

# Curso ET-288 2003

## Transmissão Digital em Banda Base

Prof. Waldecir João Perrella

Neste capítulo analisa-se a transmissão de dados em canais banda base, com ênfase nos seguintes aspectos:

- O *filtro casado*, é o filtro ótimo para detectar a presença de um sinal conhecido em canais com ruído aditivo gaussiano e branco (AWGN, *Additive White Gaussian Noise*);
- Cálculo da taxa de erro de bit, (BER, *bit error rate*), na presença de canal com ruído;

### 1.Introdução

Nesta seção, analisa-se a transmissão de dados. Esses dados correspondem à saída de uma fonte de informação inerentemente discreta, por exemplo computador digital ou de uma fonte analógica convertida para discreta, por exemplo, usando-se *PCM* para a conversão *A/D*. Assim será analisada a transmissão de dados digitais num canal banda base.

Dados digitais apresentam um espectro com componentes espectrais significativas em frequências baixas. Assim, a transmissão banda base destes sinais requer o uso de canais passa baixas, com uma largura de faixa suficiente para acomodar as componentes espectrais significativas da sequência de dados. Entretanto, os canais são dispersivos de tal forma suas respostas apresentam distorções quando comparado com um canal passa baixas ideal. O resultado da transmissão de dados nesses canais é que cada pulso recebido é influenciado pelos pulsos adjacentes, gerando uma forma de interferência conhecida como interferência entre símbolos (*ISI*). Para corrigir esta forma de interferência é preciso utilizar técnicas de formatação de pulso em todo o sistema.

Outra fonte de erros de bit na transmissão de dados é devido ao ruído existente em todos os canais. Como o ruído e a *ISI* aparecem simultaneamente no sistema, inicialmente, analisa-se o desempenho do sistema separadamente e posteriormente o desempenho conjunto.

### 2.Filtro casado ( *Matched Filter* )

Um problema básico que aparece no estudo de sistemas de comunicações é detectar um pulso transmitido num canal ruidoso, isto é, canal com ruído aditivo. Nesta seção, supõe-se que o ruído é a única fonte de limitação do sistema.

Considere o modelo de receptor mostrado na Figura 1, que consiste de um filtro linear invariante no tempo com resposta impulsiva  $h(t)$ . A entrada do filtro  $x(t)$  consiste de um pulso  $g(t)$  com ruído aditivo  $w(t)$ , como mostrado pela equação:

$$X(t) = g(t) + w(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad 1$$

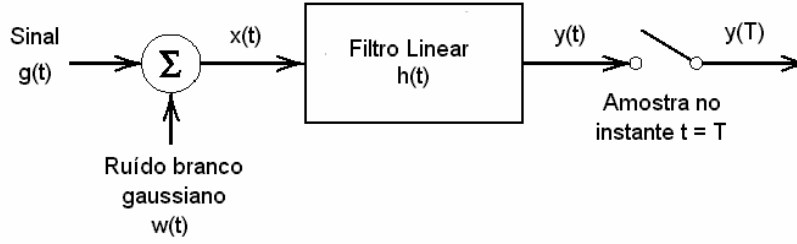


Figura 1 Receptor Linear

onde  $T$  é um intervalo de observação arbitrário. O pulso  $g(t)$  pode representar um símbolo binário 0 ou 1 num sistema de comunicação digital. O sinal  $w(t)$  é uma função amostra do processo aleatório ruído branco com média zero e com densidade espectral de potência  $N_0/2$ . Supõe-se que o receptor tem conhecimento da forma de onda do sinal  $g(t)$ . A fonte de incerteza é o ruído  $w(t)$ . A função do receptor é detectar o pulso  $g(t)$  de uma maneira ótima, dado que o sinal recebido é  $x(t)$ . Para satisfazer este requerimento, otimiza-se o projeto do filtro para minimizar os efeitos do ruído e assim ressaltar a detecção do pulso  $g(t)$ .

Como o filtro é linear, a saída resultante  $y(t)$  pode ser expressa por:

$$y(t) = g_o(t) + w_o(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad 2$$

onde  $g_o(t)$  e  $w_o(t)$  são, respectivamente, as componentes de saída devido a pulso  $g(t)$  e ao ruído  $w(t)$ .

Uma maneira de especificar o requerimento de que a componente de sinal  $g_o(t)$  seja consideravelmente maior que a componente de ruído de saída,  $w_o(t)$ , é projetar um filtro tal que a potência instantânea de do sinal de saída  $g_o(t)$ , amostrada no instante  $t=T$ , seja o maior possível, quando comparada com a potência média do ruído de saída  $w_o(t)$ . Isto é equivalente a maximizar uma relação (pico de sinal)/ruído, definida como:

$$SNR = \frac{|g_o(T)|^2}{E[w_o^2(t)]} \quad 3$$

onde  $|g_o(T)|^2$  é a potência instantânea do sinal de saída, e  $E[w_o^2(t)]$  é a potência média do ruído de saída. Resumindo, o requerimento é especificar a resposta impulsiva  $h(t)$  do filtro que maximiza a relação sinal/ruído, equação (3).

