Equivalente Banda Base
Prof Waldecir Perrella 2003

Nesta seção analisa-se a classe de sinais conhecidos como banda passante ou banda estreita (*Bandpass or Narrowband*) e o processamento para se obter o equivalente banda base complexo (*complex baseband equivalent*).

O conceito de sinais banda passante é uma generalização de sinais monocromáticos. Considerando um sinal $x(t)$e sua correspondente transformada de Fourier $X(f)$, define-se como sinal faixa estreita ou banda passante quando $X(f)$ é não zero para freqüências próximas de uma freqüência . f_0. Matematicamente pode-se escrever:

$$X(f)=0 \text{ para } |f-f_0|\geq W \text{ e } f_0>W \qquad 1$$

onde W é a largura de faixa de $x(t)$. Na Fig. 1ilustra-se o espectro de um sinal passa banda.

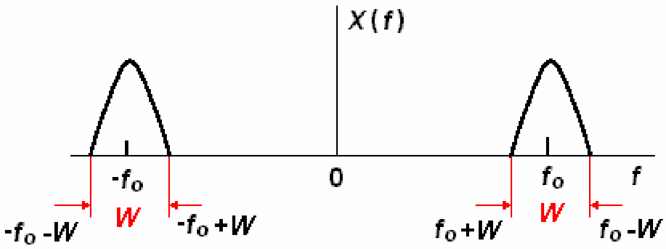

Fig. 1 Espectro de um sinal passa banda.

Pode-se estender o conceito de sinais banda passante para sistemas ou filtros passa banda, como sendo os sistemas que permite a passagem das componentes espectrais nas vizinhanças da freqüência f_0, isto é:

$$H(f)=1 \text{ para } |f-f_0|\leq W \qquad 2$$

onde $H(f)$ é a função de transferência do sistema. Por outro lado, pode-se dizer que um sistema banda passante é aquele cuja resposta impulsiva $h(t)$ é um sinal banda passante.

Os sinais modulados, usados para a transmissão de informação, são exemplos de sinais passa banda e os canais de transmissão sem fio são exemplos sistemas passa banda.

Nesta seção considera-se que o sinal passa banda $x(t)$ é um sinal real (físico). Para introduzir o conceito de sinal equivalente banda base complexo é conveniente utilizar as ferramentas usadas para analisar sistemas ou filtros cuja entrada é um sinal senoidal. Um sinal senoidal ou monocromático é um sinal passa banda com $W=0$.

Considere um sinal monocromático $x(t)$ com freqüência f_0 e fase θ_0 pode-se escrevê-lo tanto na forma co-senoidal como na forma exponencial complexa, como mostra a equação (3):

$$x(t)=A\cos(2\pi f_o t+\theta_0)=\frac{A}{2}\left(e^{j(2\pi f_o t+\theta_0)}+e^{-j(2\pi f_o t+\theta_0)}\right) \qquad 3$$

A análise de circuitos lineares, quando na entrada tem-se sinais desse tipo é conveniente introduzir o conceito de *fasor*. Assim considere e sinal $x(t)$ na entrada e o seu correspondente fasor X:

$$X = Ae^{j\theta_0} \qquad 4$$

Observa-se que o fasor contém as informações de amplitude e de fase do sinal mas não contém nenhuma informação sobre a freqüência.

Considere, agora, um sistema linear com função de transferência representada por:

$$H(f) = |H(f)|e^{j[fase\,H(f)]} \qquad 3$$

Para achar a saída, $y(t)$, do sistema linear para uma entrada senoidal é suficiente multiplicar o fasor de entrada pelo valor da função de transferência calculada na freqüência f_0. Com o fasor de saída Y obtêm-se o sinal de saída observando que a freqüência de saída é igual à de entrada, isto é:

$$\begin{aligned} Y &= H(f_0)X = |H(f_0)|\,e^{j[fase\,H(f_0)]}\,Ae^{j\theta_0} = |H(f_0)|\,Ae^{j[fase\,H(f_0)+\theta_0]} \\ y(t) &= |H(f_0)|\,A\cos(2\pi\, f_0\, t + fase\,H(f_0) + \theta_0) \end{aligned} \qquad 4$$

A seguir é tem-se uma maneira sistemática para se obter o fasor. Incialmente introduz-se o sinal $z(t)$ que é dado por:

$$z(t) = Ae^{j(2\pi\, f_0\, t+\theta_0)} = Ae^{j\theta_0}e^{j(2\pi\, f_0\, t)} = A\cos(2\pi\, f_0\, t+\theta_0) + j\,A\mathrm{sen}(2\pi\, f_0\, t+\theta_0) = x(t) + jx_q(t) \qquad 5$$

onde $x_q(t)$ é chamado sinal em quadratura.

