Processos Aleatórios   Prof. Waldecir Perrella

O principal objetivo de um sistema de comunicação elétrico é a transferência de mensagens através de em sistema de comunicações usando formas de ondas elétricas função do tempo. Esses sinais são em muitos instantes imprevisíveis, pois se o fossem então seriam determinísticos e não trariam nenhuma informação. Neste sentido, todas os sinais mensagens são aleatórios. Esta aleatoridade é devido ao fato que o receptor não sabe a priori qual das muitas possíveis mensagens foi transmitida. Para transmissão de fontes analógicas, por exemplo, o sinal de voz obtido por um microfone, pode-se ter um número infinito de formas de ondas mensagens. No caso de comunicação entre computadores, também tem um número infinito de mensagens com formas de ondas binárias. O ruído, encontrado nos sistemas de comunicação, também forma uma coleção dessas formas de ondas.

Para se analisar e projetar um sistema de comunicação é preciso um modelo matemático para descrever estas coleções de formas de ondas. O conceito de variáveis aleatórias é uma descrição probabilística dos valores numéricos de uma variável. Um modelo semelhante, chamado processo aleatório ou processo estocástico, pode ser usado para descrever probabilisticamente funções no tempo.

Definições e Notações:

Considere um experimento aleatório E com saídas $\boldsymbol{\lambda}$ pertencente a um espaço amostral S. Para cada saída λ atribui-se, de acordo com uma certa regra, um valor função do tempo $\boldsymbol{X(t, \lambda)}$**.** Desta forma, tem-se uma família de funções, uma para cada saída $\boldsymbol{\lambda}$**.** Esta família ou coleção é chamada de processo aleatório.

Um processo aleatório $\boldsymbol{X(t, \lambda)}$ pode ser visto como uma função de duas variáveis, $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{S}$ e $t \in (-\infty, +\infty)$. Para uma específica saída, $\boldsymbol{\lambda_i}$, tem-se uma função do tempo $\boldsymbol{X(t, \lambda_i)=x_i(t)}$. Esta função do tempo é chamada de uma função amostra ou uma realização do processo aleatório. A totalidade de todas as funções amostras é chamada é uma coleção (ensemble). Para uma instante de tempo, $\boldsymbol{t_0}$, $\boldsymbol{X(t_0, \lambda)}$ é uma variável aleatória cujos valores dependem da saída $\boldsymbol{\lambda}$**.** Finalmente para $\boldsymbol{\lambda=\lambda_i}$, e $\boldsymbol{t=t_0}$, $\boldsymbol{X(t_0, \lambda_i)}$ é meramente um número.

Como exemplo de um processo aleatório, na Figura 1, tem as várias realizações de uma fonte de informação binária.

Na Figura 1 tem-se somente 4 funções amostras ou realizações $\boldsymbol{X(t,\lambda_i)}$ para $\boldsymbol{i=1,2,3}$ **e 4**. Para os instantes de tempo $\boldsymbol{t_1}$ e $\boldsymbol{t_2}$ tem-se duas variáveis aleatórias denotadas, respectivamente, por $\boldsymbol{X(t_1)}$ e $\boldsymbol{X(t_2)}$ e finalmente, mostra-se $\boldsymbol{X(t_1,\lambda_1)}$ é o valor ou uma realização da variável aleatória $\boldsymbol{X(t_1)}$**.**

A notação $\boldsymbol{X(t)}$ será usada para representar um processo aleatório. Assim, $\boldsymbol{X(t)}$ pode representar uma coleção de funções amostras, uma única função do tempo, uma variável aleatória ou um único número representando uma realização de uma variável.

Os Processos aleatórios podem ser descritos das seguintes maneiras:

- Pela referência ao fenômeno físico que gera a coleção de amostras.
- Pelo modelamento do fenômeno físico, pode-se chegar a um apropriado modelo do processo aleatório para uma dada coleção de funções amostras.
- Pelas funções densidade de probabilidade conjunta
- Em termos de funções analíticas de variáveis aleatórias
- Em termos de médias estatísticas

