

## Transmissão em Banda Passante. Prof. Waldecir J. Perrella

Nesta seção será analisada a transmissão de dados digitais em canais banda passante. Da mesma forma que na comunicação analógica, a transmissão de dados utiliza uma portadora senoidal modulada pela sequência de dados. Assim, serão analisados os seguintes tópicos:

- Modulações:  
ASK chaveamento da amplitude da portadora (*Amplitude Shift Keying*)  
PSK chaveamento da fase da portadora (*Phase Shift Keying*)  
FSK chaveamento de frequência da portadora (*Frequency Shift Keying*);
- Detecção coerente de sinais modulados em canais com ruído aditivo, branco e gaussiano (*AWGM*): o receptor sincronizado com a fase e frequência da portadora, além da sincronização de relógio dos bits (“Clock”);
- Detecção não coerente de sinais modulados em canais com ruído aditivo branco e gaussiano: o receptor sincronismo de relógio dos bits

Na transmissão de pulsos em banda base estudada anteriormente, a sequência de dados, representada na forma de pulsos discretos modulando a amplitude PAM, é transmitida diretamente em canais com faixa de passagem concentrada nas frequências baixas. Na transmissão em banda passante, por outro lado, a sequência de dados modula a portadora senoidal com uma largura de faixa de frequências.

Os canais de comunicação usados para a transmissão de dados em banda passante podem ser rádio enlace de microondas, canal de satélite.

### Eficiência de largura de faixa.

Os dois recursos primários mais importantes nos sistemas de comunicações são largura de faixa e potência transmitida. Assim, tem-se procurado modulações com eficiência espectral que é definida como a razão entre a taxa de dados em bits por segundo e a largura de faixa do canal efetivamente utilizada. Outro objetivo é chegar a essa eficiência de largura de faixa com a mínima potência média, ou equivalentemente, num canal com ruído branco gaussiano aditivo, com a mínima relação sinal-ruído.

Com a taxa de dados, denotada por  $R_b$ , e a largura de faixa de canal utilizada, denotada por  $B$ , a eficiência de largura de faixa,  $\rho$ , pode ser expressa por:

$$\rho = \frac{R_b}{B} \text{ bits/s/Hz} \quad 1$$

Observe que a eficiência da modulação em largura de faixa é resultante de dois fatores independentes: codificação com multi-níveis ou *M-ária* e formatação de pulso para eficiência espectral (Nyquist).

## Descrição do sistema de comunicação binária banda passante.

Na Figura 1 tem-se o diagrama de blocos de um sistema de comunicação binária banda passante.

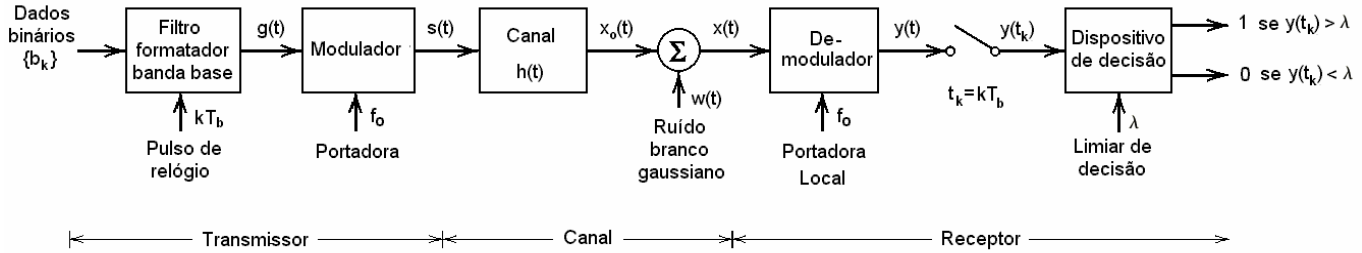


Figura 1 Comunicação binária banda passante.

A entrada do sistema é uma seqüência binária  $\{b_k\}$  com uma taxa de dados  $R_b=1/T_b$ , com  $T_b$  sendo o intervalo de sinalização. A seguir, os pulsos, formatados em banda base, geram uma seqüência de pulsos,  $p(t)$ , limitados no tempo (por exemplo retangular) ou limitados em frequência (por exemplo Nyquist) que podem ser representados por:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k p(t - kT_b) \quad 2$$

Nesta seção considera-se  $p(t)$  um pulso retangular com amplitude 1 e duração  $T_b$ . A seguir o sinal é modulado por uma portadora senoidal com frequência  $f_o$ , gerando o sinal modulado  $s(t)$  no  $k$ -ésimo intervalo de sinalização:

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t - kT_b) & \text{quando 1 for transmitido} \\ s_2(t - kT_b) & \text{quando 0 for transmitido} \end{cases} \quad 3$$

onde as formas de ondas  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$  têm duração de  $T_b$  e têm energia finita e são calculadas por:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^{T_b} s_1^2(t) dt < \infty \\ E_2 &= \int_0^{T_b} s_2^2(t) dt < \infty \end{aligned} \quad 4$$

Na Tabela 1 têm-se as formas de ondas para os três tipos básicos de modulação digital.