Na Fig. 2 observa-se que o sinal $z(t)$ representa um vetor, com amplitude A e fase inicial θ_0, girando no sentido anti-horário com uma freqüência angular $\omega_0 = 2\pi f_0$ rd/s.

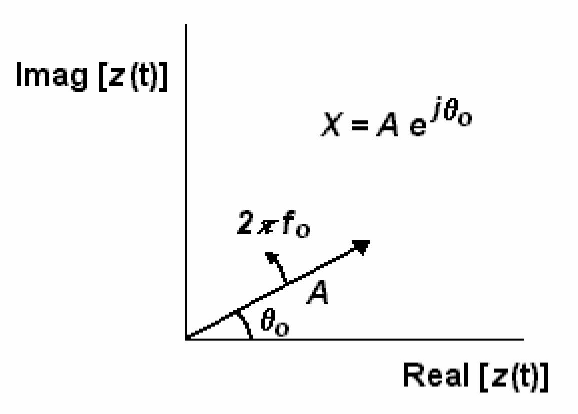

Fig. 2 Representação gráfica do sinal $z(t)$

O fasor X pode ser obtido de $z(t)$ eliminando-se a rotação de $2\pi f_0$ ou equivalentemente girando-se o vetor $z(t)$ na direção oposta que corresponde a multiplicar $z(t)$ por $e^{-j2\pi f_0 t}$. Assim, o fasor X resulta:

$$X = z(t)e^{-j2\pi f_0 t} \qquad 6$$

Os espectros de $z(t)$ e do fasor X são obtidos aplicando-se a transformada de Fourier e resulta em impulsos com áreas A e fase θ_0 sendo que a única diferença é que o espectro do fasor está centrado na freqüência zero e o de $z(t)$ está centrado em f_0. Na Fig. 3 tem-se que o espectro de X e $z(t)$ onde se observa que o espectro do fasor X corresponde a um deslocamento do espectro de $z(t)$ para a esquerda.

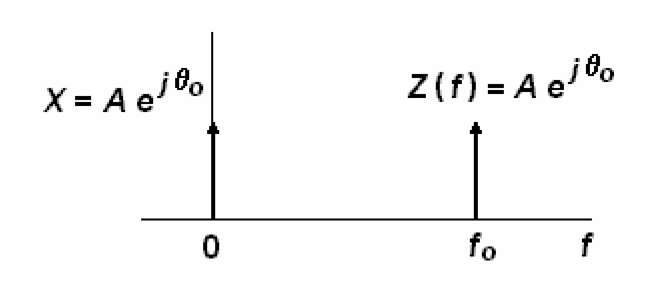

Fig. 3 Espectro de $z(t)$ e X

Resta agora determinar $z(t)$ a partir de $x(t)$. Para isso é necessário observar-se o espectro do sinal $x(t)$ que é mostrado na Fig. 4.

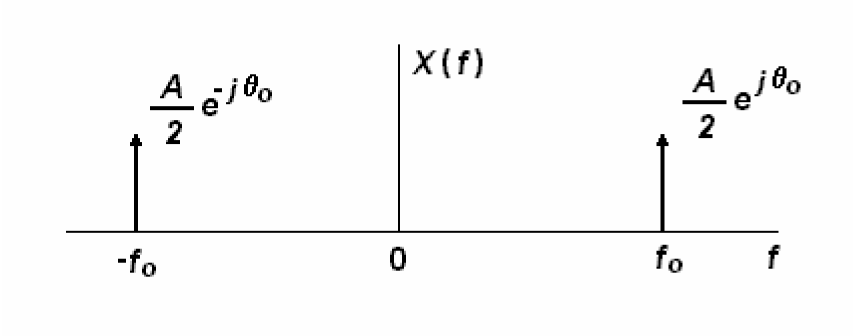

Fig. 4 Espectro de $x(t)$

Observando as Figura 3 e 4 tem-se que o espectro de $z(t)$ pode ser obtido do espectro de $x(t)$ utilizando-se um filtro que só deixa passar as freqüências positivas e tenha um ganho igual a 2, como mostra a Fig. 5.

