

# PULSOS PAM BANDA BASE

Waldecir João Perrella ITA, 2005

## 1.Introdução

O modelamento de sinais e processos aleatórios analógicos constitui grande parte da simulação da transmissão de sinais.

Embora os MODEMS atuais sejam implementados por métodos digitais ao invés de analógicos, a representação de sinais e processos digitais será analisada após os processos analógicos serem analisados.

Os sinais podem ser caracterizados como banda base e banda passante.

## 2.Representações de sinais banda base

Um símbolo de dados é uma representação de um único número escolhido de um alfabeto finito de números. Símbolos são transmitidos em seqüência. Associado com cada símbolo na seqüência tem-se uma forma de onda que é utilizada para a transmissão daquele símbolo. Embora os símbolos de dados têm valores numéricos discretos (digitais), os sinais transmitidos são formas de ondas contínuas no tempo e amplitude (analógico). A forma de onda usada para representar um símbolo é um pulso.

Para o  $m$ -ésimo pulso de uma seqüência existe um pulso cuja forma de onda é denotada por  $g_m(t)$ , onde  $t$  representa o tempo. A informação do símbolo é transportada por meio de algum parâmetro reconhecível do pulso. Os parâmetros típicos normalmente usados são:

- Amplitude do pulso
- Posição do pulso
- Largura do pulso
- Forma de onda do pulso
- Frequência do pulso (sub classe de forma de onda)
- Fase do pulso (mais aplicável a sinais banda passante)

A transmissão é suposta ser síncrona, isto é, os pulsos são transmitidos em intervalos de tempo uniformes  $T$ . Um sinal banda base pode ser representado como uma soma de pulsos deslocados no tempo:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(t - mT) \quad (2.1)$$

Na equação (2.1) tem-se um número infinito de pulsos, mas em sinais físicos tem-se sempre um número finito.

### 2.1.1 Sinais limitados no tempo versus sinais limitados em frequência

Um pulso é dito limitado no tempo se sua forma de onda é zero fora de um intervalo de tempo finito:

$$g_m(t) \equiv 0 \quad t \notin [t_1, t_2] \quad (2.2)$$

Onde a duração do pulso é  $t_2 - t_1$ .

A transformada de Fourier de  $g_m(t)$  é dada por:

$$G_m(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g_m(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.3)$$

Podemos observar que a transformada de Fourier existe para qualquer pulso de interesse prático.

Um sinal banda base é dito limitado em banda se sua transformada de Fourier é zero fora de um intervalo de frequência finito:

$$G_m(f) \equiv 0 \quad |f| > B \quad (2.4)$$

O espectro de um pulso limitado no tempo só é zero em algumas frequências discretas. Podemos, também observar que um pulso, fisicamente realizável, não pode ser limitado no tempo ou em frequência. Nenhum pulso, mesmo até o ideal, pode ser limitado no tempo e em frequência.

Quando os pulsos não forem estritamente limitados a uma duração menor ou igual a  $T$ , haverá uma superposição entre os pulsos adjacentes. Essa superposição pode interferir na detecção dos pulsos para os símbolos individuais. Na comunidade de comunicação esta superposição é conhecida como *interferência entre símbolos* IES ou “*intersymbol interference*” ISI. Na comunidade de gravação magnética, é conhecida como “*Pulse crowding*”. Este tipo de interferência é inevitável em sistemas limitados em frequência.

### 2.1.2. Pulsos Modulados em Amplitude PAM.

O valor dos dados de cada símbolo pode ser transportado na amplitude de um pulso. Este método é um dos mais utilizados em comunicação e por isso será dada uma atenção bem maior neste trabalho.

O sinal de um pulso modulado em amplitude (PAM) emprega a mesma forma de onda para todos os símbolos, que é designada como  $g(t)$ . O valor do símbolo para o  $m$ -ésimo pulso é transportado pela sua amplitude, designada  $a_m$ . Um sinal PAM em banda base é representado como:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m g(t - mT) \quad (2.5)$$

Onde  $a_m$  é um valor discreto tomado de um alfabeto de  $M$  caracteres.

A Figura 2.1 mostra alguns exemplos destes pulsos. Os pulsos mostrados nas linhas (a) e (b) são retangulares e não se sobrepõem pois são limitados no tempo. Pulsos aproximadamente retangulares requerem uma grande largura de faixa para preservarem as suas transições abruptas.