Tabela 1. Três tipos básicos de modulação digital.

Tipos de modulação	$s_1(t) \ 0 \leq t \leq T_b$	$s_2(t) \ 0 \leq t \leq T_b$
ASK	$A \cos(\omega_0 t)$	0
PSK	$A \cos(\omega_0 t)$	$A \cos(\omega_0 t + \pi) = -A \cos(\omega_0 t)$
FSK	$A \cos[(\omega_0 + \omega_d)t]$	$A \cos[(\omega_0 - \omega_d)t]$

onde  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$  são sinais finitos no tempo, isto é, iguais a zero fora do intervalo  $[0, T_b]$ ,  $f_0 = \omega_0/2\pi$  é a frequência da portadora que é múltipla da taxa de bits  $R_b$  e  $\pm\omega_d = 2\pi f_d$  é o deslocamento da frequência da portadora na modulação FSK.

Na Figura 2 ilustram-se as formas de ondas no domínio do tempo.

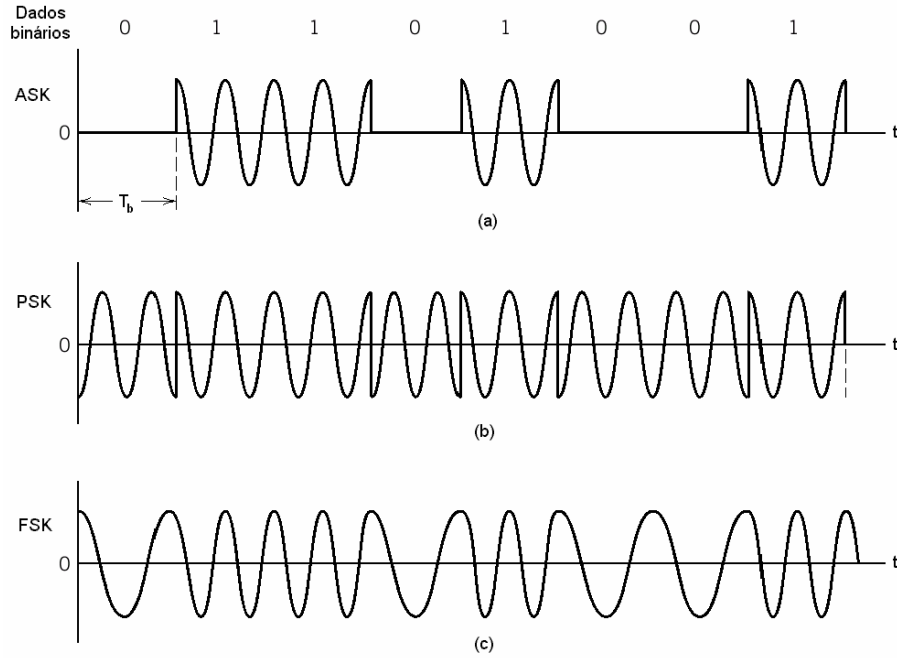


Figura 2 Três modulações binárias para a sequência de bits 01101001.

O sinal de saída do modulador o sinal é transmitido pelo canal que apresenta uma resposta em frequência banda passante  $H(f)$ , que neste capítulo é suposto ideal, isto é, apresenta uma largura de faixa adequada para não distorcer o sinal modulado e somente um atraso de propagação. O ruído do canal é aditivo gaussiano e branco com média zero e densidade espectral de potência  $N_0/2$ . O sinal recebido,  $x(t)$ , com ruído aditivo é dado por:

$$x(t) = \begin{cases} s_1(t - kT_b - \tau) + w(t) & \text{quando 1 for transmitido} \\ s_2(t - kT_b - \tau) + w(t) & \text{quando 0 for transmitido} \end{cases} \quad 5$$

onde  $\tau$  é o atraso de propagação.

No caso de demodulação coerente deve existir um circuito, chamado de sincronizador de portadora, que estima essa defasagem usando o próprio sinal recebido e normalmente implementado por meio de um PLL (*Phase Lock Loop*). Sem perda de generalidade considera-se  $\tau=0$ .