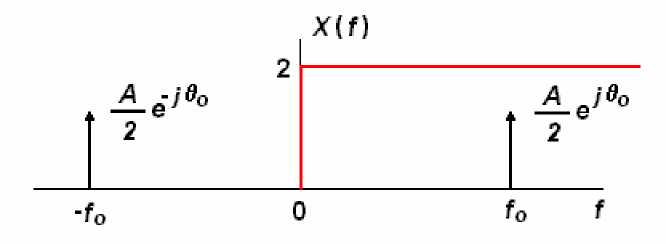

Fig. 5 Filtro para obtenção de $z(t)$ a partir de $x(t)$

Para generalizar o procedimento para sinais faixa estreita (*"narrow band"*), obtêm-se inicialmente o sinal $z(t)$ usando-se a relação:

$$Z(f) = 2U(f)X(f) \tag{7}$$

onde $z(t)$, que é a transformada de Fourier inversa de $Z(f)$, é chamado de sinal analítico ou pré envoltória de $x(t)$. Para obter $z(t)$ utiliza-se, inicialmente o seguinte par de Transformada de Fourier:

$$\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{j}{2\pi t}\Leftrightarrow U(f) \tag{8}$$

Como, no domínio da freqüência, tem-se produto um produto, no domínio do tempo tem-se convolução, assim:

$$\begin{aligned} z(t) &= 2\left(\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{j}{2\pi t}\right)*x(t) \\ &= x(t)+\frac{j}{\pi t}*x(t)= \\ &= x(t)+j\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{9}$$

onde $\hat{x}(t)$ é a transformada de Hilbert que é definida por:

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{\pi t}*x(t) \tag{10}$$

Como ilustração compara-se $z(t)$ obtido pela equação (9) com o $z(t)$ obtido pela equação (5) que corresponde a um sinal monocromático reproduzida abaixo:

$$z(t)=A\ \cos(2\pi f_0 t+\theta_0)+j\ \sin(2\pi f_0 t+\theta_0)=x(t)+j\hat{x}(t) \tag{11}$$

A transforma de Hilbert pode ser vista como um filtro que apresenta uma resposta impulsiva dada por:

$$\hat{h}(t)=\frac{1}{\pi t} \tag{12}$$

A função de transferência do filtro é dada pela transformada de Fourier que resulta:

$$\hat{H}(f)=TF\left[\hat{h}(t)\right]=-j\,\mathrm{sgn}(f) \tag{13}$$

Reescrevendo $\hat{H}(f)$ tem-se:

$$\hat{H}(f)=-j\,\mathrm{sgn}(f)=\begin{cases}-j & f>0\\ 0 & f=0\\ j & f<0\end{cases}=\begin{cases}e^{-j\pi/2} & f>0\\ 0 & f=0\\ e^{j\pi/2} & f<0\end{cases}=\begin{cases}e^{-j\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(f)} & f\neq 0\\ 0 & f=0\end{cases} \tag{14}$$

O módulo e a fase de $\hat{H}(f)$ é mostrado na Fig. 6.

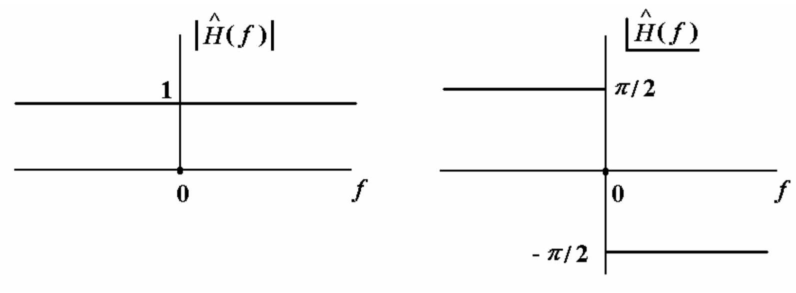

Fig 6 Função de transferência do filtro de Hilbert.

