EL68B - Comunicações Digitais

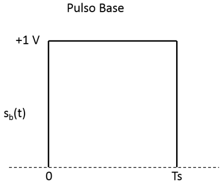
Probabilidade de Erro - 2-PAM

Professor: Bruno Sens Chang

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Departamento Acadêmico de Eletrônica - DAELN

Binária Antipodal (2-PAM)

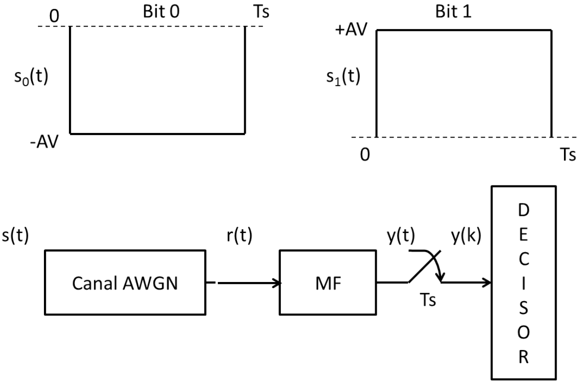
Seja o “pulso base” do 2-PAM $s_b(t)$ como abaixo.



- O sinal usado para representar o bit 1 é $s_1(t) = A \cdot s_b(t)$
- O sinal usado para representar o bit 0 é $s_0(t) = -A \cdot s_b(t)$.

Binária Antipodal (2-PAM)

O receptor ótimo contém um filtro casado, com resposta ao impulso $h(t) = s_b(Ts - t)$.



Saída do MF - Sem Ruído

Se a entrada do MF é $r(t) = s_1(t)$, então a saída é

$$y(t) = s_1(t) * h(t) = \int_0^t s_1(\tau) s_b(T_s - t + \tau) d\tau$$

Saída do MF - Sem Ruído

Se a entrada do MF é $r(t) = s_1(t)$, então a saída é

$$y(t) = s_1(t) * h(t) = \int_0^t s_1(\tau)s_b(T_s - t + \tau)d\tau$$

A saída amostrada em $t = T_s$ é

$$y(t = T_s) = \int_0^{T_s} s_1(\tau)s_b(\tau)d\tau = A\int_0^{T_s} s_b^2(\tau)d\tau = A \cdot E_{MF},$$

onde E_{MF} é a energia da resposta ao impulso do filtro casado.

Se a entrada do MF for $r(t) = s_0(t)$, então $y(t = T_s) = -A \cdot E_{MF}$.

Saída do MF - Sem Ruído

Se a entrada do MF é $r(t) = s_1(t)$, então a saída é

$$y(t) = s_1(t) * h(t) = \int_0^t s_1(\tau) s_b(T_s - t + \tau) d\tau$$

A saída amostrada em $t = T_s$ é

$$y(t = T_s) = \int_0^{T_s} s_1(\tau) s_b(\tau) d\tau = A \int_0^{T_s} s_b^2(\tau) d\tau = A \cdot E_{MF},$$

onde E_{MF} é a energia da resposta ao impulso do filtro casado.

Se a entrada do MF for $r(t) = s_0(t)$, então $y(t = T_s) = -A \cdot E_{MF}$.

No nosso exemplo $E_{MF} = T_s$.

Saída do MF - Com Ruído

Na presença de ruído, se $r(t) = s_1(t) + n(t)$, então

$$y(t = T_s) = y[k] = A \cdot E_{MF} + w[k],$$

onde

$$w[k] = w(t = T_s) = \int_0^{T_s} n(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

O ruído $n(t)$ é Gaussiano de média nula, logo $w[k]$ também será Gaussiano e de média nula.

E a variância?

Saída do MF - Com Ruído

A variância de $w[k]$ é

$$\sigma_w^2 = \mathrm{E}[w^2] = R_{ww}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f)df,$$

R_{ww}: Auto-correlação do ruído filtrado e amostrado
$W(f)$: Densidade espectral de potência de $w[k]$

Quanto vale σ_w^2 afinal?