O demodulador tem o objetivo de determinar qual das duas formas de ondas conhecidas,  $s_1(t)$  ou  $s_2(t)$  está presente em cada intervalo de sinalização. O demodulador ótimo consiste de um filtro casado, resultando na sua saída o sinal  $y(t)$  e um amostrador nos instantes  $kT_b$  segundos, produzindo amostras  $y(kT_b)$ . A seguir os valores amostrados passam pelo dispositivo de decisão, onde são comparados com um limiar  $\lambda$ , para decidir qual dos sinais está presente de acordo com a seguinte regra:

$$\text{decide por } \begin{cases} 1 & \text{quando } y(kT_b) > \lambda \\ 0 & \text{quando } y(kT_b) < \lambda \end{cases} \quad 6$$

O filtro casado do demodulador pode ser implementado de duas formas em banda passante ou em banda base. Considerando o sinal recebido  $x(t)$  sem ruído, tem-se somente um dos dois sinais modulados agora representado por  $s_i(t)$  e dado por:

$$s_i(t) = A \cos(\omega_o t) \text{ para } 0 \leq t \leq T_b \quad 7$$

A energia de  $s_i(t)$  é dada por:

$$E_i = \int_0^{T_b} s_i^2(t) dt = \frac{A^2 T_b}{2} \quad 8$$

### 1. Filtro casado em banda passante

Como a resposta impulsiva do filtro casado a um sinal  $s_i(t)$  é  $s_i(T_b - t)$  e como  $\omega_b$  pode ser escolhido como múltiplo de  $R_b$ , tem-se neste caso a resposta impulsiva é o próprio sinal  $s_i(t)$ . A Figura 3a mostra o diagrama de blocos do filtro casado em banda passante, onde o sinal de saída  $y(t)$  é amostrado a cada  $kT_b$  resultando no sinal  $y(kT_b)$  e como foi visto é igual a energia do sinal de entrada  $E_i$  dada pela equação (8). Na Figura 4 têm-se as formas de ondas no domínio do tempo. Assim na Figura 4a tem-se o sinal de entrada modulado,  $s_i(t)$ , com amplitude  $A$  e frequência da portadora  $\omega_i$  e duração  $T_b$ . Na Figura 4b tem-se a saída do filtro casado no tempo que é resultante da convolução do sinal de entrada  $s_i(t)$  com a resposta impulsiva do filtro casado. Observa-se que no instante de amostragem  $t = T_b$  saída  $y(T_b) = E_i$ . Para isto ocorrer assumiu-se que a resposta impulsiva do filtro casado esteja em sincronismo com a fase do sinal recebido e que a amostragem nos instantes  $t = kT_b$  também esteja em sincronismo com os instantes de transição dos dados recebidos.

### 2. Filtro casado em banda base

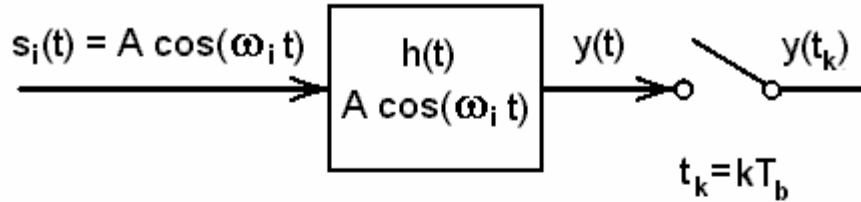
Neste caso, o sinal recebido é inicialmente multiplicando (*Mixer*) pela portadora  $\omega_i$ , gerada localmente e em sincronismo com a fase da portadora recebida gerando o sinal  $z(t)$ , como mostra a Figura 3b. Essa operação tem o objetivo de transladar o espectro do sinal modulado para a banda base, e utilizando relações trigonométricas tem-se o sinal  $z(t)$  resulta em três componentes, duas referentes ao sinal transmitido e uma referente ao ruído. A equação (9) é referente às duas componentes do sinal:

$$z(t) = s_i(t) A \cos(\omega_i t) = A^2 \cos^2(\omega t) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(2\omega_i t) \quad 9$$

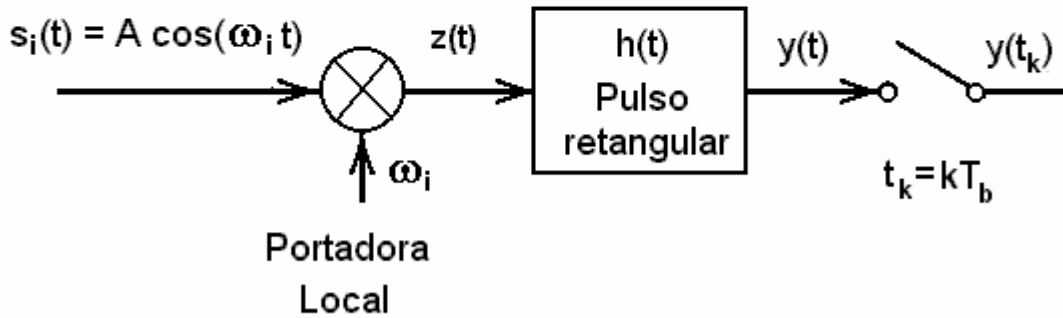
A primeira das duas componentes do sinal  $z(t)$  é um sinal em banda base e a segunda é uma componente em banda passante, centrada na frequência  $2\omega_i$  que será eliminada pelo filtro passa baixas que será descrito a seguir.