O procedimento usado para sinais monocromático pode ser generalizado para a obtenção do fasor equivalente, variável no tempo, para sinais banda passante que será chamado sinal banda base equivalente complexo e é representado por $x_l(t)$, onde o índice *l* significa que o sinal apresenta um espectro com componentes próxima de zero, isto é, freqüência baixas.

O sinal, $x_l(t)$, banda base equivalente de um sinal, $x(t)$, banda passante é obtido por meio dos seguintes etapas:

1. Usando-se a equação (7) obtêm-se o sinal analítico $Z(f)$ no domínio da freqüência.
2. A translação para banda base é obtida multiplicando-se o sinal analítico pela exponencial $e^{-j2\pi f_o t}$, onde f_0 é uma freqüência qualquer de interesse.

No domínio do tempo, $x_l(t)$ é obtido pela etapa 2 descrita acima e pode ser escrita por:

$$x_l(t) = z(t)e^{-j2\pi f_0 t} \qquad 15$$

Multiplicação de um sinal no domínio do tempo por $e^{-j2\pi f_0 t}$, implica numa translação em freqüência do espectro do sinal para a esquerda, resultando na seguinte equação:

$$X_l(f) = Z(f + f_0) = 2U(f + f_0)X(f + f_0) \qquad 16$$

Resumindo, o procedimento para a obtenção de $x_l(t)$ é esquematizado na Fig 7. e na Fig. 8 tem-se uma ilustração do efeito no domínio da freqüência.

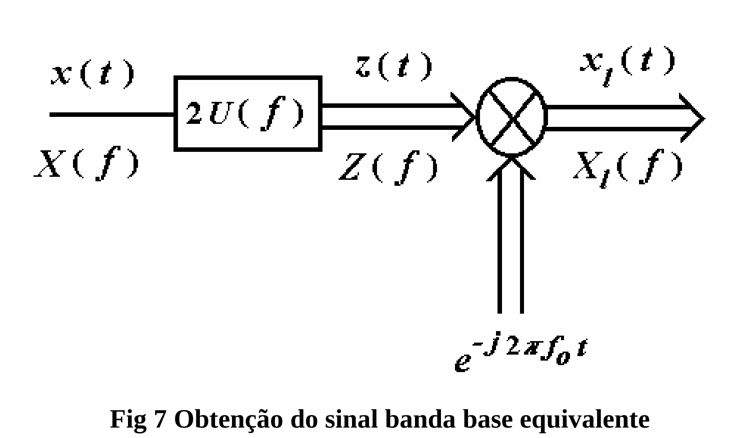

Fig 7 Obtenção do sinal banda base equivalente

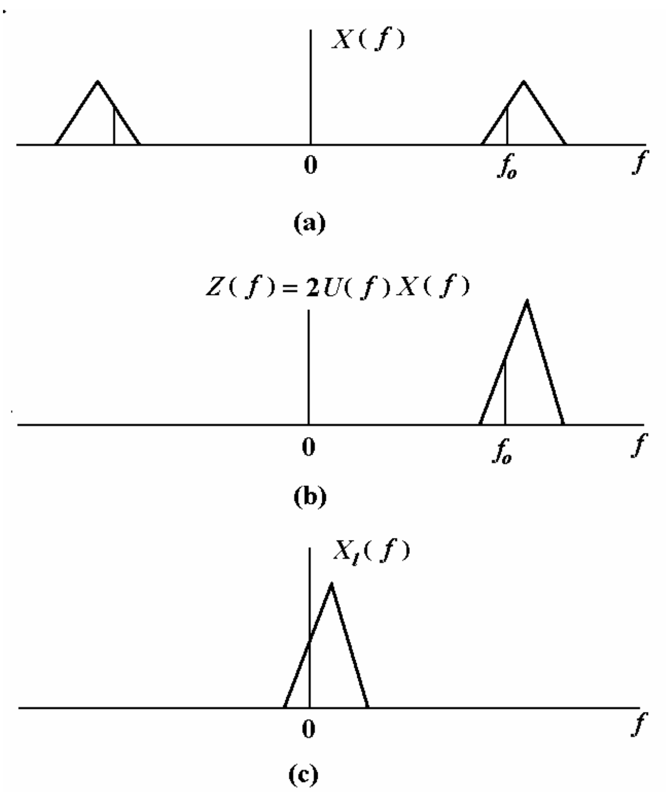

Fig. 8 Obtenção do equivalente banda base no domínio da freqüência.