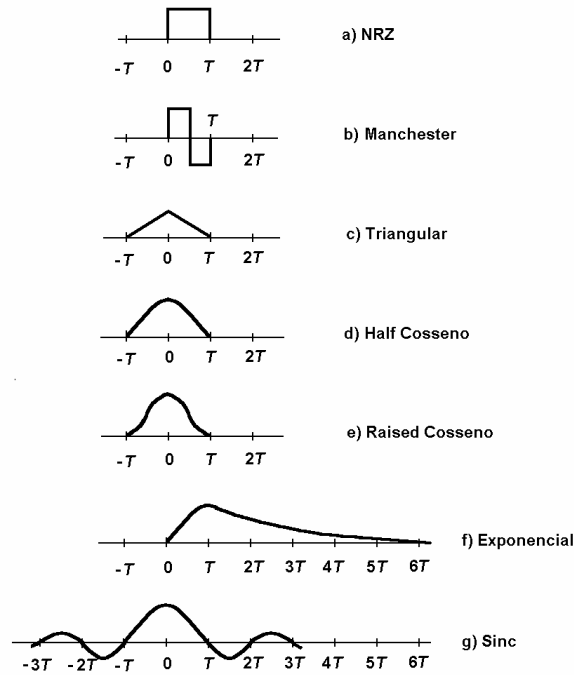


Figura 2.1 Exemplos de formatos de pulsos.

Nas linhas (c), (d) e (e) têm pulsos com duração finita igual a  $2T$ . Pulsos adjacentes a estes formatos e espaçados de  $T$ , podem se sobrepor, mas, será mostrado a seguir, que eles não apresentam IES. O pulso mostrado na linha (d) é associado com a modulação conhecida como MSK (*Minimum Shift Keying*). O pulso com formato *raised co-seno*, mostrado na linha (e), é típico em sistemas com moderada restrição em largura de faixa.

Na linha (f) tem-se o pulso com formato exponencial e duração semi-infinita. Devido a isso ele irá interferir em todos os pulsos sucessores. Este tipo de sinal, que decai com características quase exponencial, é típico em sistemas com restrição em largura de faixa. Nestes casos, é necessário realizar-se uma pré-correção, conhecida com equalização.

A linha (g) da Figura 2.1 mostra um pulso *sinc*, dado por:

$$\text{sinc}(t/T) = \frac{\text{sen}(\pi t/T)}{\pi t/T} \quad (2.6)$$

Este pulso é infinito em ambas as direções. Ele é estritamente limitado em largura de faixa e apresenta a característica de passar por zero em intervalos espaçados de  $T$ . Também apresenta a propriedade de não apresentar IES, apesar de sobreposição de pulsos adjacentes. Este pulso, embora não realizável, tem importância teórica.

Alguns pulsos na Figura 2.1 são mostrados como iniciando no instante de tempo  $t=0$ , e são zero para  $t < 0$ . Eles são chamados pulsos causais. Todos os pulsos físicos são causais. Os outros pulsos que inicial antes de  $t=0$  são chamados não causais. Embora os pulsos físicos são sempre causais, os pulsos não causais, podem se tornar causais aplicando um atraso, por exemplo se um sinal é zero para todo  $t \leq -t_0$  (onde  $t_0$  é positivo) então o sinal será causal se dermos um atraso de  $t_0$ . Se o sinal se estende a  $t = -\infty$ , então nenhum atraso finito pode torná-lo causal.

## Espectro do pulso

A representação da forma de onda  $g(t)$ , descreve o pulso no domínio do tempo e a representação  $G(f)$  contém a mesma informação sobre o pulso mas no domínio da frequência. Estas duas representações formam um par de transformada de Fourier:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df \Leftrightarrow G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.7)$$

Exemplos dos formatos dos pulsos estão listados na Tabela 2.1 e suas respectivas transformadas de Fourier.

Tabela 2.1 Exemplos de formatos de pulsos e espectros.

Nome do pulso	$g(t)$	$G(f)$
NRZ	$= A \quad 0 < t < T$ $= 0 \quad \text{fora}$	$A T e^{-j\pi f T} \frac{\text{sen}(\pi f T)}{\pi f T}$
Manchester	$= A \quad 0 < t < T/2$ $= 0 \quad T/2 < t < T$ $= 0 \quad \text{fora}$	$j A T e^{-j\pi f T} \frac{\text{sen}^2(\pi f T/2)}{\pi f T/2}$
Triangular	$= A[1 -  t /T] \quad  t  < T$ $= 0 \quad  t  > T$	$A T \left( \frac{\text{sen}(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2$
Half co-seno	$= A \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \quad  t  < T$ $= 0 \quad  t  > T$	$A \left[ \frac{\pi T}{(\pi/2)^2 - (2\pi f T)^2} \right] \cos(2\pi f T)$
Raised co-seno	$= A \cos^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \quad  t  < T$ $= 0 \quad  t  > T$	$A \left[ \frac{\pi^2 T}{\pi^2 - (2\pi f T)^2} \right] \frac{\text{sen}(2\pi f T)}{2\pi f T}$
Exponencial	$= A \frac{e}{T} e^{-t/T} \quad t > 0$ $= 0 \quad t < 0$	$\frac{A e T}{(1 + j2\pi f T)^2}$
Sinc	$A \frac{\text{sen}(\pi t/T)}{\pi t/T}$	$= A T \quad  f  < 1/2T$ $= 0 \quad  f  > 1/2T$

Na Figura 2.2 tem-se uma comparação dos espectros dos pulsos. Como todos os pulsos são reais,  $|G(f)|$  é uma função par em função da frequência e conseqüentemente somente as frequências positivas são mostradas. Os pulsos retangulares NRZ (*Non Return to Zero*) e *Manchester* apresentam uma maior largura de faixa. O último apresenta um nulo na frequência zero, que permite a sua

transmissão em meios que bloqueiam a passagem de DC (ex., fita e discos magnéticos, cabos acoplados por transformadores), mas com a penalidade de uma maior largura de faixa.