Considerando que  $G(f)$  é a transformada de Fourier de  $g(t)$  e  $H(f)$  é a resposta em frequência do filtro então a transformada de Fourier do pulso de saída  $g_o(t)$  é igual a  $H(f)G(f)$ , e  $g_o(t)$  pode ser obtido pela transformada de Fourier inversa:

$$g_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) G(f) e^{j2\pi f t} df \quad 4$$

Assim, amostrando-se a saída do filtro no instante  $t = T$  e na ausência de ruído de canal, tem-se:

$$g_o(T) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) G(f) e^{j2\pi f T} df \quad 5$$

A potência instantânea do sinal no instante  $t = T$  resulta:

$$|g_o(T)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) G(f) e^{(j2\pi f T)} df \right|^2 \quad 6$$

Considerando, agora, a saída do filtro de devido somente ao ruído  $w(t)$ , tem-se que a densidade espectral de potência do ruído de saída,  $w_o(t)$ , é dada pela seguinte expressão:

$$S_{w_o}(f) = S_w(f) |H(f)|^2 = \frac{N_o}{2} |H(f)|^2 \quad 7$$

onde  $S_w(f) = N_o/2$  é densidade espectral de potência do ruído branco de entrada.

A potência de ruído de saída  $w_o(t)$  é, assim, dado por:

$$E[w_o^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_w(f) df = \frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \quad 8$$

Substituindo as equações (6) e (8) em (3) tem-se:

$$SNR = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) G(f) e^{(j2\pi f T)} df \right|^2}{\frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad 9$$

O problema agora se resume em achar, da uma dada  $G(f)$ , a forma da resposta impulsiva que maximiza a  $SNR$ . Para encontrar a solução para este problema de otimização, utiliza-se da desigualdade de Schwarz ao numerador da equação (9).

Considerando duas funções complexas  $\phi_1(x)$  e  $\phi_2(x)$  na variável real  $x$ , satisfazendo as condições:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_1(x)|^2 dx < \infty \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_2(x)|^2 dx < \infty \quad 10$$

A desigualdade de Schwarz resulta:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x) \phi_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_2(x)|^2 dx \quad 11$$

onde a igualdade ocorre, se e somente se:

$$\phi_1(x) = k \phi_2^*(x) \quad 12$$

onde  $k$  é uma constante arbitrária e o asterístico denota o conjugado complexo.

Para se aplicar a desigualdade de Schwarz faz-se inicialmente:

$$\phi_1(x) = H(f) \quad e \quad \phi_2(x) = G(f) e^{(j2\pi f T)} \quad 13$$

Assim, utilizando a desigualdade de Schwarz, equação (9), para o numerador da equação (9), tem-se:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f)e^{(j2\pi fT)}df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad 14$$

Substituindo a equação (14) na equação (9) tem-se:

$$SNR \leq \frac{2}{N_o} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad 15$$

O lado direito desta relação não depende da resposta em frequência de  $H(f)$  do filtro mas somente da energia do sinal e da densidade espectral de potência de ruído. Consequentemente, a relação  $SNR$  será máxima quando  $H(f)$  é escolhido tal que a igualdade da relação (12) seja satisfeita, assim tem-se:

$$SNR_{\max} = \frac{2}{N_o} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad 16$$

Correspondentemente,  $H(f)$  assume o seu valor ótimo e será denotado por  $H_{\text{ótimo}}(f)$ . Para achar este filtro ótimo usa-se as equações (12) e (13), resultando:

$$H_{\text{ótimo}}(f) = k G^*(f) e^{(-j2\pi fT)} \quad 17$$

onde  $G^*(f)$  é o complexo conjugado da transformada de Fourier do sinal de entrada  $g(t)$  e  $k$  é uma constante arbitrária. Esta relação mostra que, a menos do fator  $k e^{(-j2\pi fT)}$ , a resposta em frequência do filtro ótimo é a mesma que a transformada de Fourier complexa conjugada do sinal de entrada.

Para achar a resposta impulsiva do filtro ótimo, usa-se a transformada inversa de Fourier e assim tem-se:

$$h_{\text{ótimo}}(t) = k \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f) e^{(-j2\pi fT)} e^{(j2\pi f t)} df = k \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f) e^{[-j2\pi f(T-t)]} df \quad 18$$

Como para um sinal  $g(t)$  real, tem-se que  $G^*(f) = G(-f)$ , pode-se re-escrever a equação (18):

$$h_{\text{ótimo}}(t) = k \int_{-\infty}^{\infty} G(-f) e^{[-j2\pi f(T-t)]} df = k \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{[j2\pi f(T-t)]} df = k g(T-t) \quad 19$$

A equação (19) mostra que a resposta impulsiva do filtro ótimo, exceto o fator de escala  $k$ , é uma versão do sinal de entrada  $g(t)$ , com o tempo reverso; por isso diz-se que é casado com o sinal de entrada (*matched*). O filtro LTI definido desta forma é chamado de filtro casado.