A primeira componente é um sinal com valor constante, igual a  $A^2/2$ , durante o intervalo de sinalização  $[0, T_b]$  e corresponde à translação da informação modulada em banda passante para banda base e a sua existência é devido ao aparecimento do sinal  $s_i(t)$  na entrada do demodulador, pois se o mesmo não estivesse, a saída seria exatamente um valor constante e igual a zero durante o intervalo de

sinalização. Assim, como esta componente de  $z(t)$  corresponde a um pulso retangular com amplitude  $A^2/2$  e duração  $T_b$  a sua detecção é otimizada usando-se um filtro casado também retangular em banda base. Na Fig. 3b tem-se o diagrama de blocos do filtro casado em banda base, onde o sinal de saída  $y(t)$  é também amostrado a cada  $kT_b$  resultando no sinal  $y(kT_b)$  e como foi visto é também igual à energia do sinal de entrada  $E_i$  dada pela equação (8).



(a) Filtro Casado banda passante



(b) Filtro casado banda base

Figura 3 Demodulador ótimo

- a). Filtro casado em banda passante
- b). Filtro casado em banda base

Na Figura 4c, tem-se a saída, no tempo, do filtro casado em banda base que é resultante da convolução do sinal  $z(t)$  com a resposta impulsiva do filtro casado pulso retangular. Observa-se que no instante de amostragem  $t = T_b$  saída  $y(T_b) = E_i$ . Para isto ocorrer assumiu-se que a multiplicação pela cossenoide na frequência  $\omega_i$  esteja em sincronismo com a fase da portadora do sinal recebido e que a amostragem nos instantes  $t = kT_b$  também esteja em sincronismo com os instantes de transição dos dados recebidos.

Finalmente, pode-se observar na Figura 4c que a segunda componente é praticamente eliminada na saída do filtro casado que também é um filtro passa baixas.

Assim, desprezando o efeito do ruído, pode-se observar que na saída do demodulador, com filtro casado em banda base ou banda passante, nos instantes  $kT_b$ , tem-se  $y(kT_b) = E_i$ , quando o sinal  $s_i(t)$  estiver presente e  $y(kT_b) = 0$ , quando o sinal  $s_i(t)$  não estiver presente.

O efeito do ruído na comunicação em banda passante, utilizando as duas técnicas de filtro casado, tem as mesmas propriedades de um filtro casado visto anteriormente e assim, nos instantes de amostragem,  $kT_b$ , a componente de ruído é uma variável aleatória gaussiana com média zero e variância igual a  $E_i N_o / 2$

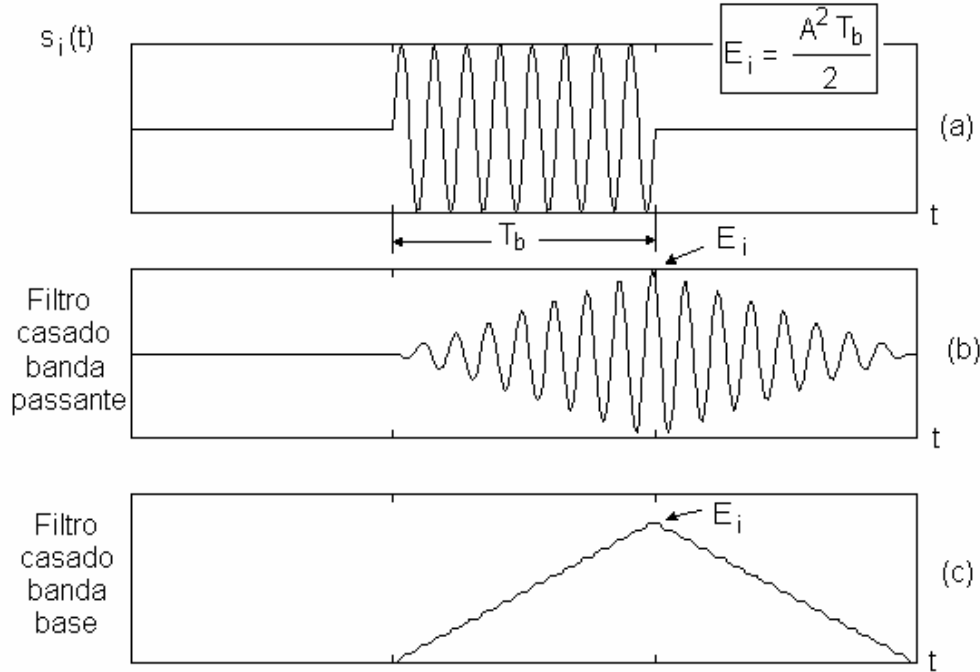


Figura 4 Resposta temporal do filtro casado  
a) Sinal de entrada  $s_i(t)$   
b) Resposta do filtro casado em banda passante  
c) Resposta do filtro casado em banda base

### Binário ASK coerente.

A esquema de sinalização binária ASK foi uma das primeiras formas de modulação digital usada em telegrafia sem fio no começo do século passado. Ela é a forma mais simples de modulação digital e serve como modelo para introduzir certos conceitos.