(a) *X(f)* espectro do sinal banda passante
(b) *Z(f)* espectro do sinal analítico
(c) *X*$_l$*(f)* espectro do sinal banda base equivalente

Em geral $x_l(t)$ é um sinal complexo e assim pode-se representá-lo como sendo composto por duas componentes que são denominadas componentes em fase e em quadratura, como mostra a equação:

$$x_l(t) = x_I(t) + j\,x_Q(t) \qquad 17$$

Pode-se observar que o sinal $x_l(t)$ é um fasor lentamente variável no tempo pois seu espectro contém freqüências baixas. Assim, pode-se definir o módulo ou envoltória, $v(t)$ e fase, $\theta(t)$, respectivamente, por:

$$v(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)} \qquad 18$$

$$\theta(t) = arc\,\tan\left(\frac{x_I(t)}{x_Q(t)}\right) \qquad 19$$

Desta forma pode-se escrever:

$$x_l(t) = v(t)e^{j\,\theta(t)} = v(t)\cos[\theta(t)] + j\,v(t)\mathrm{sen}[\theta(t)] \qquad 20$$

Observando a equação (20) tem-se que ela corresponde ao fasor $X = Ae^{j\theta_0}$ com a única diferença que $v(t)$ e $\theta(t)$ variam lentamente com o tempo. Na Fig. 9 tem-se uma ilustração do sinal $x_l(t)$.

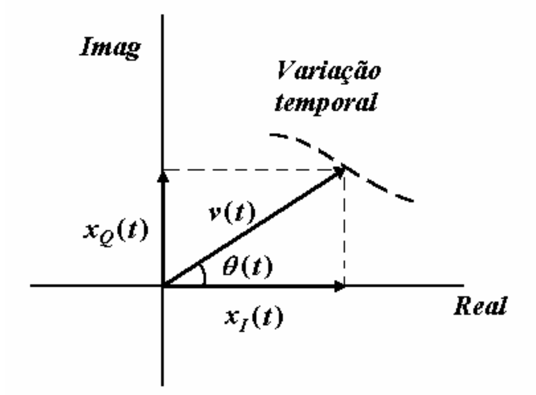

Fig 9 Representação fasorial de $x_l(t)$

Agora, o objetivo é escrever o sinal passa banda $x(t)$ em termos do sinal banda base equivalente $x_l(t)$ e suas componentes em fase e em quadratura, $x_I(t)$ e $x_Q(t)$. Para isso, reescreve-se as equações (9), (15) e (17):

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \qquad 9 \qquad x_l(t) = z(t)e^{-j2\pi f_0 t} \qquad 15 \qquad x_l(t) = x_I(t) + j\,x_Q(t) \qquad 17$$

Por meio da equação (15) tem-se que $z(t)$ pode ser obtido multiplicando-se $x_l(t)$ por $e^{j2\pi f_0 t}$, que corresponde ao deslocamento, para a direita, do espectro de $x_l(t)$ e em torno de f_0 resultando na expressão:

$$z(t) = x_l(t)e^{j2\pi f_0 t} \qquad 21$$

Substituindo $x_l(t)$ dado pela equação (17) na equação (21) tem-se:

$$\begin{aligned} z(t) &= x_l(t)e^{j2\pi f_0 t} = \left[x_I(t) + jx_Q(t)\right] \quad \left[\cos(2\pi f_0 t) + j\,\text{sen}(2\pi f_0 t)\right] = \\ &= \left[x_I(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_Q(t)\,\text{sen}(2\pi f_0 t)\right] + j\left[x_I(t)\,\text{sen}(2\pi f_0 t) + x_Q(t)\cos(2\pi f_0 t)\right] \end{aligned} \qquad 22$$

Finalmente, identificando-se as componentes das equações (9) e (22) tem-se:

$$x(t) = \text{Re}\left[z(t)\right] = \text{Re}\left[x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = \left[x_I(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_Q(t)\,\text{sen}(2\pi f_0 t)\right] \qquad 23$$

$$\hat{x}(t) = \text{Im}\left[z(t)\right] = \text{Im}\left[x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = \left[x_I(t)\,\text{sen}(2\pi f_0 t) + x_Q(t)\cos(2\pi f_0 t)\right] \qquad 24$$

Resumindo, o procedimento para a obtenção de $x(t)$ a partir de $x_l(t)$ é esquematizado na Fig 10. e na Fig. 11 tem-se uma ilustração do efeito no domínio da freqüência.