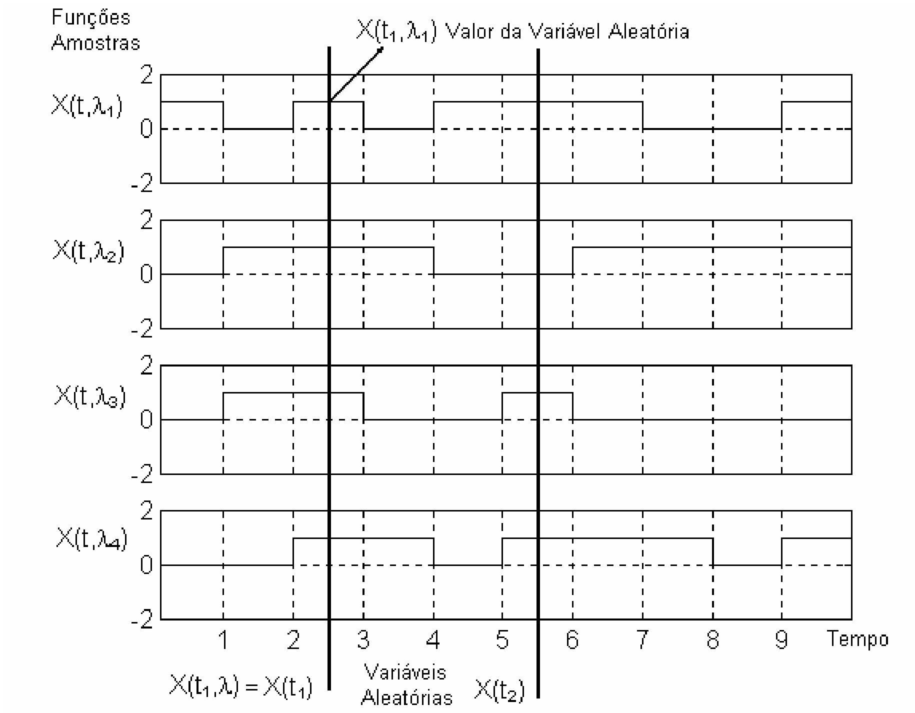

Figura 1 Processo Aleatório Binário

Funções Densidade de Probabilidade Conjunta. Neste caso o processo aleatório pode ser descrito por suas PDFC:

$$p\left(X(t_1),\ \ X(t_2),\ \ \cdots,\ \ X(t_n)\right) \tag{1}$$

para todo n e t_1, t_2, ..., t_n.

Descrição analítica. Um processo aleatório pode ser definido como uma função de uma ou mais variáveis aleatórias como:

$$X(t) = g\left(Y_1,\ \ Y_2,\ \ \cdots, Y_n;\ \ t\right) \tag{2}$$

onde $Y(t_1)$, $Y(t_2)$, ..., $Y(t_n)$ são n variáveis aleatórias e $g(.)$ é uma função.

Médias estatísticas. Da mesma forma que variáveis aleatórias, processos aleatórios, são freqüentemente, descritos usando médias estatísticas (também referidas médias da coleção, "ensemble averages"). As estatísticas mais importantes para escrever um processo aleatório são a média $\mu_X(t)$,a função de autocorrelação $R_{XX}(t_1, t_2)$, a função de covariância $K_{XX}(t_1, t_2)$e variância $\sigma_X^2(t)$ definidas como:

$$\mu_X(t) = E\left\{X(t)\right\} \tag{3}$$

$$R_{XX}(t_1,\ \ t_2) = E\left\{X(t_1)X(t_2)\right\} \tag{4}$$

$$K_{XX}(t_1,\ t_2) = E\left\{\left[X(t_1) - \mu(t_1)\right]\left[X(t_2) - \mu(t_2)\right]\right\} = R_{XX}(t_1,\ t_2) - \mu_X(t_1)\,\mu_X(t_2) \tag{5}$$

$$\sigma_X^2(t) = K_{XX}(t,\ t) = R_{XX}(t,\ t) - \mu_X^2(t) \tag{6}$$

onde os valores esperados são tomados em relação às PDFs apropriadas.

Estacionaridade

Um processo aleatório $X(t)$ é dito aleatório, no senso estrito, se suas estatísticas não são afetadas por um deslocamento na origem do tempo. Isto significa que $X(t)$ e $X(t+\tau)$, onde τ é um deslocamento arbitrário do tempo, tem as mesmas propriedades estatísticas.

No caso onde se descreve um processo aleatório por sua média e pela sua função de autocorrelação, define-se processo estacionário no sentido amplo, se:

$$\mu_X(t) = E\left\{X(t)\right\} = K = \text{constante}, \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{7}$$

$$R_{XX}(t_1,\ t_2) = R_{XX}(t_1 + t,\ t_2 + t) = R_{XX}\left(\left|t_2 - t_1\right|\right) \qquad t, t_1 \text{ e } t_2 \in (-\infty, \infty) \tag{8}$$

A função de autocorrelação de um processo estacionário é somente função da diferença dos instantes e assim normalmente é definida:

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(t,\ t+\tau) = E\left\{X(t)X(t+\tau)\right\} \tag{9}$$

Estacionaridade no sentido estrito implica em estacionaridade no sentido amplo, mas o inverso não é válido.