### Propriedades do filtro casado:

Dado um sinal  $g(t)$ , com duração  $T$ , tem-se que o filtro casado é caracterizado por um par de transformada de Fourier:

$$h_{\text{ótimo}}(t) = k g(T - t) \leftrightarrow k G^*(f) e^{(-j2\pi f T)} \quad 20$$

A seguir são demonstradas as propriedades do filtro casado:

1. Determinação da saída,  $g_o(T)$ , do filtro casado quando na entrada tem-se somente o sinal  $g(t)$ :  
Assim, substituindo a função de transferência do filtro casado (20), na equação (5) tem-se:

$$g_o(T) = \int_{-\infty}^{\infty} k G^*(f) e^{(-j2\pi f T)} G(f) e^{(j\pi f T)} df = k \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad 21$$

O Teorema da Energia de Rayleigh permite calcular a energia de um sinal no domínio do tempo ou no da frequência. Assim, a energia  $E$  do sinal  $g(t)$  pode ser calculada pelas seguintes expressões:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad 22$$

Assim, substituindo (22) em (21) tem-se:

$$g_o(T) = k E \quad 23$$

2. Determinação da potência do ruído na saída do filtro casado quando se tem somente ruído branco com média zero e densidade espectral  $N_o/2$ :

Substituindo a função de transferência do filtro casado (20), na equação (8) tem-se:

$$E[w_o^2(t)] = \frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{k^2 N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \frac{k^2 N_o E}{2} \quad 24$$

3. Determinação da relação  $SNR$  máxima:

Substituindo as equações (23) e (24) em (3), tem-se:

$$SNR_{\max} = \frac{|g_o(T)|^2}{E[w_o^2(t)]} = \frac{(k E)^2}{k^2 N_o E / 2} = \frac{2 E}{N_o} \quad 25$$

Desta equação pode-se observar a relação sinal ruído não depende do formato do pulso  $g(t)$  quando se usa um filtro casado e também da constante  $k$ . Observe também que a unidade da energia do sinal  $E$  é joules e a da densidade espectral de potência de ruído  $N_o/2$  é em watts por Hertz e assim a razão  $2E/N_o$  é adimensional, embora as duas quantidades têm diferentes significados físicos. A relação  $E/N_o$  é referida como relação entre a energia do sinal pela densidade espectral de ruído.

### Filtro casado para pulso retangular.

Considere um pulso  $g(t)$  da forma retangular com amplitude  $A$  e duração  $T$ , tal como mostra a Figura 2a.

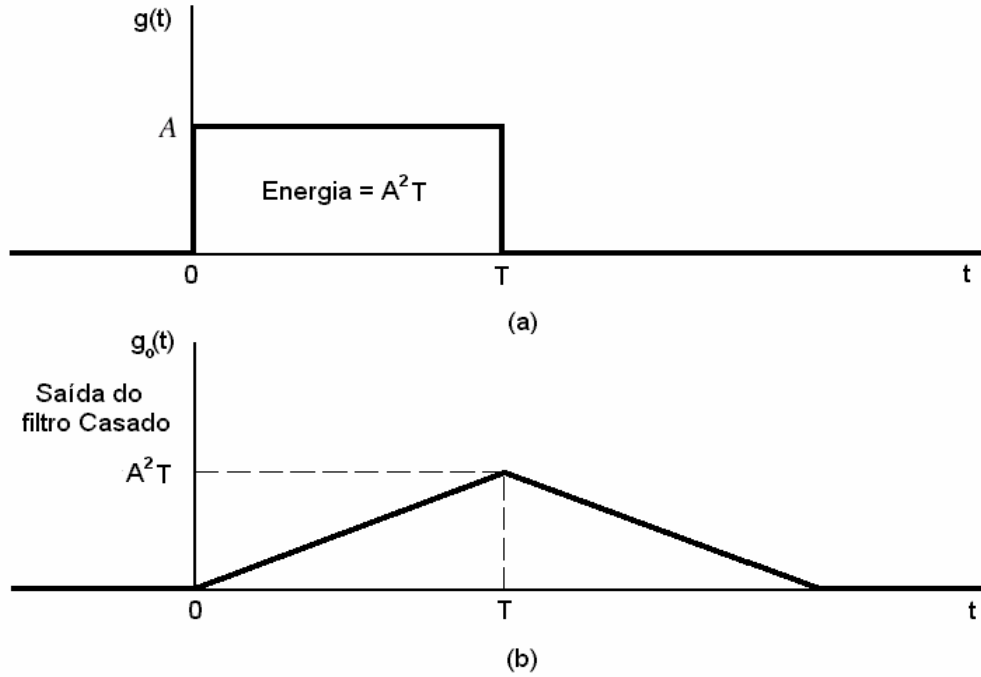


Figura 2 Filtro casado para pulso retangular

Neste caso, a resposta impulsiva  $h(t)$  do filtro casado é a mesma que a do sinal  $g(t)$ . O sinal de saída do filtro casado,  $y(t)$ , e supondo canal sem ruído, tem a forma triangular como mostra a Figura 2b. O valor máximo ocorre no instante  $T$  e é igual à energia do sinal e portanto igual a  $E = A^2 T$ , de acordo com a equação (23) quando  $k = 1$ .

