se de um sistema de mn equações com n incógnitas.

Se a matriz P_o tiver posto completo (isto é, se todas as suas n colunas forem linearmente independentes), a solução é obtida da seguinte forma:

$$P_o x(0) = h \;\Rightarrow\; P_o^T P_o x(0) = P_o^T h \;\Rightarrow\; x(0) = \left(P_o^T P_o\right)^{-1} P_o^T h$$

pois $P_o^T P_o$ será uma matriz de dimensões $(n \times n)$ com posto n, admitindo inversa.

Por outro lado, se P_o tiver posto menor do que n, será possível apenas determinar o valor de uma combinação linear das incógnitas (isto é, das componentes de $x(0)$) que estiverem associadas às colunas linearmente dependentes de P_o.

A matriz $P_o \in \mathbb{R}^{mn \times n}$ definida como

$$P_o = \begin{bmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times n}$$

é chamada de **matriz de observabilidade**.

Se P_o tiver posto igual a n, é possível determinar o estado inicial $x(0)$ a partir das entradas

$$u(0), u(1), \ldots, u(n-2)$$

e das medidas

$$z(0), z(1), \ldots, z(n-1)$$

Neste caso, diz-se que o (modelo do) sistema é **observável**, ou simplesmente que o par (A, H) é observável.

Obrigado pela atenção !

EE-254: Controle Preditivo

Semana 4 (Parte 2/7)

Recapitulando: Problema considerado

Seja o seguinte modelo a tempo discreto, compreendendo a equação de estado e a equação de medida:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$z(k) = Hx(k)$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$, $z(k) \in \mathbb{R}^m$ e matrizes A, B, H de dimensões apropriadas.

Problema: Dados os valores de

$$u(0), u(1), \ldots, u(k-1)$$

$$z(0), z(1), \ldots, z(k)$$

obter uma estimativa para o estado $x(k)$.

Recapitulando: Determinação do estado inicial

Conceitualmente, o problema equivale à determinação do estado inicial $x(0)$, que pode ser realizada por meio da solução de um sistema de equações:

$$P_o x(0) = h$$

com

$$P_o = \begin{bmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times n}$$

$$h = \begin{bmatrix} z(0) \\ z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_m \\ HBu(0) \\ HABu(0) + CBu(1) \\ \vdots \\ HA^{n-2}Bu(0) + \cdots + HBu(n-2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}$$

Se a **matriz de observabilidade** $P_o \in \mathbb{R}^{mn \times n}$ tiver posto completo (isto é, se todas as suas n colunas forem linearmente independentes), a solução é dada por

$$x(0) = \left(P_o^T P_o\right)^{-1} P_o^T h$$

Observador de estados

Observador de estados

Ao invés de determinar $x(0)$ explicitamente, pode-se obter uma estimativa recursiva de $x(k)$ empregando o chamado **observador de estados**:

$$x(k|k) = x(k|k-1) + M\big[z(k) - z(k|k-1)\big]$$

$$z(k|k-1) = Hx(k|k-1)$$

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k)$$

Essas equações envolvem as seguintes estimativas de $x(k)$:

$x(k|k-1) \rightarrow$ "**a priori**"

ou seja, obtida **antes** de se empregar a medida $z(k)$ e

$x(k|k) \rightarrow$ "**a posteriori**"

ou seja, obtida **depois** de se empregar a medida $z(k)$.

$$x(k|k) = x(k|k-1) + M\big[z(k) - z(k|k-1)\big]$$

$$z(k|k-1) = Hx(k|k-1)$$

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k)$$

Gostaríamos de escolher a matriz de ganho $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de modo que

$$x(k|k) - x(k) \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{1}$$

$$z(k) = Hx(k) \tag{2}$$

$$x(k|k) = x(k|k-1) + M\big[z(k) - z(k|k-1)\big] \tag{3}$$

$$z(k|k-1) = Hx(k|k-1) \tag{4}$$

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k) \tag{5}$$

Fazendo $k = k + 1$ em (3), tem-se

$$x(k+1|k+1) = x(k+1|k) + M\big[z(k+1) - z(k+1|k)\big]$$

$$\overset{(2),(4),(5)}{=} Ax(k|k) + Bu(k) + MH\big[x(k+1) - x(k+1|k)\big]$$

$$\overset{(1),(5)}{=} Ax(k|k) + Bu(k) + MH\big[Ax(k) + Bu(k) - Ax(k|k) - Bu(k)\big]$$

$$x(k+1|k+1) = Ax(k|k) + Bu(k) + MHA\big[x(k) - x(k|k)\big] \qquad (6)$$

Seja $\tilde{x}(k|k) = x(k) - x(k|k)$ o erro de estimação de estado a posteriori. Tem-se, então:

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = x(k+1) - x(k+1|k+1)$$

$$\stackrel{(1),(6)}{=} Ax(k) + Bu(k) - Ax(k|k) - Bu(k) - MHA\big[x(k) - x(k|k)\big]$$

$$= (A - MHA)\big[x(k) - x(k|k)\big]$$

ou seja

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = (A - MHA)\tilde{x}(k|k)$$

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = (A - MHA)\tilde{x}(k|k)$$

Se os autovalores de $A - MHA$ estiverem no interior do círculo unitário, então $\tilde{x}(k|k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pergunta: É possível escolher M de modo a alocar os autovalores de $A - MHA$ em posições adequadas ?

Suponha inicialmente que A seja invertível, isto é, que não haja autovalores de A na origem. Pode-se então escrever:

$$A - MHA = A^{-1}AA - A^{-1}\underbrace{AM}_{L}HA = A^{-1}(A - LH)A$$

com $L = AM$.

Vale notar que os autovalores de $A^{-1}(A - LH)A$ são os mesmos de $A - LH$. Com efeito:

$$\det\left[\lambda I - A^{-1}(A - LH)A\right] = \det A^{-1} \det\left[\lambda I - (A - LH)\right] \det A$$

e portanto $\det\left[\lambda I - A^{-1}(A - LH)A\right] = 0 \Leftrightarrow \det\left[\lambda I - (A - LH)\right] = 0.$

Basta, portanto, escolher L de modo a alocar os autovalores de $A - LH$ em posições convenientes e então fazer

$$M = A^{-1}L$$

Importante: Se o par (A, H) for observável, então os autovalores de $A - LH$ podem ser alocados em quaisquer posições do plano complexo mediante escolha de L.

E se a matriz A não for invertível ?

Suponha que a matriz A tenha a seguinte forma bloco-diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

com "0" denotando matrizes de zeros com dimensões apropriadas. Considere que A_1 seja invertível e que todos os autovalores de A_2 sejam nulos. Vamos particionar a matriz de medida H na forma

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

sendo H_1, H_2 de dimensões compatíveis com A_1 e A_2. Tomemos agora uma matriz M com a forma

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sendo M_1 de dimensões compatíveis com A_1.

Tem-se, portanto:

$$A - MHA = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 A_1 & H_2 A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_1 H_1 A_1 & M_1 H_2 A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 - M_1 H_1 A_1 & -M_1 H_2 A_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Basta, então, escolher M_1 de modo a alocar os autovalores de

$$A_1 - M_1 H_1 A_1$$

uma vez que todos os autovalores de A_2 já estarão na origem.

Se a matriz A não estiver na forma bloco-diagonal considerada neste desenvolvimento, pode-se empregar uma mudança de variáveis de estado para colocá-la na chamada **forma canônica de Jordan**.

CHEN, C. T. **Linear system control theory and design**. New York: CBS College Publishing, 1984, p. 37-45.

Obrigado pela atenção !

EE-254: Controle Preditivo

Semana 4 (Parte 3/7)

Recapitulando: Estimação do estado a partir de dados de entrada e saída

Seja o seguinte modelo a tempo discreto, compreendendo a equação de estado e a equação de medida:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$z(k) = Hx(k)$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$, $z(k) \in \mathbb{R}^m$.

Problema: Dados os valores de

$$u(0), u(1), \ldots, u(k-1)$$

$$z(0), z(1), \ldots, z(k)$$

obter uma estimativa para o estado $x(k)$.

Recapitulando: Observador de estados

Pode-se obter uma estimativa recursiva de $x(k)$ empregando o chamado **observador de estados**:

$$x(k|k) = x(k|k-1) + M\big[z(k) - z(k|k-1)\big]$$

$$z(k|k-1) = Hx(k|k-1)$$

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k)$$

Essas equações envolvem as seguintes estimativas de $x(k)$:

$x(k|k-1) \rightarrow$ "**a priori**"

$x(k|k) \rightarrow$ "**a posteriori**"

Recapitulando: Convergência do erro de estimação

O erro de estimação de estado "a posteriori", definido como

$$\tilde{x}(k|k) = x(k) - x(k|k)$$

evolui de acordo com a seguinte equação:

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = (A - MHA)\tilde{x}(k|k)$$

Escolhendo a matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de modo que os autovalores de $A - MHA$ estejam no interior do círculo unitário, garante-se que

$$\tilde{x}(k|k) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Supondo A invertível, os autovalores de $(A - MHA)$ são os mesmos de $(A - LH)$, com

$$L = AM \; , \;\; M = A^{-1}L$$

Recapitulando: Observabilidade

Se a matriz de observabilidade $P_o \in \mathbb{R}^{mn \times n}$, definida como

$$P_o = \begin{bmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tiver posto completo, os autovalores de $A - LH$ poderão ser alocados em quaisquer posições do plano complexo mediante escolha de L.

