EL68B - Comunicações Digitais

Bruno Sens Chang

4-PAM

1 Probabilidade de Erro do 4-PAM

Considere o seguinte conjunto de sinais: $s_i(t) = A_i s_b(t)$, $A_i = (2i-3)d$, $i \in \{0,1,2,3\}$, $0 \le t \le T_s$, onde $s_b(t)$ é o mesmo pulso base usado no 2-PAM e que é mostrado na Figura 1.

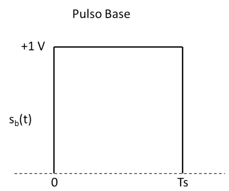

Figura 1: Pulso base para a transmissão 4-PAM.

Cada um dos 4 símbolos é mapeado em uma das duplas 00, 01, 10 e 11. O receptor ótimo tem a mesma estrutura do receptor ótimo para o 2-PAM, e é mostrado na Figura 2.

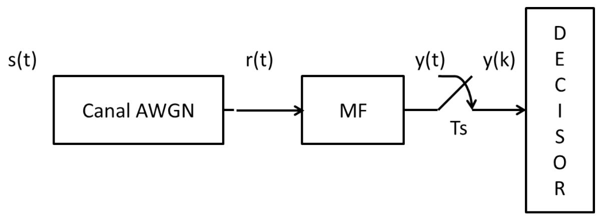

Figura 2: Receptor ótimo para a transmissão M-PAM.

Na análise que segue supomos que $T_s = 1$ e que $E_{MF} = 1$. Para valores diferentes destes parâmetros o resultado final é o mesmo.

As quatro possíveis distribuições da saída do filtro casado são mostradas na Figura 3. Note que as regiões de decisão são então:

Se $y[k] < -2d$ detecte $s_0(t)$;

Se $-2d < y[k] < 0$ detecte $s_1(t)$;

Se $0 < y[k] < 2d$ detecte $s_2(t)$;

Se $y[k] > 2d$ detecte $s_3(t)$.

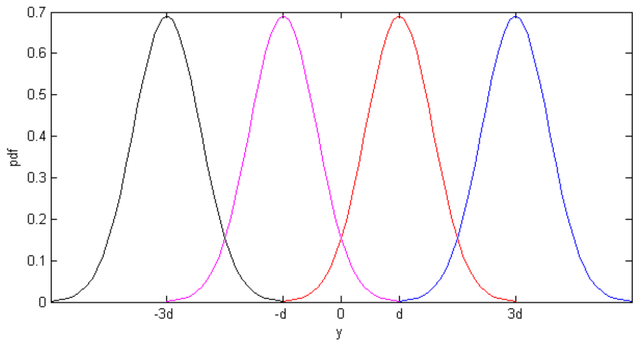

Figura 3: pdfs do sinal amostrado na saída do filtro casado supondo transmissão de cada um dos quatro possíveis símbolos.

Quando ocorre um erro? Quando o ruído na saída do MF é tal que $|w| > d$ para símbolos $s_1(t)$ e $s_2(t)$, $w > d$ para símbolo $s_0(t)$ e $w < -d$ para símbolo $s_3(t)$.

Supondo símbolos equiprováveis a probabilidade de erro de símbolo P_e é

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{4}\Pr(|w| > d) + \frac{1}{4}\Pr(|w| > d) + \frac{1}{4}\Pr(w > d) + \frac{1}{4}\Pr(w < -d) \\ &= \frac{3}{4}\Pr(|w| > d) = \frac{3}{2}\Pr(w > d). \end{aligned} \tag{1}$$

Como $w[k]$ tem distribuição Gaussiana, média nula e variância $\sigma_w^2 = \frac{N0}{2}$, então

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{3}{2}\Pr\left(w > d\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w}\int_d^{\infty} e^{\frac{-w[k]^2}{2\sigma_w^2}}\,dw \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{d}{\sigma_w}}^{\infty} e^{\frac{-u^2}{2}}\,du = \frac{3}{2}Q\left(\frac{d}{\sigma_w}\right) \\ &= \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Porém, note que $E_s = \frac{1}{4}\left(d^2 + d^2 + 9d^2 + 9d^2\right) = 5d^2$.

$$P_e = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{5N_0}}\right) = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right) \tag{3}$$

uma vez que $E_s = 2E_b$ no caso de 4-PAM.

Uma expressão geral da probabilidade de erro de símbolo para o M-PAM pode ser escrita como

$$P_e = \frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6(\log_2 M)E_b}{(M^2-1)N_0}}\right). \tag{4}$$

Como fica a probabilidade de erro de bit nestes casos? Supondo mapeamento Gray, a probabilidade de erro de bit P_b pode ser escrita em função da probabilidade de erro de símbolo P_e como

$$P_b = \frac{P_e}{\log_2 M}. \tag{5}$$

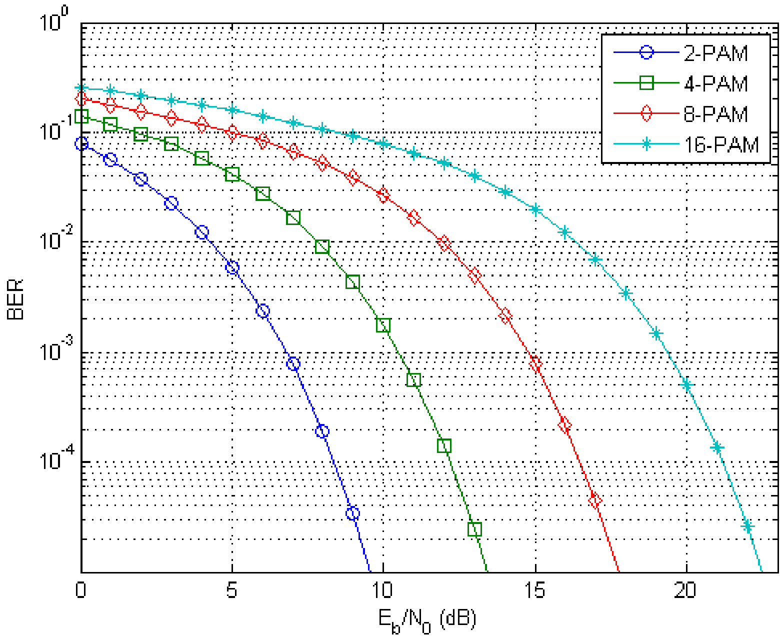

Figura 4: Probabilidade erro de bit da modulação M-PAM.