### Filtro de correlação

O filtro de correlação é uma maneira equivalente de implementar o filtro o casado. Para provar esta afirmação supõe-se o sinal na entrada do receptor  $x(t)$  seja somente o sinal  $g(t)$  com duração no intervalo  $(0, T)$  e assim a resposta impulsiva do filtro casado é  $h_{ótimo}(t) = k g(T-t)$ . O sinal de saída  $y(t)$  do filtro casado é dado pela seguinte integral de convolução:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{ótimo}(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) k g(T - t + \tau) d\tau \quad 26$$

Amostrando a saída no instante  $T$  e sabendo que  $g(t)$  tem duração no intervalo  $(0, T)$  tem-se:

$$y(T) = k \int_0^T x(\tau) g(\tau) d\tau \quad 27$$

Desta forma pode-se implementar o filtro de correlação como mostra a Figura 3a, onde o sinal de entrada  $x(t)$  é inicialmente multiplicado por  $g(t)$  e a seguir é correlacionado através da integração.

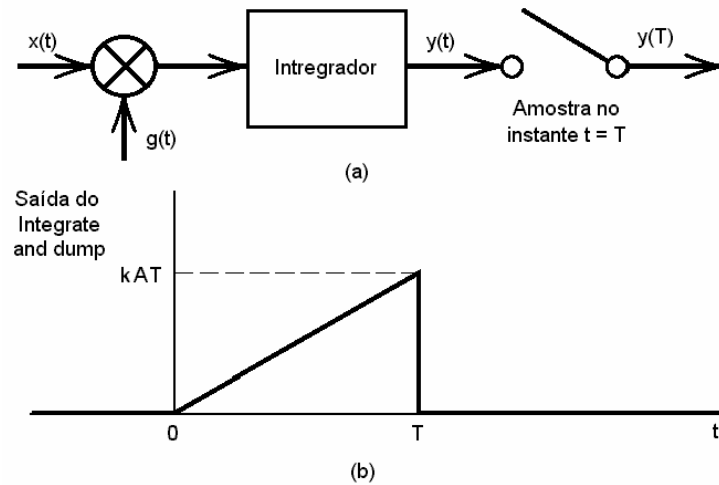


Figura 3 Filtro de correlação

Na Figura 3b, mostra-se a saída do filtro de correlação quando o sinal de entrada é um pulso retangular. Neste caso, como o pulso de entrada é retangular não é necessário multiplicar-se por  $g(t)$  e assim realizar a integração do sinal de entrada, amostrar a saída no instante  $t=T$  e finalmente descarregar o integrador para se voltar às condições iniciais. O circuito que implementa o circuito de correlação é chamado de “integrate-and-dump”.

### Probabilidade de erro.

Uma vez que se tem com o filtro casado que é ótimo na detecção de um pulso conhecido na presença de ruído aditivo branco, será derivado, agora, a fórmula para o cálculo da taxa de erro média de bit ( *Bit Error Rate*, BER) de um sistema de comunicação digital devido ao ruído.

Para isto, considere um sistema binário gerando um trem de pulsos com sinalização NRZ polar. Nesta forma de sinalização, os símbolos binários são representados por pulsos retangulares positivos e negativos com amplitude  $\pm A$  e duração  $T_b$ , portanto a taxa de transmissão é  $R_b = 1/T_b$  b/s (bits por segundo). O canal apresenta um ruído aditivo AWGN com média zero e densidade espectral  $N_o/2$ .

Na Figura 4 tem-se o diagrama do receptor, que consiste de um filtro casado seguido de um amostrador em intervalos múltiplos de  $T_b$  e finalmente um dispositivo de decisão.

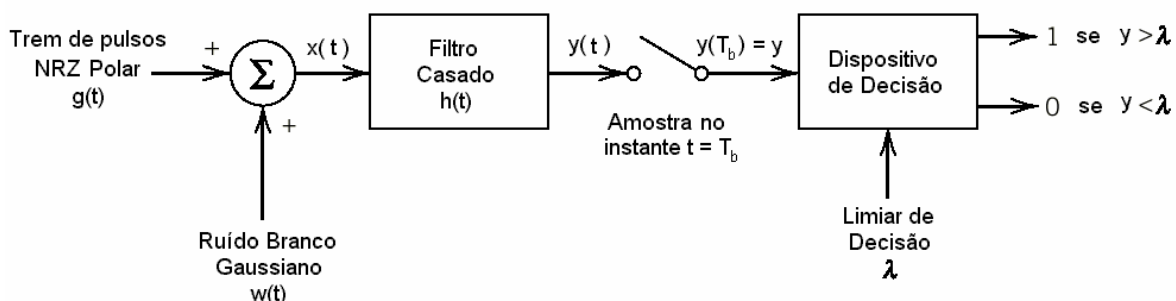


Figura 4 Receptor para transmissão em banda base.