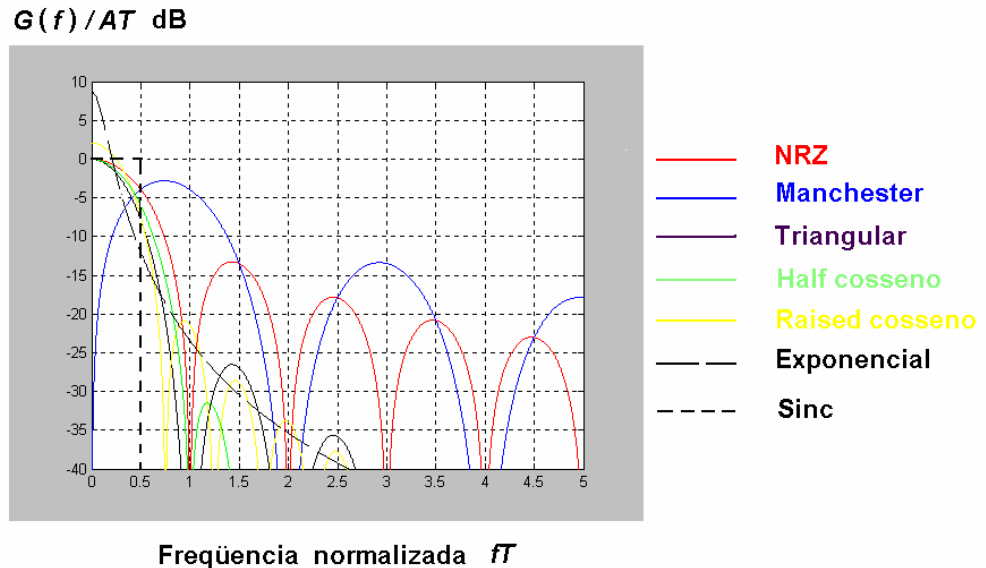


Figura 2.2 Espectro dos pulsos

### 2.1.3 Formatação de Nyquist

Dado um formato de pulso com amplitude discreta, pode-se usá-lo para transmitir dados na forma M-ária, utilizando a modulação de pulsos discretos, no qual a amplitude, duração ou a posição dos pulsos transmitidos é variada de acordo com a uma sequência de dados. Entretanto, para a transmissão em banda base de dados digitais, a maneira mais eficiente em termos de potência e largura de faixa é através da modulação de pulso em amplitude discreta PAM. Neste curso, veremos somente a comunicação de dados binária.

A transmissão com pulsos em banda base, em canais limitados em frequência, apresenta a interferência entre símbolos IES. Considere o sistema PAM binário em banda base, mostrado na Figura 2.3.

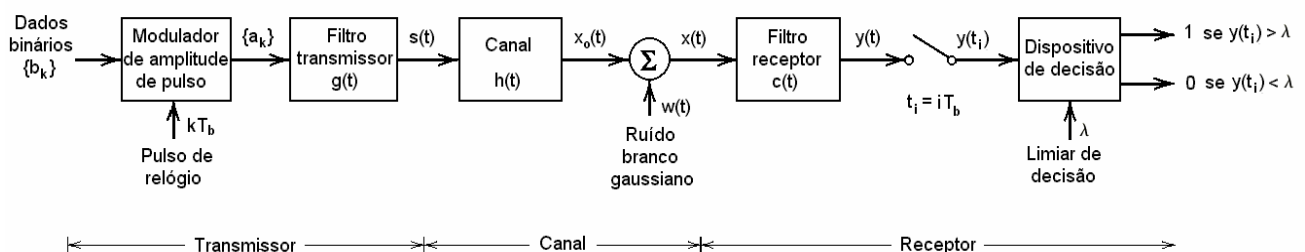


Figura 2.3 Sistema de transmissão binária em banda base

A sequência binária de entrada  $\{b_k\}$  consiste de símbolos binários 1 e 0, com duração  $T_b$ . O modulador de amplitude de pulso modifica a sequência binária em uma nova sequência de pequena duração (aproximadamente um impulso unitário), cuja amplitude  $a_k$  é dada por:

$$a_k = \begin{cases} +1 & \text{se } b_k = 1 \\ -1 & \text{se } b_k = 0 \end{cases} \quad 2.8$$