Saída do MF - Com Ruído

Note que

$$W(f) = N(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2.$$

Pelo Teorema de Parseval, $\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = E_{MF}$. Logo:

variância do ruído

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} \cdot E_{MF}$$

exclui o espectro negativo

a variancia é afetada pelo MF, a media nao

Saída do MF - Com Ruído

Note que a saída do filtro casado é uma variável aleatória!

Como descrever uma variável aleatória?

Saída do MF - Com Ruído

Note que a saída do filtro casado é uma variável aleatória!

Como descrever uma variável aleatória? **Por sua pdf**

Saída do MF - Com Ruído

Note que a saída do filtro casado é uma variável aleatória!

Como descrever uma variável aleatória? **Por sua pdf**

Lembre que o ruído é Gaussiano. Logo a pdf de $y[k]$ é

se $s_1(t)$ é transmitido

$$p(y[k]|s_1(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{\frac{-\left(y[k]-A\cdot E_{MF}\right)^2}{2\sigma_w^2}}$$

se $s_0(t)$ é transmitido

$$p(y[k]|s_0(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{\frac{-\left(y[k]+A\cdot E_{MF}\right)^2}{2\sigma_w^2}}$$

Saída do MF - s_0 transmitido

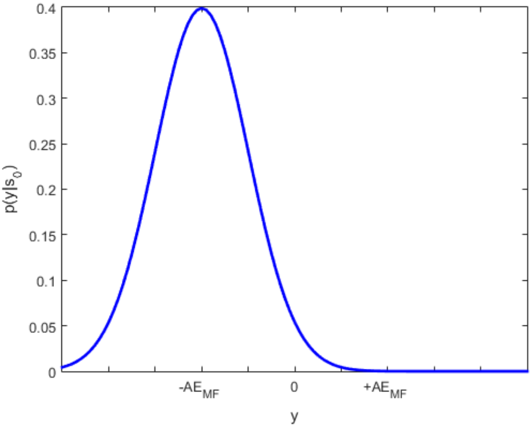


Figura: pdf na saída do filtro casado se s_0 foi transmitido.

Saída do MF - s_1 transmitido

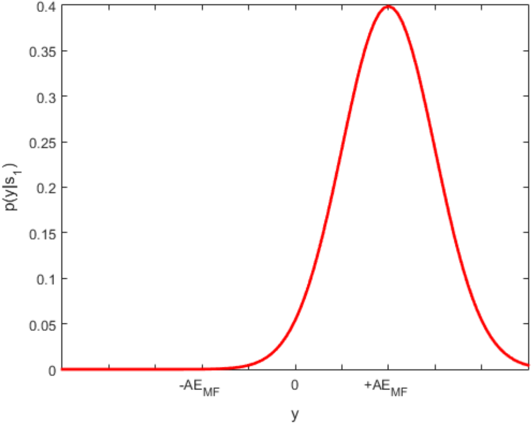


Figura: pdf na saída do filtro casado se s_1 foi transmitido.

Probabilidade de Erro

O decisor opta pelo bit mais provável, dado $y[k]$.

O critério de decisão, supondo bits 1 e 0 equiprováveis, é:

Se $y[k] > 0$ então decide pelo bit 1;
Se $y[k] < 0$ então decide pelo bit 0.

Este é o chamado receptor de máxima verossimilhança (ML).

Probabilidade de Erro

O decisor opta pelo bit mais provável, dado $y[k]$.

O critério de decisão, supondo bits 1 e 0 equiprováveis, é:

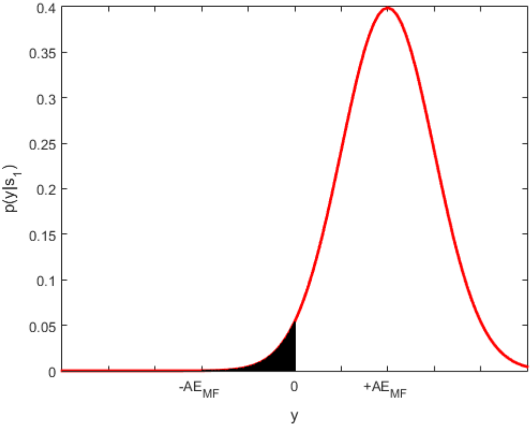
Se $y[k] > 0$ então decide pelo bit 1;
Se $y[k] < 0$ então decide pelo bit 0.