Médias Temporais.

A média e a função de autocorrelação de um processo aleatório definidas nas equações (3) e (4) são obtidas pelas médias da coleção, por exemplo:

$$\mu_X(t_0) = E\left\{X(t_0)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\, p_{X(t_0)}\left(x(t_0)\right) dx(t_0) \tag{10}$$

$$R_{XX}(t_1,\ t_2) = E\left\{X(t_1)X(t_2)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_2)\, p_{x(t_1)\ x(t_2)}\left(x(t_1), x(t_2)\right) dx(t_1)\, dx(t_2) \tag{11}$$

É possível, entretanto, definir estatísticas temporais, utilizando-se a seguinte definição para a média temporal:

$$\left\langle[\bullet]\right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\bullet]\ dt \tag{12}$$

Desta forma define-se média temporal :

$$\langle \mu_x \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)dt \qquad 13$$

Semelhantemente, para a função de autocorrelação, tem-se:

$$\langle R_{XX}(\tau) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)X(t+\tau)dt \qquad 14$$

Pode-se observar que $\langle \mu_X \rangle$ e $\langle R_{XX}(\tau) \rangle$ são variáveis aleatórias e seus valores dependem de qual função amostra de X(t) foi usada no processo de média temporal. Por outro lado $\mu_x(t)$ é constante e $R_{XX}(\tau)$ é uma função de τ.

Para calcular $\mu_x(t)$ e $R_{XX}(\tau)$ por médias na coleção é necessário realizar-se a média sobre todas as funções amostras. Isto requer um completo conhecimento da PDF de 1ª ordem e da PDF conjunta de 2ª ordem. Em muitas aplicações práticas estas PDFs não são conhecidas e nestes casos somente se tem disponível a gravação de uma ou mais (mas definitivamente um pequeno número) das funções amostras do processo aleatório. Assim, com esses dados pode-se calcular as médias temporais e usa-las no lugar das médias estatísticas. Mesmo assim, deve-se estar seguro que elas são iguais, no mínimo no sentido de menor erro médio quadrático. Infelizmente, médias estatísticas são diferentes de médias temporais, com exceção de uma classe especial de processos aleatórios.

Ergodicidade.

Ergodicidade se refere ao problema de determinar as propriedades de um processo aleatório, tais como a média e função de autocorrelação, através de uma única função amostra. Um processo aleatório é dito ergódico se as médias temporais são iguais as medias estatísticas. Normalmente é necessário obter-se somente a média estatística e a função de autocorrelação. Desta forma, define-se ergodicidade com respeito a esses parâmetros. Por exemplo, um processo aleatório é ergódico em média se $E\{\langle \mu_x \rangle\} = E\{X(t)\}$, e a variância de $<\mu_x>\to 0$ com $T\to\infty$. Semelhantemente, um processo aleatório é ergódico na função de autocorrelação se $E\{<R_{XX}(\tau)>\}=R_{XX}(\tau)$, e a variância de $<R_{XX}(\tau)>\to 0$ com $T\to\infty$.

Na pratica é muito difícil decidir, como base nos dados, se um processo aleatório é ergódico. Assim é necessário decidir sobre a ergodicidade baseado no fenômeno físico. Para ser ergódico um processo aleatório precisa ser estacionário e a aleatoriedade precisa ser evidente tanto na variação com o tempo como na seleção da função amostra. As médias temporais precisam ser independentes da função amostra selecionada.

Densidade espectral de potência de processos aleatórios

A densidade espectral de potência de um processo aleatório estacionário $G_X(f)$ e a função de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$ formam um par de transformada de Fourier de acordo com as equações:

$$G_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau \qquad 15$$

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_X(f)\exp(j2\pi\tau f)\,df \qquad 16$$

O nome densidade espectral de potência (PSD) é devido ao fato que $E\{X^2(t)\}$ pode representar a potência média dissipada pelo processo aleatório num resistor de 1 ohm, e :

$$E\left\{X^2(t)\right\} = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_X(f)\,df \qquad 17$$

Pode-se dar uma definição de PSD para um processo estacionário ergódico, utilizando a média temporal como dada pela expressão:

$$\left\langle G_X(f)\right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|\int_{-T/2}^{T/2} X(t)\exp(-j2\pi f t)\,dt\right|^2}{T} \qquad 18$$

Assim para um processo aleatório $<G_x(\mathrm{f})> = G_x(f)$, onde a igualdade é no sentido de erro quadrático mínimo, isto é $E\{<G_x(f)\}> = G_x(f)$, e a variância de $<G_x(f)>\to 0$ com $T\to\infty$.