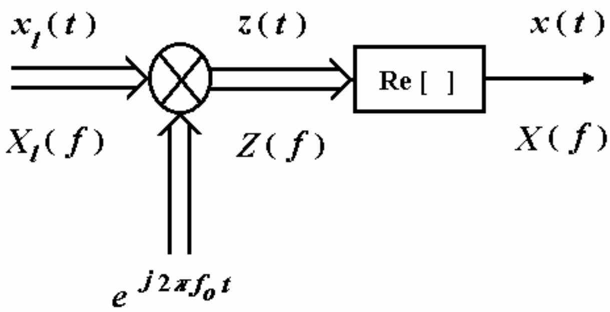

Fig 10 Obtenção do sinal banda passante a partir do sinal banda base equivalente

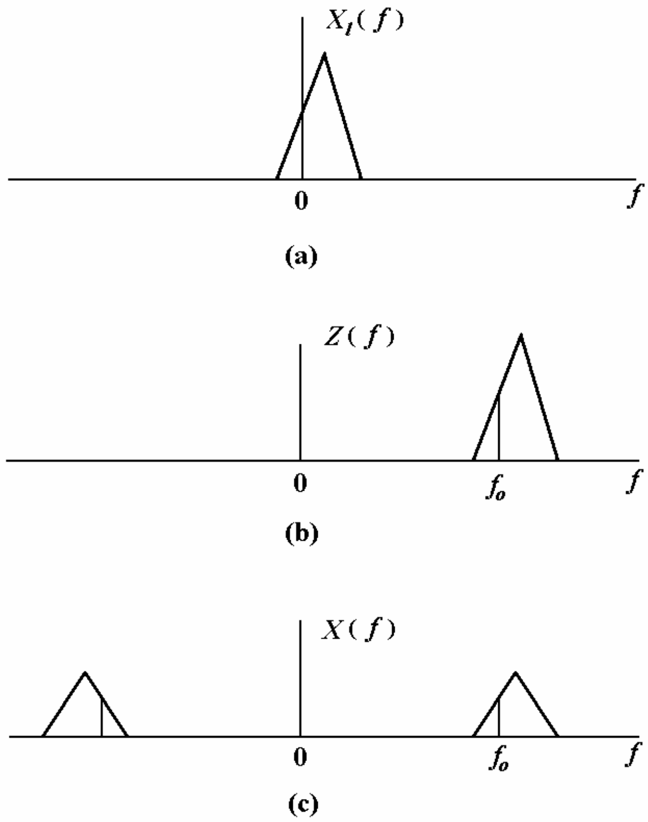

Fig. 11 Obtenção do sinal banda passante no domínio da freqüência.

(a) ***$X_l(f)$*** **espectro do sinal banda base equivalente**

(b) ***$Z(f)$*** **espectro do sinal analítico**

(c) ***$X(f)$*** **espectro do sinal banda passante**

Semelhante, pode-se expressar o sinal passa banda $x(t)$ em termos das componentes $v(t)$ e $\theta(t)$ do sinal banda base equivalente $x_l(t)$. Assim, substituindo $x_l(t)$, dado pela equação (20), na equação (21) tem-se:

$$\begin{aligned} z(t) &= x_l(t)e^{j2\pi f_0 t} = v(t)e^{j\theta(t)}\, e^{j2\pi f_0 t} = v(t)e^{j[2\pi f_0 t + \theta(t)]} = \\ &= v(t)\cos[2\pi\, f_0\, t + \theta(t)] + j\, v(t)\mathrm{sen}[2\pi\, f_0\, t + \theta(t)] \end{aligned} \qquad 25$$

Finalmente, identificando-se as componentes das equações (9) e (25) tem-se:

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[z(t)\right] = \mathrm{Re}\left[x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = v(t)\cos\left[2\pi f_0 t + \theta(t)\right] \qquad 26$$

$$\hat{x}(t) = \mathrm{Im}\left[z(t)\right] = \mathrm{Im}\left[x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = v(t)\,\mathrm{sen}\left[2\pi f_0 t + \theta(t)\right] \quad 27$$

Pode-se estender a representação de sinais banda passante para filtros banda passante e desta forma pode-se obter o equivalente banda base correspondente a transmissão de sinais banda passante em sistemas banda passante.