A seqüência de impulsos é aplicada do filtro transmissor, com resposta impulsiva  $g(t)$ , produzindo o sinal transmitido:

$$s(t) = \sum_k a_k g(t - kT_b) \quad 2.9$$

O sinal  $s(t)$  é modificado como resultado da transmissão através do canal com resposta impulsiva  $h(t)$ . O canal também acrescenta ruído ao sinal na entrada do receptor. O sinal ruidoso  $x(t)$  passa pelo filtro receptor com resposta impulsiva  $c(t)$ . A saída do filtro receptor,  $y(t)$ , é amostrada sincronamente com o relógio do transmissor, onde os instantes de amostragem são obtidos por relógio (clock) que também é obtido do sinal na saída do filtro receptor. Finalmente, a seqüência de amostras é usada para reconstruir a seqüência de dados originais através do dispositivo de decisão, onde cada amostra é comparada com um limiar  $\lambda$ . Quando a amostra do sinal excede o limiar  $\lambda$  decide-se pelo símbolo 1. Caso contrário decide-se pelo símbolo 0.

O sinal na saída do filtro receptor pode ser escrito como:

$$y(t) = \mu \sum_k a_k p(t - kT_b) + n(t) \quad 2.10$$

onde  $\mu$  é um fator de escala, e o pulso  $p(t)$  é obtido por uma dupla convolução envolvendo a resposta impulsiva do filtro transmissor  $g(t)$ , a resposta impulsiva  $h(t)$  do canal e a resposta impulsiva  $c(t)$  do filtro receptor, como mostrado pela equação:

$$p(t) = g(t) * h(t) * c(t) \quad 2.11$$

Considere que o pulso  $p(t)$  é normalizado tal que  $p(0) = 1$ , simplesmente para justificar o uso do fator de escala  $\mu$  que leva em consideração as mudanças de amplitude sofridas pela transmissão do sinal através do sistema. Como a convolução no domínio do tempo é transformada em multiplicação no domínio da freqüência, a equação (2.11) resulta:

$$P(f) = G(f)H(f)C(f) \quad 2.12$$

Finalmente o termo  $n(t)$  é o ruído produzido na saída do filtro receptor devido ao ruído do canal  $w(t)$  que é considerado como sendo branco e gaussiano e com média zero.

A saída do receptor é amostrada no instante de tempo  $t_i = iT_b$  e usando a normalização do  $p(t)$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
y(t_i) &= \mu \sum_k a_k p[(i-k)T_b] + n(t_i) \\
&= \mu a_i + \mu \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq i}}^{\infty} a_k p[(i-k)T_b] + n(t_i)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

onde o primeiro termo  $\mu a_i$  representa a contribuição do  $i$ -ésimo bit transmitido. O segundo termo representa o efeito residual de todos os bits transmitidos na decodificação do  $i$ -ésimo bit. Este efeito residual devido à ocorrência de pulsos antes e depois do instante de amostragem  $t_i$ , é chamado de IES. O último termo  $n(t_i)$  representa o ruído no  $i$ -ésimo instante de amostragem.

Na ausência de IES e ruído, a saída  $y(t_i) = \mu a_i$  mostra que, nesta condição ideal, o  $i$ -ésimo bit transmitido será decodificado corretamente. A presença inevitável de IES e do ruído no sistema, introduz erros no dispositivo de decisão na saída do filtro receptor. Por isso, os projetos dos filtros, transmissor e receptor, têm o objetivo de minimizar os efeitos do ruído e IES e assim entregar os dados digitais no destino com a mínima taxa de erro possível.

Quando a relação sinal ruído é alta, como no caso do sistema telefônico, a comunicação é limitada somente pela ISI. Assim, inicialmente, analisam-se as técnicas para controlar somente a ISI e posteriormente as técnicas de otimização conjunta ISI e ruído.

### **Crítério de Nyquist para transmissão binária em banda base sem distorção.**

O objetivo desta seção é encontrar uma forma onda  $p(t)$  para a qual a ISI é completamente eliminada.

Normalmente, as respostas em frequência do canal e filtro transmissor são especificadas, e o problema é determinar as respostas em frequências do filtro receptor para reconstruir a sequência de dados binários  $\{b_k\}$ . O receptor realiza esta tarefa, amostrando a saída  $y(t)$  e então decodificando a correspondente sequência de coeficientes  $\{a_k\}$ . A amostragem de  $y(t)$  ocorre nos instantes  $t = iT_b$ . A decodificação requer que a contribuição dos pulsos  $a_k p(iT_b - kT_b)$  para  $k = i$  esteja livre de ISI devido a superposição das respostas de todos os outros pulsos correspondentes a  $k \neq i$ .

Assim, isto requer que  $p(t)$  seja dado por:

$$p(iT_b - kT_b) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \tag{2.14}$$

onde  $p(0) = 1$ , por normalização. Se  $p(t)$  satisfaz pela equação (2.14), a saída do receptor  $y(t_i)$ , dada pela equação (2.13) resulta, não levando em consideração o ruído:

$$y(t_i) = \mu a_i \quad \text{para todo } i \tag{2.15}$$

que implica zero interferência entre símbolos.