Diz-se, então, que o par (A, H) é observável.

Realimentação do estado estimado

Realimentação do estado estimado

Vamos considerar a equação de estado da planta:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

e a seguinte lei de controle:

$$u(k) = -K\left[\, x(k|k) - \bar{x}\,\right] + \bar{u}$$

com $(\bar{u}, \bar{x})$ formando um par de equilíbrio e $x(k|k)$ obtido por meio de um observador de estados.

Analisemos a dinâmica de malha fechada em termos do erro de regulação

$$e(k) = x(k) - \bar{x}$$

e do erro de estimação de estado

$$\tilde{x}(k|k) = x(k) - x(k|k) = e(k) + \bar{x} - x(k|k)$$

Rearranjando os termos, pode-se escrever

$$x(k) = e(k) + \bar{x}$$

$$x(k|k) = e(k) + \bar{x} - \tilde{x}(k|k)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{1}$$

$$u(k) = -K\left[\, x(k|k) - \bar{x} \,\right] + \bar{u} \tag{2}$$

$$x(k) = e(k) + \bar{x} \tag{3}$$

$$x(k|k) = e(k) + \bar{x} - \tilde{x}(k|k) \tag{4}$$

De (2) e (4), tem-se

$$u(k) = -K\left[\, e(k) + \cancel{\bar{x}} - \tilde{x}(k|k) - \cancel{\bar{x}} \,\right] + \bar{u} = -Ke(k) + K\tilde{x}(k|k) + \bar{u}$$

Substituindo essa expressão em (1), segue que

$$x(k+1) = Ax(k) - BKe(k) + BK\tilde{x}(k|k) + B\bar{u}$$

Empregando (3), vem ainda

$$e(k+1) + \cancel{\bar{x}} = Ae(k) + \cancel{A\bar{x}} - BKe(k) + BK\tilde{x}(k|k) + \cancel{B\bar{u}}$$

$$e(k+1) = (A - BK)e(k) + BK\tilde{x}(k|k)$$

A dinâmica do erro de estimação de estado permanece a mesma:

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = (A - MHA)\tilde{x}(k|k)$$

pois a análise realizada era válida para qualquer sinal de entrada $u(k)$. Em resumo, pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} e(k+1) \\ \tilde{x}(k+1|k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BK) & BK \\ 0_{n\times n} & (A - MHA) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ \tilde{x}(k|k) \end{bmatrix}$$

Conclui-se que os autovalores da dinâmica de malha fechada correspondem à união dos autovalores de $(A - BK)$ e de $(A - MHA)$.

Onde alocar os autovalores de $(A - MHA)$?

Suponhamos que a matriz de ganho K já tenha sido obtida, como resultado do projeto de uma lei de controle por realimentação de estado.

Consideremos ainda que a matriz $(A - BK)$ tenha uma **dinâmica dominante** associada a um subconjunto de seus autovalores (por exemplo, a um par complexo-conjugado).

Uma recomendação usual consiste em posicionar os autovalores do erro de estimação de modo a ter uma dinâmica 2 a 5 vezes mais rápida do que a dinâmica desejada no projeto da realimentação de estado (Ogata, 1998).

A tempo contínuo, isso equivale a posicionar os autovalores duas a cinco vezes mais afastados do eixo imaginário.

OGATA, K. Engenharia de controle moderno. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998, p. 675.

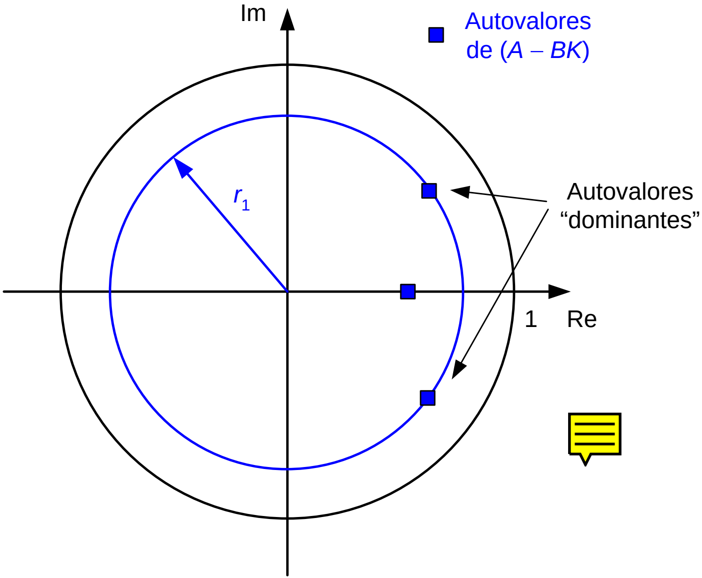
Como visto anteriormente, a relação entre os autovalores da dinâmica a tempo contínuo e da dinâmica a tempo discreto é

$$\lambda = e^{\lambda_c T}$$

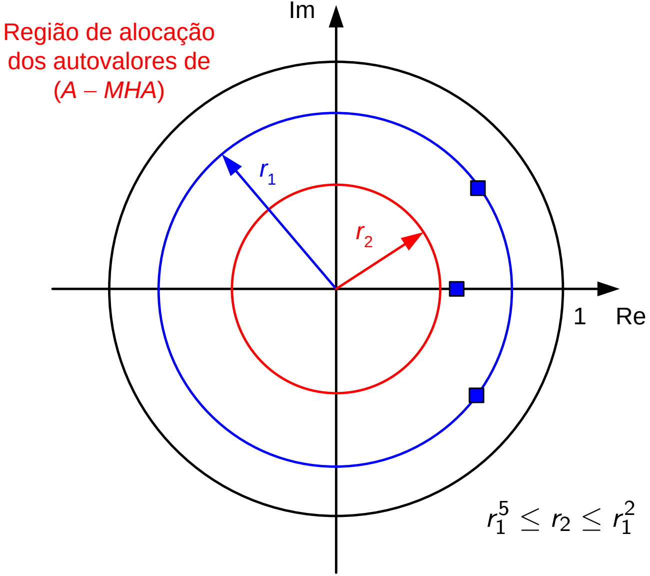
Assim, se $\lambda_c = \sigma + j\omega$, tem-se

$$\lambda = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \;\Rightarrow\; |\lambda| = e^{\sigma T}$$

Portanto, multiplicar σ por um fator α equivale a elevar $|\lambda|$ à potência α.



Im
Autovalores
de ($A - BK$)
r_1
Autovalores
“dominantes”
1
Re


Região de alocação
dos autovalores de
$(A - MHA)$
Im
Re
1
r_1
r_2
$r_1^5 \leq r_2 \leq r_1^2$

Uma possibilidade consiste em alocar todos os autovalores de $(A - MHA)$ na origem.

Nesse caso, tem-se um observador *deadbeat*, que conduz o erro de estimação para zero em até n passos.

Obrigado pela atenção !

EE-254: Controle Preditivo

Semana 4 (Parte 4/7)

Recapitulando: Controle empregando realimentação do estado estimado

Seja uma planta com equação de estado

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

sujeita à seguinte lei de controle:

$$u(k) = -K\left[\, x(k|k) - \bar{x} \,\right] + \bar{u}$$

com $(\bar{u}, \bar{x})$ formando um par de equilíbrio e $x(k|k)$ obtido por meio de um observador de estados.

Recapitulando: Observador de estados

Uma estimativa recursiva de $x(k)$ é obtida fazendo

$$z(k|k-1) = Hx(k|k-1)$$

$$x(k|k) = x(k|k-1) + M\big[z(k) - z(k|k-1)\big]$$

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k)$$

a partir de uma estimativa inicial $x(0|-1)$.

A dinâmica de malha fechada em termos do erro de regulação

$$e(k) = x(k) - \bar{x}$$

e do erro de estimação de estado

$$\tilde{x}(k|k) = x(k) - x(k|k)$$

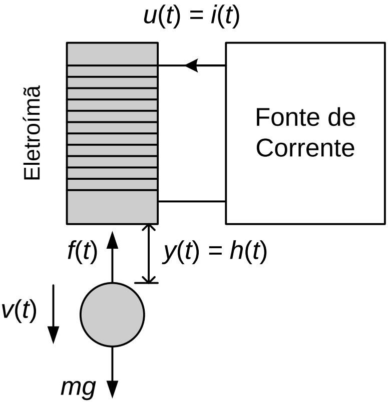
é descrita por

$$\begin{bmatrix} e(k+1) \\ \tilde{x}(k+1|k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BK) & BK \\ 0_{n\times n} & (A - MHA) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ \tilde{x}(k|k) \end{bmatrix}$$

Os autovalores da dinâmica de malha fechada correspondem à união dos autovalores de $(A - BK)$ e de $(A - MHA)$.

Supondo A invertível, os autovalores de $(A - MHA)$ são os mesmos de $(A - LH)$, com $M = A^{-1}L$.

Exemplo: Sistema de Levitação Magnética



Entrada: $u(t) = i(t)$ **Saída:** $y(t) = h(t)$

Estados: $x_1(t) = h(t)$, $x_2(t) = v(t)$

Na prática, somente a posição x_1 é medida, ou seja, $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Roteiro

Passo 1: Linearizar o modelo (já feito)

Passo 2: Discretizar o modelo (já feito)

Passo 3: Projetar a realimentação de estado empregando o método DLQR (já feito: Usaremos o projeto com peso para x_1 mais elevado.)