Considere os sinais e sistemas passa banda de acordo com a Fig 12, onde $x(t)$ é o sinal de entrada, $h(t)$ é a resposta impulsiva do filtro e $y(t)$ é o sinal de saída.

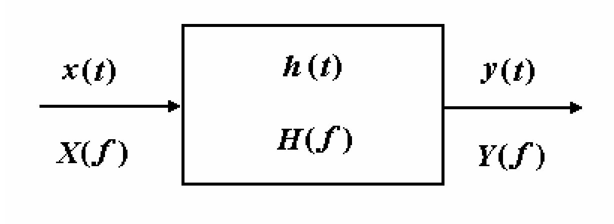

Fig 12 Transmissão de sinais banda passante

No domínio da freqüência a saída é dada por:

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad 28$$

Usando a equação (16) podem-se escrever os sinais banda base equivalentes dos sinais banda passantes acima:

$$X_l(f) = 2U(f + f_0)X(f + f_0) \quad 29$$

$$H_l(f) = 2U(f + f_0)H(f + f_0) \quad 30$$

$$Y_l(f) = 2U(f + f_0)X(f + f_0)X(f + f_0) \quad 31$$

Obtêm-se o equivalente banda base da saída substituindo-se a equação (28) na equação (31):

$$Y_l(f) = 2U(f + f_0)X(f + f_0)H(f + f_0) \quad 32$$

Notando que $U^2(f) = U(f)$, tem-se o seguinte resultado quando se multiplica as equações (29) e (30):

$$X_l(f)H_l(f) = 4U(f + f_0)X(f + f_0)H(f + f_0) \quad 33$$

Substituindo o lado direito da equação (33) na equação (31) tem-se:

$$Y_l(f) = \frac{1}{2}X_l(f)H_l(f) \quad 34$$

No domínio do tempo a equação (34) representa a convolução complexa entre a entrada e a resposta impulsiva:

$$y_l(t) = \frac{1}{2}x_l(t) * h_l(t) \quad 35$$

Na Fig. 13 tem-se a transmissão de sinais banda base equivalentes.

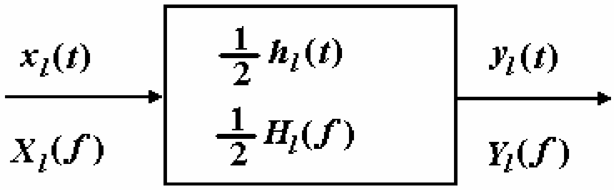

Fig 13 Transmissão de sinais banda base equivalentes.

Representando os sinais e filtros, por meio das componentes em fase e em quadratura, a convolução complexa em banda base resulta:

$$\begin{aligned} y_l(t) &= \frac{1}{2}\left[x_{lI}(t) + j\, x_{lQ}(t)\right] * \left[h_{lI}(t) + j\, h_{lQ}(t)\right] = \\ &= \left[x_{lI}(t) * \frac{1}{2} h_{lI}(t) - x_{lQ}(t) * \frac{1}{2} h_{lQ}(t) \right] + j \left[x_{lI}(t) * \frac{1}{2} h_{lQ}(t) + x_{lQ}(t) * \frac{1}{2} h_{lI}(t) \right] \end{aligned} \qquad 36$$

Aplicações de equivalente banda base ou envoltória complexa

Modulação

Modulação é o processo de codificar a fonte de informação $m(t)$ (sinal modulador) em um sinal banda passante $s(t)$ (sinal modulado). Conseqüentemente, o sinal modulado é apenas uma aplicação especial da representação em banda passante. O sinal modulado é dado por:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[g(t) e^{j2\pi f_c t} \right] = x(t)\cos(2\pi f_c t) + jy(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t) = v(t) e^{j\ 2\pi f_c t + \theta(t)} \qquad 37$$

Onde: f_c é a freqüência da portadora e a envoltória complexa, $g(t)$, é uma função de $m(t)$ que pode ser representada na forma cartesiana ou polar como, respectivamente:

$$g(t) = x(t) + j\, y(t) = v(t) e^{j\theta(t)} \qquad 38$$

Assim, $g[\bullet]$ realiza uma operação de mapeamento em $m(t)$. Isto é mostrado na Tabela 1.