Para projetar o pulso  $p(t)$  obedecendo às condições da equação (2.14) é conveniente transformar essas condições no domínio da frequência. Considere, então, a sequência de amostras  $\{p(nT_b)\}$ , onde  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Aplicando o teorema de amostragem sabe-se que amostragem no domínio do tempo, produz uma periodicidade no domínio da frequência. Assim pode-se escrever:

$$P_{\delta}(f) = R_b \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - n R_b) \quad 2.16$$

onde  $R_b = 1/T_b$  é taxa de bits por segundo (b/s);  $P_{\delta}(f)$  é transformada de Fourier de uma sequência periódica de funções delta de Dirac e período  $T_b$ , cujas áreas individuais são ponderadas pelos respectivos valores de  $p(t)$ . Assim,  $P_{\delta}(f)$  pode ser expressa por:

$$P_{\delta}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [p(mT_b) \delta(t - mT_b)] \exp(-j2\pi f t) dt \quad 2.17$$

Fazendo  $m = i - k$ , então quando  $i = k$  tem-se  $m = 0$  e quando  $i \neq k$  tem-se  $m \neq 0$ . Impondo as condições da equação (2.14) nas amostras de  $p(t)$  na integral da equação (2.17) tem-se:

$$P_{\delta}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(0) \delta(t) \exp(-j2\pi f t) dt = p(0) = 1 \quad 2.18$$

Utilizando os resultados de (2.16) e (2.18), tem-se que a condição de interferência entre símbolos é zero se a seguinte condição for satisfeita:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - n R_b) = T_b \quad 2.19$$

Assim, o critério de Nyquist para transmissão em banda base sem distorção na ausência de ruído consiste: A função de transferência  $P(f)$  elimina a interferência entre símbolos para amostras realizadas em intervalos de tempo  $T_b$  desde que ela satisfaz a equação (2.19). Observe que  $P(f)$  representa toda a resposta do sistema, incorporando o filtro transmissor, o canal e o filtro receptor de acordo com a equação (2.12).

### Canal de Nyquist ideal

A maneira mais simples de satisfazer a equação (2.19) é especificando  $P(f)$  como sendo uma função retangular, como mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} P(f) &= \begin{cases} \frac{1}{2W} & -W < f < W \\ 0 & |f| > W \end{cases} \\ &= \frac{1}{2W} \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right) \end{aligned} \quad 2.20$$

onde  $\text{rect}(f)$  denota uma função retangular com amplitude unitária com suporte unitário centrado em  $f = 0$ , e a largura de faixa de todo o sistema  $W$  é definida por:



$$W = \frac{R_b}{2} = \frac{1}{2T_b} \quad 2.21$$

A transformada de Fourier inversa de (2.20) fornece a forma de onda no tempo:

$$p(t) = \frac{\text{sen}(2\pi W t)}{2\pi W t} = \text{sinc}(2W t) \quad 2.22$$

O valor da taxa de bit  $R_b = 2W$  é chamado de taxa de Nyquist e  $W$  é chamada de Largura de faixa de Nyquist. O pulso de transmissão em banda base ideal, descrito pela equação (2.20), no domínio da frequência, e pela equação (2.22), no domínio do tempo, é chamado de canal ideal de Nyquist.

As Figuras 2.4a e 2.4b mostram os gráficos de  $P(f)$  e  $p(t)$ , respectivamente.