Passo 4: Projetar um observador de estados (*deadbeat*)

Passo 5: Avaliar o resultado por meio de simulação

Passo 4: Projetar um observador de estados (*deadbeat*)

```
>> H = [1 0]; eig_des = [0 0];
>> L = (acker(A',H',eig_des))'

    2.0213
  207.8420
```

```
>> M = inv(A)*L

    1.0000
  201.4180

>> eig(A - M*H*A)

   1.0e-07 *
      0.0000 + 0.2630i
      0.0000 - 0.2630i
```

Interpretação:

$$x(k|k) = x(k|k-1) + M\big[z(k) - z(k|k-1)\big]$$

Passo 5: Avaliar o resultado por meio de simulação

Vamos inicializar os estados da planta e do observador com

$$x(0) = \begin{bmatrix} 5 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -0.01 \text{ m/s} \end{bmatrix}, \;\; x(0|-1) = \begin{bmatrix} 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m/s} \end{bmatrix}$$

O valor de referência para a saída será $\bar{r} = 0{,}003$ m.

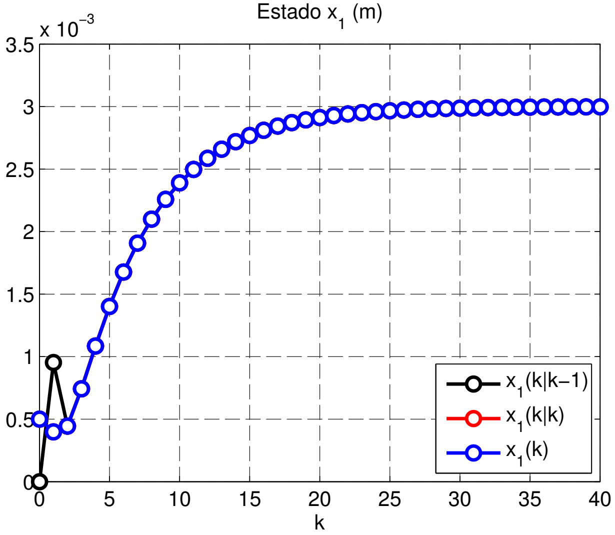
$$z(k|k-1) = Hx(k|k-1)$$

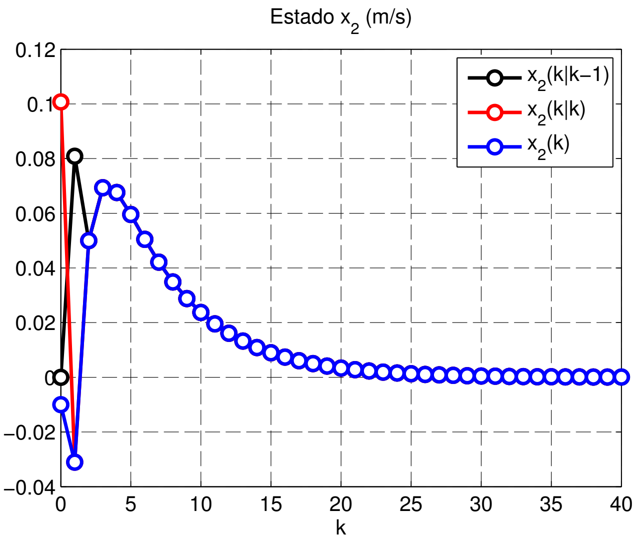
$$x(k|k) = x(k|k-1) + M\big[z(k) - z(k|k-1)\big]$$

$$u(k) = -K\big[\,x(k|k) - \bar{x}\,\big] + \bar{u}$$

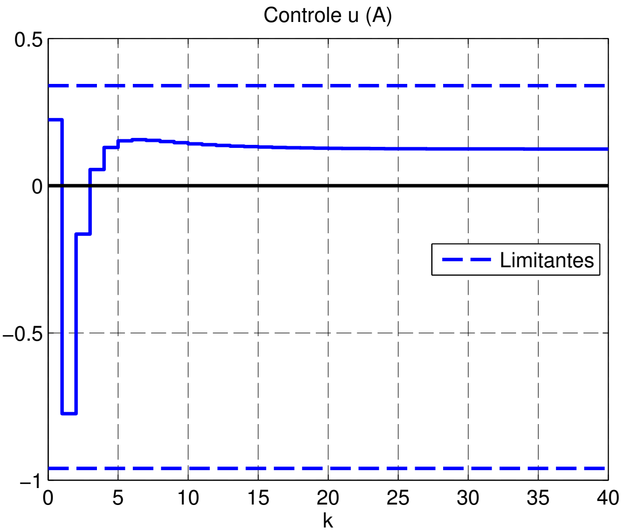
$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k)$$

```
x{1} = [0.0005;-0.01];
xpri{1} = [0;0];
for k = 1:40
   zpri{k} = H*xpri{k};
   z{k} = H*x{k};
   xpos{k} = xpri{k} + M*(z{k} - zpri{k});
   u(k) = ubar - K*(xpos{k} - xbar);
   x{k+1} = A*x{k} + B*u(k);
   xpri{k+1} = A*xpos{k} + B*u(k);
end
```


Estado x1 (m)
x 10−3
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
x1(k|k−1)
x1(k|k)
x1(k)



Estado x2 (m/s)
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
−0.02
−0.04
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
x2(k|k−1)
x2(k|k)
x2(k)



Controle u (A)
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
Limitantes

Simulação com acréscimo de perturbação

Para maior realismo, vamos refazer a simulação com acréscimo de uma entrada de perturbação na planta:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Gw(k)$$

sendo $G \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ e $w(k) \in \mathbb{R}$.

Considerando que a perturbação $w(k)$ corresponda a uma força externa atuando sobre o objeto em suspensão (de massa m), faremos

$$G = \int_0^T e^{A_c \tau} G_c d\tau$$

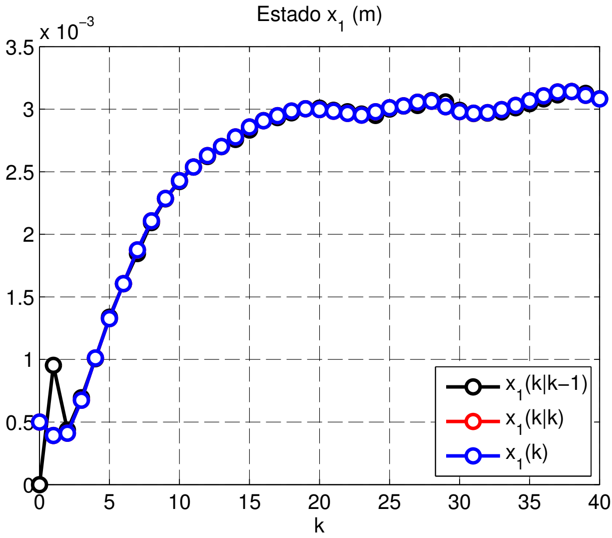
com

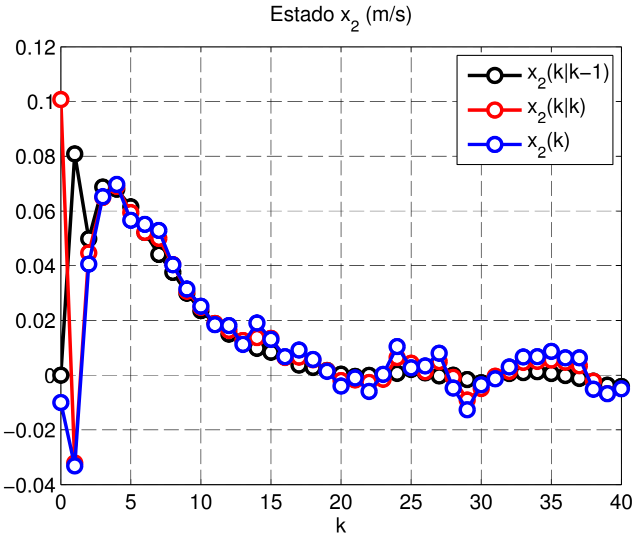
$$G_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

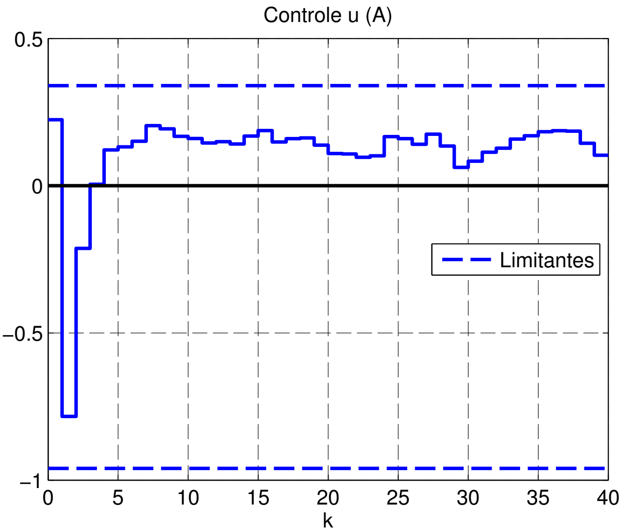
```
>> m = 2.12e-2;
>> Gc = [0;1/m];
>> [~,G] = c2dm(Ac,Gc,[],[],T,'zoh')

     0.0006
     0.2367
```