A Tabela 1 mostra exemplos da função mapeadora $g[m(t)]$, tanto para as principais modulações analógicas.

Tabela 1 Funções para o equivalente banda base para vários tipos de modulação analógicas.

Modulação	$g[m(t)]$	$x(t)$	$y(t)$	$v(t)$	$\theta(t)$	**Obs**
AM	$A[1+m(t)]$	$A[1+m(t)]$	0	$A[1+m(t)]$	$\begin{cases} 0 & m(t)>-1 \\ \pi & m(t)<-1 \end{cases}$	$m(t)>-1$ para detecção por envoltória
DSB SC	$Am(t)$	$Am(t)$	0	$A\lvert m(t)\rvert$	$\begin{cases} 0 & m(t)>0 \\ \pi & m(t)<0 \end{cases}$	Requer detecção coerente
PM	$Ae^{j D_p m(t)}$	$A\cos(D_p m(t))$	$A\text{sen}(D_p m(t))$	A	$D_p m(t)$	D_p desvio de fase cte [rad/volt]
FM	$Ae^{j D_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau}$	$A\cos\left(D_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau\right)$	$A\text{sen}\left(D_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau\right)$	A	$D_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau$	D_f desvio de freq. cte [rad/volt-seg]
QAM	$A[m_1(t)+jm_2(t)]$	$Am_1(t)$	$Am_2(t)$	$A\sqrt{m_1^2(t)+m_2^2(t)}$	$tg^{-1}\left[\frac{m_2(t)}{m_1(t)}\right]$	Requer detecção coerente

No caso de modulações digitais a função $g[\bullet]$ mapeia a informação $m(t)$, que agora corresponde ao valor de dados de um símbolo que é transportado na amplitude, fase ou freqüência de um pulso $p(t)$. O pulso $p(t)$, já visto anteriormente, pode ser limitado no tempo, (NRZ, RZ, Manchester) ou limitado em freqüência, (Pulsos de Nyquist).

O método de transmissão mais utilizado nos sistemas de comunicações é o que emprega o mesmo pulso $p(t)$ para todos os símbolos. O valor do símbolo para o *m-ésimo* pulso é transportado na sua amplitude, designada a_m. O sinal em banda base formado por uma seqüência destes pulsos é chamado de *Pulsos Modulados em Amplitude* (*PAM*) e pode ser representado por:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m \, p(t - mT) \qquad 39$$

onde $\boldsymbol{a_m}$ é um valor discreto de um alfabeto finito de $\boldsymbol{M}$ caracteres.

No caso de sinais modulados $x(t)$ representa o equivalente banda base ou equivalente complexo. Quando se utiliza dois sinais, $x(t)$ e $y(t)$, obtêm-se a modulação QAM, onde $x(t)$ é a componente em fase e $y(t)$ é a componente em quadratura e a função mapeadora $g(t)$ para a envoltória complexa é dada por:

$$g(t) = x(t) + j\,y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m \, p(t - mT) + \sum_{-\infty}^{\infty} b_m \, p(t - mT) \qquad 40$$

A Tabela 2 mostra os principais tipos de modulações:

Tabela 1 Funções para o equivalente banda base para vários tipos de modulação analógicas.

Modulação	$x(t)$	$y(t)$	$v(t)$	$\theta(t)$	Alfabeto
ASK	$\sum_{-\infty}^{\infty} a_m\, p(t-mT)$	0			$a_m = \{1,3,5,\cdots,2M+1\}$
QAM	$\sum_{-\infty}^{\infty} a_m\, p(t-mT)$	$\sum_{-\infty}^{\infty} b_m\, p(t-mT)0$			$a_m = \{1,3,5,\cdots,2M+1\}$ $b_m = \{1,3,5,\cdots,2M+1\}$
PSK			$A\sum_{-\infty}^{\infty} p(t-mT)$	$e^{j\frac{\pi a_m}{M}}$	$a_m = \{\pm1,\pm3,\pm5,\cdots,2M+1\}$