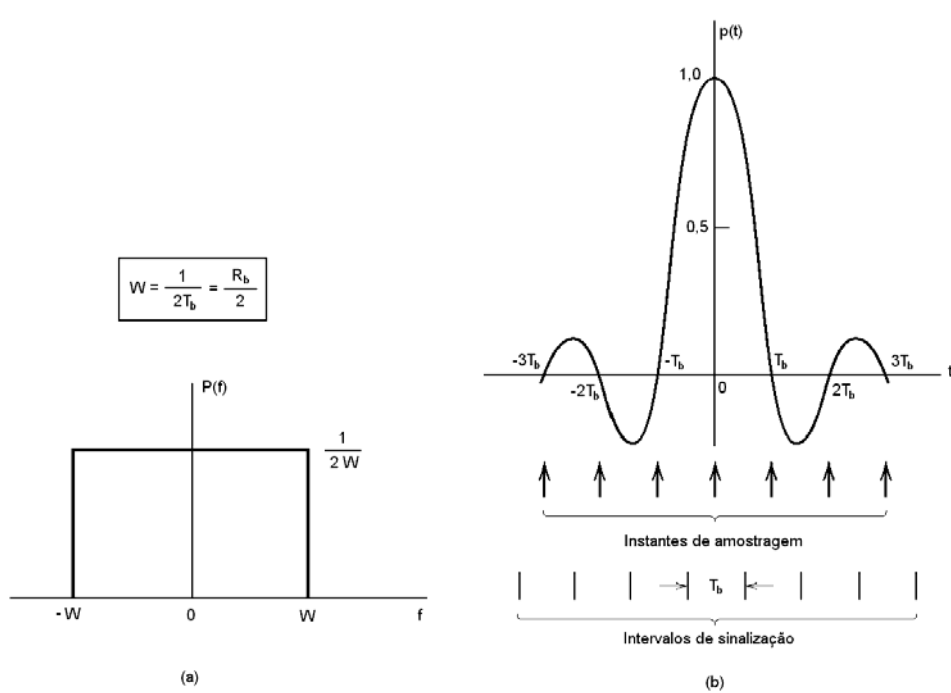


Figura 2.4 Canal ideal de Nyquist

Pode-se observar que as amostras da forma de onda recebida  $y(t)$  nos instantes  $t = 0, \pm T_b, \pm 2T_b, \dots$ , então os pulsos definidos por  $\mu p(t - iT_b)$  com amplitude arbitrária  $\mu$  e onde  $i$  é dado por os índices  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , que não irão interferir entre si. Esta condição é ilustrada na Figura 2.5. Para a sequência binária 1011010.

Embora, foi resolvido o problema da interferência entre símbolos existem duas dificuldades práticas no projeto desse sistema:

1. É requerido que a característica de amplitude de  $P(f)$  seja plana de  $-W$  a  $W$  e zero fora. Isto é fisicamente impraticável devido a transição abrupta nas frequências  $\pm W$ .

2. A função  $p(t)$  decresce com  $1/|t|$  com  $|t|$  grande, resultando numa taxa de decaimento pequena. Isto, também é causado pela descontinuidade de  $P(f)$  em  $\pm W$ . Desta forma, não existe, praticamente, uma margem de erro nos instantes de amostragem no receptor.

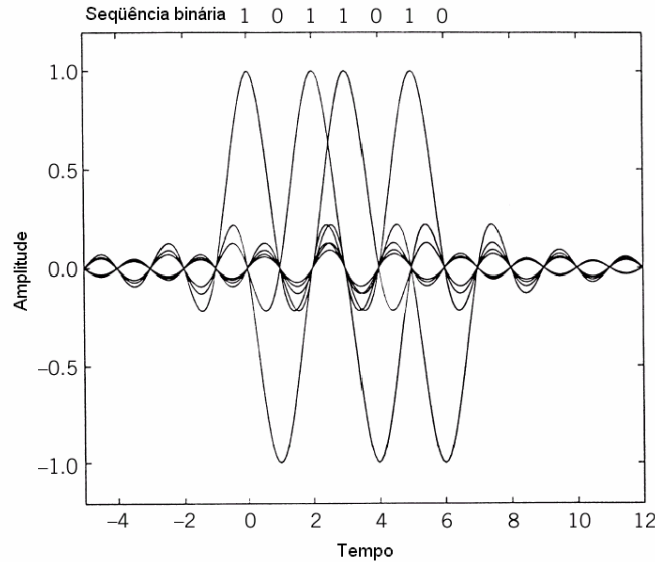


Figura 2.5 Sequência de pulsos *sinc*.

### Espectro co-seno levantado (*Raised cosine*)

Para solucionar as dificuldades práticas encontradas com o canal ideal de Nyquist pode-se estender a largura de faixa do valor mínimo  $W = R_b/2$  para um valor ajustável entre  $W$  e  $2W$ . Assim pode-se especificar a resposta em frequência de  $P(f)$  satisfazendo o critério de Nyquist em termos da equação (2.20) e restringindo a faixa de frequência de interesse a  $[-W, W]$ , como dado por:

$$P(f) + P(f - 2W) + P(f + 2W) = \frac{1}{2W} \quad -W \leq f \leq W \quad 2.23$$

Existem muitas funções que satisfazem as condições de faixa de frequência limitada da equação (2.26). A forma de  $P(f)$  mais apropriada é a conhecida co-seno levantado. Esta resposta em frequência consiste de uma parte plana e outra decrescendo até zero (“*rolloff*”) e tendo uma forma co-senoidal, como segue:

$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} & 0 \leq |f| < f_1 \\ \frac{1}{4W} \left\{ 1 - \sin \left[ \frac{\pi(|f| - W)}{2W - 2f_1} \right] \right\} & f_1 \leq |f| < 2W - f_1 \\ 0 & |f| < 2W - f_1 \end{cases} \quad 2.24$$

O parâmetro de frequência  $f_1$  e a largura de faixa são relacionados por:

$$\alpha = 1 - \frac{f_1}{W} \quad 2.25$$

O parâmetro  $\alpha$  é chamado de fator de “*rolloff*” e indica o excesso de largura de faixa em relação à solução ideal  $W$ . Assim, a largura de faixa de transmissão  $B_T$  é definida por:

$$\begin{aligned} B_T &= 2W - f_1 \\ &= W(1 + \alpha) \end{aligned} \quad 2.26$$

A resposta em frequência de  $P(f)$ , é mostrada na Figura.2.5a para três valores de  $\alpha$ , 0, 0,5 e 1. Pode-se observar que a função  $P(f)$  apresenta simetria ímpar em relação a  $W$  para tornar possível a condição (2.20).