Supondo coerência da fase da portadora recebida, isto é, a fase da portadora local está síncrona com a portadora recebida e como o sinal modulado ASK é especificado pela Tabela 1 e o sinal na saída do filtro casado  $y(t)$ , na ausência de ruído e nos instantes  $kT_b$ , resulta em:

$$y(kT_b) = \begin{cases} E_1 & \text{quando } s_1(t) \text{ foi transmitido} \\ 0 & \text{quando } 0 \text{ foi transmitido} \end{cases} \quad 10$$

Comparando este resultado com o obtido quando se usa comunicação banda base e pulso NRZ unipolar observa-se que eles são idênticos e então tem-se a mesma BER, equação (55), que é reproduzida novamente:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_o}}\right) \quad 11$$

onde  $E_b$  é a energia média do ASK e assim usando a equação (54) da apostila anterior e a equação da energia de  $s_1(t)$ , equação (4), tem-se:

$$E_b = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(E_1) = \frac{E_1}{2} \quad 12$$

Na Figura 5a e 5b ilustram-se as densidades espectrais de potência das seqüências binárias NRZ unipolar (banda base) e ASK (banda passante), respectivamente. Observa-se que usando a definição de largura de faixa,  $B_L$ , correspondendo ao 1º nulo tem-se:

$$B_L = \begin{cases} R_b = \frac{1}{T_b} & \text{Hz para NRZ} \\ 2R_b = \frac{2}{T_b} & \text{Hz para ASK} \end{cases} \quad 13$$

A eficiência de largura de faixa da modulação ASK, usando a equação (1) e a equação (13) resulta:

$$\rho_{\text{ASK}} = \frac{R_b}{B_L} = \frac{R_b}{2R_b} = \frac{1}{2} \text{ bits/s/Hz} \quad 14$$

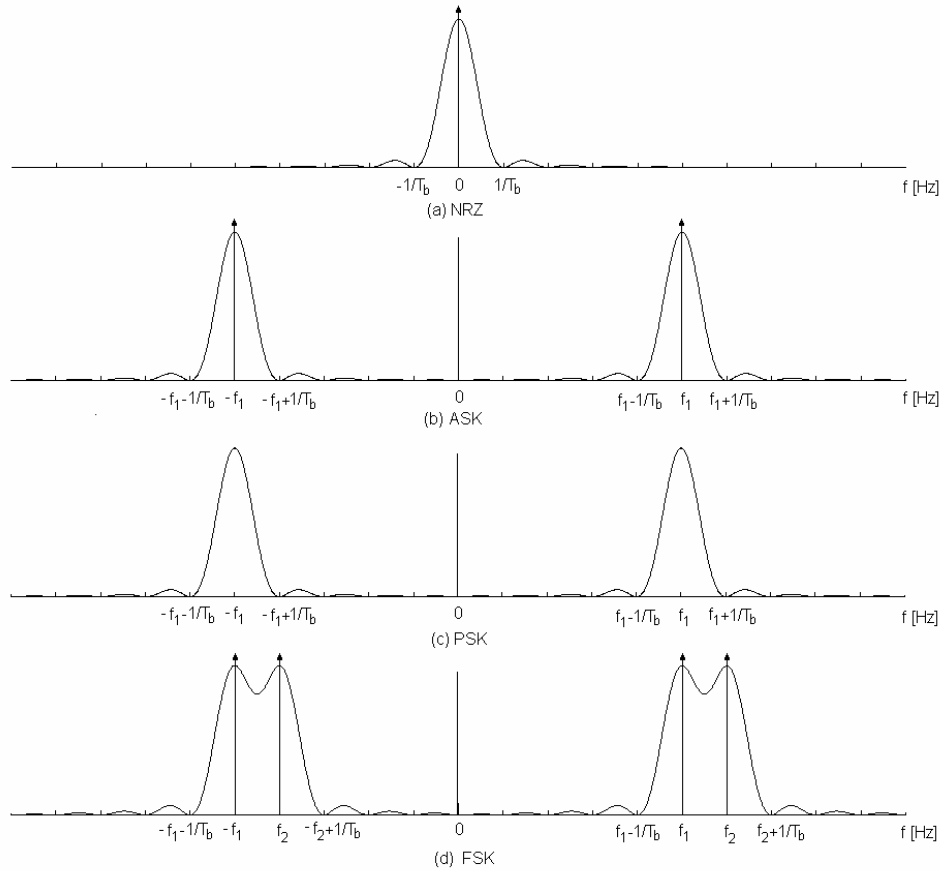


Figura 5 Densidade espectral de potência  
(a).PSD NRZ, (b).PSD ASK,(c).PSD PSK, (d).PSD FSK