Em cada intervalo de sinalização  $0 \leq t \leq T_b$ , o sinal recebido pode ser escrito como:

$$x(t) = \begin{cases} +A + w(t) & \text{quando 1 foi transmitido} \\ -A + w(t) & \text{quando 0 foi transmitido} \end{cases} \quad 28$$

A saída do filtro casado ao pulso retangular é amostrada no fim de cada intervalo de sinalização, utilizando a informação de sincronismo de bit disponível no receptor. Denotando por  $y$  a variável aleatória no fim de cada intervalo de sinalização pode-se escrever:

$$y = \begin{cases} +E + w_o(t) & \text{quando 1 foi transmitido} \\ -E + w_o(t) & \text{quando 0 foi transmitido} \end{cases} \quad 29$$

onde  $E$  é a voltagem na saída do filtro casado, a qual é numericamente igual à energia do pulso retangular, usando a equação (23) e  $k=1$ , e  $w_o(t)$  é a componente de ruído na saída do filtro casado que é uma variável aleatória gaussiana, pois o filtro é linear e o ruído de entrada também é gaussiano. Como o ruído de entrada tem média zero,  $w_o(t)$  também tem média zero. A variância é obtida pela equação (24), quando  $k=1$  tem-se:

$$\sigma_{w_o}^2 = E[w_o^2(t)] = \frac{N_0 E}{2} \quad 30$$

Assim, a pdf da variável aleatória de  $y$ , devido somente ao ruído, é dada pela seguinte equação:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_o}^2}} e^{-\left(\frac{y^2}{2\sigma_{w_o}^2}\right)} \quad 31$$

Na Figura 5 tem-se o gráfico de  $f_Y(y)$ .

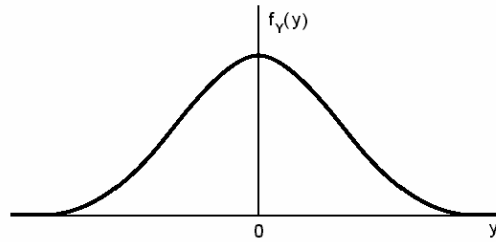


Figura 5 Função densidade de probabilidade do ruído.

Na presença de sinal e ruído, a variável aleatória  $y$  pode ser caracterizada por funções densidade de probabilidades condicionais em relação ao símbolo transmitido. Assim, as pdfs condicionais resultam:



$$f_Y(y|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_o}^2}} e^{-\left(\frac{(y+E)^2}{2\sigma_{w_o}^2}\right)} \quad \text{quando 0 foi transmitido} \quad 32$$

$$f_Y(y|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_o}^2}} e^{-\left(\frac{(y-E)^2}{2\sigma_{w_o}^2}\right)} \quad \text{quando 1 foi transmitido} \quad 33$$

Na Figura 6 tem-se o gráfico das duas pdfs.

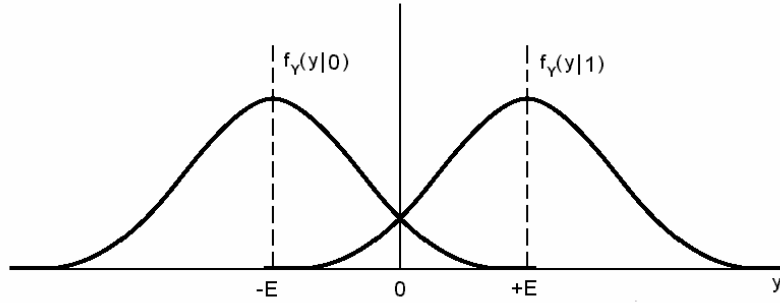


Figura 6 Pdfs condicionais.

O próximo passo no receptor, mostrado na Figura 4, é dispositivo decisor que consiste de comparar cada amostra  $y$  com um limiar  $\lambda$  prefixado, e decidir qual símbolo foi transmitido, de acordo com a seguinte regra:

$$\begin{aligned} \text{Decide 1} & \quad \text{se } y > \lambda \\ \text{Decide 0} & \quad \text{se } y < \lambda \end{aligned} \quad 34$$

Desta forma, pode-se observar que, devido ao ruído, dois tipos de erros ocorrerão:

1. Erro de primeira espécie, quando o símbolo 1 é escolhido mas o símbolo 0 foi realmente transmitido.
2. Erro de segunda espécie, quando o símbolo 0 é escolhido mas o símbolo 1 foi realmente transmitido.

Para determinar a probabilidade de erro média, analisam-se as duas situações separadamente.

Considere que o símbolo 0 foi transmitido, então a pdf condicional é dada pela equação (32) e neste caso a probabilidade condicional de erro dado que 0 foi transmitido e um foi decidido, denotada por  $P_{10}$ , é dada pela seguinte integral:

$$P_{10} = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_o}^2}} e^{-\left(\frac{(y+E)^2}{2\sigma_{w_o}^2}\right)} dy \quad 35$$

Na Figura 7 mostra-se que o valor de  $P_{10}$ , corresponde à área em cinza.

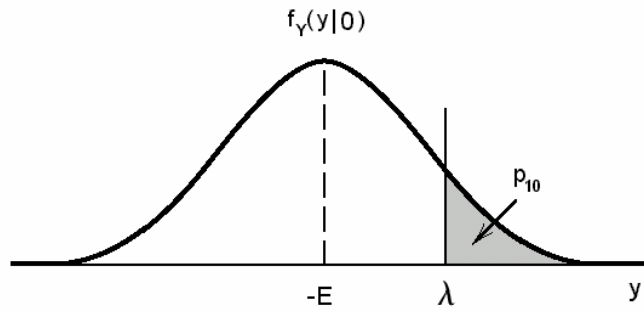


Figura 7 Probabilidade de erro  $P_{10}$

Considere, agora, que o símbolo 1 foi transmitido, então a pdf condicional é dada pela equação (33) e neste caso a probabilidade condicional de erro dado que 1 foi transmitido e 0 foi decidido, denotada por  $P_{01}$ , é dada pela seguinte integral:

$$P_{01} = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_o}^2}} e^{-\left(\frac{(y-E)^2}{2\sigma_{w_o}^2}\right)} dy \quad 36$$

Na Figura 8 mostra-se que o valor de  $P_{01}$ , corresponde à área em cinza.