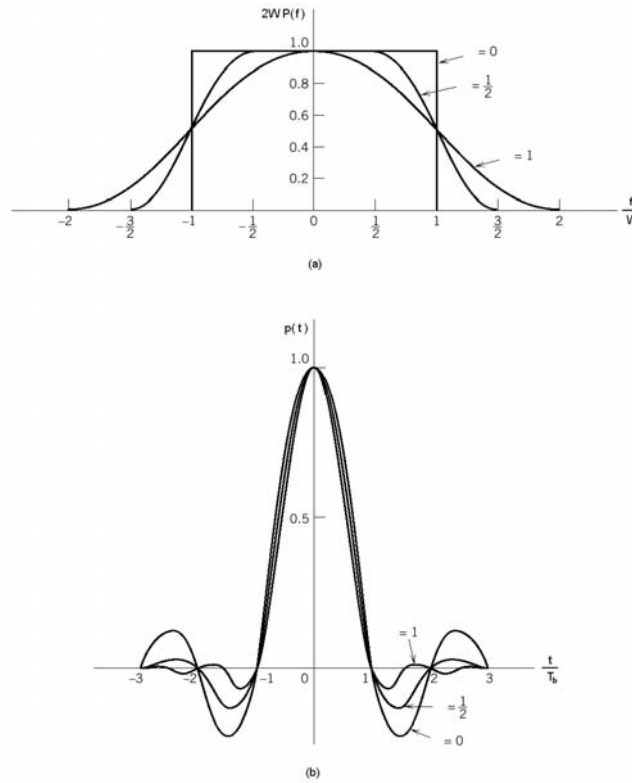


Figura 2.6 Respostas Co-seno levantado: (a) em frequência e (b) no tempo.

A resposta no tempo  $p(t)$  consiste da transformada inversa de Fourier de  $P(f)$ , resultando na seguinte equação:

$$p(t) = \left[ \text{sinc}(2Wt) \right] \left[ \frac{\cos(2\pi\alpha Wt)}{1 - 16\alpha^2 W^2 t^2} \right] \quad 2.27$$

que é mostrada na Fig. 2.6b.

## Filtro ótimo na presença de ISI e ruído

Mostra-se que os filtros: transmissor  $G(f)$  e receptor  $C(f)$  são ótimo no sentido de eliminar a interferência entre símbolos e minimizar o efeito de ruído branco aditivo quando satisfazem as seguintes relações:

$$|C(f)|^2 = k_1 \frac{|P(f)|}{|H(f)|} \quad e \quad |G(f)|^2 = k_2 \frac{|P(f)|}{|H(f)|} \quad 2.28$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes arbitrárias. Quando a faixa de passagem do canal é constante na largura de faixa do pulso com espectro  $P(f)$  os filtros têm um espectro definido pela raiz quadrada de  $|P(f)|$  e neste caso os pulsos são chamados de pulso raiz quadrada de co-seno levantado.

## 2.2 Relações de Potência , energia e espectro de uma seqüência de pulsos.

O desempenho de um sistema de comunicação é usualmente avaliado em termos de potência ou energia de um sinal e de ruído. Nesta seção, são analisadas as expressões para a potência, para a energia e também

os espectros dos sinais de dados analógicos, vistos anteriormente.

A energia de um pulso  $g(t)$  é definida como:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad 2.29$$

Se a unidade de  $g(t)$  é volts, a unidade de  $E_g$  pode ser  $volt^2 - seg$ , que pode ser vista como a energia que seria dissipada em um resistor de 1 ohm.

Usando-se a relação de Parseval, a energia também pode ser expressa por:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad 2.30$$

Onde  $G(f)$  é a transformada de Fourier de  $g(t)$ . Todo pulso de interesse prático tem energia finita.

Como um sinal de dados é composto por uma seqüência infinita de pulsos e tem energia infinita, é necessário descrevê-lo em termos de sua potência, que será finita se os pulsos tiverem energia finita e que sejam transmitidos em intervalos discretos. Um sinal real em banda base PAM tem a seguinte forma:

$$x(t) = A_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m g(t - mT) \quad 2.31$$

Onde  $A_0$  é uma constante de amplitude e  $a_m$  é o valor de  $m$ -ésimo símbolo, escolhido de um alfabeto de  $m$  caracteres. Os valores de  $a_m$  são escolhidos aleatoriamente do alfabeto.

O valor médio quadrático de  $x(t)$  é a potência, que pode ser determinada por meio da esperança estatística de  $x^2(t)$ :

$$\begin{aligned} E[x^2(t)] &= A_0^2 \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m g(t-mT) \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i g(t-iT) \right] = \\ &= A_0^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(t-mT) g(t-iT) E[a_m a_i] \end{aligned} \quad 2.32$$

No caso especial, mais freqüentemente utilizado, considera-se que os valores dos dados sejam não correlacionados e tenha média zero, tal que:

$$E[a_m a_i] = \begin{cases} E[a_m^2] = \sigma_a^2 & i = m \\ 0 & i \neq m \end{cases} \quad 2.33$$

Para o caso mais geral, onde os dados são correlacionados e média não zero, veja Couch II.