Em simulação temos um sinal com duração finita T e assim uma realização temporal do PA $X(t)$ é um sinal de energia finita e assim a transformada de Fourier existe e é dada por:

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} X(t)\exp(-j2\pi f t)\,dt \qquad 19$$

Substituindo a equação (19) na equação (18) resulta a equação (20) que representa uma estimativa da densidade espectral de potência PSD de um PA,. Esta estimativa é chamada de periodograma.

$$\left\langle G_X(f)\right\rangle_T = \frac{\left|X_T(f)\right|^2}{T} \qquad 20$$

Propriedades das estatísticas temporais de processos aleatórios ergódicos:

- A média de $<X(t)>$ é a componente DC
- A média quadrática de $<X^2(t)>$ é a potência média total
- O quadrado do valor médio $<X(t)>^2$ é a potência DC
- A variância $<X^2(\mathrm{t})>- <X(t)>^2$ é a potência AC
- O desvio padrão $\sqrt{\left\langle X^2(t)\right\rangle - \left\langle X(t)\right\rangle^2}$ é o valor rms

Em comunicações o ruído térmico é modelado por um PA denominado ruído branco gaussiano que é definido pelo par de TF mostrado em (21) e pela densidade de probabilidade gaussiana mostrada em (22).

$$R(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)\Leftrightarrow G(f)=\frac{N_0}{2} \qquad 21$$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\ \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{Média zero e Variância } \sigma^2 \qquad 22$$

Na Figura 2 tem-se sua representação gráfica.

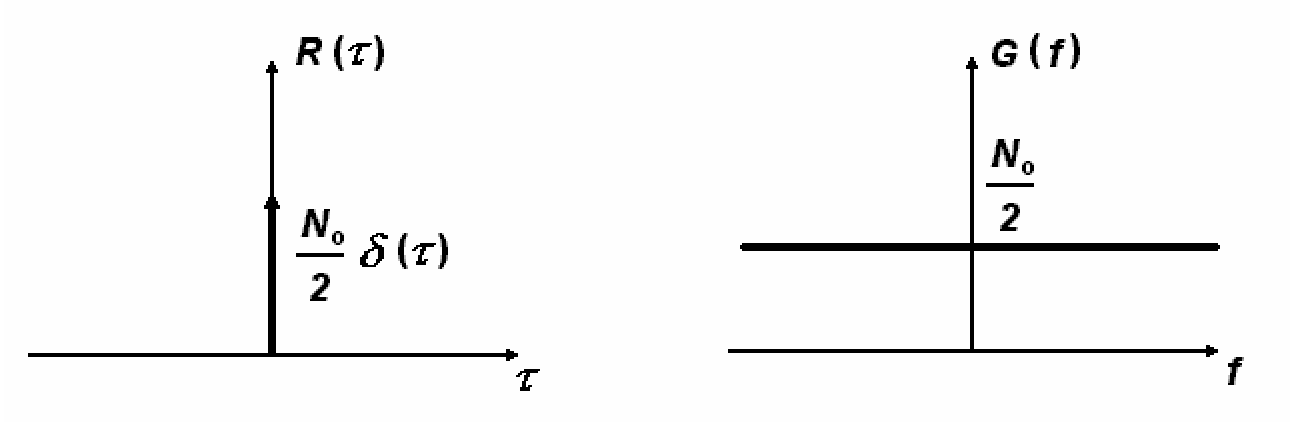

Figura 2 Ruído branco gaussiano

Uma transformação de um processo aleatório importante é a sua transmissão através de sistemas lineares. Assim, considere um sistema linear dado pela função de transferência *H*(*f*) ou resposta impulsiva *h*(*t*) e na entrada tem-se o PA *X*(*t*) com psd $G_x(f)$. e na saída tem-se o PA *Y*(*t*) com psd $G_Y(f)$, tal como mostra a Figura 3.

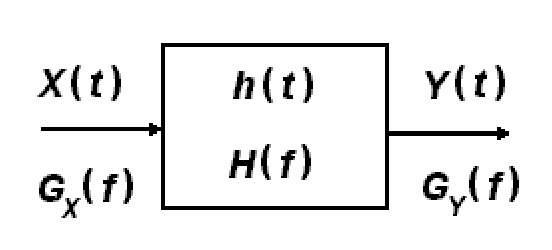

Figura 3 PA através de sistema linear.

Pode-se demostrar que a psd da saída é dada por:

$$G_Y(f)=\left|H(f)\right|^2 G_X(f) \qquad 23$$

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)df$$