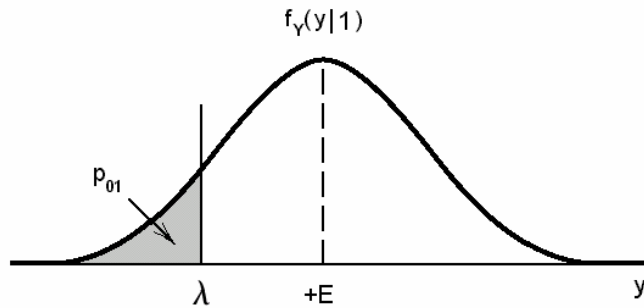
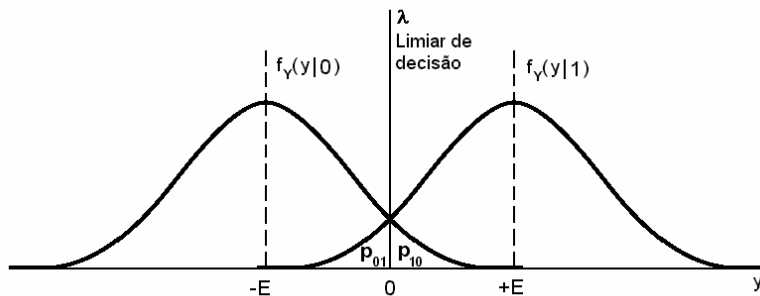


Figura 8 Probabilidade de erro  $P_{01}$

Considerando que as probabilidades dos símbolos serem transmitidos,  $p_0$  e  $p_1$  são iguais, tem-se que  $p_0 = p_1 = 1/2$ . Neste caso o valor do limiar de decisão  $\lambda$  que minimiza a probabilidade de erro é o valor médio entre as amplitudes na saída do filtro casado quando os símbolos 0 e 1 foram transmitidos sem o ruído do canal. Assim, o limiar ótimo  $\lambda = (E-E)/2 = 0$ . A Figura 9 ilustra esse processo.



### Figura 9 Limiar de decisão

A probabilidade de erro média  $P_e$  ou BER é dada pela seguinte equação:

$$P_e = p_0 P_{10} + p_1 P_{01} \quad 37$$

Como,  $p_0 = p_1 = 1/2$  e devido a simetria  $p_{10} = p_{01}$ , a equação pode ser re-escrita:

$$P_e = \frac{1}{2} P_{10} + \frac{1}{2} P_{01} = P_{10} = P_{01} = \quad 38$$

Para calcular  $P_{10}$  ou  $P_{01}$  é preciso inicialmente definir a função  $Q(z)$  ou função erro complementar  $erfc(x)$ . Assim a função  $Q(z)$  é definida por:

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad 39$$

A  $erfc(x)$  é definida por:

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad 40$$

A relação entre ambas resulta:

$$Q(z) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \quad 41$$

Partindo da equação (35) para expressar  $p_{10}$  pela função  $Q(z)$  define-se a seguinte variável:

$$u = \frac{y + E}{\sigma_{w_0}} \quad 42$$

Substituindo essa variável em (35) e sabendo  $P_{10} = P_e$  a probabilidade  $P_e$  resulta:

$$P_e = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_0}^2}} e^{-\left(\frac{(y+E)^2}{2\sigma_{w_0}^2}\right)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\lambda+E}{\sigma_{w_0}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = Q\left(\frac{\lambda + E}{\sigma_{w_0}}\right) \quad 43$$

Como a variância do ruído na saída do filtro casado é dada pela equação (30), o desvio padrão do ruído resulta:

$$\sigma_{w_o} = \sqrt{\frac{N_o E}{2}} \quad 44$$

Para o caso NRZ polar  $\lambda=0$  e usando o resultado de (44)  $P_e$  resulta:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_o}}\right) \quad 45$$

Definindo  $E_b$  como sendo a energia média por bit, como os símbolos são equiprováveis, tem-se:

$$E_b = \frac{1}{2}(E) + \frac{1}{2}(E) = E \quad 46$$

A BER então resulta:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right) \quad 47$$

Para o caso de transmissão NRZ unipolar, isto é, Nesta forma de sinalização, os símbolos binários 1<sub>s</sub> são representados por pulsos retangulares positivos com amplitude  $A$  e duração  $T_b$  e os símbolos binários 0<sub>s</sub> são representados por amplitudes com valor zero e duração  $T_b$ . A taxa de transmissão continua sendo  $R_b = 1/T_b$  b/s (bits por segundo).