### Binário PSK coerente.

Semelhantemente, supondo coerência da fase da portadora recebida, isto é, a fase da portadora local está síncrona com a portadora recebida e como o sinal modulado PSK é especificado pela Tabela 1 e o sinal na saída do filtro casado  $y(t)$ , na ausência de ruído e nos instantes  $kT_b$ , resulta em:

$$y(kT_b) = \begin{cases} E_1 & \text{quando } s_1(t) \text{ foi transmitido} \\ -E_1 & \text{quando } s_2(t) \text{ foi transmitido} \end{cases} \quad 15$$

onde  $E_2 = E_1$ .

Comparando este resultado com o obtido quando se usa comunicação banda base e pulso NRZ polar observa-se que eles são idênticos e então tem-se a mesma BER, equação (47), que é reproduzida novamente:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right) \quad 16$$

onde  $E_b$  é a energia média do PSK e assim usando a equação (46) da apostila anterior e a como a energia de  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$  são iguais, tem-se:

$$E_b = \frac{1}{2}(E_1) + \frac{1}{2}(E_2) = E_1 \quad 17$$

Na Figura 5c ilustra-se a densidade espectral de potência da binária PSK (banda passante). Observa-se que a largura de faixa,  $B_L$ , é a mesma que a do ASK e que não existe nenhuma componente impulsiva na frequência da portadora  $f_1$ .

A eficiência de largura de faixa da modulação PSK é a mesma da modulação ASK, equação (14).

### Binário FSK coerente.

Neste caso o sinal modulado FSK, dado pela Tabela 1 é reproduzido abaixo:

$$s(t) = \begin{cases} A \cos[2\pi(f_0 - f_d)t] = A \cos[2\pi f_1 t] & \text{quando } s_1(t) \text{ é transmitido.} \\ A \cos[2\pi(f_0 + f_d)t] = A \cos[2\pi f_2 t] & \text{quando } s_2(t) \text{ é transmitido.} \end{cases} \quad 18$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são as portadoras chaveadas,  $f_0$  é o valor médio entre elas e  $2f_d$  é o espaçamento entre elas. É necessário que o espaçamento entre elas seja escolhido para que elas sejam ortogonais no seguinte sentido:

$$\int_0^{T_b} \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t) dt = 0 \quad 19$$



Observa-se que o espaçamento entre as frequências,  $\Delta f = f_2 - f_1$ , para se ter a ortogonalidade é  $\Delta f = m/T_b$ , onde  $m$  é um número inteiro e o espaçamento mínimo é  $\Delta f = 1/T_b = R_b$ .

Isto é feito pois a demodulação do FSK necessita de dois filtros casados, um para cada frequência, assim, quando um dos sinais estiver presente, a saída de um filtro não sofre interferência do outro sinal.

Semelhantemente, supondo coerência da fase das duas portadoras recebidas, e como o sinal modulado PSK é especificado pela Tabela 1 e o sinal na saída de cada um dos filtros casados  $y(t)$ , na ausência de ruído e nos instantes  $kT_b$ , resulta em:

$$y_i(kT_b) = \begin{cases} E_i & \text{quando } s_i(t) \text{ foi transmitido} \\ 0 & \text{quando } s_i(t) \text{ não foi transmitido} \end{cases} \quad 20$$

onde  $i = 1$  ou  $2$  correspondendo às energias dos dois sinais, tal que  $E_1 = E_2$  e neste caso a energia média  $E_b = E_1$ .

Como os dois sinais são ortogonais, os sinais de cada um dos filtros podem ser visto como recebidos em dois eixos ortogonais, como mostra a Fig. 6.

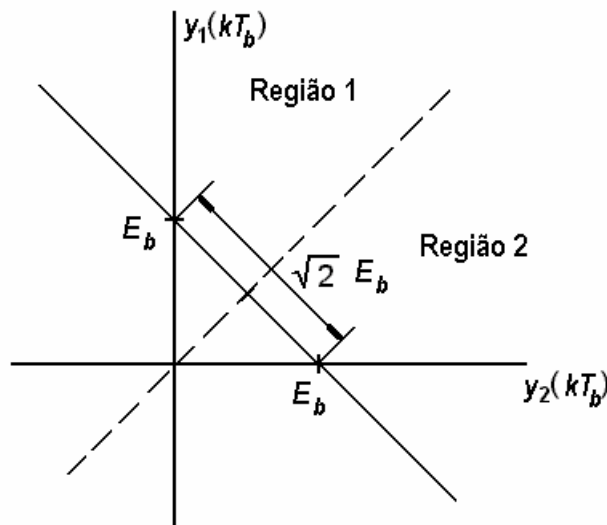


Figura 6 Limiar FSK

Para se decidir qual símbolo foi transmitido, o plano mostrado na Figura 6 foi dividido em duas regiões 1 e 2, separado pela reta tracejada. As saídas dos dois filtros casados,  $y_1(kT)$  e  $y_2(kT)$ , corresponde a um ponto nesse plano, assim se o ponto estiver na região 1, o símbolo “0” foi transmitido e no caso contrário o símbolo “1” foi transmitido. Esta maneira de decisão pode ser simplificada, transformando-se o problema para uma dimensão, definindo-se a diferença entre as duas saídas, como mostra a equação:

$$y(kT_b) = y_1(kT_b) - y_2(kT_b) \quad 21$$

A equação (20) corresponde a variável aleatória gaussiana  $y(kT)$  é resultante da diferença das duas variáveis aleatórias  $y_1(kT)$  e  $y_2(kT)$ , também gaussianas. Estas variáveis serão denotadas por  $y$ ,  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente.

A média de  $y$  depende de qual símbolo foi transmitido. Assim, têm-se as médias condicionais para cada símbolo transmitido:

$$\begin{aligned} E[y|1] &= E[y_1|1] - E[y_2|1] = E - 0 = E \quad \text{quando 1 foi transmitido} \\ E[y|0] &= E[y_1|0] - E[y_2|0] = 0 - E = -E \quad \text{quando 1 foi transmitido} \end{aligned} \quad 22$$

onde  $E_b = E_1 = E_2$ .

O limiar de decisão que minimiza a probabilidade de erro é zero e a decisão passa a ter a seguinte regra:

$$\begin{aligned} &\text{Decide 1 se } y > 0 \\ &\text{Decide 0 se } y < 0 \end{aligned} \quad 23$$

A variância da variável aleatória  $y$  é independente do símbolo transmitido e como as variáveis aleatórias  $y_1$  e  $y_2$  são estatisticamente independentes suas variância se somam:

$$\text{var}[y] = \text{var}[y_1] + \text{var}[y_2] = \frac{N_0}{2} E_1 + \frac{N_0}{2} E_2 = N_0 E_b \quad 24$$

As densidades de probabilidades condicionadas aos símbolos transmitidos resultam:

$$f_Y(y|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 E_b}} e^{-\frac{(y+E_b)^2}{2N_0 E_b}} \quad \text{quando 0 foi transmitido} \quad 25$$

$$f_Y(y|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 E_b}} e^{-\frac{(y-E_b)^2}{2N_0 E_b}} \quad \text{quando 1 foi transmitido} \quad 26$$

A probabilidade de erro média é obtida pelo mesmo procedimento visto anteriormente, isto é,  $\text{BER} = P_e = P_{10} = P_{01}$ , e escolhendo  $P_{10}$  tem-se:

$$P_e = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 E_b}} e^{-\frac{(y+E_b)^2}{2N_0 E_b}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_b/\sqrt{N_0 E_b}}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = Q\left(\frac{E_b}{\sqrt{N_0 E_b}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad 27$$

Expressando a probabilidade em termos da função erfc tem-se:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) \quad 28$$

Verifica-se que a BER da modulação FSK é igual a do ASK equação (16).

Na Fig.5d ilustra-se a densidade espectral de potência da binária FSK (banda passante). Observa-se que a largura de faixa,  $B_L$ , é dada por:

$$B_L = (f_2 - f_1) + 2R_b \quad 29$$

A eficiência de largura de faixa da modulação FSK, usando a equação (1) e supondo o espaçamento mínimo entre as frequências, que é dado por  $\Delta f = 1/T_b = R_b$ , resulta:

$$\rho_{\text{ASK}} = \frac{R_b}{B} = \frac{R_b}{(f_2 - f_1) + 2R_b} = \frac{1}{3} \text{ bits/s/Hz} \quad 30$$

Observando a equação (14), verifica-se que a eficiência de largura de faixa da modulação FSK é menor que a das modulações anteriores.

### Binário FSK não coerente.

Neste caso o sinal modulado FSK, dado pela Tabela 1 é reproduzido abaixo:

$$s(t) = \begin{cases} \text{Acos}[2\pi(f_0 - f_d)t] = \text{Acos}[2\pi f_1 t] & \text{quando } s_1(t) \text{ é transmitido.} \\ \text{Acos}[2\pi(f_0 + f_d)t] = \text{Acos}[2\pi f_2 t] & \text{quando } s_1(t) \text{ é transmitido.} \end{cases} \quad 31$$

onde o espaçamento entre elas é tal que elas são ortogonais de acordo com a equação (19).