No caso onde os dados ou símbolos são não correlacionados e média zero, a equação se reduz a:

$$E[x^2(t)] = A_0^2 \sigma_a^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} g^2(t-mT) \quad 2.34$$

Em processos estacionários a média quadrática é independente do tempo. Neste caso, o processo é não estacionário, pois depende de  $t$ . Se substituirmos  $t$  por  $t' = t + kT$ , com  $k$  inteiro, então a equação (2.34) não se altera. Assim, quando o segundo momento é periódico no tempo, com período  $T$ , o processo é dito ciclo estacionário. Neste caso, deve-se utilizar a definição de potência média temporal de  $E[x^2(t)]$  para obter-se a potência média de  $x(t)$ . Assim, denotando por  $\overline{P}_x$  a potência média, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{P}_x &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E[x^2(t)] dt = \\ &= \frac{A_0^2 \sigma_a^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t-mT) dt = \\ &= \frac{A_0^2 \sigma_a^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \end{aligned} \quad 2.35$$

onde, na segunda linha, a ordem da somatória e da integração foi trocada. Como a integral da segunda linha é sobre o intervalo de tempo  $[-T/2, T/2]$  e os pulsos não se sobrepõem, pode-se considerar a integral de um único pulso no intervalo de  $[-\infty, \infty]$ . Como a integral da terceira linha é energia do pulso a potência média de um PAM real é dada por:

$$\overline{P}_x = \frac{A_0^2 \sigma_a^2 E_g}{T} \quad 2.35$$

É freqüentemente necessário determinar-se a energia média  $E_b$  associada com cada bit de informação que está sendo transmitido. Se a taxa de informação de bit para  $x(t)$  é  $R_b$  [b/s], então a energia por bit é:

$$E_b = \frac{\overline{P_x}}{R_b} = \frac{A_0^2 \sigma_a^2 E_g}{R_b T} \quad 2.36$$

### Relações de espectro.

**Periodograma:** Um único pulso  $g(t)$  tem transformada de Fourier denotada por  $G(f)$ . Uma seqüência finita de  $L$  pulsos pode ser escrita como:

$$x_L(t) = A_0 \sum_{m=0}^{L-1} a_m g(t - mT) \quad 2.37$$

Como  $x_L(t)$  tem energia finita, sua transformada de Fourier existe e é dada por:

$$X_L(f) = A_0 G(f) \sum_{m=0}^{L-1} a_m e^{-jm2\pi f T} \quad 2.38$$

onde a transformada de Fourier  $X_L(f)$  é relacionada unicamente com uma única seqüência  $x_L(t)$  e vice versa.

Cada transformada de Fourier depende do espectro do pulso e também do particular padrão de dados que compõem a seqüência. Para uma seqüência de  $M$  caracteres e de comprimento  $L$ , então existem  $M^L$  distintas transformadas de Fourier.

O periodograma de uma seqüência finita é definido como  $|X_L(f)|^2 / T_L$ , onde  $T_L$  é a duração da seqüência. O periodograma é o método bastante utilizado em simulação, para estimar o espectro de seqüências de duração finita.

### Ensemble Spectrum

Uma seqüência PAM infinita não tem transformada de Fourier, e neste caso deve-se determinar a estatística na coleção do processo definindo a densidade espectral de potência (PSD – “Power Spectral Density”).

Uma seqüência PAM infinita pode ser dada por:

$$x(t) = A_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m g(t - mT) \quad 2.39$$

O primeiro passo é determinar-se a autocorrelação do sinal. Se os dados dos símbolos forem não correlacionados e média zero então:

$$E[x(t)x(t+\tau)] = A_0^2 \sigma_a^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t-mT)g(t-\tau-mT) \quad 2.40$$

A autocorrelação é também ciclo estacionária. Pois depende de  $t$  e tem período igual a  $T$ . Fazendo a média temporal num período  $T$  tem-se a média temporal da correlação:

$$\overline{R_x}(\tau) = \frac{A_0^2 \sigma_a^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t-\tau) \quad 2.41$$

Tomando-se a transformada de Fourier tem-se a densidade espectral de potência:

$$\overline{G_x}(f) = \frac{A_0^2 \sigma_a^2}{T} |G(f)|^2 \quad 2.42$$

Um analisador de espectro de laboratório mostra uma aproximação de (2.42), desde que a duração do sinal seja longa o suficiente para se obter uma boa media temporal. Deve-se ressaltar que a equação (2.42) mostra somente as componentes contínuas com a frequência. Se os símbolos de dados não apresentam média zero ou se eles são correlacionados podem aparecer impulsos em certas frequências.