Em cada intervalo de sinalização  $0 \leq t \leq T_b$ , o sinal recebido pode ser escrito como:

$$x(t) = \begin{cases} +A + w(t) & \text{quando 1 foi transmitido} \\ w(t) & \text{quando 0 foi transmitido} \end{cases} \quad 48$$

A saída do filtro casado ao pulso retangular é amostrada no fim de cada intervalo de sinalização, utilizando a informação de sincronismo de bit disponível no receptor. A variável aleatória,  $Y$ , resulta:

$$y = \begin{cases} +E + w_o(t) & \text{quando 1 foi transmitido} \\ w_o(t) & \text{quando 0 foi transmitido} \end{cases} \quad 49$$

A variância do ruído  $w_o(t)$  é a mesma obtida pela equação (30) e as pdf<sub>s</sub> condicionais resultam:

$$f_Y(y|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_o}^2}} e^{-\left(\frac{y^2}{2\sigma_{w_o}^2}\right)} \quad \text{quando 0 foi transmitido} \quad 50$$

$$f_Y(y|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_o}^2}} e^{-\left(\frac{(y-E)^2}{2\sigma_{w_o}^2}\right)} \quad \text{quando 1 foi transmitido} \quad 51$$

Na Figura 10 tem-se o gráfico das duas pdfs e também mostra o valor do limiar de decisão  $\lambda$ , agora é igual a  $E/2$ .

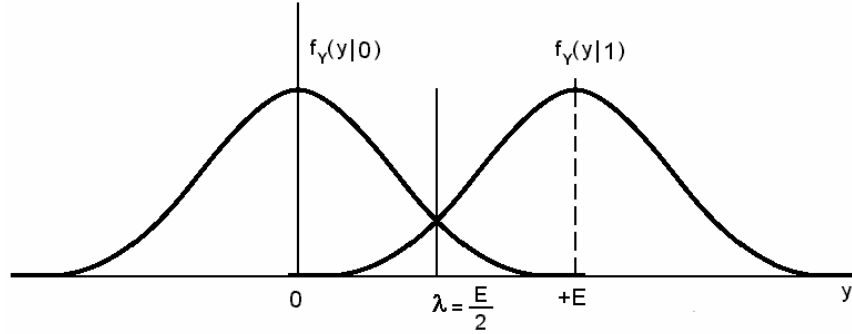


Figura 10 Pdfs condicionais NRZ unipolar.

A probabilidade de erro média é obtida pelo mesmo procedimento anterior, isto é,  $P_e = P_{10}$ , só que  $P_{10}$  é dada pela equação (50) e assim resulta:

$$P_e = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_o}^2}} e^{-\left(\frac{y^2}{2\sigma_{w_o}^2}\right)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sigma_{w_o}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = Q\left(\frac{\lambda}{\sigma_{w_o}}\right) \quad 52$$

Substituindo  $\lambda = E/2$  e  $\sigma_{w_o}$ , dado pela equação (44), na equação (48) tem-se:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_o}}\right) \quad 53$$

A energia média por bit para o NRZ unipolar é dada por:

$$E_b = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(E) = \frac{E}{2} \quad 54$$

A probabilidade de erro então resulta:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_o}}\right) \quad 55$$

Na Figura 11 tem-se a BER para Pulso NRZ polar e unipolar.

### Simulação de ruído branco gaussiano.

O ruído branco gaussiano ideal, tem média zero, variância infinita, função de correlação  $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$  e densidade espectral bilateral  $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$  como mostra a Figura 12a. Para a

simulação de ruído branco gaussiano em computador, deve-se utilizar um gerador de sinais gaussianos com média zero e variância que é função de  $N_0$  e da frequência

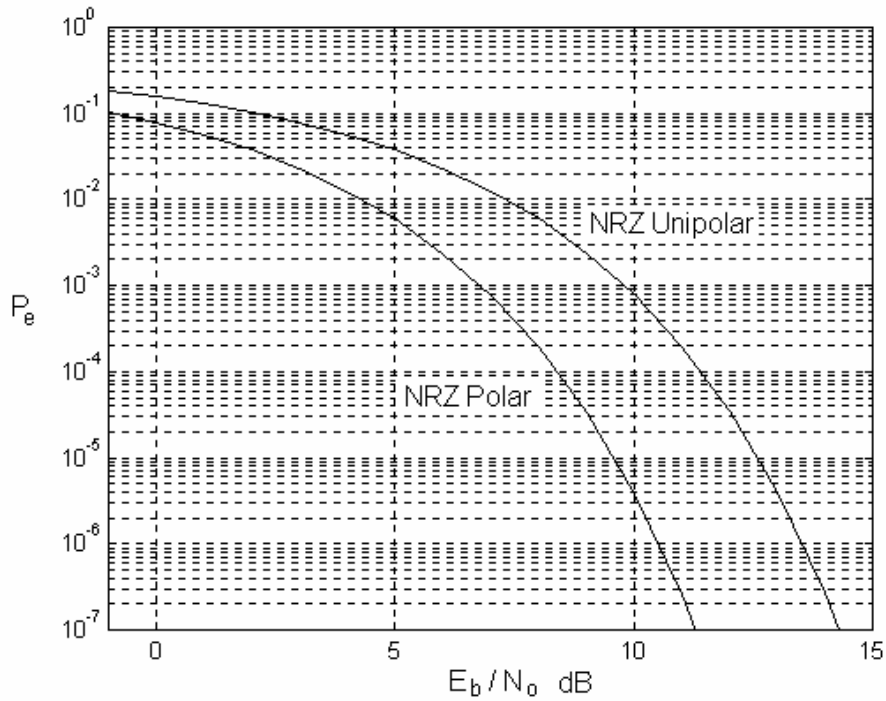


Figura 11 BER para Pulso NRZ polar e unipolar.