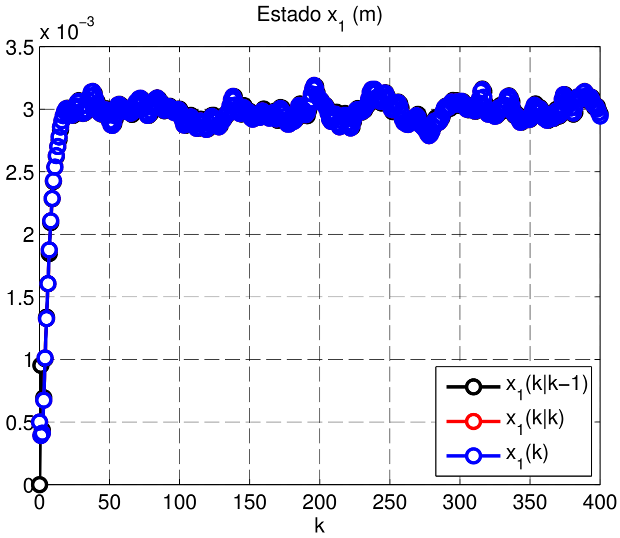
Faremos a simulação com perturbação $w(k)$ gerada aleatoriamente. Para isso, será empregada uma distribuição normal de média zero e desvio padrão igual a 10% do peso do objeto.

```
x1 = [0.0005;-0.01]; xpri1 = [0;0];
g = 9.8;
sigma_w = 0.1*m*g;
for k = 1:40
   zprik = H*xprik;
   zk = H*xk;
   xposk = xprik + M*(zk - zprik);
   u(k) = ubar - K*(xposk - xbar);
   x{k+1} = A*x{k} + B*u(k) + G*sigma_w*randn;
   xprik+1 = A*xpos{k} + B*u(k);
end
```


Estado x_1 (m)
x 10^{-3}
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
$x_1(k|k-1)$
$x_1(k|k)$
$x_1(k)$


Estado x_2 (m/s)
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
−0.02
−0.04
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
$x_2(k|k-1)$
$x_2(k|k)$
$x_2(k)$


Controle u (A)
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
Limitantes



Estado x_1 (m)
x 10^{-3}
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400
k
$x_1(k|k-1)$
$x_1(k|k)$
$x_1(k)$

Simulação com acréscimo de perturbação e ruído de sensor

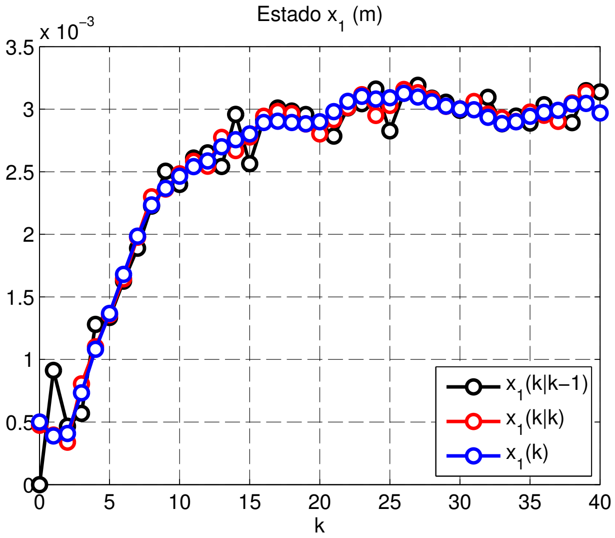
Vamos refazer a simulação mais uma vez, agora com acréscimo de ruído no sensor de posição:

$$z(k) = Hx(k) + v(k)$$

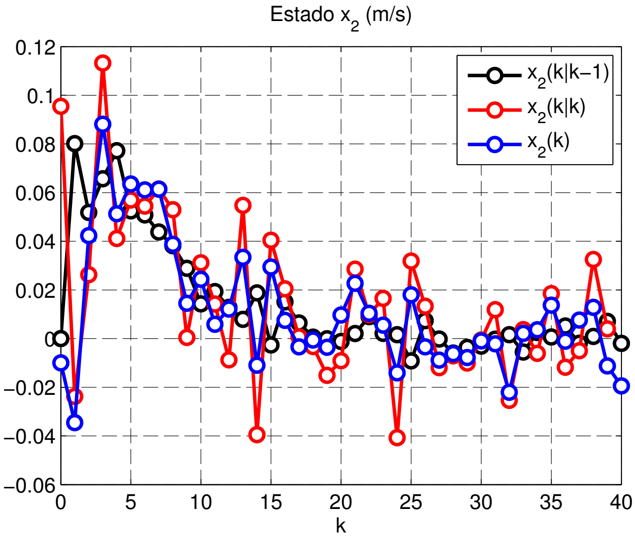
com $v(k) \in \mathbb{R}$.

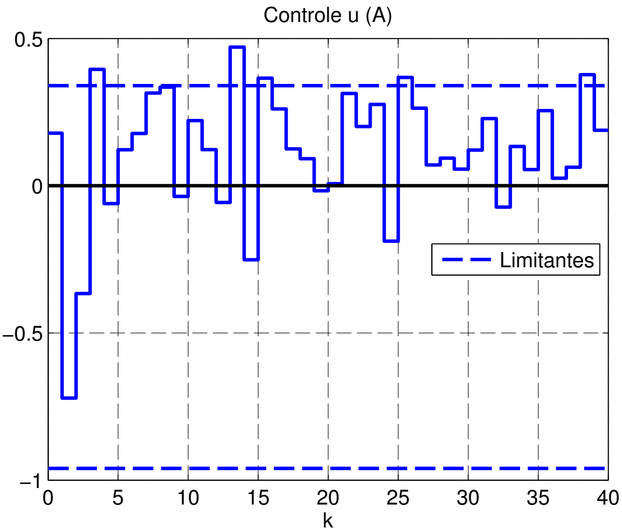
Faremos a simulação com ruído $v(k)$ gerado aleatoriamente. Para isso, será empregada uma distribuição normal de média zero e desvio padrão de 6×10^{-5} m. Esse valor corresponde a 1% da leitura máxima do sensor.

```
x1 = [0.0005;-0.01]; xpri1 = [0;0];
g = 9.8;
sigma_w = 0.1*m*g;
sigma_v = 6e-5;
for k = 1:40
   zprik = H*xprik;
   zk = H*xk + sigma_v*randn;
   xposk = xprik + M*(zk - zprik);
   u(k) = ubar - K*(xposk - xbar);
   x{k+1} = A*x{k} + B*u(k) + G*sigma_w*randn;
   xprik+1 = A*xpos{k} + B*u(k);
end
```



Estado x_1 (m)
x 10^{-3}
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
$x_1(k|k-1)$
$x_1(k|k)$
$x_1(k)$


Estado x2 (m/s)
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
−0.02
−0.04
−0.06
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
x2(k|k−1)
x2(k|k)
x2(k)



Controle u (A)
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
Limitantes

Obrigado pela atenção !

EE-254: Controle Preditivo

Semana 4 (Parte 5/7)

Recapitulando: Controle do sistema de levitação magnética empregando observador de estados

Simulação com perturbação e ruído de sensor

Equação de estado:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Gw(k)$$

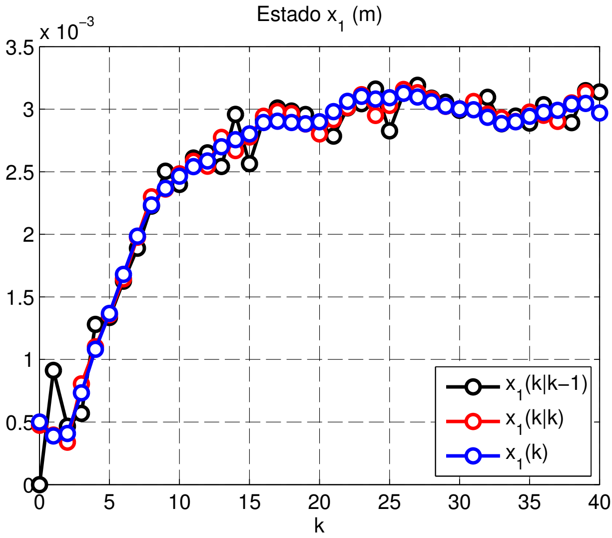
Equação de medida:

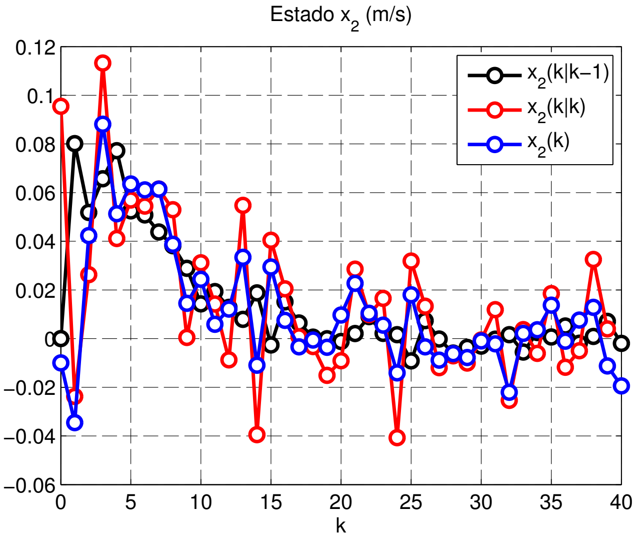
$$z(k) = Hx(k) + v(k)$$

$w(k) \rightarrow$ Perturbação

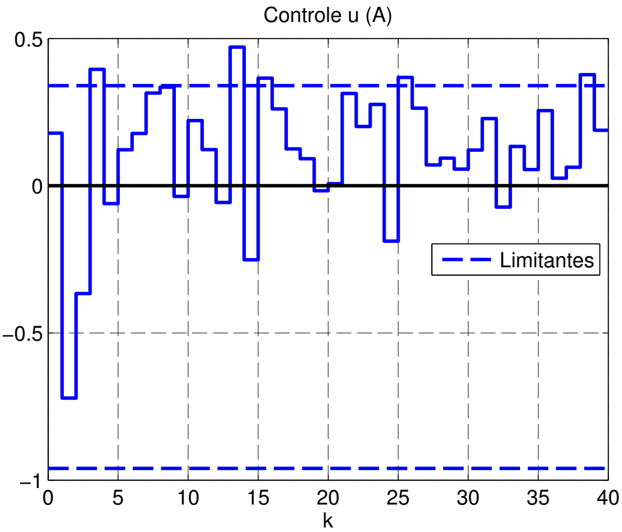
$v(k) \rightarrow$ Ruído de sensor

```
x1 = [0.0005;-0.01]; xpri1 = [0;0];
g = 9.8;
sigma_w = 0.1*m*g;
sigma_v = 6e-5;
for k = 1:40
   zprik = H*xprik;
   zk = H*xk + sigma_v*randn;
   xposk = xprik + M*(zk - zprik);
   u(k) = ubar - K*(xposk - xbar);
   x{k+1} = A*x{k} + B*u(k) + G*sigma_w*randn;
   xprik+1 = A*xpos{k} + B*u(k);
end
```


Estado x1 (m)
x 10−3
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
x1(k|k−1)
x1(k|k)
x1(k)



Estado x_2 (m/s)
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
−0.02
−0.04
−0.06
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
x_2(k|k−1)
x_2(k|k)
x_2(k)


Controle u (A)
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
Limitantes

Estimação Ótima: Estimador Linear Quadrático a Tempo Discreto

Estimação ótima

Considerando que o sistema esteja sujeito a perturbações e ruído de medida aleatórios, uma estimativa ótima dos estados pode ser obtida por meio do **estimador linear-quadrático a tempo discreto** ("discrete-time linear quadratic estimator", DLQE).

$\rightarrow$ **Filtro de Kalman** estacionário.

Para isso, supõe-se que o modelo seja da forma

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Gw(k)$$

$$z(k) = Hx(k) + v(k)$$

sendo $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$, $v(k) \in \mathbb{R}^m$ os vetores de perturbação e ruído, respectivamente, com $G \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ uma matriz de coeficientes constantes. Supõe-se que (A, H) seja observável e (A, G) seja controlável.

Considera-se ainda que $w(k)$ e $v(k)$ sejam sequências de vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídas (iid), com distribuição normal de média zero:

$$w(k) \sim \mathcal{N}(0, W), \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$v(k) \sim \mathcal{N}(0, V), \quad k = 0, 1, \ldots$$

sendo $W = W^T > 0$ e $V = V^T > 0$ as respectivas matrizes de covariância.

O custo J_e a ser minimizado na estimação é definido como

$$J_e = \lim_{k \to \infty} E\left\{ \|\tilde{x}(k|k)\|^2 \right\}$$

Pode-se mostrar que o ganho de estimação M ótimo é obtido empregando a solução do problema DLQR com as seguintes substituições:

$$A \leftarrow A^T,\ B \leftarrow H^T,\ K \leftarrow L^T,\ Q \leftarrow GWG^T,\ R \leftarrow V$$

Matlab: Função `dlqe`

Referência: LEWIS, F. L. **Optimal estimation**. New York: John Wiley & Sons, 1986, p. 97 - 103.

```
dlqe  Kalman estimator design for discrete-time systems.

Given the system

      x[n+1] = Ax[n] + Bu[n] + Gw[n]    {State equation}
      y[n]   = Cx[n] + Du[n] +  v[n]    {Measurements}

with unbiased process noise w[n] and measurement noise
v[n] with covariances

      E{ww'} = Q,    E{vv'} = R,    E{wv'} = 0 ,
```

[M,P,Z,E] = dlqe(A,G,C,Q,R) returns the gain matrix M such that the discrete, stationary Kalman filter with observation and time update equations

```
x[n|n]   = x[n|n-1] + M(y[n] - Cx[n|n-1] - Du[n])
x[n+1|n] = Ax[n|n] + Bu[n]
```

produces an optimal state estimate x[n|n] of x[n] given y[n] and the past measurements.

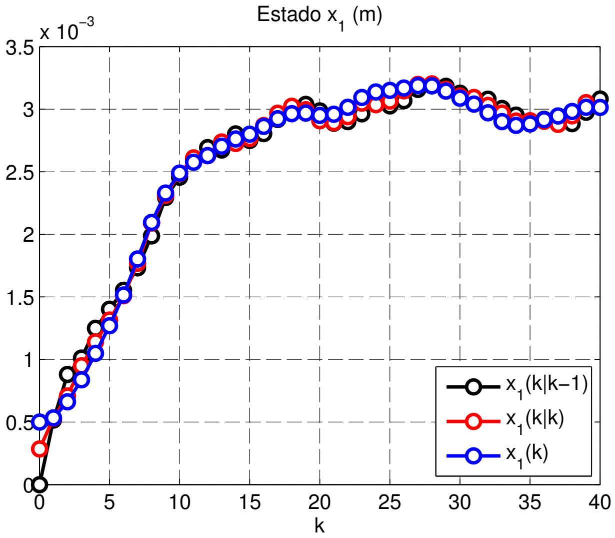
Retornando ao exemplo de simulação

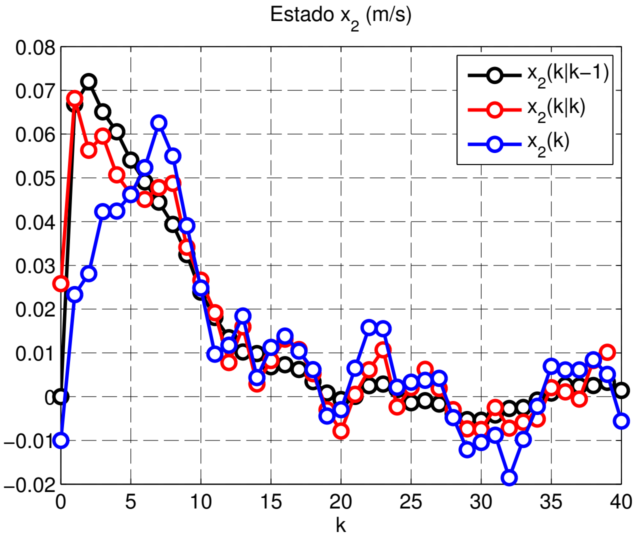
Comparação entre os ganhos do observador deadbeat e do DLQE:

```
>> eig_des = [0 0]; L = (acker(A',H',eig_des))';
>> M = inv(A)*L

    1.0000
  201.4180

>> M = dlqe(A,G,H,sigma_w^2,sigma_v^2)

    0.6016
    54.5004
```

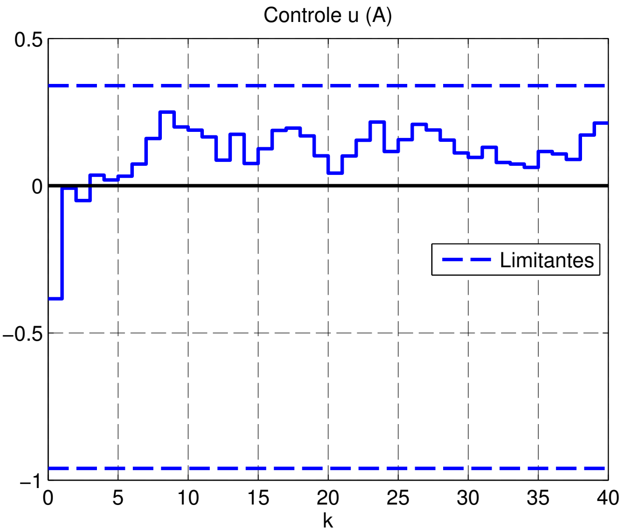
Análise dos autovalores

```
>> eig(A-B*K)

    0.8232
    0.3732

>> eig(A - M*H*A)

   0.5699 + 0.2713i
   0.5699 - 0.2713i

>> abs(0.5699 + 0.2713i)

    0.6312
```


Estado x1 (m)
x 10^-3
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
x1(k|k−1)
x1(k|k)
x1(k)



Estado x_2 (m/s)
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
−0.01
−0.02
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
$x_2(k|k-1)$
$x_2(k|k)$
$x_2(k)$


Controle u (A)
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
k
Limitantes

Projeto DLQG

O uso de um regulador linear quadrático em conjunto com um estimador linear quadrático é conhecido como projeto LQG (*Linear Quadratic Gaussian*)

Observação: Matrizes de convariância

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Gw(k)$$

$$z(k) = Hx(k) + v(k)$$

$$w(k) \sim \mathcal{N}(0, W), \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$v(k) \sim \mathcal{N}(0, V), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Caso não se disponha de uma caracterização estatística das perturbações e ruídos, pode-se encarar as matrizes de covariância $W \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ e $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ como parâmetros de projeto, assim como as matrizes de peso Q e R do LQR.

Obrigado pela atenção !