Este é o chamado receptor de máxima verossimilhança (ML).

Qual é a probabilidade de um erro acontecer?

Probabilidade de Erro

Se $s_1(t)$ é transmitido, um erro ocorre se $y[k] < 0$.
A probabilidade disto ocorrer é dada pela área hachurada.



Probabilidade de Erro

Matematicamente:

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(y[k] < 0 | s_1(t)\right) &= \int_{-\infty}^{0} p(y[k]|s_1(t))dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-\left(y[k]-A\cdot E_{MF}\right)^2}{2\sigma_w^2}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-A\cdot E_{MF}}{\sigma_w}} e^{\frac{-u^2}{2}} du = Q\left(\frac{A\cdot E_{MF}}{\sigma_w}\right) \\
&= Q\left(\sqrt{\frac{2A^2\cdot E_{MF}}{N_0}}\right)
\end{aligned}
$$

Probabilidade de Erro

Analogamente, $\Pr\left(y[k] > 0 | s_0(t)\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2 \cdot E_{MF}}{N_0}}\right)$.

Em geral escrevemos E_{MF} em função de E_s ou E_b, as energias por símbolo e por bit.

Neste caso, $E_s = E_b = A^2 \cdot E_{MF}$. Portanto:

$$Q\left(\sqrt{\frac{2A^2 \cdot E_{MF}}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

.

Probabilidade de Erro

Como os bits 0 e 1 são equiprováveis:

$$\begin{aligned} P_b &= \Pr\left(y[k] < 0 | s_1(t)\right) \times \frac{1}{2} + \Pr\left(y[k] > 0 | s_0(t)\right) \times \frac{1}{2} \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \times \frac{1}{2} + Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \times \frac{1}{2} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

P_b modulação binária antipodal (2-PAM)

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Probabilidade de Erro

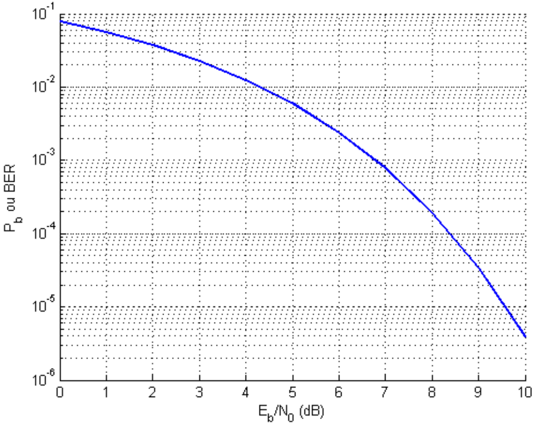


Figura: Probabilidade erro de bit da transmissão binária antipodal.

Modelo Discreto Para o 2-PAM

Seja $b[k]$ o k-ésimo bit a ser enviado e $y[k]$ a entrada do decisor.

Modelo Discreto:

- Se $b[k] = 1$, $y[k] = A \cdot E_{MF} + w[k]$
- Se $b[k] = 0$, $y[k] = -A \cdot E_{MF} + w[k]$

Exercício: Como este modelo pode ser usado para simplificar a simulação da probabilidade de erro de bit?

Tarefas

1. No 2-PAM como estudado até o momento as amplitudes dos pulsos são A e $-A$ e a duração dos pulsos é de T_s, o que resulta em $E_b = A^2 T_s$. Usando esta mesma E_b é possível considerar outras amplitudes (assimétricas) e obter $P_b < Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$?
2. Ler sobre probabilidade de erro do 2-PAM no livro de Haykin & Moher.
3. Como fica a probabilidade de erro da modulação binária ortogonal? **Material no Moodle**.