de amostragem,  $f_a$ , que se utiliza para amostrar e simular os outros sinais. A variância do ruído é determinada pela área hachureada na Figura 12b e resultando na expressão:

$$\sigma_{N_0}^2 = \int_{-f_0/2}^{f_0/2} \frac{N_0}{2} df = \frac{N_0 f_a}{2} \quad 56$$

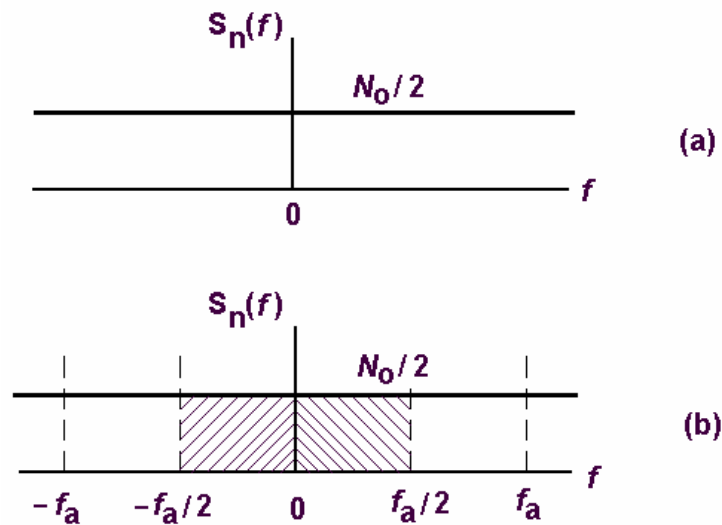


Figura 12. Espectro do ruído branco gaussiano

## Receptor com Filtro Passa Baixas para Pulsos Retangulares

Ao invés do filtro casado ou de correlação vamos utilizar um filtro RC de primeira ordem. O problema é determinar a frequência de corte do filtro que otimiza a relação sinal-ruído nos instantes de tempo  $kT$ .

Para isso determina-se a resposta do filtro RC a um pulso retangular e calcula-se a amplitude no instante  $t = T$ . A expressão resultante é:

$$y(T) = A[1 - e^{-j2\pi f_c T}] \quad 57$$

onde  $T$  é duração do pulso retangular,  $f_c = 1/(2\pi RC)$  é a frequência de corte do filtro e  $RC$  é a constante de tempo do filtro.

Supondo somente o ruído branco na entrada do filtro a variância do ruído na saída é dada por:

$$\sigma_{RC}^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (f/f_c)^2} df = \pi \frac{N_0 f_c}{2} = \frac{N_0}{4RC} \quad 58$$

onde  $N_0/2$  é densidade espectral bilateral do ruído branco e  $H(f)$  é a função de transferência do filtro analógico  $RC$ .

A relação sinal ruído na saída do filtro resulta:

$$SNR_{RC} = \frac{y^2(T)}{\sigma_{RC}^2} = \frac{2A^2[1 - e^{-j2\pi f_c T}]^2}{\pi N_0 f_c} \quad 59$$

Para se determinar a frequência de corte que otimiza relação sinal ruído diferencia-se equação (59) em relação a  $f_c T$  e igualando-se a zero obtem-se  $f_c = 0,2/T$ . Substituindo-se este resultado em (59) tem-se a seguinte relação sinal ruído ótima:

$$SNR_{RC} = \frac{2A^2[1 - e^{-j2\pi f_c T}]^2}{\pi N_0 f_c} = \frac{1,62 A^2 T}{N_0} = \frac{1,62 E}{N_0} \quad 60$$

Considerando que a relação sinal ruído do filtro casado é dada pela equação (25) é  $SNR_{casado} = 2E/N_0$  a perda em dB pelo uso do filtro RC resulta:

$$10 \log \left( \frac{SNR_{casado}}{SNR_{RC}} \right) = 10 \log \left( \frac{2E/N_0}{1,62 E/N_0} \right) = -0,92 \text{ dB} \quad 61$$

Para determinar-se a probabilidade de erro teórica quando se utiliza o filtro  $RC$  utilizam-se os procedimentos anteriores e levar em consideração os seguintes aspectos: 1- quando o pulso retangular

estiver presente a saída é dada pela equação (57) e 2- quando somente o ruído branco estiver presente a variância do ruído de saída é dada pela equação (58).

Para a simulação deste receptor no computador a variância teórica, dada pela equação (58), deve ser substituída pela variância experimental, pois o filtro *RC* simulado é um filtro digital e o ruído resultante depende da frequência de amostragem