EE-254: Controle Preditivo

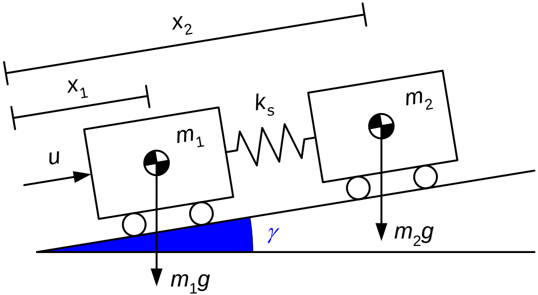
Semana 4 (Parte 6/7)

Correção do efeito de perturbações constantes

Uso do observador de estados para estimar perturbações

Motivação: Exemplo

Consideremos o seguinte sistema de dois carros acoplados por uma mola:



cuja dinâmica, a tempo contínuo, é descrita pelas seguintes equações:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) = u(t) + k_s \big[x_2(t) - x_1(t) \big] - m_1 g \,\mathrm{sen}\, \gamma$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) = -k_s \big[x_2(t) - x_1(t) \big] - m_2 g \,\mathrm{sen}\, \gamma$$

$$m_1\ddot{x}_1(t) = u(t) + k_s\left[\, x_2(t) - x_1(t)\,\right] - m_1 g \,\mathrm{sen}\, \gamma$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) = -k_s\left[\, x_2(t) - x_1(t)\,\right] - m_2 g \,\mathrm{sen}\, \gamma$$

Definindo ainda

$$x_3(t) = \dot{x}_1(t)\ ,\ \ x_4(t) = \dot{x}_2(t)$$

$$\bar{d} = g \,\mathrm{sen}\, \gamma$$

obtêm-se as seguintes equações de estado:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_4(t) \\
\dot{x}_3(t) &= (k_s/m_1)\left[\, x_2(t) - x_1(t)\,\right] + u(t)/m_1 - \bar{d} \\
\dot{x}_4(t) &= -(k_s/m_2)\left[\, x_2(t) - x_1(t)\,\right] - \bar{d}
\end{aligned}$$

Em forma matricial, pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_s/m_1 & k_s/m_1 & 0 & 0 \\ k_s/m_2 & -k_s/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \bar{d}$$

que está na forma

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) + E_c \bar{d}$$

Considerando que a saída a ser controlada seja a posição x_2 do segundo carro, tem-se ainda

$$y(t) = Cx(t)$$

com $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) + E_c \bar{d}$$

Supondo que a entrada $u(t)$ seja aplicada por meio de um segurador de ordem zero, pode-se discretizar a equação de estado na forma

$$x\big((k+1)T\big) = Ax(kT) + Bu(kT) + E\bar{d}$$

sendo

$$A = e^{A_c T} \ , \ B = \int_0^T e^{A_c \tau} B_c d\tau \ , \ E = \int_0^T e^{A_c \tau} E_c d\tau$$

A equação de saída permanece inalterada:

$$y(kT) = Cx(kT)$$

Formulação geral

Consideremos um sistema com dinâmica a tempo discreto descrita por um modelo da forma

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ed(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

sendo $u(k) \in \mathbb{R}^p$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^q$, $d(k) \in \mathbb{R}^{n_d}$ os vetores de entrada (manipulada), estado, saída e perturbação, respectivamente.

Vamos projetar uma lei de controle de modo a corrigir o efeito de uma perturbação $d(k) = \bar{d}$ constante.

Relações de equilíbrio

Dada uma referência $\bar{r}$ para a saída do sistema, os valores de equilíbrio para o estado e o controle podem ser determinados resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} + E\bar{d}$$

$$C\bar{x} = \bar{r}$$

ou, em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (A - I) & B \\ C & 0_{q \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E\bar{d} \\ \bar{r} \end{bmatrix}$$

Supondo $p = q$, a solução é dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - I) & B \\ C & 0_{q\times p} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -E\bar{d} \\ \bar{r} \end{bmatrix}$$

desde que exista a inversa indicada. Nesse caso, pode-se ainda escrever a solução na forma

$$\begin{bmatrix} (A - I) & B \\ C & 0_{q\times p} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0_{n\times q} \\ I_{q\times q} \end{bmatrix} \bar{r} + \begin{bmatrix} -E \\ 0_{q\times n_d} \end{bmatrix} \bar{d} \right\}$$

ou seja:

$$\bar{x} = N_x\bar{r} + M_x\bar{d}\ , \ \ \bar{u} = N_u\bar{r} + M_u\bar{d}$$

sendo N_x, N_u já definidos em aulas anteriores e M_x, M_u dadas por

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - I) & B \\ C & 0_{q\times p} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -E \\ 0_{q\times n_d} \end{bmatrix}$$

Se o estado $x(k)$ for medido e $\bar{d}$ for conhecida, pode-se usar a lei de controle

$$u(k) = -K\left[\, x(k) - \bar{x}\, \right] + \bar{u}$$

com

$$\bar{x} = N_x \bar{r} + M_x \bar{d} \ , \ \ \bar{u} = N_u \bar{r} + M_u \bar{d}$$

Se $\bar{d}$ **não for conhecida**, pode-se estimá-la usando um **observador de estados**.

Uso de observador de estados

A equação de estado

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + E\bar{d}$$

pode também ser escrita como

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ed(k)$$

com

$$d(k+1) = d(k)\ ,\ \ d(0) = \bar{d}$$

As equações

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ed(k)$$

$$d(k+1) = d(k)$$

podem ser combinadas na forma

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n_d \times n} & I_{n_d \times n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_d \times p} \end{bmatrix} u(k)$$

Definindo um **estado aumentado** como

$$\chi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix}$$

pode-se também escrever

$$\chi(k+1) = A_\chi \chi(k) + B_\chi u(k)$$

sendo

$$A_\chi = \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n_d \times n} & I_{n_d \times n_d} \end{bmatrix}, \quad B_\chi = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_d \times p} \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, uma equação de medida da forma

$$z(k) = Hx(k)$$

com $z(k) \in \mathbb{R}^m$, pode ser reescrita como

$$z(k) = H_\chi \chi(k) \ , \quad H_\chi = \begin{bmatrix} H & 0_{m \times n_d} \end{bmatrix}$$

$$\chi(k+1) = A_\chi \chi(k) + B_\chi u(k)$$

$$z(k) = H_\chi \chi(k)$$

$$\chi(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ \bar{d} \end{bmatrix}$$

Se o par (A_χ, H_χ) for observável, pode-se determinar $\chi(0)$ com base em $u(0), u(1), \ldots, u(n-2)$ e $z(0), z(1), \ldots, z(n-1)$. Com isso, obtém-se o valor $\bar{d}$ da perturbação.

Alternativamente, pode-se obter uma estimativa $\chi(k|k)$ de forma recursiva, empregando um observador de estados.

Observações

$$A_\chi = \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n_d \times n} & I_{n_d \times n_d} \end{bmatrix}, \quad H_\chi = \begin{bmatrix} H & 0_{m \times n_d} \end{bmatrix}$$

• O par (A_χ, H_χ) será observável se e somente se (A, H) for observável e a matriz

$$\begin{bmatrix} (A - I) & E \\ H & 0_{m \times n_d} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+n_d)}$$

tiver posto completo de colunas (isto é, tiver todas as colunas linearmente independentes).

Uma demonstração pode ser encontrada no material suplementar ao final destes slides.

Vale notar que essa condição exige que o **número de sensores** m seja **maior ou igual ao número de perturbações** n_d.

Observações

$$z(k) = Hx(k) = H_\chi \chi(k)$$

• A estimativa de $\bar{d}$ obtida com o uso de um observador de estados será denotada por $\bar{d}(k|k)$.

• A lei de controle torna-se, então

$$u(k) = -K\big[\,x(k|k) - \bar{x}(k|k)\,\big] + \bar{u}(k|k)$$

com

$$\bar{x}(k|k) = N_x\bar{r} + M_x\bar{d}(k|k)\ ,\ \ \bar{u}(k|k) = N_u\bar{r} + M_u\bar{d}(k|k)$$

• Se o estado $x(k)$ for medido diretamente, o observador será projetado com $H = I_{n\times n}$. Nesse caso, a lei de controle pode ser implementada como

$$u(k) = -K\big[\,x(k) - \bar{x}(k|k)\,\big] + \bar{u}(k|k)$$

- O sistema de controle assim projetado possui **ação integral**.

Os integradores estarão incluídos na estrutura do observador de estados, que inclui a seguinte matriz:

$$A_\chi = \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n_d \times n} & I_{n_d \times n_d} \end{bmatrix}$$

Os n_d autovalores unitários de A_χ estão associados a integradores discretos.

Obrigado pela atenção !

Material suplementar

O desenvolvimento aqui apresentado é baseado na Proposição 1 de Maeder, Borreli e Morari (2009), que emprega a chamada condição de observabilidade de Hautus:

O par (A, H) é observável se e somente se a matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ H \end{bmatrix}$$

tiver todas as colunas linearmente independentes para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$.

Referência: MAEDER, U.; BORRELI, F.; MORARI, M. Linear offset-free model predictive control. **Automatica**, v. 45, p. 2214-2222, 2009.