Supondo que o sinal recebido tenha um atraso  $\tau$  resultando:

$$r(t) = s(t - \tau) = \begin{cases} \text{Acos}[2\pi f_1(t - \tau)] = \text{Acos}[2\pi f_1 t - 2\pi f_1 \tau] = \text{Acos}[2\pi f_1 t + \theta_1] \\ \text{Acos}[2\pi f_2(t - \tau)] = \text{Acos}[2\pi f_2 t - 2\pi f_2 \tau] = \text{Acos}[2\pi f_1 t + \theta_2] \end{cases} \quad 32$$

A demodulação não coerente do FSK necessita de dois filtros casados para cada frequência, como mostrado na Figura 7.

Pode-se mostrar ( Haykin ) que a BER resultante do receptor não coerente, é dada por:

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2 N_o}\right) \quad 33$$

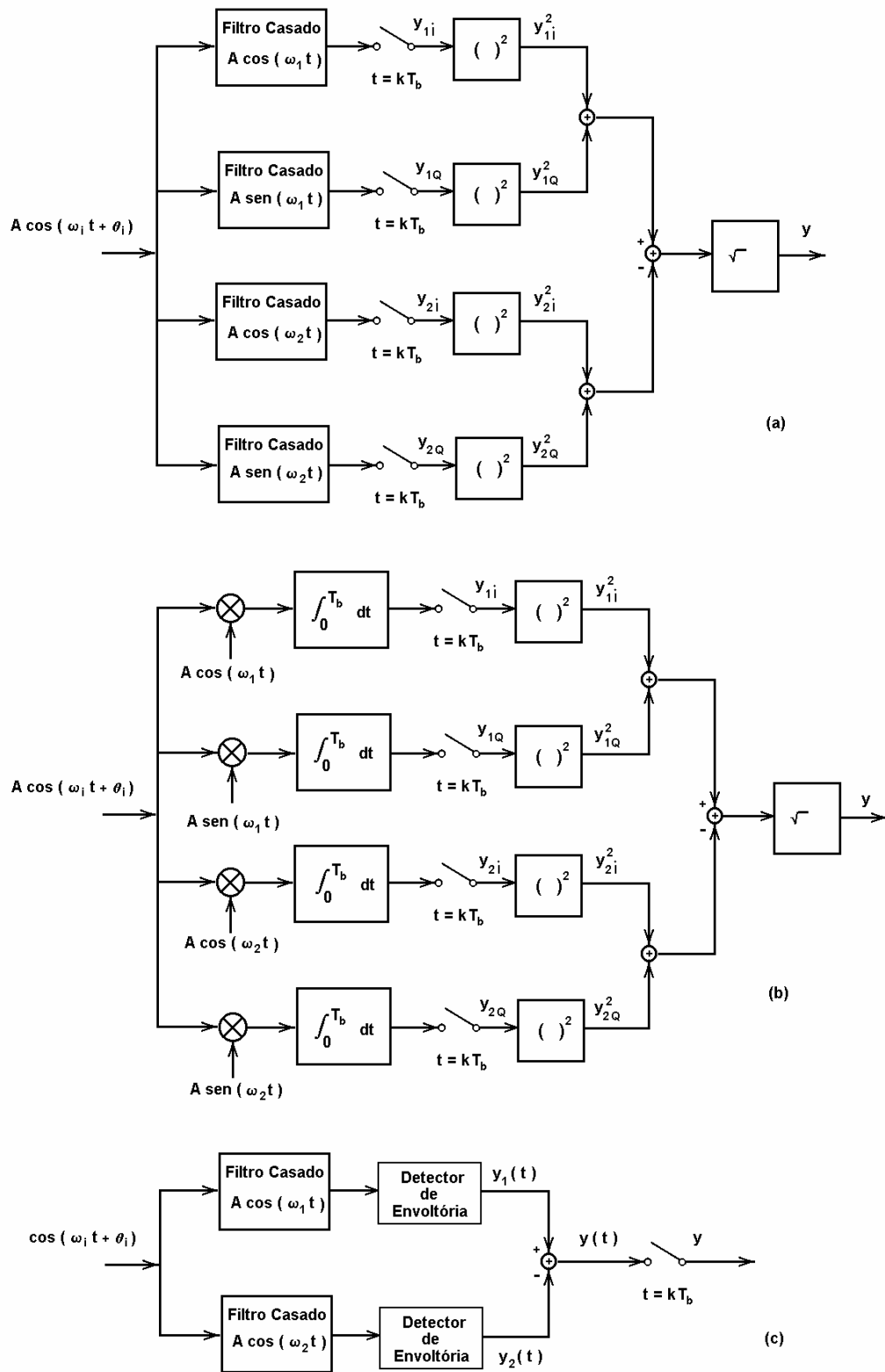


Figura 7 Demodulador FSK não coerente

- (a) Receptor em quadratura usando filtro casado
- (b) Receptor em quadratura usando correlador
- (c) Receptor em quadratura usando filtro casado e detector de envoltória