Sejam

$$A_\chi = \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n_d \times n} & I_{n_d \times n_d} \end{bmatrix}, \; H_\chi = \begin{bmatrix} H & 0_{m \times n_d} \end{bmatrix}$$

Vamos analisar a relação das seguintes condições:

$$(A, H) \text{ observável} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} (A - I) & E \\ H & 0_{m \times n_d} \end{bmatrix} \text{ tem posto completo de colunas} \tag{2}$$

com a observabilidade do par (A_χ, H_χ).

$$A_\chi = \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n_d \times n} & I_{n_d \times n_d} \end{bmatrix}, \; H_\chi = \begin{bmatrix} H & 0_{m \times n_d} \end{bmatrix}$$

Para aplicar a condição de observabilidade de Hautus, deve-se analisar o posto de colunas da seguinte matriz (estando aqui omitidas as dimensões das matrizes identidades e matrizes de zeros):

$$\begin{bmatrix} A_\chi - \lambda I \\ H_\chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \lambda I & E \\ 0 & I - \lambda I \\ H & 0 \end{bmatrix}$$

Vale notar que a condição (1) é necessária e suficiente para que as n primeiras colunas dessa matriz sejam linearmente independentes.

As últimas n_d colunas serão linearmente independentes das n primeiras para todo valor de $\lambda \in \mathbb{C}$, com a possível exceção de $\lambda = 1$. Contudo, a independência para $\lambda = 1$ é garantida pela condição (2).

EE-254: Controle Preditivo

Semana 4 (Parte 7/7)

Recapitulando: Controle empregando estimativa de perturbação constante

Consideremos um sistema com dinâmica a tempo discreto descrita por uma equação de estado da forma

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + E\bar{d}$$

com saída controlada $y(k)$ e saída medida $z(k)$ dadas por

$$y(k) = Cx(k)\ , \ \ z(k) = Hx(k)$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$, $y(k) \in \mathbb{R}^q$, $z(k) \in \mathbb{R}^m$, $\bar{d} \in \mathbb{R}^{n_d}$.

Seja $\bar{r}$ o valor desejado para a saída. Se a perturbação $\bar{d}$ for conhecida, os valores de equilíbrio para o estado e o controle serão dados por

$$\bar{x} = N_x \bar{r} + M_x \bar{d} \ , \ \ \bar{u} = N_u \bar{r} + M_u \bar{d}$$

sendo N_x, N_u já definidos em aulas anteriores e M_x, M_u obtidas como

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - I) & B \\ C & 0_{q \times p} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -E \\ 0_{q \times n_d} \end{bmatrix}$$

Se a perturbação $\bar{d}$ não for conhecida, uma estimativa $\bar{d}(k|k)$ pode ser obtida empregando um observador com o seguinte **estado aumentado**:

$$\chi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix}$$

e as matrizes

$$A_\chi = \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n_d \times n} & I_{n_d \times n_d} \end{bmatrix}, \quad B_\chi = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_d \times p} \end{bmatrix}, \quad H_\chi = \begin{bmatrix} H & 0_{m \times n_d} \end{bmatrix}$$

Vale lembrar que o par (A_χ, H_χ) será observável se e somente se (A, H) for observável e a matriz

$$\begin{bmatrix} (A - I) & E \\ H & 0_{m \times n_d} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+n_d)}$$

tiver todas as colunas linearmente independentes.

Com isso, a lei de controle torna-se

$$u(k) = -K\left[\, x(k|k) - \bar{x}(k|k) \,\right] + \bar{u}(k|k)$$

com

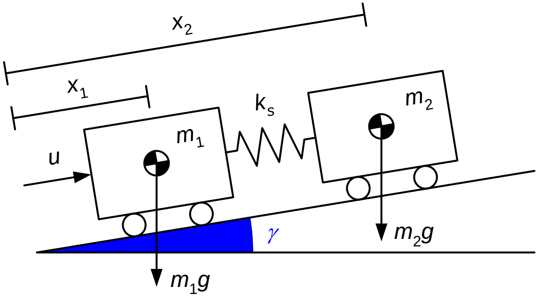
$$\bar{x}(k|k) = N_x \bar{r} + M_x \bar{d}(k|k)\ ,\ \ \bar{u}(k|k) = N_u \bar{r} + M_u \bar{d}(k|k)$$

Se o estado $x(k)$ for medido diretamente, o observador será projetado com $H = I_{n\times n}$. Nesse caso, a lei de controle pode ser implementada como

$$u(k) = -K\left[\, x(k) - \bar{x}(k|k) \,\right] + \bar{u}(k|k)$$

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema de dois carros acoplados por uma mola:



cuja dinâmica, a tempo contínuo, é descrita pelas seguintes equações:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) = u(t) + k_s \left[x_2(t) - x_1(t) \right] - m_1 g \operatorname{sen} \gamma$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) = -k_s \left[x_2(t) - x_1(t) \right] - m_2 g \operatorname{sen} \gamma$$

Definindo ainda

$$x_3(t) = \dot{x}_1(t)\ ,\ \ x_4(t) = \dot{x}_2(t)$$

$$\bar{d} = g\,\text{sen}\,\gamma$$

obtêm-se a seguinte equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_s/m_1 & k_s/m_1 & 0 & 0 \\ k_s/m_2 & -k_s/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \bar{d}$$

que está na forma

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) + E_c \bar{d}$$

Os seguintes valores serão adotados para os parâmetros do modelo neste exemplo:

$$m_1 = 5 \text{ kg},\ m_2 = 3 \text{ kg},\ k_s = 10 \text{ N/m},\ g = 9{,}8 \text{ m/s}$$

Considerando que a saída a ser controlada seja a posição x_2 do segundo carro, tem-se ainda

$$y(t) = Cx(t)$$

com $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Vamos assumir que haja realimentação de estado, ou seja, $H = I$.

Roteiro: Controle sem estimação da perturbação

Objetivo: Deslocar o sistema por uma distância de 1 m em aproximadamente 5 s, com amortecimento das oscilações.

Passo 1: Discretizar o modelo

Passo 2: Projetar a realimentação de estado empregando o método DLQR

Passo 3: Avaliar o resultado por meio de simulação

Passo 1: Discretizar o modelo

Considerando um tempo de subida de 5 s, um período de amostragem adequado seria de 0,5 s.

Contudo, deve-se considerar ainda a necessidade de **amortecer as oscilações** na resposta do sistema. Para isso, o período de amostragem deve ser bem menor (10 a 20 vezes) que o período das oscilações.

```
>> m1 = 5; m2 = 3; ks = 10;
>> Ac = [0 0 1 0;
        0 0 0 1;
       -ks/m1 ks/m1 0 0;
        ks/m2 -ks/m2 0 0];
>> eig(Ac)

    0.0000 + 2.3094i
    0.0000 - 2.3094i
   -0.0000
    0.0000

>> 2*pi/2.3094

    2.7207
```

Vamos tomar $T = 0{,}2$ s, que também é adequado levando em conta a especificação de tempo de subida.

```
>> Bc = [0;0;1/m1;0];
>> Ec = [0;0;-1;-1];
>> T = 0.2;
>> [A,B] = c2dm(Ac,Bc,[],[],T,'zoh');
>> [~,E] = c2dm(Ac,Ec,[],[],T,'zoh');
```

Passo 2: Projetar a realimentação de estado empregando o método DLQR

Vamos inicialmente escolher os pesos do DLQR empregando a regra de Bryan. Para isso, consideremos a seguinte excursão para as variáveis envolvidas:

Deslocamento: 1 m

Vamos supor (por simplicidade) que a **velocidade** tenha um perfil triangular ao longo do tempo, com máximo em metade do tempo de subida, ou seja 2,5s. Nesse caso, a velocidade máxima v_{max} seria obtida fazendo

$$\frac{(2{,}5\text{ s})\, v_{max}}{2} = 0{,}5\text{ m} \Rightarrow v_{max} = 0{,}4\text{ m/s}$$

A aceleração correspondente é de $(0{,}4/2{,}5)\text{ m/s}^2 = 0{,}16\text{m/s}^2$. Portanto, a **força** que seria aplicada ao sistema nessa condição seria $(m_1 + m_2) \cdot 0{,}16\text{ m/s}^2 = 8 \cdot 0{,}16\text{ N} = 1{,}28\text{ N}$.

Portanto, tomaremos $Q = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, q_4)$, com

$$q_1 = q_2 = 1$$

$$q_3 = q_4 = \frac{1}{0{,}4^2} = 6{,}25$$

e o peso R como

$$R = \frac{1}{1{,}28^2} = 0{,}61$$

```
>> Q = diag([1 1 6.25 6.25]);
>> R = 0.61;
>> K = dlqr(A,B,Q,R);

    1.8905   -0.3051    6.0926    0.3975
```

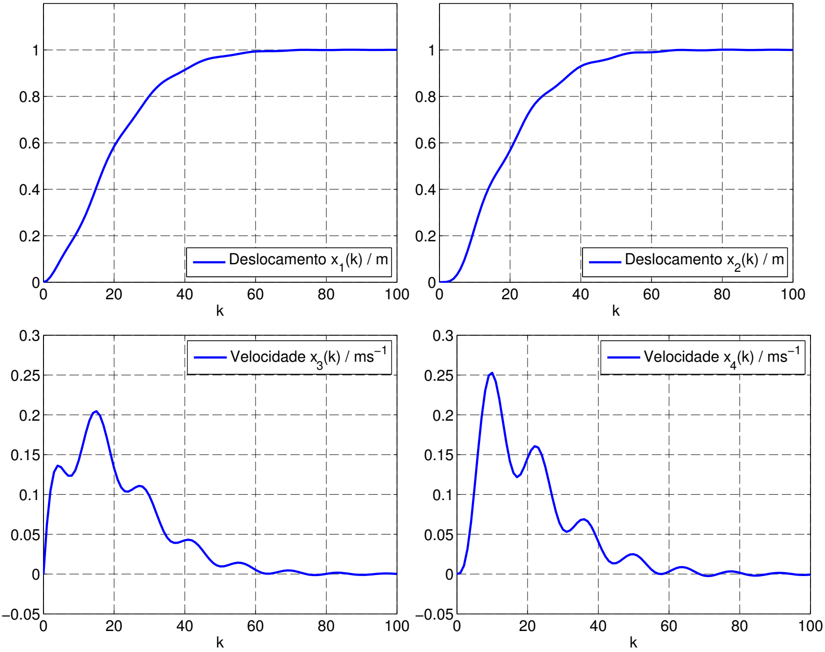
Para determinação dos valores de equilíbrio, vamos fazer:

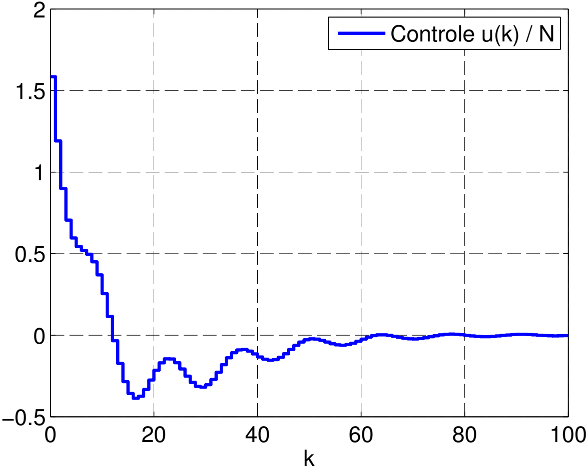
```
C = [0 1 0 0];
aux = inv([A - eye(4) B;C 0])*[0;0;0;0;1]
Nx = aux(1:4)

    1.0000
    1.0000
    0.0000
    0.0000

Nu = aux(5)

    -3.1807e-31

rbar = 1;
xbar = Nx*rbar;
ubar = Nu*rbar;
```

Passo 3: Avaliar o resultado por meio de simulação

Sem perturbação, ou seja, com o sistema se deslocando na horizontal:

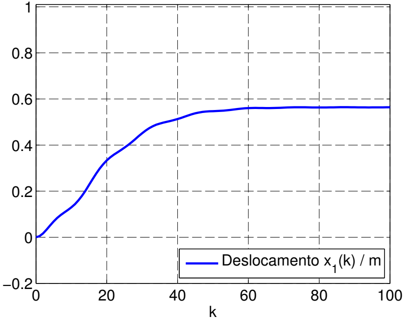
```
x{1} = [0;0;0;0];
for k = 1:100
   u(k) = ubar - K*(x{k} - xbar);
   x{k+1} = A*x{k} + B*u(k);
end
```

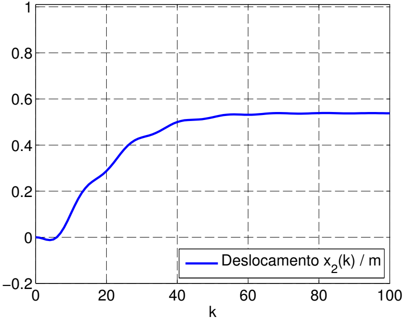

Deslocamento $x_1(k)$ / m
Deslocamento $x_2(k)$ / m
Velocidade $x_3(k)$ / ms^{-1}
Velocidade $x_4(k)$ / ms^{-1}
k
k
k
k

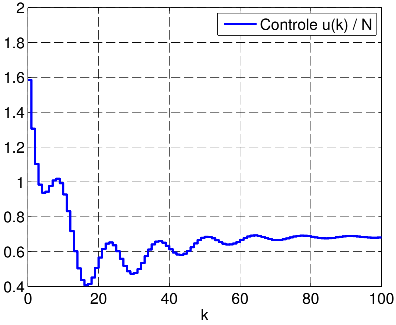

Controle u(k) / N
2
1.5
1
0.5
0
–0.5
0
20
40
60
80
100
k

Vamos refazer a simulação com o sistema se deslocando ao longo de uma rampa com inclinação de $+0{,}5^\circ$.

```
g = 9.8;
gamma = 0.5;
dbar = g*sind(gamma);
x{1} = [0;0;0;0];
for k = 1:100
   u(k) = ubar - K*(x{k} - xbar);
   x{k+1} = A*x{k} + B*u(k) + E*dbar;
end
```








```
>> 8*sind(0.5)*9.8

0.6842
```

Roteiro: Controle com estimação da perturbação

Passo 1: Discretizar o modelo (já feito)

Passo 2: Projetar a realimentação de estado empregando o método DLQR (já feito)

Passo 3: Projetar um observador de estados (*deadbeat*) para estimar a perturbação

Passo 4: Incluir a perturbação estimada na lei de controle

Passo 5: Avaliar o resultado por meio de simulação

Passo 3: Projetar um observador de estados (*deadbeat*) para estimar a perturbação

Vamos assumir que os estados sejam medidos, ou seja, $z(k) = Hx(k)$ com $H = I$. Nesse caso, o par (A, H) é trivialmente observável.

Adicionalmente, como $E \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ e $E \neq 0$, constata-se que a matriz

$$\begin{bmatrix} (A - I) & E \\ H & 0_{m\times n_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - I) & E \\ I & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 5}$$

tem todas as colunas linearmente independentes, o que viabiliza o projeto do observador de estados para estimar a perturbação.

$$\chi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

$$A_\chi = \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{1\times 4} & 1 \end{bmatrix}, \quad B_\chi = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_\chi = \begin{bmatrix} H & 0_{4\times 1} \end{bmatrix}$$

```
>> Achi = [A E;zeros(1,4) 1];
>> Bchi = [B;0]; H = eye(4);
>> Hchi = [H zeros(4,1)];
>> eig_des = [0:4]*1e-6;
>> L = (place(Achi',Hchi',eig_des))';
>> M = inv(Achi)*L;
```

Neste caso, está sendo usada a função `place`, pois a função `acker` é aplicável somente a sistemas de entrada única. Neste caso, as entradas do observador são as 4 variáveis de estado.

Passo 4: Incluir a perturbação estimada na lei de controle

Empregaremos a lei de controle

$$u(k) = -K\left[\, x(k) - \bar{x}(k|k) \,\right] + \bar{u}(k|k)$$

com $\bar{x}(k|k)$ e $\bar{u}(k|k)$ dadas por

$$\bar{x}(k|k) = N_x \bar{r} + M_x \bar{d}(k|k) \ , \ \ \bar{u}(k|k) = N_u \bar{r} + M_u \bar{d}(k|k)$$

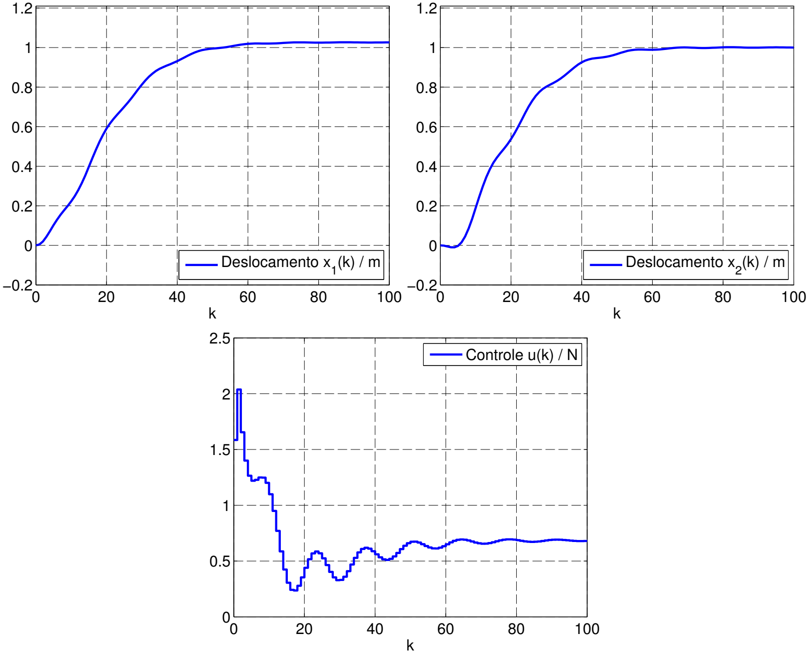
sendo

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - I) & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -E \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
>> aux = inv([A - eye(4) B;C 0])*[-E;0];
>> Mx = aux(1:4)

    0.3000
    0
   -0.0000
   -0.0000

>> Mu = aux(5)

    8.0000
```

Passo 5: Avaliar o resultado por meio de simulação

```
chi_pri{1} = [x{1};0];
for k = 1:100
  zpri{k} = Hchi*chi_pri{k};
  z{k} = x{k};
  chi_pos{k} = chi_pri{k} + M*(z{k} - zpri{k});
  dbar_pos{k} = chi_pos{k}(5);
  xbar{k} = Nx*rbar + Mx*dbar_pos{k};
  ubar{k} = Nu*rbar + Mu*dbar_pos{k};
  u(k) = ubar{k} - K*(x{k} - xbar{k});
  x{k+1} = A*x{k} + B*u(k) + E*dbar;
  chi_pri{k+1} = Achi*chi_pos{k} + Bchi*u(k);
end
```



Deslocamento x_1(k) / m
k
Deslocamento x_2(k) / m
k
Controle u(k) / N
k

Obrigado pela atenção !